arXiv:2601.03575v1 [math.AP] 7 Jan 2026

平面波的存在性、唯一性与分类

ROBERT MILTON

Abstract. 本文考察平面波问题中解的存在性与唯一性

$$\begin{aligned}\partial_\xi\,\partial_\xi\,\check{\mathsf{x}}+\partial_\xi\,\check{\mathsf{x}}+V^{-2}\,\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})&=0\\ D^{-1}\,\partial_\xi\,\partial_\xi\,\check{\mathsf{z}}+\partial_\xi\,\check{\mathsf{z}}-V^{-2}\,\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})&=0\\ \partial_\xi\,\check{\mathsf{x}}\to 0\text{ and }\check{\mathsf{z}}\to 0\quad\text{as}\quad\xi&\to-\infty\\ \check{\mathsf{x}}\to 0\text{ and }\check{\mathsf{z}}\to 1\quad\text{as}\quad\xi&\to+\infty\end{aligned}$$

其中反应函数 $\check{\mathsf{r}}$ 光滑且严格为正（不可逆）。采用基础的解析方法，保证在某个阈值 $V>V_*$ 以上的每一个波速下，都存在唯一的平面波。该结果可直接推广到截断反应 $\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}}<\check{\mathsf{X}}\,\check{\mathsf{z}})=0$。这些结果并不新颖，但证明方法颇具新意。

1. Introduction

自然过程的一个常见特征是自我加速的生成，人口增长、热引燃和化学自催化便是典型例子。将燃料（或猎物）$\check{\mathsf{z}}$ 转化为产物（或捕食者，或热）$\check{\mathsf{x}}$ 的不可逆反应速率 $\check{\mathsf{r}}$，取决于两种 物种的存在，并因两者存在而增强。这使得在一个起初均匀、规模庞大的燃料储库 $\check{\mathsf{z}}=1$ 中，局部播种产物 $\check{\mathsf{x}}$ 能够形成传播波（或火焰）；与此同时，菲克扩散与局部集中的反应相平衡：

$$\begin{aligned}\partial_t\,\check{\mathsf{x}}&=\check{\nabla}^2\,\check{\mathsf{x}}+\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})\\ \partial_t\,\check{\mathsf{z}}&=D^{-1}\,\check{\nabla}^2\,\check{\mathsf{z}}-\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})\end{aligned}$$

浓度和距离的单位总可以选取得当，使储库中 $\check{\mathsf{z}}$ 的浓度和 $\check{\mathsf{x}}$ 的扩散率均为 1。无量纲参数 $D>0$ 表示燃料 $\check{\mathsf{z}}$ 的相对扩散率（路易斯数）。

典型的波前没有曲率，沿两个欧几里得方向保持均匀。其余的 $\check{\xi}$ 方向被认为支持一个平面波，该波在以恒定速度 $\check{V}$ 移动的参考系 $(\xi,\ t)\ \cong\ (\xi+V\Delta t,\ t+\Delta t)$ 中保持不变。在行波坐标 $\xi:=V(\xi-Vt)$ 中捕捉这种对称性，可得

$$\begin{aligned}\partial_\xi\,\partial_\xi\,\check{\mathsf{x}}+\partial_\xi\,\check{\mathsf{x}}+V^{-2}\,\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})&=0\\ D^{-1}\,\partial_\xi\,\partial_\xi\,\check{\mathsf{z}}+\partial_\xi\,\check{\mathsf{z}}-V^{-2}\,\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})&=0\end{aligned}$$

满足

$$\begin{aligned}\partial_\xi\,\check{\mathsf{x}}\to 0\text{ and }\check{\mathsf{z}}\to 0\quad\text{as}\quad\xi&\to-\infty\quad\text{(exhausted fuel)}\\ \check{\mathsf{x}}\to 0\text{ and }\check{\mathsf{z}}\to 1\quad\text{as}\quad\xi&\to+\infty\quad\text{(fresh fuel)}\end{aligned}$$

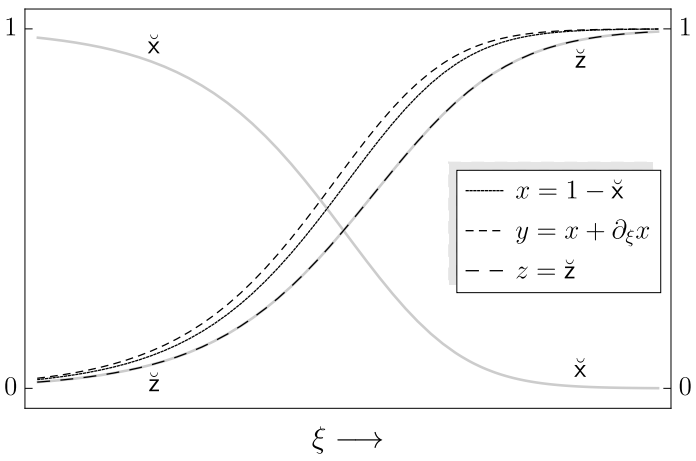

Figure 1. 灰色表示沿 ξ 正方向传播的平面波的浓度剖面。黑色曲线描绘动力系统表述 $\mathbf{u}:=(x,\ y,\ z)^\intercal$；其中第三个分量恰好与 $\check{\mathsf{z}}$ 的灰色剖面重合。

图1展示了该方程的解。首要关注的是在反应 $\check{\mathbf{r}}$ 和扩散率 D给定时，支持此类解的平面波速集合 $\{V\}$。实践中实际观测到的 V 可能取决于从初始播种 $\check{\mathbf{x}}(\check{\xi},\ t=0)$开始的演化过程，但这超出了（或尚未进入）本研究的范围。

自 Fisher-KPP 方程问世以来，等扩散（$D=1$）系统便广受关注$\check{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{z}}(1-\check{\mathbf{x}})^K$ [Fisher，1937年，Kolmogorov 等人， 1937], 以及火焰动力学中的高活化能近似 [Zel′dovich 和 Frank-Kamenetskiĭ， 1938]。20世纪70年代的研究表明，只要反应速率关于两种物种均为 Lipschitz 连续，任意波速$V \geq V_*$ 都可能出现 [Aronson 和 Weinberger，1978年，Fife 和 McLeod， 1977]。每种这样的 $\check{\mathbf{r}}$ 都具有自己的最小波速 V_*，并最终可由任意严格局部播种 $\check{\mathbf{x}}(\xi,\ t=0)$实现$\check{}$。

平面波存在性是相空间平面拓扑的一项基本特征。然而， $D \neq 1$ 涉及三维相空间，难以用初等拓扑方法加以处理。20世纪80年代，这一一般问题得到了彻底解决[Marion， 1985], 其方法是对问题本身进行精妙的拓扑变形，而非变形其轨迹。这项工作确立了在反应速率 $V \geq V_*$ 为 Lipschitz 连续且 $D \in \mathbb{R}^+$任意的情况下的平面波速 $\check{}$，重现并拓展了等扩散情形下的结果。此后，相关方法已推广至范围不断扩大的问题类别 [Volpert 等人， 1994]。

本文通过对自治动力系统 2.4 进行基本的相空间分析来表述平面波问题，

$$\mathbf{u} := (x,y,z)^\intercal := \big((1-\check{\mathrm{x}}),(1-\partial_\xi\check{\mathrm{x}}-\check{\mathrm{x}}),\check{\mathrm{z}}\big)^\intercal$$
$$\Lambda r(\mathbf{u}) := V^{-2}\check{\mathrm{r}}(\check{\mathrm{x}},\check{\mathrm{z}})$$

平面波速通过 lentor（字面意思为“缓慢”） $\Lambda \propto V^{-2}$表示。本文证明，对于任意 $\Lambda \leq \Lambda_*$ ，只要 r 在两种物种中均为光滑（无限可微）的，就存在唯一的平面波。这涵盖了大多数符合物理实际的情形，但其结论弱于一般性结果，旨在对后者作补充。一般性结果借助 Leray-Schauder 拓扑度这一高阶工具推广了 Brouwer 不动点定理。相比之下，本文仅依靠分析学的基础工具：连续性、极限和中值定理（Banach 不动点定理也按惯例客串了一下 Picard-Lindel¨）。用于支撑这些工具的符号将在下一节的问题表述中给出。第3节描述相空间，随后第4节介绍进入点与离开点。这些开篇各节的内容大多是标准材料，主要为后续各节提供术语表和资料库。核心论证见第5–6节，其中构造了 $\Lambda+\epsilon$各轨迹之间一致连续且单调的对比。该对比在第7节为证明提供了足够（但并不完整）的导数，最后再加以完善。第8节汇总结果并作评论。

这种初步方法旨在为 Marion 等人的工作提供一种次要的替代视角。目前尚不清楚这两种方法彼此之间如何关联，或者它们与传统上应用于等扩散系统的相平面论证究竟有何关系。

2. Plane Waves

定义 2.1. 记号约定 如下。除微小量 $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ 外，常数用大写字母表示，变量用小写字母表示。向量以粗体表示，通常用常数表示。

$$\mathbf{0} := (0,0,0)^\intercal;\quad \mathbf{1} := (1,1,1)^\intercal;\quad \mathbf{1_x} := (1,0,0)^\intercal;\quad \mathbf{1_y} := (0,1,0)^\intercal;\quad \mathbf{1_z} := (0,0,1)^\intercal$$

紧空间上加上上划线，其开内部则不加。这使得任意连续函数 $f\colon\ \mathbb{U}\to\mathbb{R}$ 都具有最大的开内部 $f\colon\ \mathbb{U}\to\overline{\mathbb{R}}$，使得 $f(\mathbb{U}) = f\big(\mathbb{U}\big)$。下文中同样如此，函数作用于集合王表示得到该集合的像。作为算子的函数采用哥特体字形，例如将 $\mathfrak{x}$ 投影到 yz 平面

$$\mathfrak{x}\,\mathbf{u} := (y,z)^\intercal \quad \text{for all} \quad \mathbf{u} := (x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 := \left]-\infty,+\infty\right[^3$$

然而，标准微分算子仍采用普通字体，完全多余的上划线也可以省略。当指定某个特定的良序时，会将其以下标形式标在良序集上，如 $\{\mathbf{u}_m\}_\succ$。

$k \in \mathbb{N}$ 次连续可微函数类记作 $\mathbb{F}^{(k)}\big(\mathbb{U}\big)$。零阶导数为 $f_{(0)} := f$，而 $\mathbb{F}^{(k)}\big(\mathbb{U}\big)$ 规定边界 $\mathbb{U}\setminus\mathbb{U}$处单侧导数的单侧连续性。有限的、 $\overline{\mathbb{R}}$值函数这一概念较为常见，例如允许 $\overline{\exp} \in \mathbb{F}^{(\infty)}\big(\mathbb{R}^-\big)$ ，但不包括恒等函数 $1 \notin \mathbb{F}^{(0)}\big(\mathbb{R}^-\big)$。因此，连续的 $f_{(k)}$可能不存在紧化 $\overline{f}^{(k)}$，不过若紧化存在，则必然唯一且连续。这一可能性意味着在$\overline{\mathbb{F}}^{(0)}\big(\mathbb{U}\big)$上存在一致范数$\big\|f^{(k)}\big\|_{\mathbb{U}}$ ，因此现已不再采用，而改用

$$\big\|\overline{f}^{(k)}\big\|_{\overline{\mathbb{U}}} := \sup\big|\overline{f}^{(k)}\big(\overline{\mathbb{U}}\big)\big| = \sup\big|f^{(k)}\big(\mathbb{U}\big)\big| \in \mathbb{R} \quad \text{for all} \quad \overline{f} \in \mathbb{F}^{(k)}\big(\overline{\mathbb{U}}\big) \subset \mathbb{F}^{(k)}\big(\mathbb{U}\big)$$

这些定义自然延伸至向量值 $\mathbf{f}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ 的 Fr´échet 导数 $\mathbf{f}^{(k)}$，其中模 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$上的欧几里得范数。

不连续导数以利普希茨常数的形式发挥作用

$$\|\overline{\mathbf{f}}^{(k+1)}\|_{\overline{\mathbb{U}}} := \sup|\overline{\mathbf{f}}^{(k+1)}(\overline{\mathbb{U}})| \in \mathbb{R} \quad \text{for all} \quad \overline{\mathbf{f}} \in \mathbb{F}^{(k,1)}(\overline{\mathbb{U}}) \subset \mathbb{F}^{(k)}(\overline{\mathbb{U}})$$

