arXiv:2601.03572v1 [math.CO] 7 Jan 2026

关于某些可能的 $\mathbf{R}R(3,\ 10)$-临界图的结构性质

Dinesh Pandey * †1 和 Peruvemba Sundaram Ravi ‡2

[1, 2]Lazaridis商学院与经济学院，威尔弗里德·劳里埃大学，滑铁卢，安大略省 N2L3C5，加拿大。

摘要

Ramsey 数 $R(s,\ t)$ 是最小的正整数 n，使得每个含有 n 个顶点的图都包含一个大小为 s 的团或一个大小为 t 的独立集。$R(s,\ t)$-临界图是一个具有 $R(s,\ t)$ 个顶点的图，既不包含大小为 s 的团，也不包含大小为 t 的独立集。已知 $40 \leq R(3,\ 10) \leq 42$。我们假设 $R(3,\ 10) = 42$，研究 a$R(3,\ 10)$-临界图的结构。我们证明，若此类图存在，则其最小度与点连通度相同，且为 6、7 或 8。随后，我们找出此类图所有可能的度序列。此外，我们证明，若此类图存在，则其直径为 2 或 3；若其直径为 2 且最小度为 6，则其度序列只有 21 种可能。

关键词： 拉姆齐数、度序列、点连通度、直径

AMS 学科分类： 05C30,05D10

1 引言与预备知识

Ramsey 数 $R(s,t)$ 是满足以下条件的最小正整数 n：任何含有 n 个顶点的图，要么包含一个大小为 s 的团，要么包含一个大小为 t 的独立集。含有 R 个顶点且既不包含大小为 s 的团，也不包含大小为 t 的独立集的图 $s(t) - 1$，称为 $R(s,t)$-临界图。确定 Ramsey 数或给出其重要界限，是组合学中的一项重大挑战。容易看出，对于 $t \geq 1$，$R(1,t) = 1$；对于 $t \geq 2$，$R(2,t) = t$。对于 s、$t \geq 3$，目前仅有少数 Ramsey 数已被确定，分别为$R(3, 3)$ $R(3, 4)$ $R(3, 5)$、$(3, 6)$、 $R(3, 7)$ $R(3, 8)$、 $R(3, 9)$ $R(4, 4)$ 和 $R(4, 5)$。一些 Ramsey 数的上界和/或下界已知。有关这些界限的全面信息，推荐参阅动态综述 [2]。研究人员一直在努力改进这些界限。 $R(3, 10)$ 是目前尚未确定的最小 Ramsey 数，不过其界限已相当接近。

我们的目标是研究 $R(3,\ 10)$-临界图的性质，并利用这些性质在不依赖计算工具的情况下证明 $R(3,\ 10) \leq 41$。开始撰写本文时，已知 $40 \leq R(3,\ 10) \leq 42$。因此，本文首先假设

*dpandey@wlu.ca

†第一作者的研究由威尔弗里德·劳里埃大学的 Einwechter供应链管理中心（由 Dan Einwechter先生 资助的研究中心）资助。

‡pravi@wlu.ca

即 $R(3,10) = 42$，并探究具有 41 个顶点的 $R(3,10)$-临界图的结构性质。这些性质将在本文第 2 节中介绍。随后，我们了解到 Angelveit [1] 采用计算密集型方法证明了$R(3,10) \leq 41$。我们认为，第 2 节中介绍的结果可与 Angeltveit 的工作结合使用，或许能以更快的速度，通过计算密集型证明得到结论 $R(3,10) \leq 41$。此外，在我们了解到 Angelveit 的工作后撰写的第 3 节中，我们从假设 $R(3,10) = 41$ 出发，运用我们在第 2 节中发展的技巧，研究假设存在的、具有 40 个顶点的潜在 $R(3,10)$-临界图。我们认为，这些技巧也可能有助于更广泛地研究$R(3,t)$-临界图。

本文讨论简单有限无向图。设 G 为一个图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。对于任意顶点 $v \in V(G)$，我们将 v 在G 中的度记为 $d_G(v)$，或简记为 $d(v)$。若 H 是 G 的一个子图，且 $u \in V(H)$，则 $d_H(u)$表示顶点 u 在 H中的度。记号 $G - v$ 表示删除顶点 v 及其所有关联边后得到的图。对于两个图 G 和 H，它们的并 $G \cup H$ 是一个图，其顶点集为 $V(G) \cup V(H)$，边集为 $E(G) \cup E(H)$。顶点 v的邻域记为 $N(v)$，由所有与 v相邻的顶点组成。闭邻域$N[v] = N(v) \cup \{v\}$。 G_v表示由 G中顶点 $V(G) \setminus N[v]$诱导的子图。我们用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G的最小度和最大度。 G 的独立数记为 $\alpha(G)$。 G 中的点割是 $V(G)$ 的一个子集，使得 $G \setminus V(G)$ 是不连通的。点连通度 $\kappa(G)$ 是使 G 不连通或缩减为单个顶点所需删除的最少顶点数。类似地，边连通度$\kappa'(G)$是使 G不连通所需删除的最少边数。 G 中路径的长度是该路径所含的边数。 G 中顶点 u 和v 之间的距离 $d(u,v)$，是连接这两个顶点的最短路径的长度。 G的直径记为 $diam(G)$，定义为 $diam(G) = \max\{d(u,v) : u,v \in V(G)\}$。 G 的度序列是其顶点度的列表，通常按降序或升序排列。本文中的度序列均按降序排列。以下这一基本结果通常称为图论第一定理，在我们的分析中经常使用。

引理 1.1. 对于任意图 G, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$。

设 G 是一个有 n 个顶点和 e 条边的图，其中既不含有大小为 k 的团，也不含有大小为 l 的独立集。则称 G 为 (k,l,n,e) 图，或 (k,l,n) 图，或 (k,l) 图。此记号取自 [3]。此外，

$$e(k,l,n) = \min\{|E(G)| : G \text{ is a } (k,l,n) \text{ graph}\}.$$

引理1.2 ([3], 定理3)。 存在唯一一个$(3, 9, 35)$ 图，且它是8-正则图。

我们回顾一下 Mantel 定理，它给出了无三角形图中边数的上界。

命题 1.3 (Mantel 定理)。 一个有 n 个顶点的无三角形图至多包含$\frac{n^2}{4}$ 条边。

—

2 个 (3,10,41) 图

假设 $R(3,10) = 42$，我们在不依赖计算工具的情况下，研究具有 41 个顶点的 $R(3,10)$-临界图的性质。本节中， Γ 是一个 (3，10，41) 图。

2.1 Γ 的最小度与点连通度

由于 Γ 是无三角形的， v 的任意两个邻点都不可能相邻。现在，由于 Γ 不含一个 K_{10}， $\Delta(\Gamma) \leq 9$。由于 $|E(\Gamma)| \geq 172$ （见 [3], 表5），根据引理 1.1可知， Γ 有一个度为 9 的顶点。因此， $\Delta(\Gamma) = 9$。事实上，由此可知， Γ 至少有 16 个度为 9 的顶点。我们给出 Γ最小度的一个下界。

引理 2.1. Γ 中不存在这样的顶点，使得其两个邻点的度数和小于或等于12。

证明. 假设 $v \in V(\Gamma)$ 且 $v_1, v_2 \in N(v)$ 满足 $d(v_1) + d(v_2) \leq 12$。令 $X = \{v_1, v_2\}$，并令 $N[X] = N[v_1] \cup N[v_2]$。于是 $|N[X]| \leq 13$，这意味着 $|V(\Gamma) \setminus N[X]| \geq 28 = R(3,8)$。因此，$\Gamma \setminus N[X]$ 包含一个大小为 8 的独立集 S。注意， $\Gamma \setminus N[X]$ 中没有顶点与 v_1 或 v_2 相邻。因此， $S \cup \{v_1, v_2\}$ 是 Γ 中一个大小为 10 的独立集，这就产生了矛盾。 □

定理2.2. $\delta(\Gamma) \geq 6$.

