调和多项式的华林问题

Hua-Lin Huang[1], Yilun Tang[1], Yu Ye [2], 和 Rongmin Zhu[1]1 华侨大学数学科学学院，中国泉州 362021[2] 中国科学技术大学数学科学学院，中国合肥 230026；以及中国科学技术大学合肥国家实验室，中国合肥 230088

arXiv:2601.03560v1 [math.NT] 7 Jan 2026

摘要

本文研究调和多项式的华林问题。通过刻画齐次调和多项式的湮灭理想（即属于拉普拉斯算子核的实二元型），我们证明其华林秩等于其次数。此外，我们证明任意线性形式都可以出现在齐次调和多项式的最小华林分解中，这意味着禁区为空。我们还给出了计算最小华林分解的显式算法。

1 引言

本文研究实数域上多项式的华林问题 $\mathbb{R}$。除非另有说明，以下讨论均在此设定下进行。我们采用 [14, 19]的记号约定。令 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 表示非零实数集。

令 $\mathcal{R} = \mathbb{R}[x, y]$ 为实二元多项式环， $\mathcal{R}_d$ 为 $\mathcal{R}$中所有次数为 d 的实二元齐次多项式组成的空间。 $\mathcal{R}_d$ 中的元素称为 d次形式，而 1-形式通常称为线性形式。对于一个d-次形式 f，其表示形式如下

$$f = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j L_j^d,$$

其中 L_j 为线性形式， λ_j为实数，称为 f的*Waring* 分解 。使这种分解成立的最小正整数 r 称为 f的华林秩 ，记作 WR(f)。达到此最小r 的分解称为最小华林分解。

令 $\mathcal{D} = \mathbb{R}[\partial_x, \partial_y]$ 为常系数微分算子环， $\mathcal{D}_r$ 为其中次数为 r的齐次微分算子子空间。对于任意非负整数 i、 j、 k、 l，微分算子$\partial_x^i \partial_y^j \in \mathcal{D}$ 作用于单项式 $x^k y^l \in \mathcal{R}$ 的定义为

$$\partial_x^i \partial_y^j \circ x^k y^l = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{l!}{(l-j)!} x^{k-i} y^{l-j}, & \text{if } i \le k \text{ and } j \le l; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $f \in \mathcal{R}$ 且 $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}$。若 $\mathfrak{g} \circ f = 0$，则 $\mathfrak{g}$ 称为 f的 湮灭多项式。记 $f^\perp := \{\mathfrak{g} \in \mathcal{D} \mid \mathfrak{g} \circ f = 0\}$为 f的湮灭理想。

令 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 表示拉普拉斯算子。若多项式 $f \in \mathcal{R}$ 满足 $\Delta \circ f = 0$，则称其为调和的。显然，一个多项式是调和多项式，当且仅当它的每个齐次分量都是调和多项式。调和多项式在代数、分析和数论中无处不在，参见例如 [3, 21]。

1.1 问题陈述

多项式华林问题是代数几何和不变量理论中的一个经典且引人入胜的研究方向，核心问题在于复杂的数学对象能否分解为较简单对象的和。尽管著名的亚历山大-赫希维茨定理已解决复数域上一般多项式的华林问题 [1], 但实数域上的情形仍远未解决——即使对于二元形式，

仍有大量工作要做。由于目前看来无法求得实二元形式华林问题的通解，研究特定的形式族也颇有价值。

要计算二元形式的 Waring 分解，通常首先将其湮灭多项式分解为两两不成比例的一次微分算子的乘积，然后应用 Apolarity 引理（引理 2.2）得到分解。然而，根据代数基本定理，复数域上的多项式总能分解为一次因子的乘积，而实数域上的多项式则可能含有不可约二次因子，这使得 Apolarity 引理无法直接应用于实数情形。作为一项非平凡的推进，从被不可约二次微分算子湮灭的多项式入手似乎是自然的。值得注意的是，任何不可约二次微分算子都可以通过可逆线性变量替换变为拉普拉斯算子。因此，本文聚焦于调和多项式的华林问题。