只要存在利普希茨常数，这些常数便存在 [Schechter，1997年，第 681], 页¨正如函数空间 $\mathbb{F}^{(k,1)}(\mathbb{U})$上赫尔德指数为 1 所表明的那样。再次根据上确界的等价性，自然应以紧化域取代$\mathbb{F}^{(k,1)}(\mathbb{U})$ 。没有任何连续性类 $\mathbb{F}$ 本身是紧的，但我们关注的是 $\mathbb{U}$中的序列，而非 $\mathbb{F}^{(k)}$ 或 $\mathbb{F}^{(k,1)}$。

定义 2.2. 反应扩散环境 $(r; D)$确定扩散率 $D \in \mathbb{R}^+$以及满足下文方程（2.1）–（2.4）的反应函数r 。环境预先确定且始终不变，不过其具体设定可以任意。这就规定了所研究的物理系统，即一整族平面波问题的生境。

反应函数 f unction r 必须非负，仅取决于非负量 $(1 - x)$ 和 $\overline{z}$

$$\begin{aligned} [0,1]^3 =: \overline{\mathbb{U}}_{\min} \subseteq \ \overline{\mathbb{U}} := \operatorname{dom}(\overline{r}) \ \subseteq \overline{\mathbb{U}}_{\max} := [-\infty, 1] \times \overline{\mathbb{R}} \times [0, +\infty] \\ \overline{r}(\overline{\mathbb{U}}) \subset \overline{\mathbb{R}^+} \\ \partial_y \overline{r}(\overline{\mathbb{U}}) = \{0\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

并且这种依赖至关重要

$$\ker(\overline{r}) := \overline{r}^{-1}(\{0\}) = \{\overline{\mathbf{u}} := (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})^\intercal \in \overline{\mathbb{U}} \mid \overline{z}(1 - \overline{x}) = 0\} \tag{2.2}$$

它必须光滑

$$\overline{r} \in \mathbb{F}^{(\infty)}(\overline{\mathbb{U}}) \tag{2.3}$$

并且关于 z 严格递增

$$\frac{\overline{r}}{\partial_z \overline{r}} \in \mathbb{F}^{(0)}(\overline{\mathbb{U}}) \tag{2.4}$$

环境及其所支持的一切在 $\mathbb{U}$ 之外均被强制定义为无意义。

定义 2.3。平面波问题由反应扩散环境 2.2 和 lentor$\Lambda \in \mathbb{R}^+$ 指定。它由受边界约束 2.5、2.6 约束的自治系统 2.4 组成。本文在环境不变的情况下，将每个问题视为 Λ 变化时的问题。固定参数保持隐含状态，仅按 lentor 对问题族进行索引。

定义 2.4。支配平面波问题的自治系统 Λ为

$$\partial_\xi \begin{pmatrix} x(\Lambda;\xi) \\ y(\Lambda;\xi) \\ z(\Lambda;\xi) \end{pmatrix} =: \partial_\xi \, \mathbf{u}(\Lambda;\xi) = \mathbf{a}_\Lambda(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} y(\xi) - x(\xi) \\ \Lambda r(\mathbf{u}) \\ Dy(\xi) - Dz(\xi) \end{pmatrix}$$

其中，$\xi \in \mathbb{R}$ 为行波坐标。最右端缺失的参数应根据左侧内容推断，如 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\Lambda; \xi)$ 中所示。参数按严格顺序省略，例如 $y(\Lambda; \xi) = y(\xi)$，而绝不写作 $y(\Lambda)$。当预期的推断不含歧义时，将以这种方式省略参数，希望在忠实度与流畅度之间取得某种折衷。

定义 2.5。原始边界约束 $\mathbf{u}(\Lambda; -\infty) = \mathbf{0}$ 规定了滞留在波前之后的耗尽态。

定义 2.6。终端边界约束 $\mathbf{u}(\Lambda; +\infty) = \mathbf{1}$ 指定了波前到来前等待的新鲜态。

命题 2.7。 平面波对称性 排除了唯一解：$\mathbf{u}(\Lambda; \xi)$ 满足定义 *2.2–2.6*，当且仅当$\mathbf{u}(\Lambda; \xi + \Xi)$ 对所有 $\Xi \in \mathbb{R}$ 都满足这些定义。

定义 2.8。平面波 是问题 Λ 的任意解的像$\mathbf{u}(\mathbb{R}_\Lambda)$ ，其中

$$\mathbb{R}_\Lambda := \{\Lambda\} \times \mathbb{R}$$

下标 lentor 将以这种方式伴随任意区间。诸如此类的断言

$$\overline{f} \in \mathbb{F}^{(\infty)}([0,1]_\Lambda) := \mathbb{F}^{(\infty)}(\{\Lambda\} \times [0,1])$$

对 Λ依赖性未作任何说明：严格按照记号 2.1，这既未规定关于 Λ 在 $\{\Lambda\}$上的单侧连续性，也未规定其单侧导数。

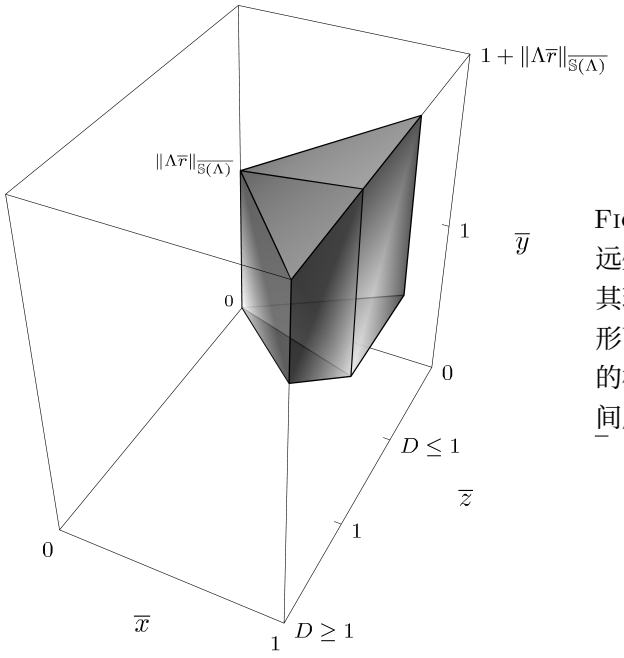

FIGURE 2. 问题 Λ在不同环境下的两个示意性相空间。远处的三棱柱与环境（r； $D\leq 1$）有关。近处的棱柱被其环境（r； $D\geq 1$）截去一部分——顶部和底部的三角形面并不平行。在等扩散环境（r； $D=1$）中，问题Λ的相空间是两个棱柱的平面交集，其中$z=x_{\circ}$。位于相空间底部的平衡点**0** 和**1**已用聚光灯标出。

3. ORBITALS

引理 3.1。 问题 Λ的相空间

$$\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}:=[0,1]\times\Big[\max(\overline{x},\overline{z}),\ \overline{x}+\|\Lambda\overline{r}\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big]\times[\overline{x}\min(D,1),\ \overline{x}\max(D,1)]$$

图2所示的情形在无害地归入 $\mathbb{U}$时是不可避免的。在任何等扩散环境$(r;D=1)$中，它都是二维的 $z\Subset[x,x]$ 。此时，$\mathbf{z}$分量只是重复$\mathbf{x}$分量，因此在本文中必须始终忽略。

满足自治系统 *2.4* 的内部轨道$\mathbf{u}\big(\mathbb{R}_\Lambda\big)\subseteq\mathbb{S}(\Lambda)$ 是光滑的$\mathbf{u}\in\mathbb{F}^{(\infty)}\big(\mathbb{R}_\Lambda\big)$，且严格递增

$$\partial_\xi\,\mathbf{u}\big(\mathbb{R}_\Lambda\big)\subseteq\mathbf{a}_\Lambda\big(\mathbb{S}(\Lambda)\big)\subseteq\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$$

在边界约束之外，单调性对 $\mathbb{S}(\Lambda)$ 仍然严格，因此

$$\{singular\ points\}:=\overline{\mathbf{a}}_\Lambda^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)=\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

证明。自治系统 2.4 具有单调性，并可重排为

$$\begin{aligned}\partial_\xi(\overline{y}-\overline{x})+(\overline{y}-\overline{x})=\partial_\xi(\overline{y}-\overline{z})+D(\overline{y}-\overline{z})&=\Lambda\overline{r}(\overline{\mathbf{u}})\\ \partial_\xi(\overline{z}-\overline{x})+D(\overline{z}-\overline{x})&=(D-1)(\overline{y}-\overline{x})\\ \partial_\xi(\overline{z}-D\overline{x})+(\overline{z}-D\overline{x})&=(1-D)\overline{z}\end{aligned}$$

确认 $\mathbb{S}(\Lambda)\subseteq\mathbb{U}$是一个合理（不可规避的）相空间。$\mathbb{S}(\Lambda)$上的严格单调性阻止 $\mathbb{S}(\Lambda)\setminus\mathbb{U}_{\min}$有害地参与伪平面波，从而允许（或许并不成立的）包含关系$\mathbb{S}(\Lambda)\subseteq\mathbb{U}_{\circ}$。□

定义 3.2. 紧轨道 $\mathbf{v}\big([X_o,X]_\Lambda\big):=\mathbf{u}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big)\subseteq\mathbb{S}(\Lambda)$ 无论是否满足边界约束，均满足自治系统 2.4。这条三维空间中的曲线自然分解为其轨道定义域

$$\overline{v}_{\mathbf{x}}(\Lambda;\overline{x}):=\overline{x}(\Lambda;\xi)\in[X_o,X]_\Lambda:=\{\Lambda\}\times\overline{x}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big)$$

和轨道投影（在等扩散环境中舍弃$\overline{v}_{\mathbf{z}}$（$r$； $D=1$））

$$\begin{pmatrix}\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;\overline{x})\\ \overline{v}_{\mathbf{z}}(\Lambda;\overline{x})\end{pmatrix}:=\overline{\mathfrak{X}}\,\overline{\mathbf{v}}(\Lambda;\overline{x}):=\overline{\mathfrak{X}}\,\overline{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)\in\overline{\mathfrak{X}}\,\overline{\mathbf{v}}\big([X_o,X]_\Lambda\big):=\overline{\mathfrak{X}}\,\overline{\mathbf{u}}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big)$$

相应的内部轨道为 $\mathbf{v}\big(]X_o,\ \ X[_\Lambda\big):=\mathbf{u}\big(]\Xi_o,\ \ \Xi[_\Lambda\big)\subseteq\mathbb{S}(\Lambda)$。在相空间中，任何轨道均由定义 3.1 界定，且除非是另一轨道的真子集，否则就是极大的。

引理 3.3。 支配轨道的非自治蒸馏方程为

$$\partial_x \begin{pmatrix} v_{\mathbf{y}}(\Lambda;x) \\ v_{\mathbf{z}}(\Lambda;x) \end{pmatrix} := \partial_x \, \mathfrak{X}\, \mathbf{v}(\Lambda;x) = \mathbf{b}_\Lambda(\mathbf{v}) := \frac{1}{(v_{\mathbf{y}} - x)} \begin{pmatrix} \Lambda r(\mathbf{v}) \\ D v_{\mathbf{y}} - D v_{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

满足

$$\overline{\mathbf{v}}(\Lambda; X_o) = \overline{\mathbf{u}}(\Lambda; \Xi_o)$$

这确保 $\mathbf{v}(\Lambda;X)^{\urcorner} = \mathbf{u}(\Lambda;\Xi)_{\llcorner}$。轨道连续且内部光滑

$$\overline{\mathbf{v}} \in \mathbb{F}^{(0)}\big([X_o, X]_\Lambda\big)$$
$$\mathbf{v} \in \mathbb{F}^{(\infty)}\big(]X_o, X[_\Lambda\big)$$

投影分量 $\mathbf{n} \in \{\mathbf{y},\mathbf{z}\}_{\succ}$ 的导数若在两个端点均存在，则一致连续

$$\overline{v}_{\mathbf{n}} \in \mathbb{F}^{(k)}\big([X_o, X]_\Lambda\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{v}^{(k)}_{\mathbf{n}}\big(\{\Lambda\} \times \{X_o, X\}\big) \subset \mathbb{R}.$$