证明。 假设 Γ 有一个顶点 v 满足 $d(v) \leq 4$。那么 Γ_v 是一个至少有36个顶点的图。由于 $R(3,9) = 36$， Γ_v 包含一个大小为9的独立集 S。因此， S 与 v 一起构成 Γ中一个大小为10的独立集，这就产生了矛盾。这表明 $\delta(\Gamma) \geq 5$。现在只需证明 Γ 没有度为5的顶点。

假设 Γ 有一个度为5的顶点 v 。那么 Γ_v 是一个(3, 9, 35) 图。因此，根据引理1.2，Γ_v是 8-正则的。设 $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$。我们证明 v_1、 v_2、.....、 v_5 的度都不超过6。假设 $d(v_1) \geq 7$。注意，由于 v_1 在 Γ_v 中的邻点的度数已达到上限，它们均不与v_2、 v_3、 v_4、 v_5 中的任何一个相邻。但是 v_1 在 Γ_v 中至少有6个邻点，这就产生了矛盾，因为它们与 v_2、 v_3、 v_4、 v_5 一起构成 Γ中一个大小至少为10的独立集。这意味着对于 $i = 1$， $d(v_i) \in \{5, 6\}$，其中 $i = 1$ 取2、3、4、5。但这与引理 2.1矛盾。因此， v的度不可能为5。 □

引理 2.3. Γ中度数为6 的顶点数至多为6。

证明。 设 $v_1, v_2, \ldots, v_k$是 Γ中度为6的 k 顶点。由引理 2.1， $N(v_i)$两两不相交。因此 $|V(\Gamma)| = 41 \geq |N(v_1) \cup N(v_2) \cup \cdots \cup N(v_k)| = |N(v_1)| + |N(v_2)| + \cdots + |N(v_k)| = 6k$。这意味着 $k \leq 6$。 □

以下是简单图的点连通度、边连通度与最小度之间一个众所周知的关系。

命题 2.4. 对于简单图 G, $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$。

注意到 Γ 是一个连通图。可以用反证法证明如下：假设 Γ 有 k 个连通分支 $H_1, H_2, \ldots, H_k$，其中 $k \geq 2$。设$H_1 = G_1$ 且 $\cup_{i=2}^{k} H_i = G_2$。设 $|V(G_1)| = n_1$。那么 $|V(G_2)| = 41 - n_1$。对于 $n_1 \in \{1, 2, \ldots, 40\}$的任意取值，都容易验证 $\alpha(G_1) + \alpha(G_2) \geq 10$。这意味着 Γ 有一个大小至少为10的独立集，矛盾。事实上， Γ 的连通度要高得多。我们证明如下结论。

定理 2.5. $\kappa(\Gamma) \geq 6$.

证明。 假设 $\kappa(\Gamma) \leq 5$。那么存在一个大小为 5 的点割。令 $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 为 Γ中的一个点割。令 H_1、 H_2、.....、 H_k为 $\Gamma \setminus S$的 k 个连通分支，其中 $k \geq 2$。取$H_1 = G_1$ 和 $\cup_{i=2}^{k} H_i = G_2$。令 $|V(G_1)| = n_1$。那么 $|V(G_2)| = n_2 = 36 - n_1$。不失一般性，假设 $n_1 \leq n_2$。那么 $1 \leq n_1 \leq 18$.

情况 1： $n_1 = 1$
假设 $V(G_1) = \{v\}$。那么 $d_\Gamma(v) \leq 5$，这就产生了矛盾。
情况 2： $n_1 = 2$
假设 $V(G_1) = \{v_1, v_2\}$。在这种情况下，$n_2 = 34$ 因此 G_2 包含一个大小为 8 的独立集 S_2。这意味着 $v_1 \sim v_2$；否则，S_2 与 v_1 和 v_2 一起构成 Γ中的一个大小为 10 的独立集。由于 Γ 是无三角形的，u_1，u_2，.....，u_5 中没有一个同时与 v_1 和 v_2相邻。这意味着 $d(v_1) + d(v_2) \leq 7$，因此要么 $d(v_1) < 4$，要么 $d(v_2) < 4$，这就产生了矛盾。
情况 3： $3 \leq n_1 \leq 8$。
在这种情况下，$n_2 \geq 28$ 因此 G_2 包含一个大小为 8 的独立集 S_2。此外，由于 $n_1 \geq 3$，G_1 包含一个大小为 2 的独立集 S_1。$S_1 \cup S_2$ 是 Γ中的一个大小为 10 的独立集，这就产生了矛盾。

情况 4： $9 \leq n_1 \leq 18$
在这种情况下，G_1 包含一个大小为 4 的独立集，G_2 包含一个大小为 6 的独立集；将二者合并，便得到 Γ中一个大小为 10 的独立集，矛盾。
证明至此完成。 □

定理 2.6. $\kappa(\Gamma) = \delta(\Gamma)$.

证明。由于 $|V(\Gamma)| = 41$，Γ 不是 9-正则。因此 $6 \leq \delta(\Gamma) \leq 8$。

情况 I： $\delta(\Gamma) = 6$
由命题 2.4 和定理 2.5，可得 $\kappa(\Gamma) = 6$。

情况 II： $\delta(\Gamma) = 8$
假设 Γ 有一个大小为 7 的点割。令 $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ 为 Γ中的一个点割。令$H_1, H_2, \ldots,$ H_k 为 $\Gamma \setminus S$ 的 k 个连通分支，其中 $k \geq 2$。取 $H_1 = G_1$ 和 $\cup_{i=2}^{k} H_i = G_2$。令 $|V(G_1)| = n_1$。则 $|V(G_2)| = n_2 = 34 - n_1$。不失一般性，假设 $n_1 \leq n_2$。则 $1 \leq n_1 \leq 17$. 现在我们可以考虑以下六种情况：$(i) n_1 = 1$，$(ii) n_1 = 2 (iii) 3 \leq n_1 \leq 6 (iv) 7 \leq n_1 \leq 11 (v)$ $12 \leq n_1 \leq 16$ 以及 $(vi) n_1 = 18$。在每一种情况下，通过给出与定理 2.5 证明中类似的论证，均可得到矛盾。因此，Γ 不可能有大小为 7 的点割。这意味着 $\kappa(\Gamma) \geq 8$，从而 $\kappa(\Gamma) = 8$。

情况 III： δ（Γ）$= 7$
与情况 II 中类似的论证可证明 $\kappa(\Gamma) = 7$。 □

2.2 Γ 的可能度序列

本节求出 Γ 存在时它的所有可能度序列。我们看到 $\Delta(\Gamma) = 9$，且 $\delta(\Gamma) \geq 6$。因此 $6 \leq d(v) \leq 9\ \forall v \in V(\Gamma)$。我们用四元组（$a$，$b$，$c$，$d$）表示 Γ 的度序列，其中 a、b、c 和 d 分别是度为 9、8、7 和 6 的顶点。由于 $|V(\Gamma)| = 41$，Γ 的顶点不可能全是奇数度。因此 Γ 必须有一个度为 6 或 8 的顶点。所以 $6 \leq \delta(\Gamma) \leq 8$。我们将 (3, 10, 41) 图分为两类。一类是 $\delta(\Gamma) > 6$，另一类是 $\delta(\Gamma) = 6$。