1.2 相关工作

复二元形式的华林问题可追溯至 Sylvester [23, 24] 和 Gundelfinger [17]的开创性工作。Comas 和 Seiguer [12] 运用现代语言和工具，提出了一种简洁的算法，用于确定任意复二元形式的华林秩和边界秩 [19]。本文的两位作者曾对复二元形式的华林问题作过初等论述 [18]。直到近些年，Comon、Ottaviani 和 Reznick 等人才系统地开启了实二元形式的华林问题研究。一般实二元形式的典型秩在 [4, 13] 中得到讨论，并由 Blekherman [6]彻底解决。实根与实二元形式华林秩之间的关系为 Sylvester [25] 所知，并在 [7, 11, 13, 22]中得到了进一步揭示。该问题的计算方面在 [2, 9]中有所探讨。据作者所知，关于特定实二元形式的 Waring 分解，仅针对单项式 [8] 和一些二项式 [20] 进行了研究。

1.3 方法与结果

我们致力于研究先前关于 [18] 复二元形式的工作的实数类比。本文提出了一种研究调和多项式华林问题的初等且构造性方法，仅使用线性代数和微积分工具，而不借助代数几何。我们首先给出实 Apolarity 引理的完整证明，该引理刻画了 Waring 分解。接下来，通过考察齐次调和多项式的结构，我们确定其湮灭理想的两个生成元，见命题 3.4。最后，我们证明主定理：齐次调和多项式的华林秩等于其次数，并且任意线性形式都可以出现在一个最简分解中。我们指出，在 [5, 10] 中，作者研究了一个形式的 Waring 轨迹，即能够出现在其最简分解中的线性形式集合。Waring 轨迹的补集称为禁区。文献中，首个也是唯一一个禁区为空的例子，是 Flavi 最近为形式 [16]发现的 $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3$。如今，调和形式这一无限族也加入了禁区为空的形式之列。

主要结果可概括如下，参见定理 3.5。

主定理。 次数为 d 的非零调和多项式的华林秩恰为 d，且任意线性形式都可以出现在其某个最小华林分解中。

基于这一命题及其证明，本文进一步提出一种具体算法，用于计算齐次调和多项式的最小华林分解，见算法 3.8。此外，作为副产品，我们完整解决了所有被二次微分算子湮灭的形式的华林问题，见定理3.10。

1.4 论文结构

本文结构如下。第 2 节确立了 Waring 分解的存在性，并对 Apolarity 引理给出了初等证明，从而建立了 Waring 分解的等价条件。第 3 节分析齐次调和多项式的结构，确定其湮灭理想和华林秩，并提出一种计算其最小华林分解的算法。

2 预备知识

本节回顾二元形式的 Waring 分解的存在性以及 Apolarity 引理，相关内容已在 [15, 18, 19, 22]中作了完整说明。

2.1 Waring 分解的存在性

引理 2.1. 设 $\alpha_1 x + \beta_1 y, \ldots, \alpha_{d+1} x + \beta_{d+1} y$ 为 $d+1$ 两两不成比例的线性形式。那么它们的 d 次幂

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)^d, \ldots, (\alpha_{d+1} x + \beta_{d+1} y)^d$$

构成 $\mathcal{R}_d$ 的一组基。特别地，每个 $f \in \mathcal{R}_d$ 都可以表示为

$$f = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i (\alpha_i x + \beta_i y)^d$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}$为实数。也就是说， f存在 Waring 分解。

证明。 考虑 由单项式基 $\{x^d,\ x^{d-1}y,\ \ldots,\ y^d\}$ 从 $\mathcal{R}_d$到 se 的过渡矩阵 t

$$\{(\alpha_1 x + \beta_1 y)^d,\ (\alpha_2 x + \beta_2 y)^d,\ \ldots,\ (\alpha_{d+1} x + \beta_{d+1} y)^d\}.$$

该矩阵是范德蒙德型的。由于这些线性形式两两不成比例，相应的点 $[\alpha_i :\ \beta_i]$ 在 $\mathbb{P}^1$ 中互不相同，因此该矩阵的行列式非零。因此， d 次幂线性无关，进而构成 $\mathcal{R}_d$ 的一组基。

□

2.2 Apolarity 引理

我们回顾Apolarity 引理，这是研究 Waring 分解的一项基本结果 .