证明。 利用 $\partial_\xi \, x \, \partial_x \mathbf{v} = \partial_\xi \, \mathbf{u}$ 对自治系统 2.4 进行投影，得到非自治蒸馏方程。反复求导可确保 $\partial_\xi \, x > 0$ 在 $\mathbb{S}(\Lambda)$ 内部光滑。一致连续性在将 $v^{(k)}_{\mathbf{n}}$紧化后显而易见，所需极限由仅针对 $\mathbf{v}^{(0)}$ 的边界约束确保。 □

定义 3.4. 核点 $\mathbf{U} := (X,Y,Z)^{\intercal} \in \mathbb{S}(\Lambda) \cap \ker(\overline{r})$，要么是原始的（$Z = 0$，解释为$X = 0$ 当且仅当 $D = 1$），要么是终端的（$X = 1$）。当且仅当 $\mathbf{U} = \mathbf{1}X$时，它是奇异的；否则为正则。根据轨道所包含的核点来描述轨道。

引理 3.5。 紧轨道 $\mathbb{V}(\Lambda)$ 被定义为一个极大奇异原始轨道。每个问题$\Lambda \in \mathbb{R}^+$ 都会生成一个唯一的紧轨道，无论终端 $\mathbb{V}(\Lambda) = \mathbf{v}\big([0,1]_\Lambda\big)$是奇异的还是正则的。

证明。 从根本上说，该引理依赖于一个具有全局利普希茨性质的反应函数

$$\Lambda \overline{r} \in \mathbb{F}^{(0,1)}\big(\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big\|\Lambda \overline{r}^{(1)}\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} := \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{S}(\Lambda)} \sqrt{\Lambda^2 \, \partial_x \, r(\mathbf{u})^2 + \Lambda^2 \, \partial_z \, r(\mathbf{u})^2} \in \mathbb{R}$$

该函数由方程 (2.1)–(2.3) 和定义 3.1 保证。中值定理适用于 $\mathbf{a}_\Lambda \in \mathbb{F}^{(\infty)}\big(\mathbb{S}(\Lambda)\big)$，从而为自治系统 2.4 提供全局利普希茨常数

$$\big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} := \sup_{\mathbb{S}(\Lambda)} \sup_{\overline{\mathbb{O}}} \big|\mathbf{a}^{(1)}_\Lambda(\mathbf{u})\, \overline{\mathbf{o}}\big| \quad \text{for the unit sphere} \quad \overline{\mathbb{O}} := \big\{\overline{\mathbf{o}} \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; |\overline{\mathbf{o}}| = 1\big\}$$

雅可比矩阵 $\mathbf{a}^{(1)}_\Lambda(\mathbf{u})$ 在定义 4.2 中被明确计算，由此柯西-施瓦茨不等式给出界

$$\big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} \leq \sqrt{2 + \big\|\Lambda \overline{r}^{(1)}\big\|^2_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} + 2D^2}$$

Picard-Lindel¨of 从而保证了唯一解 [Arnol′d, 1992,Teschl, 2012]，该解对应于从正则核点出发的自治系统 2.4

$$\overline{\mathbf{u}}_m(\Lambda; -m) = \mathbf{1}_{\mathbf{y}} \big\|\Lambda \overline{r}\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} \, \exp\Big(-2m \big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big) \quad \text{for} \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

由此构造的最大轨道终止于$\mathbf{u}_m(\Lambda;\Xi_m) \in \mathbb{S}(\Lambda) \setminus \mathbb{S}(\Lambda)$。定义 3.1 确认该轨道是终端的 $x_m(\Lambda;\Xi_m) = 1$，并且

$$\mathbf{u}_{m+1}(\Lambda; -m) \in [0, y_{m+1}(\Lambda; -m)]^3$$

根据格朗沃尔不等式

$$y_{m+1}(\Lambda; -m) \leq \overline{y}_{m+1}(\Lambda; -m-1) \exp\Big(\big\|\Lambda \overline{r}^{(1)}\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big) = \big\|\Lambda \overline{r}\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} \, \exp\Big(\big\|\Lambda \overline{r}^{(1)}\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} - 2(m+1)\big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big)$$

再次

$$\begin{aligned} \big|\mathbf{u}_{m+1}(\Lambda;\xi) - \mathbf{u}_m(\Lambda;\xi)\big|^2 &\leq \big|\mathbf{u}_{m+1}(-m) - \overline{\mathbf{u}}_m(-m)\big|^2 \exp\Big(2(\xi+m)\big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big) \\ &\leq \big(3y^2_{m+1}(-m) + \overline{y}^2_m(-m)\big) \exp\Big(2(\xi+m)\big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big) \\ &\leq \big\|\Lambda \overline{r}\big\|^2 \Big(3\exp\Big(2\big\|\Lambda \overline{r}^{(1)}\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}} - 4\big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big) + 1\Big) \exp\Big(2(\xi-m)\big\|\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda\big\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big) \end{aligned}$$

显然，当 m 超过 ξ 后，数列 $\{\mathbf{u}_m(\Lambda;\xi)\}_{\succ}$ 一致收敛，数列 $\Big\{\mathbf{a}^{(1)}_\Lambda(\mathbf{u}_m(\Lambda;\xi))\Big\}_{\succ}$ 也如此。这足以构造内部轨道

$$\mathbb{V}(\Lambda) := \mathbf{u}\big(\mathbb{R}_\Lambda\big) := \lim_{m \to \infty} \mathbf{u}_m\big(\mathbb{R}_\Lambda\big)$$

其紧化是唯一的，始端为奇异，终端为（奇异或正则）。 □

定义 3.6。权重 $\mathfrak{M}\langle f|g\rangle[X_o,X]_\Lambda \in f\big(]\Xi_o,\ \Xi[_\Lambda\big)f \in \mathbb{F}^{(0)}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big)$ 在非递减权重 $g \in \mathbb{F}^{(1)}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big)$，$\partial_\xi\, g\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big) \subset \mathbb{R}^+$ 下的轨道平均值为

$$\mathfrak{M}\langle f|g\rangle[X_o,X]_\Lambda := \mathfrak{M}\langle f|g\rangle[\overline{x}(\Lambda;\Xi_o),\overline{x}(\Lambda;\Xi)]_\Lambda := \frac{1}{\overline{g}(\Lambda;\Xi)-\overline{g}(\Lambda;\Xi_o)}\int_{\Xi_o}^{\Xi} f(\Lambda;\xi)\,\partial_\xi\, g(\Lambda;\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

略去权重并恢复上划线（以示强调）后，轨道积分可简写为

$$\overline{\mathfrak{I}}\langle\overline{f}\rangle[X_o,X]_\Lambda := \overline{\mathfrak{I}}\langle\overline{f}\rangle[\overline{x}(\Lambda;\Xi_o),\overline{x}(\Lambda;\Xi)]_\Lambda := \int_{\Xi_o}^{\Xi} f(\Lambda;\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

显然，这通常不是平均值：或许 $\mathfrak{I}\langle f\rangle[X_o,X]_\Lambda \notin f\big(]\Xi_o,\ \overline{\Xi}[_\Lambda\big)$。

平均值性质在本文中发挥着至关重要的作用，需要格外谨慎。以下权重 g 在原点 $\mathbf{0}$ 处始终是可容许的，但在奇异终点 $\mathbf{1}$ 处通常发散。因此，当 f 在原点发散时，本定义通常将应用于从 $[\Xi_o,\Xi]_\Lambda \subset [-\infty,+\infty[_\Lambda$ 收缩至 $[\Xi_o,\Xi]_\Lambda \subset \mathbb{R}_\Lambda$ 的情形。这促使我们采用仿射扩展实数。

4. Kernel Points

定义 4.1. 到核点 $\mathbf{U}$ $\in \mathbb{V}(\Lambda)$ **的轨道渐近线** $\mathbf{v}\big((1-\epsilon)X,\ (1-\epsilon)X+\epsilon\big]_\Lambda\big) \subset \mathbb{S}(\Lambda)$ **满足**

$$\tilde{\mathbf{v}}(\Lambda;\overline{x}) = \overline{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi) + o\big(\overline{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)-\overline{\mathbf{U}}\big) \quad \text{as} \quad \overline{x}(\Lambda;\xi)\to\overline{X}$$

且当抬升量（$\tilde{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;\ x)-x$）随 Λ 在某个 $x \in \big[(1-\epsilon)X,\ (1-\epsilon)X+\epsilon\big]$ 处变化时，称其为 Λ-抬升。

定义 4.2. 自治系统 2.4 的雅可比矩阵 是 Fr´echet 导数

$$\overline{\mathbf{a}}^{(1)}_\Lambda(\overline{\mathbf{u}}) := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\overline{\mathbf{u}}) & 0 & \Lambda\,\partial_z\,\overline{r}(\overline{\mathbf{u}}) \\ 0 & D & -D \end{pmatrix}$$

其在奇异 $\mathbf{u} = \mathbf{1}X \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$ 处的特征值和特征向量记为 $\big\{\Omega_{\mathbf{j}}(\Lambda;X)\ \ \mathbf{1}_{\mathbf{j}}(\Lambda;X)\big\}$，并满足

$$\mathbf{1}_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X}) := \begin{pmatrix} 1 \\ (1+\Omega_{\mathbf{j}}) \\ D(1+\Omega_{\mathbf{j}})/(D+\Omega_{\mathbf{j}}) \end{pmatrix}$$

在 $\mathbf{1}_{\mathbf{j}}(\Lambda;\ X) := \mathbf{1}_{\mathbf{z}}$ 当且仅当 $\Omega_{\mathbf{j}}(\Lambda;\ X) = -D$ 的条件下。每当等扩散性迫使 $z = x$ 时，必须忽略第三个特征模态 $\mathbf{j} \in \mathbb{J}_\succ := \{\text{-- }+,\ \text{`}\mathbf{z}\}_\succ$。除此之外，特征模态按从渐缓到陡峭的顺序排列，从而对 $\mathbb{J}_\succ$ 施加 -- $\prec + \prec$ `$\mathbf{z}$，使得 $|\Omega_-| \le |\Omega_+|$。

定义 4.3。奇异核点 $\mathbf{u}(\Lambda;\ \pm\infty) = \mathbf{1}X \in \{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$ **的线性渐近线** $\mathbf{u}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big)$ **是**

$$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi) := \begin{pmatrix} \vec{x}(\Lambda;\xi) \\ \vec{y}(\Lambda;\xi) \\ \vec{z}(\Lambda;\xi) \end{pmatrix} := \mathbf{1}\overline{X} + \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{J}_\succ} \Upsilon_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X})\mathbf{1}_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X})\exp(\Omega_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X})\xi)$$

保留例外情况

$$\text{Replace } \mathbf{1}_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X}) \text{ with } \begin{cases} \mathbf{1}\overline{X} - \mathbf{1}\vec{x}(\Lambda;\xi) & \text{if non-hyperbolic } \Omega_{\mathbf{j}} = 0 \\ E_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X})\mathbf{1}_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X})\xi + \mathbf{E}_{\mathbf{j}}(\Lambda;\overline{X}) & \text{if hyperbolic degenerate } \Omega_{\mathbf{j}} = \Omega_{\mathbf{k}} \neq 0 \text{ for } \mathbf{j}\prec\mathbf{k} \end{cases}$$

当且仅当 $\mathbf{u}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big) \subset \mathbb{S}(\Lambda)$ 时，它是轨道的。

定义 4.4。特征空间 由稳定性（$\mathrm{sgn}(\Omega_{\mathbf{j}}(\Lambda;X))$）指定，以容纳线性渐近线。中心、退化和双曲型等描述遵循标准用法 [Jordan and Smith，2007年，Anosov 等，1997]。双曲性仅由反应函数 r 决定，并由环境固定。本节其余部分列举所有可能的特征空间。在必要时补充非线性项后，每条线性渐近线 $\mathbf{u}\big([\Xi_o,\Xi]_\Lambda\big)$ 均用于构造一条 Λ-升阶的轨道渐近线 $\mathbf{v}\big(\big[X(1-\epsilon)\ X(1-\epsilon)+\epsilon\big]_\Lambda\big)$。

引理 4.5. 任意趋近于 $\mathbf{u}(\Lambda;\ -\infty) = \mathbf{1}X = \mathbf{0}$ 的奇异原始渐近线满足

$$\partial_z\,\overline{r}(\mathbf{0}) \ge \partial_x\,\overline{r}(\mathbf{0}) = 0$$