2.2.1 当 $\delta(\Gamma) > 6$ 时 Γ 的度序列

已知 $172 \leq |E(\Gamma)| \leq 184$。首先假设 Γ 是一个 (3，10，41，172)-图。由于 $\delta(\Gamma) > 6$，$d = 0$。因此我们有

$$9a + 8b + 7c = 344,$$

$$a+b+c=41,$$

and

$$a=\alpha.$$

由引理 1.1 可得 $16 \leq \alpha \leq 28$。此外，对于 $16 \leq \alpha \leq 28$,

$$rank\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 344 \\ 1 & 1 & 1 & 41 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

因此，对于每个 α，上述方程组都有唯一解。这些解（形式为 (a,b,c,d)）为 (16, 25, 0, 0)、(17, 23, 1, 0)、(18, 21, 2, 0)、(19, 19, 3, 0)、(20, 17, 4, 0)、(21, 15, 5, 0)、(22, 13, 6, 0)、(23, 11, 7, 0)、(24, 9, 8, 0)、(25, 7, 9, 0)、(26, 5, 10, 0)、(27, 3, 11, 0)、(28, 1, 12, 0)。当 Γ 是一个 (3, 10, 41, 172)-图时，这些解都可能是其度序列。类似地，我们可以得到每个 (3, 10, 41, e)-图的可能度序列，其中 $173 \leq e \leq$184。一个 (3, 10, 41, e)-图在 $172 \leq e \leq 184$ 时的可能度序列列于表 1。

e	可能的度序列
172	(16, 25, 0, 0), (17, 23, 1, 0), (18, 21, 2, 0), (19, 19, 3, 0), (20, 17, 4, 0), (21, 15, 5, 0), (22, 13, 6,0), (23, 11,7, 0), (24,9, 8, 0),(25, 7,9, 0), (26,5, 10, 0),(27, 3, 11,0), (28,1, 12, 0)
173	(18, 23, 0, 0), (19, 21, 1, 0), (20, 19, 2, 0), (21, 17, 3, 0), (22, 15, 4, 0), (23, 13, 5, 0), (24, 11, 6,0), (25, 9, 7, 0), (26,7, 8, 0),(27, 5,9, 0), (28,3, 8, 0),(29, 1, 9,0)
174	(20, 21,0, 0), (21,19, 1, 0),(22, 17,2, 0), (23,15, 3, 0),(24, 13, 4,0), (25,11, 5, 0),(26, 9, 6,0), (27, 7, 7, 0), (28,5, 8, 0),(29, 3,9, 0), (30,1, 10, 0)
175	(22, 19,0, 0), (23,17, 1, 0),(24, 15,2, 0), (25,13, 3, 0),(26, 11, 4,0), (27,9, 5, 0),(28, 7, 6,0), (29, 5, 7, 0), (30, 3, 8, 0), (31, 1, 9, 0)
176	(24, 17,0, 0), (25,15, 1, 0),(26, 13,2, 0), (27,11, 3, 0),(28, 9, 4,0), (29,7, 5, 0),(30, 5, 6,0), (31, 3, 7, 0), (32,1, 8, 0)
177	(26, 15,0, 0), (27,13, 1, 0),(28, 11,2, 0), (29,9, 3, 0),(30, 7, 4,0), (31,5, 5, 0),(32, 3, 6,0), (33, 1,7, 0)
178	(28, 13,0, 0), (29,11, 1, 0),(30, 9,2, 0), (31,7, 3, 0),(32, 5, 4,0), (33,3, 5, 0),(34, 1, 6,0)
179	(30, 11,0, 0), (31,9, 1, 0),(32, 7,2, 0), (33,5, 3, 0),(34, 3, 4,0), (35,1, 5, 0)
180	(32, 9, 0, 0), (33,7, 1, 0),(34, 5,2, 0), (35,3, 3, 0),(36, 1, 4,0)
181	(34, 7, 0, 0), (35, 5, 1, 0), (36, 3, 2, 0), (37, 1, 3, 0)
182	(36, 5, 0, 0), (37, 3, 1, 0), (38, 1, 2, 0)
183	(38, 3, 0, 0), (39,1, 1, 0)
184	(40, 1,0, 0)

表 1：最小度至少为 7 的 (3, 10,41, e)-图的可能度序列

2.2.2 Γ 的度序列，当 $\delta(\Gamma)=6$

由于 $\delta(\Gamma)=6$，根据引理 2.3 可得 $1 \leq d \leq 6$。对于 d 的每个取值，均可如上得到度序列。首先假设 $d=1$。如果 Γ 是一个 (3，10，41，172)-图，则有

$$9a+8b+7c=338,$$

$$a+b+c=40,$$

and

$$a = \alpha.$$

根据引理 1.1，可得 $18 \leq \alpha \leq 29$。对于每个 α，该方程组都有唯一解，且每个解 $(a,\ b,\ c)$ 都表示 Γ 的度序列 $(a,\ b,\ c,\ 1)$。这些度序列列于表 2。类似地，可得 $d = 2$，3，4，5 和 6 对应的度序列，分别列于表 2、3、4、5、6 和 7。

e	可能的度序列
172	(18, 22, 0, 1), (19, 20, 1, 1), (20, 18, 2, 1), (21, 16, 3, 1), (22, 14, 4, 1), (23, 12, 5, 1), (24, 10, 6, 1), (25, 8, 7, 1), (26, 6, 8, 1), (27, 4, 9, 1), (28, 2, 10, 1), (29, 0, 11, 1)
173	(20, 20, 0, 1), (21, 18, 1, 1), (22, 16, 2, 1), (23, 14, 3, 1), (24, 12, 4, 1), (25, 10, 5, 1) (26, 8, 6, 1), (27, 6, 7, 1), (28, 4, 8, 1), (29, 2, 9, 1), (30, 0, 10, 1)
174	(22, 18, 0, 1), (23, 16, 1, 1), (24, 14, 2, 1), (25, 12, 3, 1), (26, 10, 4, 1) (27, 8, 5, 1) (28, 6, 6, 1), (29, 4, 7, 1), (30, 2, 8, 1), (31, 0, 9, 1)
175	(24, 16, 0, 1), (25, 14, 1, 1), (26, 12, 2, 1), (27, 10, 3, 1), (28, 8, 4, 1), (29, 6, 5, 1), (30, 4, 6, 1), (31, 2, 7, 1), (32, 0, 8, 1)
176	(26, 14, 0, 1), (27, 12, 1, 1), (28, 10, 2, 1), (29, 8, 3, 1), (30, 6, 4, 1), (31, 4, 5, 1), (32, 2, 6, 1), (33, 0, 7, 1)
177	(28, 12, 0, 1), (29, 10, 1, 1), (30, 8, 2, 1), (31, 6, 3, 1), (32, 4, 4, 1), (33, 2, 5, 1), (34, 0, 6, 1)
178	(30, 10, 1, 1), (31, 8, 8, 1), (32, 6, 2, 1), (33, 4, 3, 1), (34, 2, 4, 1), (35, 0, 5, 1)
179	(32, 8, 0, 1), (33, 6, 1, 1), (34, 4, 2, 1), (35, 2, 3, 1), (36, 0, 4, 1)
180	(34, 6, 0, 1), (35, 4, 1, 1), (36, 2, 2, 1), (37, 0, 3, 1)
181	(36, 4, 0, 1), (37, 2, 1, 1), (38, 0, 2, 1)
182	(38, 2, 0, 1), (39, 0, 1, 1)
183	(40, 0, 0, 1)