引理 2.2. 设 $f \in \mathcal{R}_d$，并设 $\alpha_1 x + \beta_1 y, \cdots, \alpha_r x + \beta_r y$ 是 r 两两不成比例的线性形式，其中$1 \le r \le d+1.$。那么，以下两个陈述等价:

(i) 存在非零实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 使得

$$f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\alpha_i x + \beta_i y)^d.$$

(ii) $\prod_{i=1}^{r} (\beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y) \circ f = 0$ 且 $\prod_{i \neq k} (\beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y) \circ f \neq 0$ 对所有 $1 \le k \le r$均成立。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii)：直接计算即可。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：将给定的 r 线性形式扩充为一组 $d+1$ 两两不成比例的线性形式:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y, \cdots, \alpha_{d+1} x + \beta_{d+1} y.$$

根据引理 2.1，存在实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{d+1}$ 使得

$$f = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j (\alpha_j x + \beta_j y)^d.$$

现在考虑该乘积的显式作用

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{i=1}^{r} (\beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y) \circ f \\ &= \prod_{i=1}^{r} (\beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y) \circ \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j (\alpha_j x + \beta_j y)^d \\ &= \sum_{j=1}^{r} 0 + \sum_{j=r+1}^{d+1} \lambda_j \frac{d!}{(d-r)!} \left(\prod_{i=1}^{r} (\beta_i \alpha_j - \alpha_i \beta_j) \right) (\alpha_j x + \beta_j y)^{d-r}. \end{aligned}$$

由于两两非成比例假设，我们有 $\beta_i\alpha_j - \alpha_i\beta_j \neq 0$ 对所有 $i \neq j$。再次根据引理 2.1 将 d替换为 $d-r$，可推出 $\lambda_j = 0$ 对于 $j = r+1, \ldots\ldots, d+1$. 因此， f 可表示为

$$f = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j (\alpha_j x + \beta_j y)^d.$$

因此，根据进一步的假设

$$\begin{aligned} 0 \neq & \prod_{i\neq k} (\beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y) \circ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j (\alpha_j x + \beta_j y)^d \\ = & \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{d!}{(d-r+1)!} \left(\prod_{i\neq k} (\beta_i\alpha_j - \alpha_i\beta_j) \right) (\alpha_j x + \beta_j y)^{d-r+1} \\ = & \lambda_k \frac{d!}{(d-r+1)!} \left(\prod_{i\neq k} (\beta_i\alpha_k - \alpha_i\beta_k) \right) (\alpha_k x + \beta_k y)^{d-r+1} \end{aligned}$$

我们有 $\lambda_k \neq 0$ 对所有 $1 \leq k \leq r$均成立。证明完成。 □

以下结论可直接由 Apolarity 引理推出。

推论 2.3。 给定一个二元形式 f，其华林秩为

$$\mathrm{WR}(f) = \min\{r \mid \prod_{i=1}^{r} (\beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y) \in f^{\perp},\ \beta_i \partial_x - \alpha_i \partial_y \text{ are pairwise non-proportional}\}.$$

3 调和多项式的华林问题

本节研究调和形式的 Waring 分解。我们证明，调和形式的华林秩等于其次数。此外，我们给出一种明确的构造性算法，用于求得最小华林分解。我们的方法基于对其湮灭理想的分析。

3.1 调和形式的性质

我们先来看一些调和形式的例子。

例 3.1. 设

$$h_{d,0} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{d-2j} y^{2j} \in \mathcal{R}_d,$$

$$h_{d,1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} y^{2j+1} \in \mathcal{R}_d,$$

其中， $\lfloor q \rfloor$ 表示小于或等于实数 q 的最大整数。计算 $\Delta \circ h_{d,\,0}$ 可得

$$\Delta \circ h_{d,0} = d(d-1) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1} \left((-1)^j + (-1)^{j+1} \right) \binom{d-2}{2j} x^{d-2-2j} y^{2j} = 0.$$

同样，可以验证 $\Delta \circ h_{d,\,1} = 0$. 因此， $h_{d,\,0}$ 和 $h_{d,\,1}$ 都是调和形式，因此 $h_{d,\,0}$ 与$h_{d,\,1}$的任意线性组合也是调和形式。

事实上，任何调和的 d-形式都是$h_{d、\,0}$ 和 $h_{d、\,1}$的线性组合，下面将证明这一点。

命题 3.2. 设 $f \in \mathcal{R}_d$。那么 f 是调和的，当且仅当 $f = a_0 h_{d,0} + a_1 h_{d,1}$。

证明。一个方向由例 3.1 得出。反过来，假设 $f = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} a_j x^{d-j} y^j$ 是调和的。根据定义，我们有

$$\Delta \circ f = d! \sum_{j=0}^{d-2} (a_j + a_{j+2}) \frac{x^{d-j-2}}{(d-j-2)!} \frac{y^j}{j!} = 0.$$

Si多项式恒等于零当且仅当其所有系数都为零，因此这意味着 s

$$a_j + a_{j+2} = 0 \quad (0 \le j \le d-2). \tag{3.1}$$

由此可知，f 的系数由两个独立的递推关系确定

- 偶次项（$j = 2k$）：$a_{2k} = (-1)^k a_0$;
- Odd degree terms ($j = 2k+1$): $a_{2k+1} = (-1)^k a_1$.