环境 r	**特征空间**	$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)-\mathbf{0}$	**轨道渐近线** $\vec{\mathbf{v}}(\Lambda;\vec{x})$	$\{\Upsilon_-,\Upsilon_+,\Upsilon_{\mathbf{z}}\}_{\succ}$
双曲型 $\partial_z\,\overline{r}(\mathbf{0})>0$	不稳定的	$\Upsilon_-\mathbf{1}_-\exp(\Omega_-\xi)$	$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)$	$\{+,0,0\}_{\succ}$
非双曲 $\partial_z\,\overline{r}(\mathbf{0})=0$	中心	$\mathbf{1}\overline{\mathfrak{I}}\langle\Lambda r(\vec{\mathbf{u}})\rangle[0,\vec{x}]_\Lambda$	$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)+\left(\mathbf{1}_{\mathbf{y}}+(1-D^{-1})\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\right)\Lambda r(\vec{\mathbf{u}})$	$\{1,0,0\}_{\succ}$

TABLE 1. 从奇点 **0** 出发。最后一列表示系数值，(+) 表示一个严格为正的未知量。中心特征空间纳入了针对 Λ-抬升量的非线性补充项。

根据方程 (2.1)、(2.2)，其雅可比特征值为

$$\Omega_-(\Lambda;0):=-\left(D-\sqrt{D^2+4D\Lambda\,\partial_z\,\overline{r}(\mathbf{0})}\right)\Big/2$$
$$\Omega_+(\Lambda;0):=-\left(D+\sqrt{D^2+4D\Lambda\,\partial_z\,\overline{r}(\mathbf{0})}\right)\Big/2$$
$$\Omega_{\mathbf{z}}(\Lambda;0):=-1$$

排除由 $\{\mathbf{1}_+(\Lambda;0)\ \mathbf{1}_{\mathbf{z}}(\Lambda;0)\}$ 张成的稳定特征空间，可唯一确定任意问题中的离开路径。这一点详见表*1*，其函数形式仅由环境决定。中心特征空间中的线性渐近线通过轨道积分确定 $\vec{x}(\Lambda;\xi)$

$$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)=\mathbf{1}\overline{\mathfrak{I}}\langle\Lambda\overline{r}(\vec{\mathbf{u}})\rangle[0,\vec{x}]_\Lambda\quad\Longrightarrow\quad\vec{x}(\Lambda;\xi)=\overline{\mathfrak{I}}\langle\Lambda\overline{r}(\mathbf{1}\vec{x})\rangle[0,\vec{x}]_\Lambda$$

C推论4.6。 $\Lambda\in\mathbb{R}^+$ 的紧轨道从$\mathbf{v}\in\mathbb{F}^{(\infty)}\big([0,1[_\Lambda\big)$光滑地起始。

推论4.7。 任意平面波的紧化都是奇异终端轨道，因为线性渐近线 $\vec{\mathbf{u}}\big([-\infty,\Xi]_\Lambda\big)$ 显然是某个 $\Xi\in\mathbb{R}^-$的轨道。

定义 4.8。**紧轨道按终端升高分类**$(\vec{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;\ \vec{x})-\vec{x})\sim(v_{\mathbf{y}}(\Lambda;\ \mathbf{1})-1)$

$$\begin{aligned}\text{upper class U}\quad&\Longleftrightarrow\quad\partial_x\,\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)\le 0\le\operatorname{sgn}(\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)-1)\\ \text{middle class M}\quad&\Longleftrightarrow\quad\operatorname{sgn}(\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)-1)\le\partial_x\,\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)\le 1/2\\ \text{lower class L}\quad&\Longleftrightarrow\quad\operatorname{sgn}(\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)-1)\le 1/2\le\partial_x\,\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)\end{aligned}$$

只要 $v_{\mathbf{y}}\in\mathbb{F}^{(1)}\big([0,1]_\Lambda\big)$。关于终止的分类及以下引理见图 3。

引理4.9。 任意趋近于 $\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\ +\infty)=\mathbf{1}X=\mathbf{1}$ 的奇异终端渐近线满足

$$\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})\le\partial_z\,\overline{r}(\mathbf{1})=0$$

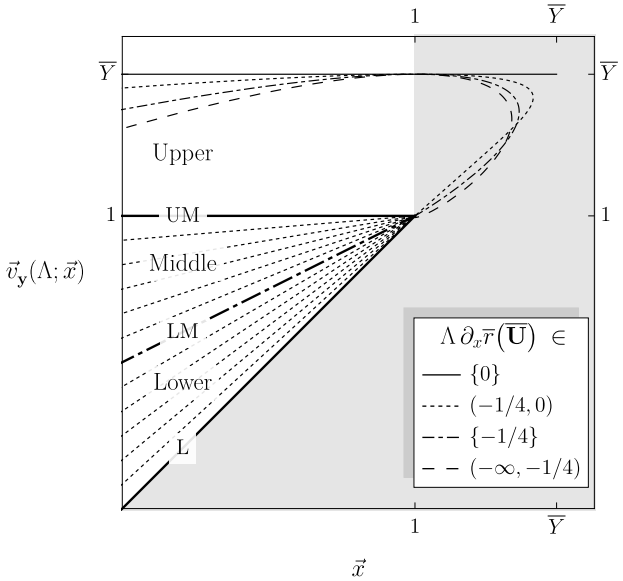

FIGURE 3. 按抬升量分类的终端线性渐近线。紧轨道是严格上类，当且仅当它是正则终端；因此，根据定义 4.10，我们将范围外推至非法的灰色区域。平面波是奇异终端，因此属于中间类或下类。为便于辨认，位于类别边界上的奇异渐近线已加粗显示。

问题 Λ	特征空间	$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\,\xi)-\mathbf{1}=\tilde{\mathbf{v}}(\Lambda;\vec{x})-\mathbf{1}$	$\{\Upsilon_{-},\Upsilon_{+},\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\}_{\succ}$
$\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})=-1/4$ $1/2>D$	稳定 退化	$((\Upsilon_{-}\xi+\Upsilon_{+})\mathbf{1}_{+}-2\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{\mathbf{x}})\exp(-\xi/2)$ $-2D(2D-1)^{-2}\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-\xi/2)+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	LM: $\{-1,\,,-\}_{\succ}$ LM: $\{0,-1,-\}_{\succ}$
$\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})=-1/4$ $D=1/2$	稳定 退化	$((\Upsilon_{-}\xi+\Upsilon_{+})(\mathbf{1}_{\mathbf{x}}+\mathbf{1}_{\mathbf{y}}/2)-2\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{\mathbf{x}})\exp(-\xi/2)$ $+(\Upsilon_{-}\xi^{2}/8+\Upsilon_{+}\xi/4+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}})\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-\xi/2)$	LM: $\{-1,\,,\,\}_{\succ}$ LM: $\{0,-1,\,\}_{\succ}$
$\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})=-1/4$ $D>1/2$	稳定 退化	$((\Upsilon_{-}\xi+\Upsilon_{+})\mathbf{1}_{+}-2\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{\mathbf{x}})\exp(-\xi/2)$ $-2D(2D-1)^{-2}\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-\xi/2)+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	LM: $\{-1,\,,\,\}_{\succ}$ LM: $\{0,-1,\,\}_{\succ}$
$0>\Lambda\,\partial_x\,r(\mathbf{1})>-1/4$ $-D>\Omega_{-}>\Omega_{+}$	稳定	$\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{-}\exp(\Omega_{-}\xi)+\Upsilon_{+}\mathbf{1}_{+}\exp(\Omega_{+}\xi)$ $+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	L: $\{-1,\,,-\}_{\succ}$ M: $\{0,-1,-\}_{\succ}$
$0>\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})>-1/4$ $-D=\Omega_{-}>\Omega_{+}$	稳定 退化	$\Upsilon_{-}(\mathbf{1}_{\mathbf{x}}+(1-D)\mathbf{1}_{\mathbf{y}})\exp(-D\xi)+\Upsilon_{+}\mathbf{1}_{+}\exp(\Omega_{+}\xi)$ $+(\Upsilon_{-}D(1-D)\xi+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}})\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	L: $\{-1,\,,\,\}_{\succ}$ M: $\{0,-1,-\}_{\succ}$
$0>\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})>-1/4$ $\Omega_{-}>-D>\Omega_{+}$	稳定	$\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{-}\exp(\Omega_{-}\xi)+\Upsilon_{+}\mathbf{1}_{+}\exp(\Omega_{+}\xi)$ $+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	L: $\{-1,\,,\,\}_{\succ}$ M: $\{0,-1,-\}_{\succ}$
$0>\Lambda\,\partial_x\,r(\mathbf{1})>-1/4$ $\Omega_{-}>\Omega_{+}=-D$	稳定 退化	$\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{-}\exp(\Omega_{-}\xi)+\Upsilon_{+}(\mathbf{1}_{\mathbf{x}}+(1-D)\mathbf{1}_{\mathbf{y}})\exp(-D\xi)$ $+(\Upsilon_{+}D(1-D)\xi+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}})\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	L: $\{-1,\,,\,\}_{\succ}$ M: $\{0,-1,\,\}_{\succ}$
$0>\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})>-1/4$ $\Omega_{-}>\Omega_{+}>-D$	稳定	$\Upsilon_{-}\mathbf{1}_{-}\exp(\Omega_{-}\xi)+\Upsilon_{+}\mathbf{1}_{+}\exp(\Omega_{+}\xi)$ $+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	L: $\{-1,\,,\,\}_{\succ}$ M: $\{0,-1,\,\}_{\succ}$

TABLE 2. 趋近双曲奇点 $\mathbf{1}$ 的条件是 $\partial_x\,r(\mathbf{1})<0$。最后一列表示类别首字母和系数值，(–)表示严格为负的未知量，( )表示不受限制的系数。轨道渐近线 $\tilde{\mathbf{v}}(\Lambda;\vec{x}):=\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\,\xi)$ 始终是 Λ-阶的。

特征空间	$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)-\overline{\mathfrak{I}}\mathfrak{X}$	轨道渐近线 $\tilde{\mathbf{v}}(\Lambda;\vec{x})$	$\{\Upsilon_{-},\Upsilon_{+},\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\}_{\succ}$
稳定	$\Upsilon_{+}\mathbf{1}_{\mathbf{x}}\exp(-\xi)+\Upsilon_{\hat{\mathbf{z}}}\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\exp(-D\xi)$	$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)-\overline{\mathbf{1}}\overline{\mathfrak{I}}\langle\Lambda r(\vec{\mathbf{u}})\rangle[\vec{x},1]_{\Lambda}$	UM: $\{0,-1,-\}_{\succ}$
中心	$-\mathbf{1}\overline{\mathfrak{I}}\langle\Lambda r(\vec{\mathbf{u}})\rangle[\vec{x},1]_{\Lambda}$	$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\,\xi)+(\mathbf{1}_{\mathbf{y}}+(1-D^{-1})\mathbf{1}_{\mathbf{z}})\,\Lambda r(\vec{\mathbf{u}})$	L: $\{-1,\,,\,\}_{\succ}$

TABLE 3. 在条件 $\partial_x\,r(\mathbf{1})=0$ 下趋近非双曲奇点$\mathbf{1}$ 。最后一列表示类别首字母和系数值，(–)表示一个严格为负的未知数。两个特征空间均包含用于 Λ- 抬升量的非线性补充项。

根据方程 (2.1)、(2.2)，其雅可比特征值为

$$\Omega_{-}(\Lambda;1):=-\left(1-\sqrt{1+4\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})}\right)\Big/2$$
$$\Omega_{+}(\Lambda;1):=-\left(1+\sqrt{1+4\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})}\right)\Big/2$$
$$\Omega_{\hat{\mathbf{z}}}(\Lambda;1):=-D$$

由于 $\mathbf{1}_{\hat{\mathbf{z}}}(\Lambda;1):=\mathbf{1}_{\mathbf{z}}$，从相空间内部 $\mathbb{S}(\Lambda)$ 趋近需要

$$\big|\Upsilon_{-}(\Lambda;1)\big|+\big|\Upsilon_{+}(\Lambda;1)\big|>0$$

因此需要

$$\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})\geq-1/4$$

经维奥拉 *tion*，$\Omega_{-}(\Lambda;1)$、$\Omega_{+}(\Lambda;1)$ 互为复共轭，表明此前已在$\mathbf{U}\neq$处正则终止 $\overline{\quad}\ \mathbf{1}$.