表 2：一个恰好包含一个度数为6的顶点的 $(3, 10, 41, e)$-图的可能度序列

e	可能的度序列
172	(20, 19, 0, 2), (21, 17, 1, 2), (22, 15, 2, 2), (23, 13, 3, 2), (24, 11, 4, 2), (25, 9, 5, 2), (26, 7, 6, 2), (27, 5, 7, 2), (28, 3, 8, 2), (29, 1, 9, 2)
173	(22, 17, 0, 2), (23, 15, 1, 2), (24, 13, 2, 2), (25, 11, 3, 2), (26, 9, 4, 2), (27, 7, 5, 2), (28, 5, 6, 2), (29, 3, 7, 2), (30, 1, 8, 2)
174	(24, 15 , 0 , 2), (25, 13, 1, 2), (26, 11, 2, 2), (27, 9, 3, 2), (28, 7, 4, 2), (29, 5, 5, 2) (30, 3, 6, 2), (31, 1, 7, 2)
175	(26, 13, 0, 2), (27, 11, 1, 2), (28, 9, 2, 2), (29, 7, 3, 2), (30, 5, 4, 2), (31, 3, 5, 2) (32, 1, 6, 2)
176	(28, 11, 0, 2), (29, 9, 1, 2), (30, 7, 2, 2), (31, 5, 3, 2), (32, 3, 4, 2), (33, 1, 5, 2)
177	(30, 9, 0, 2), (31, 7, 1, 2), (32, 5, 2, 2), (33, 3, 3, 2), (34, 1, 4, 2)
178	(32, 7, 0, 2), (33, 5, 1, 2), (34, 3, 2, 2), (35, 1, 3, 2)
179	(34, 5, 0, 2), (35, 3, 1, 2), (36, 1, 2, 2)
180	(36, 3, 0, 2), (37, 1, 1, 2)
181	(38, 1, 0, 2)

表3：包含两个度为6的顶点的$(3，\ 10，\ 41，\ e)$-图的可能度序列

e	可能的度序列
172	$(22, 16, 0, ^{3),(23,}\ 14, 1, ^{3),(24,}\ 12, 2, ^{3),(25,}\ 10, 3, ^{3),(26,}\ 8, 4, ^{3),(27,}\ 6, 5, 3)$, $(28, 4, 6, 3)$, $(29, 2, 7, 3)$, $(30, 0, 8, 3)$
173	$(24, 14, 0, ^{3),(25,}\ 12, 1, ^{3),(26,}\ 10, 2, ^{3),(27,}\ 8, 3, ^{3),(28,}\ 6, 4, ^{3),(29,}\ 4, 5, 3)$ $(30, 2, 6, ^{3)(31,}\ 0, 7, 3)$
174	$(26, 12, 0, ^{3),(27,}\ 10, 1, ^{3),(28,}\ 8, 2, ^{3),(29,}\ 6, 3, ^{3),(30,}\ 4, 4, ^{3),(31,}\ 2, 5, 3)$ $(32, 0, 6, 3)$
175	$(28, 10, 0, ^{3),(29,}\ 8, 1, ^{3),(30,}\ 6, 2, 3)$, $(31, 4, 3\ ^{,3),(32,}\ 2, 4, ^{3),(33,}\ 0, 5, 3)$
176	$(30, 8, 0, ^{3),(31,}\ 6, 1, ^{3),(32,}\ 4, 2, ^{3),(33,}\ 2, 3, ^{3),(34,}\ 0, 4, 3)$
177	$(32, 6, 0, ^{3),(33,}\ 4, 1, ^{3),(34,}\ 2, 2, ^{3),(35,}\ 0, 3, 3)$
178	$^{(34, 4,}\ 0, ^{3),(35,}\ 2, 1, ^{3),(36,}\ 0, 2, 3)$
179	$(36, 2, 0, ^{3),(37,}\ 0, 1, 3)$
180	(38, 0, 0, 3)

表4：包含三个度为6的顶点的(3，10，41，e)-图的可能度序列

e	可能的度序列
172	$(24, 13, 0, ^{4),(25,}\ 11, 1, ^{4),(26,}\ 9, 2, ^{4),(27,}\ 7, 3, ^{4),(28,}\ 5, 4, ^{4),(29,}\ 3, ^{5, 4)}$ $(30, 1, ^{6, 4)}$
173	$(26, 11, 0, 4)$, $(27, 9, 1, 4)$, $(28, 7, 2, 4)$, $(29, 5, 3, 4)$, $(30, 3, 4, 4)$, $(31, 1, ^{5, 4)}$
174	$(28, 9, 0, ^{4),(29,}\ 7, 1, ^{4),(30,}\ 5, 2, ^{4),(31,}\ 3, 3, ^{4),(32,}\ 1, ^{4, 4)}$
175	$(30, 7, 0, ^{4),(31,}\ 5, 1, ^{4),(32,}\ 3, 2, ^{4),(33,}\ 1, ^{3, 4)}$
176	$(32, 5, 0, ^{4),(33,}\ 3, 1, ^{4),(34,}\ 1, ^{2, 4)}$
177	$(34, 3, 0, ^{4),(35,}\ 1, 1, 4)$
178	$(36, 1, ^{0, 4)}$

表5：可能的　度序列的一个 (3，10，41，e)-图，包含四个度为6的顶点

e	可能的度序列
172	$(26, 10, 0, 5)$, $(27, 8, 1, 5)$, $(28, 6, 2, 5)$, $(29, 4, 3, 5)$, $(30, 2, 4, 5)$, $(31, 0, 5, 5)$
173	$(28, 8, 0, ^{5),(29,}\ 6, 1, ^{5),(30,}\ 4, 2, 5)$, $(31, 2, 3, ^{5),(32,}\ 0, 4, 4)$
174	$(30, 6, 0, ^{5),(31,}\ 4, 1, ^{5),(32,}\ 2, 2, ^{5)、(33、}\ 0, 3, 5)$
175	$(32, 4, 0, ^{5)、(33、}\ 2, 1, ^{5)、(34、}\ 0, 2, 5)$
176	$(34, 2, 0, ^{5)、(35、}\ 0, 1, 5)$
177	$^{(36,\ 0,\ 0,\ 5)}$

表6：可能的　含有五个度为6的顶点的 (3，10，41，e)-图的度序列

e	可能的度序列
172	$(28, 7, 0, 6)$, $(29, 5, 1, 6)$, $(30, 3, 2, 6)$, $(31, 1, 3, 6)$
173	$(30, 5, 0, ^{6)、(31、}\ 3, 1, ^{6)、(32、}\ 1, 2, 6)$
174	$(32, 3, 0, ^{6)、(33、}\ 1, 1, 6)$
175	$(34, 1, 0, 6)$

表7：包含六个度为6的顶点的 (3，10，41，e)-图的可能度序列

2.3 Γ 的直径

在本节中，我们证明 $diam(\Gamma)$ 只能是 2 或 3。我们分析直径为 2 且最小度为 6 时 Γ 的结构。当 $diam(\Gamma) = 2$ 且 $\delta(\Gamma) = 6$ 时，可以证明 Γ 的可能度序列只有 21 种。