因此，f 分解为奇偶部分：

$$\begin{aligned} f &= a_0 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{d-2j} y^{2j} + a_1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{d-2j-1} y^{2j+1} \\ &= a_0 h_{d,0} + a_1 h_{d,1}. \end{aligned}$$

因此，任意调和的 d-形式都是$h_{d,0}$ 和$h_{d,1}$的线性组合。 □

注 3.3。 也可以通过复二元形式的 Waring 分解轻松推导出调和形式的这一刻画。由于调和 d-形式 f 被 $\partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x - i\partial_y)$湮灭，因此它具有如下复 Waring 分解：

$$f = z(x+iy)^d + \overline{z}(x-iy)^d$$

根据复二元形式的 Apolarity 引理 [18]。由于 f是实多项式，因此其系数互为共轭。现在，通过直接展开前一个等式的右侧即可得到这一性质。

3.2 调和形式的湮灭理想

下面给出调和形式的湮灭理想的具体刻画 .

命题 3.4 命题。 设 $f = a_0 h_{d,0} + a_1 h_{d,1} \neq 0$ 和 $\nabla = a_1 \partial_x^d - a_0 \partial_x^{d-1} \partial_y$. 则 $f^\perp = \langle \Delta, \nabla \rangle$.

证明。容易验证，$\nabla \circ f = [(-1)^0 - (-1)^0] a_0 a_1 = 0$，因此 $\langle \Delta, \nabla \rangle \subseteq f^\perp$。接下来只需证明反向包含关系。

r任取 $\mathfrak{g} = \sum b_i \partial_x^{r-i} \partial_y^i \in f^\perp \cap \mathcal{D}_r$.，将 $\mathfrak{g}$和 Δ视为关于 ∂_y的多项式，并对 $\mathfrak{g}$ 除以 Δ进行带余除法$i=0$ ~ ~。根据多项式除法算法（例如参见 [14], ），存在 b_0，$b_1 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathfrak{h} \in \mathcal{D}_{r-2}$，使得

$$\mathfrak{g} = \Delta \cdot \mathfrak{h} + \widetilde{b}_0 \partial_x^r + \widetilde{b}_1 \partial_x^{r-1} \partial_y.$$

由于 $\mathfrak{g} \circ f = 0$ 且 $\Delta \circ f = 0$，可得

$$(\widetilde{b}_0 \partial_x^r + \widetilde{b}_1 \partial_x^{r-1} \partial_y) \circ f = 0. \tag{3.2}$$

为便于后续讨论，定义

$$\widetilde{h}_0 = \frac{d!}{(d-r)!} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-r}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d-r}{2j} x^{d-r-2j} y^{2j},$$

$$\widetilde{h}_1 = \frac{d!}{(d-r)!} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d-r-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{d-r}{2j+1} x^{d-r-2j-1} y^{2j+1}.$$

现在我们分情况讨论：

情况 1: $1 \le r \le d-1$

直接计算方程（3.2）可得

$$(a_0\widetilde{b}_0 + a_1\widetilde{b}_1)\widetilde{h}_0 + (a_1\widetilde{b}_0 - a_0\widetilde{b}_1)\widetilde{h}_1 = 0.$$

由于 h_0 和 h_1 线性无关，因此有

$$\begin{cases} a_0\widetilde{b}_0 + a_1\widetilde{b}_1 = 0, \\ a_1\widetilde{b}_0 - a_0\widetilde{b}_1 = 0. \end{cases}$$