定义 *2.7* 用于消去每个特征空间中的一个未知量，ξ 中的平移恰好使每个严格为负的首项系数都变为 -1。

仅环境决定$\mathbf{1}$处的双曲性。由 $\partial_x\,r(\mathbf{1})<0$ 给出的双曲特征子空间列于表 *2*，验证了轨道渐近线$\mathbf{v}(\Lambda;\vec{x}):=\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\,\xi)$ 的 Λ抬升量。由$\partial_x\,r(\mathbf{1})=0$ 给出的非双曲特征子空间列于表 *3*，其中中心特征空间通过轨道积分确定 $\vec{x}(\Lambda;\xi)$

$$\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)-\mathbf{1}=-\mathbf{1}\overline{\mathfrak{I}}\langle\Lambda\overline{r}(\vec{\mathbf{u}})\rangle[\vec{x},1]_{\Lambda}\quad\Longrightarrow\quad\vec{x}(\Lambda;\xi)-1=-\overline{\mathfrak{I}}\langle\Lambda\overline{r}(\mathbf{1}\vec{x})\rangle[\vec{x},1]_{\Lambda}$$

引理 4.10. 任意正则终端渐近线 $\vec{\mathbf{u}}\big([\Xi_o,\Xi]_{\Lambda}\big)$ 至 $\vec{\mathbf{u}}(\Lambda,\Xi)=\mathbf{U}:=(1,Y,Z)^{\intercal}$ 均为严格上类，并按图 *3* 所示进行线性化。正则线性渐近线 $\vec{\mathbf{v}}(\Lambda;\ \vec{x}):=\vec{\mathbf{u}}(\Lambda;\ \xi)$ 由下式给出

类	$-4\Lambda\,\partial_x\, r(\mathbf{1})$	$\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;\,\mathbf{1})\,-1$	$1-\partial_x\, v_{\mathbf{y}}(\Lambda;\,\mathbf{1})$	$\Lambda\,\partial_\Lambda\,(1-\partial_x\, v_{\mathbf{y}}(\Lambda;\,\mathbf{1}))$
U 严格上	any $\in\overline{\mathbb{R}^+}$	正则 $\in\mathbb{R}^+$	$1-\Lambda\overline{r}/(\overline{v}_{\mathbf{y}}-1)$ $\in\{1-\}$	$-\Lambda\,\partial_\Lambda\,(\Lambda\overline{r}/(\overline{v}_{\mathbf{y}}-1))$ $\in\{0\}$
UM 上部非双曲中间	$\in\{0\}$	奇异 $\in\{0\}$	$-\Omega_+(\Lambda;\,\mathbf{1})\,-\Lambda\overline{r}/(\overline{v}_{\mathbf{y}}-\overline{x})$ $\in\{1-\}$	$-\Lambda\,\partial_\Lambda\,(\Lambda\overline{r}/(\overline{v}_{\mathbf{y}}-\overline{x}))$ $\in\{0-\}$
M 严格中间	双曲型 $\in\,]0,1[$	奇异 $\in\{0\}$	$-\Omega_+(\Lambda;\,\mathbf{1})$ $\in\,]1/2,1[$	$-\Omega_+\,(1+\Omega_+)\,/(1+2\Omega_+)$ $\in\mathbb{R}^-$
LM 下界中间	退化 $\in\{1\}$	奇异 $\in\{0\}$	$\in\{-\Omega_-(\Lambda;\,\mathbf{1})\,-\Omega_+(\Lambda;\,\mathbf{1})\}$ $=\{1/2\}$	$\in\{-\Lambda\,\partial_\Lambda\,\Omega_-,-\Lambda\,\partial_\Lambda\,\Omega_+\}$ $=\{+\infty,-\infty\}$
L 严格下	双曲型 $\in\,]0,\ 1[$	奇异 $\in\{0\}$	$-\Omega_-(\Lambda;\,\mathbf{1})$ $\in\,]0,\ 1/2[$	$-\Omega_-\,(1+\Omega_-)\,/(1+2\Omega_-)$ $\in\mathbb{R}^+$
L 严格下方	非双曲 $\in\{0\}$	奇异 $\in\{0\}$	$-\Omega_-(\Lambda;\,\mathbf{1})\,-\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}$ $\in\{0+\}$	$-\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}$ $\in\{0+\}$

TABLE 4. 紧致轨道分类，计算于（$x=1$）。单元素集 $\{0\mp\}$ 表示$\{0\}$ 从 $\mathbb{R}^+$ 进入，形式为 $x\to 1$。同理，$\{0-\}:=\{0\}$, $\{1-\}:=\{1\}$ 是从$\mathbb{R}^-$进入的单元素集。最后一列在类别边界处无效。

定义 *4.9* 的条件是

$$\begin{aligned}&\textit{Replace }\ \partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1})\ \textit{ with }\ \partial_x\,\overline{r}(\overline{\mathbf{U}})\\&\textit{Replace }\ \overline{X}\ \textit{ with }\ \overline{Y}+(1-\overline{Y})\,|\mathrm{sgn}(\partial_x\,\overline{r}(\mathbf{1}))|\\&\textit{Set }\ \{\Upsilon_-,\Upsilon_+,\Upsilon_{\mathbf{z}}\}_{\succ}\ \textit{ such that }\ |\Upsilon_+(\Lambda;1)|=1,\arg\Upsilon_+(\Lambda;1)\in\,]\pi/2,3\pi/2[\\&\quad\textit{and}\quad \tilde{\mathbf{v}}(\Lambda;\overline{x})=\overline{\mathbf{U}}+\partial_\xi\,\overline{\mathbf{u}}(\Lambda;\Xi)(\xi-\Xi)+\partial_\xi\,\partial_\xi\,\overline{\mathbf{u}}(\Lambda;\Xi)(\xi-\Xi)^2/2+o\big((\Xi-\xi)^2\big)\end{aligned}$$

这意味着

$$\log(-\Upsilon_+(\Lambda;1))+\Xi\,\Omega_+(\Lambda;1):=\log\big(\overline{Y}-1\big)-\log\sqrt{1+4\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}\big(\overline{\mathbf{U}}\big)}$$

$$\Upsilon_-(\Lambda;1):=-\Upsilon_+(\Lambda;1)\exp\left(-\Xi\sqrt{1+4\Lambda\,\partial_x\,\overline{r}\big(\overline{\mathbf{U}}\big)}\right)$$

除非 $\Lambda\,\partial_x\, r\big(\underline{\mathbf{U}}\big)=-1/4$，此时

$$\begin{aligned}\Upsilon_+(\Lambda;1)&:=-1\\\Xi\,\Omega_+(\Lambda;1)&:=\log\big(\overline{Y}-1\big)+\log(\Xi-2)\\\Upsilon_-(\Lambda;1)&:=1/(\Xi-2)\end{aligned}$$

计算 $\Upsilon_{\mathbf{z}}(\Lambda;1)$ 同样可行，但繁琐且乏味。只需指出，$Y=1$ 足以导致奇异终止 $\Xi=+\infty$，继而得到$Z=1$。在非双曲环境中，轨道必须渐近于稳定特征空间内，且 Υ_- 无关紧要。

在双曲环境中，极限 $\tilde{\mathbf{v}}(\Lambda,+\infty)=\mathbf{1}$；否则为 $\tilde{\mathbf{v}}(\Lambda,+\infty)=\mathbf{1}Y$，假设 $r\big(\tilde{\mathbf{v}}\big(\big[1,X\big]_\Lambda\big)\big)=\{0\}$。不过，这完全是虚拟的，因为 $\mathbf{u}\big(\big]\Xi,+\infty\big[_\Lambda\big)$ 在形式上未定义，也不应满足任何条件。更确切地说，线性正则渐近线只是关于 $\xi=\Xi$的泰勒级数的清晰表达。

推论 4.11。紧轨道高度是可微的 $v_{\mathbf{y}}\in\mathbb{F}^{(1)}\big([0,1]_\Lambda\big)$。相比之下，$\partial_x\, v_{\mathbf{z}}(\Lambda;\ \mathbf{1})$ 和 $\partial_x\,\partial_x\, v_{\mathbf{y}}(\Lambda;\ \mathbf{1})$ 都不一定存在。

推论 4.12。任意问题的紧轨道 $\mathbb{V}(\Lambda)$ 均按照定义 ***4.8*** 在表 ***4*** 中进行分类。如果问题 Λ 的紧轨道属于严格上类 *U*，则该问题不存在平面波。否则，Λ的唯一平面波是其紧轨道的内部 $\mathbb{V}(\Lambda)$。

推论 4.13. 极限上类轨道是中类平面波

$$\Upsilon_-(\Lambda;1)\to 0\quad as\quad \overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)\to 1$$

5. Interior Properties

注 5.1。本文对比 lentor Λ 变化时的紧轨道。不同轨道沿垂直于 x-方向进行对比。单调性和固定定义域赋予了这个纵坐标特殊地位，而其他候选量则不具备这一性质，

例如 y、 z 或 ξ。关键在于，根据定义 5.9，对比关于 x 为正且一致连续。

定义 5.2。内部性质 $\mathbf{f}$ $\in \mathbb{F}^{(\infty)}(]0,\ 1[_\Lambda)$ 包括内部轨道 $\mathbb{V}(\Lambda)$ 以及根据定义 3.1 和蒸馏物 3.3 的任意行波坐标 $\xi(\Lambda; x)$。前者对于对比表示为

$$\mathbf{w}(\Lambda;x) := \begin{pmatrix} w_{\mathbf{y}}(\Lambda;x) \\ w_{\mathbf{z}}(\Lambda;x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (v_{\mathbf{y}} - x)^2 \\ v_{\mathbf{z}} - x \end{pmatrix}$$

因此，即使 $\partial_\Lambda(\partial_x\, v_{\mathbf{y}}(\Lambda;1))$ 发散， $\partial_\Lambda(\partial_x\, w_{\mathbf{y}}(\Lambda;1))$ 仍然存在。

定义 5.3。对比算子 $\mathfrak{d}$: $\mathbb{F}^{(\infty)}(]0,\ 1[_\Lambda) \to \mathbb{F}^{(\infty)}(]0,\ 1[_\Lambda)$ 为

$$\mathfrak{d}\,\mathbf{f}(\Lambda;x) := \mathbf{f}(\Lambda + \epsilon\,;x) - \mathbf{f}(\Lambda;x) \quad \text{for parameter } \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

反映任何具体的积分或实验时， ϵ 极限总是预先取值，如下所示:

$$\partial_{\Lambda+}\,\overline{\mathbf{f}}(\Lambda;X) := \lim_{x\to X}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathfrak{d}\,\mathbf{f}(\Lambda;x)}{\epsilon}$$

对比算子是右侧的，并渐近趋于右导数。只有当对比算子必然与相应的左侧对比在 $\epsilon \to 0$ 时一致，我们才会调用 $\partial_\Lambda\,\mathbf{f} := \partial_{\Lambda+}\,\mathbf{f} = \partial_{\Lambda-}\,\mathbf{f}$。

引理 5.4。 对比方程

$$\begin{pmatrix} -1 & \mathfrak{L}_{\mathbf{z}} \\ \mathfrak{L}_{\mathbf{y}} & -1 \end{pmatrix} \Lambda\,\partial_\Lambda\,\mathbf{w}(\Lambda;x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(\mathbf{u})/\,\partial_z\, r(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

控制内部 轨道对比。线性算子 $\mathfrak{L}_{\mathbf{y}}, \mathfrak{L}_{\mathbf{z}}$: $\mathbb{F}^{(\infty)}(]0,1[_\Lambda) \to \mathbb{F}^{(\infty)}(]0,1[_\Lambda)$ 定义为

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{y}} := l_{\mathbf{y}}(\Lambda;x)\,(1 + (y-x)\,\partial_x) := \frac{1}{2(y-x)\Lambda\,\partial_z\, r(\mathbf{u})}\,(1 + (y-x)\,\partial_x)$$

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{z}} := l_{\mathbf{z}}(\Lambda;x)\,\left(1 + D^{-1}(y-x)\,\partial_x\right) := \frac{2(y-x)^2}{(z-x)}\,\left(1 + D^{-1}(y-x)\,\partial_x\right)$$