定理 2.7。 $2 \leq diam(\Gamma) \leq 3$。

证明。 左侧不等式显然成立，因为 Γ 不是完全图。为证明右侧不等式，只需证明 Γ 中任意两个顶点之间的距离至多为 3。假设存在 $u, v \in V(\Gamma)$，使得 $d(u, v) \geq 4$。那么 $N(u) \cap N(v) = \emptyset$，且 $N(u)$中没有顶点与 $N(v)$中的顶点相邻，否则 u 与 v 之间的距离至多为 3。由于$\delta(\Gamma) \geq 6$， $N(\{u, v\})$构成一个大小至少为 12 的独立集，矛盾。 □

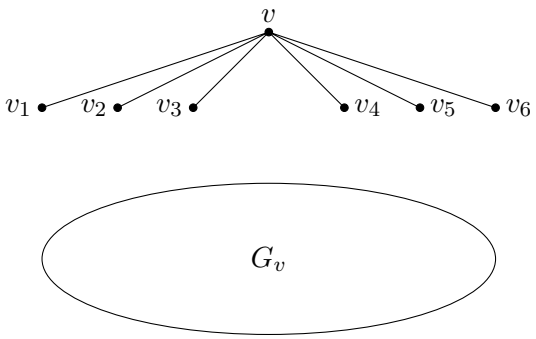

图 1：图 G 的结构

定理 2.8。 如果 $diam(\Gamma) = 2$，那么 Γ 至多有两个度为6的顶点。此外，如果有两个度为6的顶点，那么它们必定相邻。

证明。 令 v 为 Γ中一个度数为6的顶点。由于 $diam(\Gamma) = 2$，由引理 2.1可知， Γ_v中不存在度数为6的顶点。由引理 2.1还可知， $N(v)$至多包含一个度数为6的顶点。因此， Γ 至多有两个度数为6的顶点；若恰有两个，则它们必定相邻。 □

引理 2.9。 令 v 为 Γ中一个度数6 的顶点。那么

$$20 \leq |\{u \in V(\Gamma_v) : d_{\Gamma_v}(u) = 8\}| \leq 24.$$

证明。 注意， Γ_v诱导出一个 (3,9, 34)-图。左侧不等式由$e(3, 9, 34) = 129$ 这一事实得出（见 [3], 表4）。为方便起见，将集合 $\{u \in \Gamma_v$记为： $d_{\Gamma_v}(u) = 8\}$为 $(\Gamma_v, 8)$。为证明右侧不等式，假设 $|(\Gamma_v, 8)| \geq 25.$。由于 $|N(v)| = 6$，根据抽屉原理， $N(v)$中存在一个顶点 w，它在 $(\Gamma_v$, 8)中至少有5个邻点。 w 的这5个邻点与 $N(v)$中剩余的5个顶点共同构成 Γ中一个大小为10的独立集，这就产生了矛盾。 □

定义 2.10。 设 G 为一个图，且 $v \in V(G)$。对于 $0 \leq i \leq \Delta(G)$，我们定义

$$H_{2i}(v) = \{u \in \Gamma_v : |N(u) \cap N(v)| = i\}.$$

命题 2.11. 设 $diam(\Gamma) = 2$ 和 v 是 Γ中的一个度为6 的顶点。那么，对于 $i \geq 4.$， $H_{20}(v) = \emptyset = H_{2i}(v)$

证明。 $H_{20}(v) = \emptyset$，因为 $diam(\Gamma) = 2$。现在注意到 $\{u \in \Gamma_v : d_{\Gamma_v}(u) \leq 5\} = \emptyset$，否则 $\Gamma_v \backslash N[u]$ 包含一个大小为 8 的独立集 S，它与 $\{u, v\}$ 一起构成 Γ. 中一个大小为 10 的独立集。令 $i \geq 4$，并令 $w \in H_{2i}(v)$。于是 $d_{\Gamma_v}(w) \geq 6$。因此 $d_\Gamma(w) = 6 + i \geq 10$，这与矛盾相矛盾。因此，对于 $i \geq 4.$， $H_{2i}(v) = \emptyset$ □

命题 2.12. 设 $diam(\Gamma) = 2$ 和 v 是 Γ中度为6 的顶点。则 $20 \leq |H_{21}(v)| \leq 24$。

证明。由于 $diam(\Gamma) = 2$, $(\Gamma_v, 8) \subseteq H_{21}(v)$，故由引理 2.9 可得左侧不等式。若 $|H_{21}(v)| \geq 25$，则根据鸽巢原理， $N(v)$中存在一个顶点 w，它在 $H_{21}(v)$中至少有 5 个邻点。 w 的这五个邻点与 $N(v) \setminus \{w\}$ 一起，在 Γ中包含一个大小为 10 的独立集，这就产生了矛盾。因此 $|H_{21}(v)| \leq 24$。 □

注意，此处 $|H_{21}(v)| + |H_{22}(v)| + |H_{23}(v)| = 34$，且 $N(v)$ 与 Γ_v之间至多有 48 条边。这意味着，若 $|H_{21}(v)| = 20$，则 $|H_{23}(v)| = 0$，从而 $|H_{22}| = 14$。类似地，我们可以得到三元组 $(|H_{21}(v)|, |H_{22}(v)|, |H_{23}(v)|)$ 的所有可能取值。这些取值以及每种情况下 $N(v)$ 与 Γ_v之间的边数 $|E(N(v) \ \Gamma_v)|$列于表 8。

$\lvert H_{21}(v)\rvert$	$\lvert H_{22}(v)\rvert$	$\lvert H_{23}(v)\rvert$	$\lvert E(N(v) \ \Gamma_v)\rvert$
20	14	0	48
21	13	0	47
21	12	1	48
22	12	0	46
22	11	1	47
22	10	2	48
23	11	0	45
23	10	1	46
23	9	2	47
23	8	3	48
24	10	0	44
24	9	1	45
24	8	2	46
24	7	3	47
24	6	4	48

表 8：$(|H_{21}(v)|, |H_{22}(v)|, |H_{23}(v)|)$ 的所有可能取值

在表 8 中，我们得到 $44 \leq |E(N(v) \ \Gamma_v)| \leq 48$。下一个引理描述了 $N[v]$ 中的顶点对 Γ 的度序列所作的贡献。

引理 2.13。 设 $diam(\Gamma) = 2$ 和 v 是 Γ中度为 6 的一个顶点。设 (a_1, b_1, c_1, d_1) 表示 Γ 的度序列由 $N[v]$中的顶点所产生的贡献。则有以下结论。

1. 若 $|E(N(v) \ \Gamma_v)| = 44$，则 $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \{(4, 1, 0, 2)、(4, 0, 2, 1)、(3, 2, 1, 1)、(2, 4, 0, 1)\}$ ，

2. 如果 $|E(N(v) \ \Gamma_v)| = 45$，则 $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \{(5, 0, 0, 2), (4, 1, 1, 1), (3, 3, 0, 1)\}$；3. 如果 $|E(N(v) \ \Gamma_v)| = 46$，则 $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \{(5, 0, 1, 1), (4, 2, 0, 1)\}$;

4. 如果 $|E(N(v) \ \Gamma_v)| = 47$，则 $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (5, 1, 0, 1)$,

5. 如果 $|E(N(v)\ \Gamma_v)| = 48$ 则 $(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1) = (6,\ 0,\ 0,\ 1)$。

证明。 假设 $|E(N(v)\ \Gamma_v)| = 44$。令 $N(v) = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$。那么我们有

$$9a_1 + 8b_1 + 7c_1 + 6d_1 = 56,$$

and

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 7.$$

由引理 1.1 可知 $2 \le a_1 \le 4$。此外，由定理 2.8 可得 $1 \le d_1 \le 2$。结合对 a_1 和 d_1的这些限制，可以很容易验证，上述方程组关于 (a_1, b_1, c_1, d_1) 的唯一解为 (4, 1,0, 2),(4, 0, 2,1), (3, 2,1, 1) 和 (2,4, 0, 1)。至此，*1*的证明完成。类似地，也可以证明其余部分。 □