由于 $(a_0, a_1) \neq (0,0)$，唯一解为 $b_0 = b_1 = 0$。因此，

$$\mathfrak{g} = \Delta \cdot \mathfrak{h} \in \langle \Delta \rangle .$$

情形 2: $r = d$

在此情形下，方程（3.2）化简为

$$d!(a_0\widetilde{b}_0 + a_1\widetilde{b}_1) = 0.$$

通解为 $b_0 = \mu a_1$，$b_1 = -\mu a_0$ 其中 $\mu \in \mathbb{R}$。因此，

$$\mathfrak{g} = \Delta \cdot \mathfrak{h} + \mu(a_1\partial_x^d - a_0\partial_x^{d-1}\partial_y) = \Delta \cdot \mathfrak{h} + \mu\nabla \in \langle \Delta, \nabla \rangle .$$

还需证明，当 $r \ge d+1$时，我们有 $f^\perp \cap \mathcal{D}_r \subseteq \langle \Delta, \nabla \rangle$. 在这种情况下，显然 $f^\perp \cap \mathcal{D}_r = \mathcal{D}_r$.因此，只需证明 $\mathcal{D}_r = \langle \Delta, \nabla \rangle \cap \mathcal{D}_r$ 成立。

情形 3: $r = d+1$

由于 Δ 和 ∇ 互素，因此

$$\dim(\langle \Delta, \nabla \rangle \cap \mathcal{D}_{d+1}) = \dim(\langle \Delta \rangle \cap \mathcal{D}_{d+1}) + \dim(\langle \nabla \rangle \cap \mathcal{D}_{d+1}) = \dim \mathcal{D}_{d-1} + \dim \mathcal{D}_1 = d+2 = \dim \mathcal{D}_{d+1}.$$

I.e., $\mathcal{D}_{d+1} = \langle \Delta, \nabla \rangle \cap \mathcal{D}_{d+1}$.

情形 4: $r > d+1$

Since $\mathcal{D}_r$ can be generated by $\mathcal{D}_{d+1} = \langle \Delta, \nabla \rangle \cap \mathcal{D}_{d+1}$, we have $\mathcal{D}_r = \langle \Delta, \nabla \rangle \cap \mathcal{D}_r$.

综上，$f^\perp = \langle \Delta, \nabla \rangle$. 证毕。 □

3.3 调和形式的 Waring 分解

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 3.5。一个调和 d-形式的华林秩为 d，并且任意线性形式都可以出现在某个最小华林分解中。

证明。令 f 为一个调和 d-形式。根据 Apolarity 引理 2.2 和命题 3.4，我们有 $\mathrm{WR}(f) \ge d$。事实上，反之若 $\mathrm{WR}(f) = r < d$，则存在一个 $\mathfrak{h} \in f^\perp \cap \mathcal{D}_r$，由于 Apolarity 引理 2.2和 $\Delta \mid \mathfrak{h}$命题 3.4，它是由非成比例线性形式的乘积构成的。此结论荒谬，因为 Δ 是不可约二次式。

考虑任意算子 $\mathfrak{g} = \prod_{i=1}^{d-2}(\beta_i\partial_x - \alpha_i\partial_y) \in \mathcal{D}_{d-2}$，其一次因子两两不成比例。于是

$$\Delta \circ (\mathfrak{g} \circ f) = (\Delta \cdot \mathfrak{g}) \circ f = \mathfrak{g} \circ (\Delta \circ f) = 0,$$

这表明 $\mathfrak{g} \circ f$ 是一个调和2-形式。根据命题3.2，我们可以写成 $\mathfrak{g} \circ f = ax^2 + 2bxy - ay^2$. 注意$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$，因为 $\mathfrak{g} \circ f \neq 0$ 根据以下事实$\mathrm{WR}(f) \ge d$。

接下来需要找到两个合适的线性微分算子，使它们的乘积能够消去 $\mathfrak{g}\circ f$.。注意，我们可以对 $\mathfrak{g}\circ f$ 应用适当的可逆线性变换，使得 $\mathfrak{g}\circ f = X^2 - Y^2$.。直接验证可知，$(\delta_1\partial_X - \gamma_1\partial_Y)(\delta_2\partial_X - \gamma_2\partial_Y)\circ(X^2 - Y^2) = 0$ 当且仅当 $\gamma_1\gamma_2 = \delta_1\delta_2$.。显然，$(\delta_i,\ \gamma_i)$ 有无穷多种选择。例如，对所有 $s,\ t \in \mathbb{R}^*$.，取 $(\delta_1,\ \gamma_1) = (s,\ t)$，以及 $(\delta_2,\ \gamma_2) = (1/s,\ 1/t)$。因此，我们可以选取 d 个两两不成比例的一次因子 $\beta_i\partial_x - \alpha_i\partial_y$，使得

$$\prod_{i=1}^{d}(\beta_i\partial_x - \alpha_i\partial_y)\circ f = 0.$$

根据推论 2.3，我们有 $\mathrm{WR}(f) \le d$。

总之，我们已经证明 $\mathrm{WR}(f) = d$。此外，我们还证明了任意线性形式都可以出现在 f. 的某个最小分解中。相应的最小分解可以通过 Apolarity 引理 2.2得到。