在任意等扩散环境中忽略 $\mathfrak{L}_{\mathbf{z}}$ 和 $w_{\mathbf{z}}$ （$r;\ D = 1$）。

证明。 检查极限交换 $\partial_\Lambda(\partial_x\,\mathbf{w}) = \partial_x\,\partial_\Lambda\,\mathbf{w}$的一致有效性。将对比算子作用于非自治蒸馏体 3.3，可得到对比方程 $\epsilon \to 0$，条件是

$$\mathfrak{d}\,w_{\mathbf{y}}(\Lambda;x) = o(w_{\mathbf{y}}(\Lambda;x))$$
$$\mathfrak{d}\,(\Lambda r(\mathbf{u})) = \epsilon\, r(\mathbf{u}) + \Lambda\,\partial_z\, r(\mathbf{u})\,\mathfrak{d}\,w_{\mathbf{z}} + o(\mathfrak{d}\,(\Lambda r(\mathbf{u})))$$

E方程 (2.3)、(2.4) 和定义 3.1 很容易确保这些条件在任意 $[X_o, X]_\Lambda \subset]0,1[_\Lambda$ o存在 $\|\mathfrak{d}\overline{\mathbf{w}}\|_{[X_o,X]_\Lambda} = O(\epsilon)$。对比方程的后一个方面在定义 5.9 中得到证明。 □

推论 5.5。 对比方程在 $[0,1[_\Lambda$, 满足 $\partial_\Lambda\,\mathbf{w}(\Lambda;0) = \mathfrak{X}\,\mathbf{0}$。

定义 5.6。指标记法采用

$$\text{The factor ring of integers} \quad \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} := \{0,1,\ldots,N-1\}_>$$
$$\text{The non-zero index} \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$
$$\text{The index parity} \quad |\mathbf{n}| := n \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \{0,1\}_>$$
$$\text{The index component} \quad \mathbf{n} := n \bmod 2 \in \{\mathbf{y},\mathbf{z}\}_\succ \cong \{0,1\}_>$$

因此，即使是偶数 值也指 $\mathbf{y}$ 分量，奇数值则指 $\mathbf{z}$ 分量。值得定义这个常 nt

$$L_{\mathbf{n}} := \big|1 - |\mathbf{n}|\big| + |\mathbf{n}|\,\mathrm{sgn}(D-1) = \mathrm{sgn}(l_{\mathbf{n}}(\Lambda;x)) \text{ for all } x \in]0,1[$$

引理 5.7。 平均值逆算子 $\mathfrak{L}_{\mathbf{y}}^{-1}, \mathfrak{L}_{\mathbf{z}}^{-1}$在 $[X_o, X]_\Lambda \subset [0,1[_\Lambda$ 上按如下意义作用:

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^{-1}\,\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}\,\overline{f}(\Lambda;x) = \frac{\overline{g}_{\mathbf{n}}(X)\overline{f}(X) - \overline{g}_{\mathbf{n}}(X_o)\overline{f}(X_o)}{\overline{g}_{\mathbf{n}}(X) - \overline{g}_{\mathbf{n}}(X_o)}$$

其中权重为

$$\overline{g}_{\mathbf{n}}(\Lambda;\overline{x}) := \exp(D^{|\mathbf{n}|}\xi)$$

及其逆

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^{-1}\,\overline{h}(\Lambda;\overline{x}) := \mathfrak{M}\left\langle \frac{h(\Lambda;x)}{l_{\mathbf{n}}(\Lambda;x)}\middle| g_{\mathbf{n}}(\Lambda;x)\right\rangle [X_o, X]_\Lambda$$

是给定的平均值

$$\frac{\overline{h}(\Lambda;\overline{x})}{\overline{l}_{\mathbf{n}}(\Lambda;\overline{x})} \in \mathbb{F}^{(0)}\big([X_o,X]_\Lambda\big)$$

证明。 对比定义 5.4 展开代换

$$\overline{h}(\Lambda;\overline{x}) = \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}\,\overline{f}(\Lambda;\overline{x}) = \frac{\overline{l}_{\mathbf{n}}(\overline{x})}{\partial_\xi\,\overline{g}_{\mathbf{n}}(\overline{x})}\,\partial_\xi\left(\overline{g}_{\mathbf{n}}(\overline{x})\overline{f}(\overline{x})\right)$$

定义 3.6 可直接应用于 $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^{-1}\,h(\Lambda;x)$, 从而证明该引理。 □

推论 5.8。 在 $(\Lambda;\,x)\in[0,1[_\Lambda$ 处的内部轨道对比满足

$$\Lambda\,\partial_\Lambda\,w_{\mathbf{n}}(\Lambda;\overline{x}) = \mathfrak{M}\left\langle \frac{\Lambda\,\partial_\Lambda\,w_{\prec\mathbf{n}}(x)}{l_{\mathbf{n}}(x)} + \frac{(1-|\mathbf{n}|)}{l_{\mathbf{n}}(x)}\frac{r(\mathbf{v}(x))}{\partial_z\,r(\mathbf{v}(x))}\,\middle|\, g_{\mathbf{n}}(x)\right\rangle_{[0,\overline{x}]_\Lambda}$$

其中，前驱分量按定义为 $\prec\mathbf{n}\neq\mathbf{n}$。

引理 5.9。 内部轨道对比一致有界于

$$\frac{2\Lambda\,\partial_\Lambda(\Lambda r)(\mathbf{v}(]0,1[_\Lambda))}{2+\operatorname{sgn}(D-1)+\operatorname{sgn}(D-1)^2} \subseteq \Big]0,\|\Lambda\overline{r}\|_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big[$$
$$\frac{\Lambda\,\partial_\Lambda\,w_{\mathbf{y}}(]0,1[_\Lambda)}{2+\operatorname{sgn}(D-1)+\operatorname{sgn}(D-1)^2} \subseteq \Big]0,\|\Lambda\overline{r}\|^2_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}\Big[$$

证明。 依据定义 5.8，定义 3.1 须服从该断言

$$-\frac{r(\mathbf{v}(x))}{\partial_z\,r(\mathbf{v}(x))} < \Lambda\,\partial_\Lambda\,w_{\mathbf{z}}(\Lambda;x) < \frac{r(\mathbf{v}(x))}{\partial_z\,r(\mathbf{v}(x))}$$

在等扩散环境中显然成立；当 $D\neq1$ 经历某一节的漫游并最终导向定义 6.12 时，该断言成立。□

6. Breach Cascades Under Unequal Diffusivity

注 6.1。 上一个引理不过是对比定义 5.4 这一王朝中最新一代的产物。其谱系可追溯至它在本节中的原点；对比引理为任何给定的界规定了一个前提条件，使其得以被违例。若将该条件本身也解释为一个界，而其违例又是第一个界被违例的前提条件，便开始了一场不可能终结的归纳。

由轨道对比规定的违约序列，最好反向视为一连串前提条件。宽泛地说，第一次违例只有在第 $\mathbf{n}$ 次违例发生于原点与此处之间时才可能发生。归根结底，最近一次违例不可能发生，除非某个前提界源自一次违例。这一原始违例必须能够在 $]0,\ 1[_\Lambda$, 上辨识出来，而无需借助原点 $\mathbf{0}$。

本节正式论证了下降序列或级联不可能无限上升。级联的本质在于，其最低绝对指标值在逻辑上是最终的，反之亦然。遗憾的是，定义 5.4 的种种变化迫使我们进行晦涩繁琐的记账，必须用四种不同的级联来涵盖 $D<1$ 和 $D>1$的上界与下界。图 4–5 展示了典型的界级联。

定义 6.2。**级联序列** $\{\dots-1\}_\prec$， $\{\dots+1\}_\prec$ 定义如下:

$$\{\dots\pm1\}_\prec := \Big\{\prec^{|n|}(\pm1)\;\Big|\;|n|\in\mathbb{Z}/|\pm|\mathbb{Z}\Big\} \cong \{|\pm|,\dots,1\}_<$$

使用指标记法 5.6，并结合先决操作

$$\prec\colon n\mapsto(n+\operatorname{sgn}(n))L_{\mathbf{n}}\in\{-(n+1),(n+1)\}$$

以及级联长度 $|\pm|\in\{|-|,|+|\}\subset\mathbb{Z}^+$。

命题 6.3。 级联序列计算结果为

$$D<1\colon\quad \{\dots-1\}_\prec=\{\pm|-|,\dots,-5,-4,+3,+2,-1\}_\prec \qquad \{\dots+1\}_\prec=\{\pm|+|,\dots,+5,+4,-3,-2,+1\}_\prec$$
$$D>1\colon\quad \{\dots-1\}_\prec=\{-|-|,\dots,-5,-4,-3,-2,-1\}_\prec \qquad \{\dots+1\}_\prec=\{+|+|,\dots,+5,+4,+3,+2,+1\}_\prec$$

正如对比定义 *5* 中出现的$\operatorname{sgn}(z-x)\;=\operatorname{sgn}(D-1)\;=:L_{\mathbf{1}}$ 所要求的。 *4.*

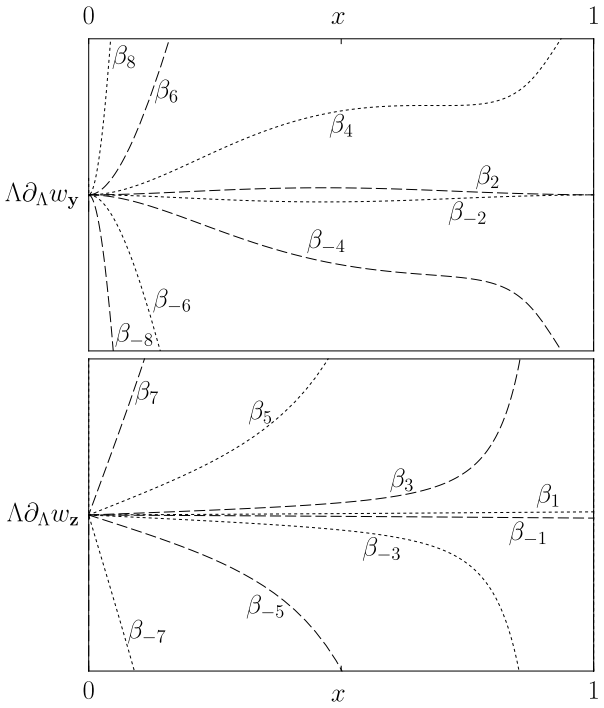

FIGURE 4.针对 $D = 1/2, \Lambda r(\mathbf{u}) = z(1-x)^2/2$的界级联。$\{\dots\beta_{-1}\}_\prec$ 虚线级联 $\{\dots\beta_{-1}\}_\prec$ 和点线级联 $\{\dots\beta_{+1}\}_\prec$ 按从右向左递增的顺序标记，并在各分量之间交替。

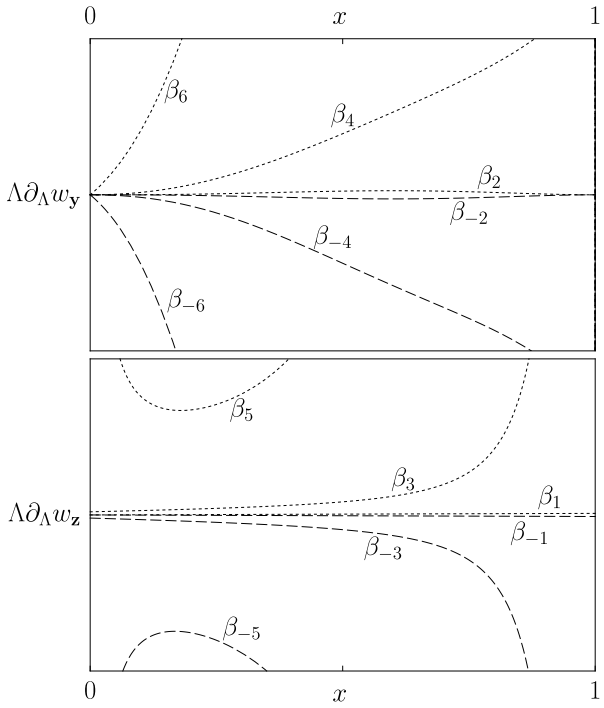

FIGURE 5. 针对 $D = 2, \Lambda r(\mathbf{u}) = z^2(1-x)^2/2$的界级联。虚线级联 $\{\dots\beta_{-1}\}_\prec$ 和点线级联 $\{\dots\beta_{+1}\}_\prec$ 按从右向左递增的顺序标记，并在各分量之间跳转。