现在我们来统计 Γ_v中度为 6, 7,8 和 9 的顶点数。显然 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) \le 34 \times 9 = 306$且 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) \ge \sum_{u\in\Gamma_v} d_{\Gamma_v}(u)+44 \ge 129\times 2+44 = 302$。因此我们有 $302 \le \sum_{u\in\Gamma_v} d(u) \le 306$。

引理 2.14。 设 $diam(\Gamma) = 2$和 v是 Γ中度为 6 的顶点。设 (a, b, c, d) 分别表示 Γ_v中度为 9、8、7 和 6 的顶点数。则有以下结论。

1. 若 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) = 302$, 则 $(a, b, c, d) \in$ {(32, 1, 0,1)、(32, 0,2, 0)、(31, 2, 1,0)、(30, 4,0, 0)}；2. 若 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) = 303$, 则 $(a, b, c, d) \in$ {(33, 0, 0,1)、(32, 1,1, 0)、(31, 3, 0,0)}；3. 若 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) = 304$, 则 $(a, b, c, d) \in$(33, 0, 1,0)、(32, 2,0, 0)}；4. 若 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) = 305$, 则 $(a, b, c, d) =$(33, 1, 0,0)；5. 若 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) = 306$, 则 $(a, b, c, d) =$(34, 0, 0,0)。

证明。 假设 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) = 302$。设 a, b, c和 d是 Γ_v中的顶点，在 Γ中的度分别为 9,8, 7 和 6。我们有

$$9a + 8b + 7c + 6d = 302,$$

$$a + b + c + d = 34.$$

由引理 1.1 可得 $30 \le a \le 32$。现在容易验证,

- $a = 30 \implies (b, c, d) = (4, 0, 0)$
- $a = 31 \implies (b, c, d) = (2, 1, 0)$ and
- $a = 30 \implies (b, c, d) \in \{(1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$.

这证明了*1*。可以用类似的论证证明其他部分。 □

定理 2.15。 设 $diam(\Gamma) = 2$ 和 Γ 有一个度为 6的顶点。那么度序列 *o* *f* Γ 是以下 *21* 个序列之一: *(40, 0, 0, 1), (39, 0, 1, 1), (38, 2, 0, 1), (38,0, 2, 1), (38, 1, 0, 2), (37, 2, 1, 1), (37, 1, 1, 2), (37, 0, 3, 1), (36, 4, 0, 1), (36, 3, 0, 2), (36, 2, 2, 1), (36,1, 2, 2), (36, 0, 4, 1), (35, 4, 1, 1), (35, 3, 1, 2), (35, 2, 3, 1), (34, 6, 0, 1), (34, 5, 0, 2), (34, 4, 2, 1), (33,6, 1, 1), (32, 8, 0, 1)*。

证明。我们将 Γ 的度序列写作 (a,b,c,d)，其中 a,b,c 和 d 分别是度为 9、8、7 和 6 的顶点数。由于 $N[v]$ 和 Γ_v 是 $V(\Gamma)$ 的划分，根据引理 2.13 和引理 2.14，我们有 $(a,b,c,d) = (a_1,b_1,c_1,d_1) + (a_2,b_2,c_2,d_2)$，其中 a_1,b_1,c_1,d_1 分别是 $N[v]$ 中度为 9、8、7、6 的顶点数，而 a_2,b_2,c_2,d_2 分别是 Γ_v 中度为 9、8、7、6 的顶点数。我们有 $|E(N(v)\ \Gamma_v)| \in \{44,45,46,47,48\}$。由于 Γ_v 是一个 (3, 9, 34)-图，$|E(\Gamma_v)| \geq 129$。若 $|E(\Gamma_v)| \geq 132$，则 $\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) \geq 264+44=308$，这与矛盾。故 $|E(\Gamma_v)| \in \{129,130,131\}$。若

- $|E(N(v)\ \Gamma_v)| = 44$，然后根据引理 2.13，$(a_1,b_1,c_1,d_1) \in$ {(4, 1, 0, 2)、(4, 0, 2, 1)、(3, 2, 1, 1)、(2, 4, 0, 1)}：$= S_{N[v]}$。此外在这种情况下，$\sum_{u\in\Gamma_v} d(u) \in \{302,304,306\}$。因此根据引理 2.14，$(a_2,b_2,c_2,d_2) \in$ {(32, 1, 0, 1)、(32, 0, 2, 0)、(31, 2, 1, 0)、(30, 4, 0, 0)、(33, 0, 1, 0)、(32, 2, 0, 0)、(34, 0, 0, 0)}：$=S_{\Gamma_v}$。因此我们得到 Γ 的度序列

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) \in \{&(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2) : (a_1,b_1,c_1,d_1) \in S_{N[v]}, (a_2,b_2,c_2,d_2) \in S_{\Gamma_v},\\ &d_1+d_2 \leq 2\}\\ = \{&(36,1,2,2),(35,3,1,2),(34,5,0,2),(37,1,1,2),(36,3,0,2),(38,1,0,2),\\ &(36,0,4,1),(35,2,3,1),(34,4,2,1),(37,0,3,1),(36,2,2,1),(38,0,2,1),\\ &(35,4,1,1),(37,2,1,1),(33,6,1,1),(32,8,0,1),(34,6,0,1),(36,4,0,1)\}.\end{aligned}$$

通过类似的论证，可以证明以下结论。

- 若 $|E(N(v)\ \Gamma_v)| = 45$，则 Γ 的可能度序列集合为

$$\begin{aligned}\{&(37,1,1,2),(36,3,0,2),(38,1,0,2),(36,2,2,1),(35,4,1,1),(37,2,1,1),\\ &(34,6,0,1),(36,4,0,1)\}\end{aligned}$$

- $|E(N(v)\ \Gamma_v)| = 46$，则 Γ 的可能度序列集合为{(38，0，2，1)，(37，2，1，1)，(39，0，1，1)，(36，4，0，1)，(38，2，0，1)}
- $|E(N(v)\ \Gamma_v)| = 47$，则 Γ 的可能度序列集合为 {(38，2，0，1)}。
- $|E(N(v)\ \Gamma_v)| = 48$，则 Γ 的可能度序列集合为 {(40，0，0，1)}

现在，对上述 Γ 的所有可能度序列取并，即可得到结论。 □

3 个 (3,10,40) 图

在本节中，我们假设 $R(3,10) = 41$。于是存在一个有 40 个顶点的 $R(3,10)$-临界图。设 Ω 是一个 (3, 10,40) 图。我们对 Ω 得出一些结论（假设它存在）。由于 $e(3,10,40) \geq 161$，可知 $\Delta(\Omega) = 9$。此外，$\delta(\Omega) \geq 40 - R(3,9) = 4$。

引理 3.1。 在Ω中，不存在一个顶点，使得它的两个邻点的度数和小于或等于11。

证明可通过与定理 2.1 的证明类似的论证得到。设 Ω_v 是图 $\Omega \setminus N[v]$。

引理 3.2。 设 $v \in V(\Omega)$ 且 $v_1,v_2 \in N(v)$。那么 $|N(v_1) \cup N(v_2)| \geq 11$。