□

注 3.6。 Reznick [22] 已证明，实二元型的华林秩不超过其次数。因此，定理 $\mathrm{WR}(f) = d$ 中的断言 3.5 由命题 3.4 和 Reznick 的结果可得。这里，我们利用调和形式的内在性质，既确定了秩，也显式构造了最小分解。

此外，Reznick 曾猜想 [22]，Bleckermann 和 Sinn 已证明 [7]，实二元 d-形式的实华林秩为 d 当且仅当它只有实根。将此结果与我们的定理 3.5结合，可以推出以下结果，而我们未能在文献中找到该结果。

推论 3.7。 调和形式只有实根。

基于定理 3.5证明中提出的思路，我们提出一种算法，用于构造调和形式的最小分解，同时也使用 $h_{d,\ 0}$，$h_{d,\ 1}$（见例 3.1）。

算法 3.8。 输入一个调和的 d-形式 $f = a_0h_{d,\ 0} + a_1h_{d,\ 1}$。

步骤 1：取一组 $\mathfrak{g} = \prod_{i=1}^{d-2}(\beta_i\partial_x - \alpha_i\partial_y)$，由两两不成比例的线性微分算子构成。

步骤 2：计算 $\mathfrak{g}\circ f$，并对所得二次型 $ax^2 + 2bxy - ay^2$. 配方

步骤 3：选择一个平方和 $ax^2 + 2bxy - ay^2 = \psi_1^2 - \psi_2^2$，使所有线性形式 $\alpha_1x + \beta_1y$、……、 $\alpha_{d-2}x + \beta_{d-2}y$以及 ψ_1，ψ_2 两两不成比例。

$_{d-2}$**步骤 4**：通过比较$_{i=1}$对应单项式的系数，求解方程 $f = \sum\lambda_i(\alpha_ix + \beta_iy)^d + \lambda_{d-1}\psi_1^d + \lambda_d\psi_2^d$，得到 $\lambda_1, \ldots,$ $\lambda_d \in \mathbb{R}^*$，并输出 f 的最小华林分解。

注 3.9. 在上述算法的步骤 3 中，我们应用了对极引理 2.2。我们没有像定理 3.5 的证明中那样计算 $\mathfrak{g}\circ f$ 的湮灭多项式，而是对其配方。若 $ax^2+2bxy-ay^2 = (\alpha x+\beta y)^2-(\alpha' x+\beta' y)^2$,，则 $(\beta\partial_x-\alpha\partial_y)(\beta'\partial_x-\alpha'\partial_y)\mathfrak{g}\circ f = 0$.。取适当的 α、β、α'、β'，使得 $\beta\partial_x-\alpha\partial_y$、$\beta'\partial_x-\alpha'\partial_{y^{d-2}}$ 两两不成比例，则根据对极引理 2.2，$f = \sum\lambda_i(\alpha_ix + \beta_iy)^d + \lambda_{d-1}($ $\alpha x + \beta y)^d + \lambda_d(\alpha' x + \beta' y)^d{}_{i=1}$。

3.4 被二次微分算子湮灭的形式

这里我们暂且简要讨论所有被二次微分算子湮灭的形式所涉及的华林问题。令 $0 \ne \Omega = a\partial_x^2 + 2b\partial_x\partial_y + c\partial_y^2 \in \mathcal{D}_2$. 显然，经过变量替换，$\Omega$ 等价于 Δ 当且仅当$b^2 - ac < 0$，等价于 $\pm\partial_x^2$ 当且仅当 $b^2 - ac = 0$，并且等价于 $\partial_x^2 - \partial_y^2$ 当且仅当 $b^2 - ac > 0$. 结合本文的结果以及 [7, 8], 中的部分结果，我们可以完全解决被 Ω湮灭的形式的华林问题。

定理 3.10。 保留前述记号，并假设 $\Omega\circ f = 0$ 其中 $0 \ne f \in \mathcal{R}_d$. 那么，$\mathrm{WR}(f) = d$ 当且仅当 $b^2 - ac \le 0$，且 $\mathrm{WR}(f) \le 2$ 当且仅当 $b^2 - ac > 0$.