定义6.4。界级联 $\{\dots\beta_{\pm1}\}_\prec \subset \mathbb{F}^{(\infty)}\big(]0,1[_\Lambda\big)$ 递归定义如下

$$\beta_{\pm1}(\Lambda;x) := \pm\frac{r(\mathbf{v})}{\partial_z r(\mathbf{v})}$$

$$\beta_{\prec n}(\Lambda;x) := \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}\,\beta_n(x) + (|\mathbf{n}|-1)\frac{r(\mathbf{v})}{\partial_z r(\mathbf{v})}$$

原始值 $\beta_n(\Lambda;0)$ 不一定存在。

定义 6.5。示性函数级联 $\{\dots\delta_{\pm1}\}_\prec \subset \mathbb{F}^{(\infty)}\big(]0,1[_\Lambda\big)$ 定义如下

$$\delta_n(\Lambda;x) := \operatorname{sgn}(n)\,(\beta_n(x) - \Lambda\,\partial_\Lambda\, w_{\mathbf{n}}(x))$$

负指标 n 表示下界，正指标表示上界。负指示量 $\delta_n(x)$表示发生违例。

定义6.6。突破级联 $\{\dots X_{\pm1}\}_\prec \subset [0,1[\,\cup\{+\infty\}$ 定义如下

$$X_n(\Lambda) := \inf\big\{x\in\,]0,1[\;\big|\;\delta_n(\Lambda;x)\le 0\big\}$$

违例 $X_n = 0$ 必然发生，其对应的界在任意 $x\in\,]0,\ 1[$处均无效。

违例 $X_n = \inf\varnothing := +\infty$ 不可能发生，其对应的界在任意 $x\in\,]0,\ 1[$处均有效。

原始违例 $X_n\in\{0,+\infty\}$ 要么必然发生，要么不可能发生，这仅取决于 $\operatorname{sgn}(\delta_n(x))$ 离开原点0的瞬间。该违例没有有意义的前提条件。

定义6.7。级联长度 $|-|,\ |+|\in\mathbb{Z}^+$ 规定如下

$$|\pm|(\Lambda) := \inf\big\{|\pm|\in\mathbb{Z}^+\;\big|\;\{\dots X_{\pm1}\}_\prec\not\subset\,]0,1[\big\}$$

在每个级联首次出现原始违例时将其截断。

引理 6.8。 指示函数级联 $\{\dots\delta_{\pm1}\}_\prec$ 遵循递推关系

$$\delta_{\prec n}(\Lambda;x) = L_{\mathbf{n}}\,\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}\,\delta_n(\Lambda;x)$$

即

$$\delta_{\pm 1}(\Lambda;x)=\frac{r(\mathbf{u})}{\partial_z\, r(\mathbf{u})}\mp\Lambda\,\partial_\Lambda\, w_{\mathbf{z}}(\Lambda;x)$$

$$\delta_{\prec n}(\Lambda;x)=\left(\operatorname{sgn}(D-1)\,\mathfrak{L}_{\mathbf{z}}\right)^{|\mathbf{n}|}\left(\operatorname{sgn}(D-1)\,\mathfrak{L}_{\mathbf{y}}\,\mathfrak{L}_{\mathbf{z}}\right)^{(|n|-|\mathbf{n}|)/2}\delta_{\pm 1}(\Lambda;x)$$

证明。 根据定义 6.2、6.4 和对比定义 5.4，将 $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}$ 应用于定义 6.5。 □

引理 6.9。 违例级联严格递减

$$X_{\prec n}<X_n$$

证明。 存在性 $\prec n$ 给出一个非空闭区间 $[X_o,X_n]\subset\,]0,\ 1[$。结合定义 5.7、6.8

$$0>\frac{-g_{\mathbf{n}}(\Lambda;X_o)\,\delta_n(\Lambda;X_o)}{g_{\mathbf{n}}(\Lambda;X_n)-g_{\mathbf{n}}(\Lambda;X_o)}=\frac{\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^{-1}\,\delta_{\prec n}(\Lambda;X_n)}{L_{\mathbf{n}}}=\mathfrak{M}\left\langle\frac{\delta_{\prec n}(\Lambda;x)}{L_{\mathbf{n}}l_{\mathbf{n}}(\Lambda;x)}\middle|\,g_{\mathbf{n}}(\Lambda;x)\right\rangle[X_o,X_n]_\Lambda$$

要求在某个 $x\in[X_o,X_n]$ 处满足 $0>\delta_{\prec n}(\Lambda;x)$。 □

推论 6.10。 任何长度为 $|\pm|>1$ 的级联都必然源自 $X_{|\pm|}=0$。

引理 6.11。 不存在必然的违例，其形式如 $x\to 0$。严格地说，给定任意 $N\in\mathbb{Z}^+$，存在一个非空开区间 $]0,\ X_N[$，在整个区间内

$$\delta_{\prec\prec n}(\Lambda;x)>\delta_n(\Lambda;x)>0\quad \textit{for all}\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad \textit{such that}\quad |n|<N$$

证明。 表1详细列出了原点 **0** 处的两种可能情况：双曲奇点和非双曲奇点。结合定义 5.4、6.8，可以计算渐近指标 $\delta_n(\Lambda;x)$，其极限为 $x\to 0$。证明并非完全显然，因为 X_N 并非意在表示无穷小量。相反，根据定义，渐近极限 [Rudin，1976年，第 83] 页要求存在某个 $X_N>0$，使引理成立。

在双曲奇点附近，采用简写 $\Omega_o:=\Omega_-(\Lambda;0)>0$，并计算

$$\delta_{\pm 1}(\Lambda;x)=\frac{(1+\Omega_o)(D+2\Omega_o)\pm(1-D)\Omega_o}{(D+\Omega_o)(D+2\Omega_o)}Dx\,(1+O(x))$$

$$\delta_{\prec n}(\Lambda;x)=\left(\frac{4\Omega_o^3(D+\Omega_o)^3}{D^2\big|D-1\big|(1+2\Omega_o)}x^2\right)^{|\mathbf{n}|/2}\left(\frac{(1+2\Omega_o)(D+\Omega_o)}{\Omega_o\,|D-1|}\,(1+O(1-x\,\partial_x))^2\right)^{|n|/2}\delta_{\pm 1}(\Lambda;x)$$

限制

$$|n|=o(1/X_N)$$

1 占主导地位，大于 O。此时所有示性函数均为正定，且乘方为 $|n|$ 的因子大于 **1**。

在非双曲奇点附近，计算

$$\delta_{\pm 1}(\Lambda;x)=\frac{r(\mathbf{u})}{\partial_z\, r(\mathbf{u})}\,(1+O(\partial_z\, r(\mathbf{u})))$$

$$\delta_{\prec n}(\Lambda;x)=\left(\frac{4D\Lambda^3 r(\mathbf{u})^2\,\partial_z\, r(\mathbf{u})}{|D-1|}\right)^{|\mathbf{n}|/2}\left(\frac{D}{|D-1|\,\Lambda\,\partial_z\, r(\mathbf{u})}\,(1+O(r(\mathbf{u})\,\partial_x))^2\right)^{|n|/2}\delta_{\pm 1}(\Lambda;x)$$

$|n|\geq 2$ 的示性函数在极限处发散，因为与之相关的界也会发散。因此，洛必达法则简化了残差

$$O\left(\frac{\partial_z\, r(\mathbf{u})}{\log(r(\mathbf{u}))}\right)=O\left(\frac{\partial_z\, r(\mathbf{u})\ \partial_x}{\partial_x\log(r(\mathbf{u}))}\right)=O(r(\mathbf{u})\,\partial_x)$$

在表1的中心特征空间上。限制

$$|n|=o\left(\inf\left|\frac{\log r}{\partial_z\, r}\right|\left(\mathbf{v}\big(]0,X_N[_\Lambda\big)\right)\right)\quad \text{for interior orbital}\quad \mathbf{v}\big(]0,X_N[_\Lambda\big)\subset\mathbb{V}(\Lambda)$$

1 占主导地位，大于 O。此时所有示性函数均为正定，且乘方为 $|n|$ 的因子大于 **1**。□

推论6.12。 所有违例都不可能发生 $\{\dots X_{\pm 1}\}_\prec=\{X_{\pm 1}\}=\{+\infty\}$，因此

$$-\frac{r(\mathbf{u})}{\partial_z\, r(\mathbf{u})}<\Lambda\,\partial_\Lambda\, w_{\mathbf{z}}(\Lambda;x)<\frac{r(\mathbf{u})}{\partial_z\, r(\mathbf{u})}\quad \textit{throughout}\ ]0,1[_\Lambda\ \textit{whenever}\ D\neq 1$$

7. Compact Properties

注7.1。 本节建立了一个紧域 $\{(\Lambda; x)\}$ ，足以容纳每一个平面波。最后一个引理将域的内部——对比引理在此发挥作用——连接到域的边界，从而完成证明的最后一步。

定义 7.2。**环境域**是

$$\overline{\mathbb{X}}(\overline{r}; D) := \left[0, \|\overline{r}\|_D^{-1}\right] \times [0, 1]$$

其中， $\mathbb{F}^{(\infty)}(\mathbb{U})$ 上的环境范数为

$$\|\overline{r}\|_D := 2\int_0^1 r\Big(\mathbf{1} - \mathbf{1}_{\mathbf{x}}(1-x) - \mathbf{1}_{\mathbf{z}}(1-x)^{\max(D,1)}\Big)\,\mathrm{d}x$$

这是一个紧致且完美的拓扑空间：每个点都是一个极限点（Λ； x） $\in \mathbb{X}$（r； D），但并非所有点都属于内部（Λ； x） $\in \mathbb{X}$（r； D）。

定义 7.3。**紧致性质 f** $\in \mathbb{F}^{(0)}\big(\mathbb{X}$（$r$； $D)_-\big)$ 是一个内部性质 $\mathbf{f} \in \mathbb{F}^{(\infty)}\big(]0,\ 1[_\Lambda\big)$ 紧致化为

$$\overline{\mathbf{f}}(\overline{\Lambda}; \overline{x}) := \lim_{(\Lambda;x)\to(\overline{\Lambda};\overline{x})} \mathbf{f}(\Lambda; x)$$

极限的存在性和唯一性受到**f** $\in \mathbb{F}^{(0)}\big(\mathbb{X}(r; D)\big)$的一致连续性的强烈要求。

命题 7.4。 伪轨道 $\mathbb{V}(0)$满足

$$\overline{\mathbf{v}}(0; \overline{x}) := \mathbf{1}\overline{x}$$
$$\Lambda\,\partial_{\Lambda+}\,\overline{\mathbf{v}}(0; \overline{x}) := \Lambda\overline{r}(\mathbf{1}\overline{x})\left(\mathbf{1}_{\mathbf{y}} + \left(1 - D^{-1}\right)\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\right)$$

是 $\Lambda \to 0$ 时唯一的轨道极限。它是环境域上唯一的伪紧轨道。在极限附近，每条紧轨道 $\mathbb{V}(\Lambda)$ 都属于严格更低的类，并包含 Λ的平面波。

证明。 非自治蒸馏体 3.3 具有唯一的渐近解

$$\overline{\mathbf{v}}(\Lambda; x) = \overline{\mathbf{v}}(0; \overline{x}) + \Lambda\,\partial_{\Lambda+}\,\overline{\mathbf{v}}(0; \overline{x}) + O\big(\Lambda^2\overline{r}(\overline{\mathbf{u}})\big)$$

该极限不是轨道解，因为它不支持自治系统 2.4 的行波坐标。这一缺陷是 $\Lambda = 0$ 所特有的。对于 $\Lambda > 0$，渐近解确实是轨道解，且其类别严格低于 $\Lambda\,\partial_\Lambda\,\mathbf{v}(\Lambda; 1) = O(r(\mathbf{1})) = 0$和 $\partial_x\,\mathbf{v}(\Lambda;1) = \mathbf{1} - O(\Lambda^2)$。□