定理 3.3. $diam(\Omega) = 2$ 或 3。

证明。显然 $diam(\Omega) \geq 2$。只需证明，对于任意 $u, v \in V(\Omega)$， $d(u,v) \neq 4$。设 $u, v \in V(\Omega)$，使得 $d(u,v) = 4$。那么 $N(u) \cup N(v)$ 在 Ω 中构成一个独立集。如果 u 或 v 的度数至少为 6，那么 $|N(u) \cup N(v)| \geq 10$。因此， u 和 v 的度至多为 5。所以 $\Omega \setminus (N[u] \cup N[v])$ 是一个至少有 29 个顶点的图，因此包含一个大小为 8 的独立集 S（因为 $R(3,8) = 28$）。

$S \cup \{u, v\}$ 在 Ω 中构成一个大小为 10 的独立集，这与题设矛盾。 □

推论 3.4. 设 $diam(\Omega) = 2$，且 v 是 6 度顶点。则 $N(v)$ 中度为 6 的顶点至多有2 个。

证明。设 $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$。我们首先证明，若 $N(v)$ 中有两个度为 6 的顶点，则它们在 Γ_v 中的邻点互不相交。假设 $d(v_1) = d(v_2) = 6$ 且 $(N(v_1) \cap N(v_2)) \cap V(\Gamma_v) \neq \emptyset$，则 $|N[v_1] \cap N[v_2]| \leq 12$。因此 $G \setminus (N[v_1] \cup N[v_2])$ 是一个至少有 28 个顶点的图，故包含一个大小为 8 的独立集 S。 $S \cup \{v_1, v_2\}$ 是 Γ 中一个大小为 10 的独立集，矛盾。因此 $(N(v_1) \cap N(v_2)) \cap V(\Gamma_v) = \emptyset$。

假设 $N(v)$包含三个度为6的顶点。并令 $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 6$。那么$N(v_1) \cup N(v_2) \cup N(v_3)$ 在 Γ_v中有15个顶点。令 $H = V(\Gamma_v) \setminus (N(v_1) \cup N(v_2) \cup N(v_3))$。如果 v_4、 v_5 或 v_6 中的任意一个在 H 中有7个邻点，那么它们与 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 一起构成 Γ中大小为10的独立集，这就产生了矛盾。因此，假设 v_4、 v_5 和 v_6 在H中都没有7个邻点。由于 $diam(\Gamma) = 2$ 和 $|H| = 18$， v_4、 v_5 和 v_6 各自在 H中有6个邻点。此外， v_4 的任何邻点都不与 v_5 或 v_6相邻，否则 v_5 或 v_6 就会在 H中有7个邻点。因此，$(N(v_4) \cap H) \cup \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$ 是 Γ中大小为11的独立集，这就产生了矛盾。 □

若 Ω 是 9-正则的，则其直径必为 2。因此，适用于直径为 2 的 (3, 10, 40) 图的结果也适用于可能的 9-正则(3, 10, 40)-图。记 $\Omega_i(v) = \{x \in V(\Omega) : d(x,v) = i\}$。采用此记号，$\Omega_0(v) = \{v\}$，$\Omega_1(v) = N(v)$，且对于 $i \geq 4$，$\Omega_i(v) = \emptyset$。下一个引理讨论当 $d(v) = 4$ 时， $i = 2$ 和 3 对应的 $\Omega_i(v)$ 的可能大小。

引理 3.5. 设 $v \in V(\Omega)$ 满足 $d(v) = 4$。则 $19 \leq |\Omega_2(v)| \leq 24$ 且 $11 \leq |\Omega_3(v)| \leq 17$。

证明。若 $|\Omega_3(v)| \geq 18$，则 $\Omega_3(v)$ 包含一个大小为 6 的独立集 S，它与 $N(v)$ 合在一起构成大小为 10 的独立集，产生矛盾。因此 $|\Omega_3(v)| \leq 17$。假设$|\Omega_3(v)| \leq 10$。则 $|\Omega_2(v)| \geq 25$。设 H 为 Ω 中由 $\Omega_2(v) \cup \Omega_3(v)$ 诱导的子图。则H是一个 (3, 9, 35) 图，因此根据引理1.2，它是 8-正则的。因此，$\Omega_2(v)$ 中的每个顶点恰好与 $N(v)$ 中的一个顶点相邻。设 $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$。由于 $|\Omega_2(v)| \geq 25$，因此在 $N(v)$ 中存在一个顶点（记作） v_1，使得 $d(v_1) \geq 8$，即 $N(v_1) \cap \Omega_2(v) \geq 7$。 $N(v_1) \cap \Omega_2(v)$ 与 $\{v_2, v_3, v_4\}$ 合在一起构成 Ω 中大小为 10 的独立集，产生矛盾。因此 $|\Omega_3(v)| \geq 11$，由此得到 $10 \leq |\Omega_3(v)| \leq 17$。

由于 $|\Omega_2(v)| + |\Omega_3(v)| = 35$，可得 $18 \leq |\Omega_2(v)| \leq 24$。假设 $|\Omega_2(v)| = 18$。那么$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) = 22$。根据引理 3.1， $d(v_1) + d(v_2) \geq 11$ 且 $d(v_3) + d(v_4) \geq 11$。这意味着 $d(v_1) + d(v_2) = 11$ 且 $d(v_3) + d(v_4) = 11$。令 $d(v_1) \leq d(v_2)$ 且 $d(v_3) \leq d(v_4)$。那么 $d(v_1) \leq 5$ 且 $d(v_3) \leq 5$，这与引理 3.1 矛盾。因此 $|\Omega_2(v)| \geq 19$，从而 $19 \leq |\Omega_2(v)| \leq 24$。 □

Denote $\Omega_v^i := \{x \in V(\Omega_v) : |N(x) \cap N(v)| = i\}$.

定理 3.6。若 $diam(\Omega) = 2$，则 $\delta(\Omega) \geq 6$。

证明。已知 $\delta(\Omega) \geq 4$。假设 Ω 中存在一个度为4的顶点 v。由于$diam(\Omega) = 2$, $|\Omega_2(v)| = 35$。这与引理 3.5 矛盾。

现在假设存在一个度为5的顶点 v。那么 $\Omega_v = G\backslash N[v]$ 是一个 (3，9，34) 图。因此 $\Omega_v^1 \geq 20$。若 $\Omega_v^1 > 20$，则在 $N(v)$ 中存在一个顶点 u，使得 $N(u) \cap N(\Omega_v^1) \geq 6$。因此，$N(u) \cap N(\Omega_v^1)$ 与 $N(v)$ 中其余的4个顶点共同构成一个大小为10的独立集，矛盾。因此 $|\Omega_v^1| = 20$。这意味着 $|E(N(v) \to \Omega_v)| \geq 20 + 28 = 48$，矛盾。因此 Ω 不可能有度为5的顶点。这意味着 $\delta(\Omega) \geq 6$。 □

引理 3.7. 若 $diam(\Omega) = 2$，则 $\kappa(\Omega) \geq 6$。

证明。假设 $\kappa(\Gamma) \leq 5$。那么存在一个大小为 5 的点割。设 $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 是 Γ 中的一个点割。设 H_1、H_2、.....、H_k 是 $\Gamma \setminus S$ 的 k 个连通分支，其中 $k \geq 2$。取 $H_1 = G_1$ 和 $\cup_{i=2}^{k} H_i = G_2$。设 $|V(G_1)| = n_1$。那么 $|V(G_2)| = n_2 = 35 - n_1$。不失一般性，假设 $n_1 \leq n_2$。接下来的证明与引理 2.5 的证明类似，只需考虑以下五种情形：$n_1 = 1$、$n_1 = 2$、$3 \leq n_1 \leq 7$、$8 \leq n_1 \leq 12$ 和 $13 \leq n_1 \leq 17$。 □