证明。 若 $\mathrm{WR}(f) = d$，则 $b^2 - ac \le 0$ 根据 Apolarity 引理 2.2。否则，若 $b^2 - ac > 0$ 则 Ω 是两个不成比例的一次因子的乘积，因此 $\mathrm{WR}(f) \le 2$ 由推论 2.3。若 $\mathrm{WR}(f) \le 2$，则 Ω 必定再次有实根，这是由 Apolarity 引理所致，它意味着 $b^2 - ac > 0$.

剩下要证明的是，如果 $b^2 - ac \le 0$，那么 $\mathrm{WR}(f) = d$。如果 $b^2 - ac < 0$，那么 Ω 等价于拉普拉斯算子，因此根据定理 3.5，$\mathrm{WR}(f) = d$。如果 $b^2 - ac = 0$，那么我们可以假设 $\Omega = \partial_x^2$，于是 $f = axy^{d-1} + by^d = (ax + by)y^{d-1}$，这等价于 xy^{d-1}。。根据 [7, 8]，，我们有 $\mathrm{WR}(f) = d$。 □

3.5 一些例子

我们给出调和形式最小分解的两个具体例子，并基于上述算法进行逐步计算。

例 3.11. 考虑调和形式 $f = 2h_{4,0} + h_{4,1}$.

步骤 1：取

$$\mathfrak{g} = (\partial_x - \partial_y)(\partial_x + \partial_y).$$

步骤 2：计算

$$\mathfrak{g} \circ f = 48x^2 + 48xy - 48y^2.$$

步骤 3：选择

$$\psi_1 = 2\sqrt{3}(2x + y), \quad \psi_2 = 2\sqrt{15}y,$$

使得

$$48x^2 + 48xy - 48y^2 = \psi_1^2 - \psi_2^2,$$

且线性形式 $x + y$、 $x - y$、 $2x + y$、 y 两两不成比例。

步骤 4：假设存在一个分解

$$f = \lambda_1(x + y)^4 + \lambda_2(x - y)^4 + \lambda_3(2x + y)^4 + \lambda_4 y^4.$$

比较系数可得

$$\lambda_1 = -\tfrac{5}{2}, \quad \lambda_2 = -\tfrac{5}{6}, \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \lambda_4 = 5.$$

因此，我们得到 f 的最小华林分解：

$$f = -\frac{5}{2}(x + y)^4 - \frac{5}{6}(x - y)^4 + \frac{1}{3}(2x + y)^4 + 5y^4.$$

例3.12。 考虑调和形式 $f = h_{5,\ 0} + 2h_{5,\ 1}$。

步骤 1：取

$$\mathfrak{g} = (\partial_x - \partial_y)(\partial_x + \partial_y)(2\partial_x - \partial_y).$$

步骤 2：计算

$$\mathfrak{g} \circ f = 1200xy.$$

步骤 3：选择

$$\psi_1 = 10(x + 3y), \quad \psi_2 = 10(x - 3y),$$

使得

$$1200xy = \psi_1^2 - \psi_2^2,$$

and 线性形式 $x + y, \quad x - y, \quad 2x - y, \quad x + 3y, \quad x - 3y$ 两两不成比例 .

步骤 4：假设一个分解

$$f = \lambda_1(x + y)^5 + \lambda_2(x - y)^5 + \lambda_3(2x - y)^5 + \lambda_4(x - 3y)^5 + \lambda_5(x + 3y)^5.$$

比较系数可得

$$\lambda_1 = \tfrac{25}{8}, \quad \lambda_2 = -\tfrac{25}{24}, \quad \lambda_3 = -\tfrac{4}{3}, \quad \lambda_4 = \tfrac{1}{24}, \quad \lambda_5 = \tfrac{5}{24}.$$

因此，我们得到了 f 的最小华林分解：

$$f = \frac{25}{8}(x + y)^5 - \frac{25}{24}(x - y)^5 - \frac{4}{3}(2x - y)^5 + \frac{1}{24}(x - 3y)^5 + \frac{5}{24}(x + 3y)^5.$$

人工智能工具使用声明

作者声明，他们在撰写本文时未使用人工智能（AI）工具。

致谢

H.-L. Huang 获福建省自然科学基金重点项目（批准号：2024J02018）和国家自然科学基金（批准号：12371037）的部分资助。

Y. Ye 获国家重点研发计划（批准号：2024YFA1013802）、国家自然科学基金（批准号：12131015 和 12371042）以及量子科学与技术创新计划（批准号：2021ZD0302902）的部分资助。

R. Zhu 获国家自然科学基金（批准号：12201223）和福建省自然科学基金（批准号：2023J05048 和 2023J01126）的部分资助。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] J. Alexander, A. Hirschowitz. 多个变量中的多项式插值。《代数几何杂志》4(4) (1995) 201-222.[2] M. Ansola, A. D´ıaz-Cano, M.A. Zurro. 半代数集与实二元形式的分解。《符号计算杂志》107 (2021) 209–220.[3] S. Axler, P. S. Bourdon, W. C. Ramey.调和函数理论。第二版。《数学研究生文本》137，施普林格出版社，纽约，2001.[4] E. Ballico. 实二元多项式的典型秩。《线性代数及其应用》452 (2014) 263–269.[5] A. Bernardi, A. Oneto, P. Santarsiero.张量的分解轨迹。《符号计算杂志》131 (2025) 102451.[6] G. Blekherman. 二元形式的典型实秩。《计算数学基础》15(3) (2025) 793-798.[7] G. Blekherman, R. Sinn. 相对于簇的实秩。《线性代数及其应用》505 (2016) 344–360.[8] M. Boij, E. Carlini, A.V. Geramita. 单项式作为幂和：实二元情形。《美国数学会会刊》139 (2011) 3039–3043.[9] M. C. Brambilla, G. Staglian´o. 任意次数实二元形式典型秩之间的代数边界。《计算数学基础》21(4) (2021) 1003-1022.[10] E. Carlini, M. V. Catalisano, A. Oneto.华林轨迹与 *Strassen* 猜想。《数学进展》 314 (2017) 630-662.[11] A. Causa, R. Re. 关于实二元形式的最大秩。《纯粹与应用数学年刊》 190 (1) (2011) 55–59.[12] G. Comas, M. Seiguer. 关于二元形式的秩。《计算数学基础》11(1) (2011) 65-78.[13] P. Comon, G. M. Ottaviani. 关于实二元形式的典型秩。《线性与多重线性代数》60(6) (2012) 657-667.[14] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea. 理想、簇与算法。第四版。《数学本科教材》，施普林格出版社，Cham，2015.[15] W. Ellison. 齐次形式的"华林问题"。《剑桥哲学会数学会刊》65(3) (1969) 663-672.[16] C. Flavi. 二次型幂的分解。《数学论文集》602 (2025)，108页。

[17] S. Gundelfinger. 论二元形式理论¨。《纯粹与应用数学杂志》100 (1887) 413-424.[18] H.-L. Huang, H. Miao, Y. Ye. 复二元形式的华林问题。 arXiv: 2511.14316.[19] A. Iarrobino, V. Kanev. 幂和、戈伦斯坦代数与行列式簇。《数学讲义》，第1721卷。施普林格出版社，柏林，1999.[20] L. B. Moncus´ı, S. K. Masuti. 二元二项式形式的华林秩。《太平洋数学杂志》313(2) (2021) 327-342.[21] B. Reznick. 常系数偏微分方程的齐次多项式解。《数学进展》117 (1996) 179–192.[22] B. Reznick. 关于二元形式的长度。 载于《二次及高次型》，《数学发展》31，施普林格出版社，纽约，2013，207–232.[23] J. J. Sylvester. 关于典范形式的论文：作为《消元、变换与典范形式研究纲要》的补篇。 载于：H.F. Baker（编），《詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特数学论文集》第1卷（1837-1853），剑桥大学出版社，剑桥，1904，203-216.[24] J. J. Sylvester. 关于典范形式理论与超行列式领域的一项惊人发现。载于：H.F. Baker（编），《詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特数学论文集》第1卷（1837-1853），剑桥大学出版社，剑桥，1904，265-283.[25] J. J. Sylvester. *1865*年*6*月*28*日在伦敦国王学院所作讲座提纲：对艾萨克·牛顿爵士关于发现虚根的尚未证明规则的初等证明与推广。《伦敦数学会会刊》1 (1865) 1–12。