定理 3.8。若 $diam(\Omega) = 2$，则 $\kappa(\Omega) = \delta(\Omega)$。

证明。 $6 \leq \delta(\Omega) \leq 9$。考虑以下几种情况。**情况 I：** $\delta(\Omega) = 6$由命题 2.4 和引理 3.7 可得 $\kappa(\Omega) = 6$。

情况 II： $\delta(\Omega) = 9$
假设 Ω 有一个大小为 8 的点割。设 $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_8\}$ 是 Ω 的一个点割。设H_1，H_2，.....，H_k 是 Ω 的 k 个连通分支，其中 $\setminus\ S$ $k \geq 2$。取 $H_1 = G_1$和$\cup_{i=2}^{k} H_i = G_2$。设 $|V(G_1)| = n_1$。则 $|V(G_2)| = n_2 = 32 - n_1$。不失一般性，假设 $n_1 \leq n_2$。于是 $1 \leq n_1 \leq 16$. 现在考虑以下七种情况：(i) $n_1 =$1，$(ii)n_1 = 2(iii)3 \leq n_1 \leq 4(iv)n_1 = 5(v)6 \leq n_1 \leq 8(vi)9 \leq n_1 \leq 13$ 以及 $(vii)14 \leq n_1 = 16$。

若 $n_1 = 1$，则 G_1 是一个单顶点图 v，且 $d_\Omega(v) = 8$，这与假设矛盾。

若 $n_1 = 2$，则假设 $V(G_1) = \{v_1, v_2\}$。在这种情况下，$n_2 = 34$，因此 G_2 包含一个大小为 8 的独立集 S_2。这意味着 $v_1 \sim v_2$，否则 S_2 与 v_1 和 v_2 一起构成 Ω 中一个大小为 10 的独立集。由于 Ω 是无三角形的，u_1，u_2，...，u_8均不与v_1 和 v_2同时相邻。因此 $d(v_1) + d(v_2) \leq 10$，从而要么 $d(v_1) < 5$，要么 $d(v_2) < 5$，这与假设矛盾。

若 $3 \leq n_1 \leq 4$，则 G_1 包含一个大小为 2 的独立集，且 G_2 包含一个大小为 8 的独立集，因此 Ω 包含一个大小为 10 的独立集，这与假设矛盾。

若 $n_1 = 5$，则由命题 1.3 可知，G_1 中的边数至多为 6。令 $V(G_1) =\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$。$S$中的每个顶点至多与 $V(G)$中的两个顶点相邻，否则G_1 就不是 R(3，3)-临界的。因此 $d_\Omega(v_1) + d_\Omega(v_2) + d_\Omega(v_3) + d_\Omega(v_4) + d_\Omega(v_5) \leq 28$。这意味着，对于某个 $1 \leq i \leq 5$，有$d_\Omega(v_i) \leq 5$，矛盾。

对于其余情形，可以容易地证明（如同情形 $3 \leq n_1 \leq 4$）Ω包含一个大小为 10 的独立集，从而得到矛盾。因此 $\kappa(\Omega) \geq 9$，故由命题 2.4，$\kappa(\Omega) = 9 = \delta(\Omega)$。

情况 III： $\delta(\Omega) = 8$
通过取割集 $\{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$ 并考虑 $n_1 = 1$、$n_1 = 2$、$3 \leq 5$、$6 \leq n_1 \leq 10$、$11 \leq n_1 \leq 13$、$14 \leq n_1 \leq 16$ 等情况，可以给出与情况 II 类似的论证，从而得到$\kappa(\Omega) = 8$。

情况 IV： $\delta(\Omega) = 7$
通过取割集 $\{u_1, u_2, \ldots, u_6\}$ 并考虑 $n_1 = 1$、$n_1 = 2$、$3 \leq 6$、$7 \leq n_1 \leq 11$、$12 \leq n_1 \leq 16$ 等情况，可以给出与情况 II 类似的论证，从而得到 $\kappa(\Omega) = 7$。 □

定理 3.9。设 $diam(\Omega) = 2$ 和 S 是 Ω 中的一个最小割集。则 $S = N(v)$ 对某个$v \in V(\Omega)$成立。

证明。设 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ 是 Ω 的 k 个连通分支，其中 $\setminus S$ $k \geq 2$。不失一般性，假设 $|V(H_1)| \leq |V(H_i)|$ 对 $2 \leq i \leq k$成立。取 $H_1 = G_1$ 和 $\cup_{i=2}^{k} H_i = G_2$。令 $|V(G_1)| = n_1$。由于$S \leq 9$, $|V(G_2)| = n_2 = 31 - n_1$。因此 $1 \leq n_1 \leq 15$. 。为证明该结论，我们需要证明$n_1 = 1$。

假设 $n_1 \geq 2$。由于 $|S| = \kappa(\Omega) \leq \delta(\Omega)$, $6 \leq |S| \leq 9$。首先假设 $|S| = 9$。考虑以下情况 $2 \leq n_1 \leq 5, 6 \leq n_1 \leq 8, 9 \leq n_1 \leq 13$和 $14 \leq n_1 \leq 15$。如果 $2 \leq n_1 \leq 5$，那么根据命题 1.3， G_1 中的边数至多为 6，且 S 中没有顶点与 G_1中的两个以上顶点相邻。因此 $\sum_{v_i \in V(G_1)} d_\Gamma(v_i) \leq 30$。这意味着 G_1 中存在一个在 Ω 中度小于 9 的顶点，矛盾。如果 $6 \leq n_1 \leq 8$，那么 G_1 包含一个大小为 3 的独立集，而 G_2 包含一个大小为 7 的独立集，矛盾。当 $9 \leq n_1 \leq 13$ 和 $14 \leq n_1 \leq 15$ 时，也会类似地得到矛盾。当 $|S| = 8$,为 7 或 6 时，可以用类似的论证得到矛盾。证明完毕。

□

4 一些近乎等价的问题

我们知道所有可能的 (3，10，41) 图的度序列。具有相同度序列的图可能不止一个。能否建立一种方法，给出具有相同度序列的非同构图数量的上界？例如， [3], 中证明了 35 个顶点上的 8-正则图是唯一的。如果已知存在 r 个具有度序列 D_n 的非同构图，能否建立一种方法构造出所有这些图？这些问题可能与求 Ramsey 数 $R(s, t)$ 的问题有关。

参考文献

[1] V. Angeltveit， $R(3, 10) \leq 41$，组合学电子期刊 32 (2025年)，第 4 期，P4.30 .

[2] S. P. Radzizowski，小拉姆齐数，组合学电子期刊 1(1994年)，动态综述 1，共 30 页。

[3] J. Goedgebeur 和 S. P. Radzizowski：Ramsey 数 R(3,k) 的新计算上界，《组合学电子期刊》20 (2013年)，第 1 期，论文 30，共 22 页。

作者注： 我们开始研究这个问题时，已知 $40 \leq R(3,10) \leq 42$。我们试图在不使用计算工具的情况下证明 $R(3,10) \leq 41$ 。后来我们得知了 Angelveit 的论文（arXiv，2023年12月；《组合学电子期刊》，2025年11月）。这篇论文给出了一个计算密集型证明，证明了 $R(3,10) \leq 41$。鉴于这一结果，我们在论文中增添了第 3 节，并暂时搁置了该项目，同时考虑如何拓展和重新调整这项工作。