引理 7.5。 内部轨道族 $\mathbb{V}\big(]0, \|r\|_D^{-1}\big[\big)$ 紧化为环境轨道$\mathbb{V} \in \mathbb{F}^{(0)}\big(\mathbb{X}(r;\ D)\big)$。该曲面在四维空间中自然分解为环境域$\mathbb{X}(r; D)$和环境轨道投影 $\mathfrak{X}\,\mathbf{v}(\Lambda;\ x)$。它位于环境相空间中

$$\overline{\mathbb{V}} \subseteq \overline{\mathbb{S}} := \overline{\mathbb{X}}(\overline{r}; D) \times \left[\max(\overline{x}, \overline{z}),\ \overline{x} + \overline{\Lambda}\,\|\overline{r}\|_{\overline{\mathbb{S}}}\right] \times [\overline{x}\min(D, 1),\ \overline{x}\max(D, 1)]$$

其中 $\|\overline{r}\|_{\overline{\mathbb{S}}} := \Vert r\Vert_{\overline{\mathbb{S}(\Lambda)}}$ 独立于 Λ，利用方程 (2.1)。

证明。 根据定义 7.4，定义 7.3 所要求的极限仅在 $\Lambda > 0$ 时无法保证。对比定义 5.9 指出，$\mathbf{w}(\overline{\Lambda}; x)$ 在 $]0,\ 1[_\Lambda$ 上随着 $\Lambda \to \Lambda > 0$ 一致收敛于 $\mathbf{w}(\Lambda;\ x)$。这足以应用一致极限定理 [Rudin, 1976, 页码 149], ，从而保证存在唯一的一致连续极限$\mathbf{w}(\Lambda;\ x) \to \mathbf{w}(\Lambda; x) \in \mathbb{F}^{(0)}\big([0, 1]_\Lambda\big)$ 随着 $\Lambda \to \Lambda > 0$。最后，任意一致连续正函数的平方根都是唯一且一致连续的。□

推论 7.6。 反应项是连续可微的 $\Lambda r(\mathbf{u}) \in \mathbb{F}^{(1)}\big(\mathbb{X}(r; D)\big)$ 当 $\Lambda r(\mathbf{u}) = 0$只要 $x = 1$。

引理 7.7。 每个由环境 (r, D) 支持的平面波都位于 $\mathbb{V}$ 内部，并且必须满足

$$1 - (1 - \overline{x})^{\min(D,1)} \le \overline{v}_{\mathbf{z}}(\Lambda; \overline{x}) \le 1 - (1 - \overline{x})^{\max(D,1)}$$

证明。界定义指标 在 $v_{\mathbf{z}}$上的条件在等扩散环境中是平凡的，因此取 $D \neq 1$ 和常数 $\Delta \in \{D, 1$ $\}$. tor

$$\delta(\Lambda; x) := (D + 1 - 2\Delta)\left(v_{\mathbf{z}}(\Lambda; x) - 1 + (1 - x)^{\Delta}\right) \in \mathbb{F}^{(\infty)}\big(]0, 1[_\Lambda\big)$$

以及违反所引述的关于 $v_{\mathbf{z}}$ 的界限的开集

$$\mathbb{D}_\Lambda := \delta^{-1}\big(\mathbb{R}^-\big)$$

T平面波投影 $\mathfrak{X}\mathbf{v}(\Lambda;\,x)$ 由非自治蒸馏体 3.3 按照 m

$$(D+(v_{\mathbf{y}}-x)\,\partial_x)\,\delta(\Lambda;x)=(D+1-2\Delta)\left(D(1-x)^{\Delta}-\Delta(v_{\mathbf{y}}-x)(1-x)^{(\Delta-1)}-D(1-v_{\mathbf{y}})\right)$$

而边界约束 2.5、2.6 规定了 $\delta\big(\{\Lambda\}\times\{0,1\}\big)=\{0\}$。于是，中值定理要求存在一个驻点 $x\in\mathbb{D}_{\Lambda}\neq\varnothing$，但它不可能由以下内容支配

$$0>D\delta(\Lambda;x)=(D+1-2\Delta)\left(D(1-x)^{\Delta}-\Delta(y-x)(1-x)^{(\Delta-1)}-D(1-y)\right)>0$$

根据定义 3.1，在整个平面波中均有 $y<1$。因此， $\mathbb{D}_{\Lambda}=\varnothing$，从而按所述结果对 $v_{\mathbf{z}}(\Lambda;x)$ 进行界定。为确保平面波 $\mathbb{V}(\Lambda)\in\mathbb{F}^{(0)}\big(\mathbb{X}(r;D)\big)$，对非自治蒸馏体 3.3 进行积分

$$1=\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)^2=2\Lambda\int_0^1 r(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\,\partial_x\,v_{\mathbf{y}}(\Lambda;x)\,\mathrm{d}x>\Lambda\|\overline{r}\|_{D}$$

利用 $z(\Lambda;\,\xi)$ 的上界 $=v_{\mathbf{z}}(\Lambda;x)$，以及方程(2.4) 和定义 3.1 的单调性。 □

推论 7.8。 最慢的紧轨道 $\mathbb{V}(\|r\|_{D}^{-1})$ 属于严格上类。

引理 7.9。 紧轨道对比满足

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}\left((\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)-1)-(1-x)\left(\partial_x\,\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)-1\right)+(1-x)\,O(\partial_x\,\overline{v}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)-\partial_x\,v_{\mathbf{y}}(\Lambda;\mathring{x}))\right)^2\\ =\epsilon\;\partial_{\Lambda}\,w_{\mathbf{y}}(\mathring{\Lambda};x)\in\Big]0,\epsilon\,\left(2+\operatorname{sgn}(D-1)+\operatorname{sgn}(D-1)^2\right)\mathring{\Lambda}\,\|\overline{r}\|_{\mathbb{S}}^{2}\Big[\end{aligned}$$

其中 $\mathring{x}\in\,]x,1[\,\subset\,]0,1[$ 和 $\mathring{\Lambda}\in\,]\Lambda,\Lambda+\epsilon[\,\subset\,]0,\|r\|_{D}^{-1}[$。随着 $x\to1$，较大的 O（精确报告）会缩小至零，变得无关紧要，除非 $\mathfrak{d}\Big(\left(1-(1-x)\,\partial_x\right)\sqrt{w_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)}\Big)=o\big((1-x)^2\big)$。

证明。 对比算子 5.3——它没有界——在此仅按如下方式计算两个足够光滑函数之差。左侧通过定义 4.11，对 $\mathfrak{d}\,v_{\mathbf{y}}\in\mathbb{F}^{(1)}\big([0,1]_{\Lambda}\big)$ 应用中值定理（关于 x）。右侧使用定义 5.9，对 $\mathfrak{d}\,w_{\mathbf{y}}\in\mathbb{F}^{(1)}\big(\mathbb{X}(r;D)\big)$ 应用中值定理（关于 Λ）。□

推论 7.10. 对比两个上类（***U*** 或 ***UM***）轨道会得到严格为正的结果

$$\partial_{\Lambda+}\,\overline{w}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)\in\Big]0,\left(2+\operatorname{sgn}(D-1)+\operatorname{sgn}(D-1)^2\right)\Lambda\,\|\overline{r}\|_{\mathbb{S}}^{2}\Big]$$

证明. 在定义 7.9 中保留残差，并利用表 4，可得

$$\left(\frac{\mathfrak{d}\,\overline{w}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)}{\epsilon\,\sqrt{\overline{w}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)}}\left(\sqrt{\overline{w}_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)}+(1-x)\right)-O\left(2\frac{\mathfrak{d}(\Lambda r(\mathring{\mathbf{v}}))}{\epsilon}\right)(1-x)\right)\in\Big]0,\left(2+\operatorname{sgn}(D-1)+\operatorname{sgn}(D-1)^2\right)\mathring{\Lambda}\,\|\overline{r}\|_{\mathbb{S}}^{2}\Big[$$

其中，根据定义 5.9， $\Lambda r(\mathring{\mathbf{v}}):=\Lambda r(\mathbf{v}(\Lambda;\mathring{x}))$ 关于 Λ 严格递增。在取极限（先 $x\to1$，再 $\epsilon\to0$）之前，对左侧应用中值定理（关于 Λ），可见 $\partial_{\Lambda+}\,w_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)$ 严格地 >0。方向对于确保只对比上类轨道至关重要，因为此处的极限是定义 5.3 中的右导数。

顺便提一下，对于严格上类轨道，这一结果显而易见，因为在这种情况下权重 $g_{\mathbf{n}}$ 不会发散，从而确保其平均值在整个紧域上均有定义——也就是说，定义 5.7–5.9 在整个 $[0,1]_{\Lambda}$ 上均适用。□

推论 7.11。 $\mathbb{V}$ 中至多存在一个中类（***UM***、***M*** 或 ***LM***）轨道。

证明。 如果环境是终端非双曲环境（$\partial_x\,r\,(\mathbf{1})=0$），则任何中类轨道只能是上中类（UM），将它们彼此进行对比可得到 $\mathfrak{d}\,w_{\mathbf{y}}\,(\Lambda;\,\mathbf{1})=0$，这违反了定义 7.10。假设环境是终端双曲环境（$\partial_x\,r\,(\mathbf{1})<0$），则根据定义 4.12 对任意两个中类（M 或 LM）轨道进行对比

$$\mathfrak{d}\,w_{\mathbf{y}}(\Lambda;x)=\mathfrak{d}\,(\Omega_{+}(\Lambda;1)+o(1))^2(1-x)^2<0$$

违反定义 7.9，如 $x\to1$。 □

8. Conclusion

定理 1. 任意给定的环境$(r;D)\in\left]0\right.$都对应一个临界 *lentor* Λ_*，$\|r\|_D^{-1}\left[(r;D)\right.$，其中

$$\|\overline{r}\|_D := 2\int_0^1 r\Big(\mathbf{1}-\mathbf{1}_{\mathbf{x}}(1-x)-\mathbf{1}_{\mathbf{z}}(1-x)^{\max(D,1)}\Big)\,\mathrm{d}x$$

问题 $\Lambda\in\left]0,\Lambda_*\right]$在此环境中拥有唯一的平面波，而问题 $\Lambda\in\left]\Lambda_*,\infty\right[$则没有。最慢平面波 $\mathbb{V}(\Lambda_*)$始终属于中类 $\partial_x v_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)\ \le\ 1/2$，所有其他平面波$\mathbb{V}\left(\left]0,\Lambda_*\right[\right)$则严格属于下类 $\partial_x v_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)\ >1/2$。

平方抬升 $w_{\mathbf{y}}(\Lambda;\,x):=\big(v_{\mathbf{y}}(\Lambda;x)-x\big)^2$除点$(\mathbf{A}_*;1)$–$\in\mathbb{X}(r;D):=\left[0,\|r\|_D^{-1}\right]\times[0,1]$外均连续可微。它在 Λ上单调递增，并且是 *Lipschitz* 连续的

$$\partial_{\Lambda-}\,\overline{w}_{\mathbf{y}}\left(\overline{\mathbb{X}}(\overline{r};D)\right)\cup\partial_{\Lambda+}\,\overline{w}_{\mathbf{y}}\left(\overline{\mathbb{X}}(\overline{r};D)\right)\subseteq\left[0,\left(2+\operatorname{sgn}(D-1)+\operatorname{sgn}(D-1)^2\right)\overline{\Lambda}\,\|\overline{r}\|^2_{\overline{\mathbb{S}}(\overline{\Lambda})}\right]$$

证明。本质上，定义 4.9、4.10 描述终止，定义 5.9 规定此前的所有行为，而定义 7.9 则衔接二者。定义 7.7 只是确保涵盖所有平面波。假设前文结论成立，该定理归根结底只是定义 4.13、7.8、7.10、7.11 的简单组合。□

注 8.1。定义 5.9 将两个形成对比的轨道描绘成一条从**0**开始的拉链。取极限$\epsilon\to0$就像拉上拉链。拉链末端不易扣合，需要借助定义 4.10 中的虚构造以及定义 7.9 中的桥接才能牢固闭合。这并不令人意外，因为拉上拉链会将轨道合并，即使它们跨越类别边界，且在终止时存在无法调和的差异。除了退化的双曲终止之外，很难相信上类和下类轨道会在临界 lentor 处合并，因为二者在终止时的主导特征值相差一个阶跃。为消除人们由此产生的看法——即双曲系统中理应出现退化终止——下面给出一个直接的结果。

推论 8.2. 在任何双曲环境中，除最慢平面波 $\mathbb{V}(\Lambda_*)$外，所有平面波 $\mathbb{V}\left(\left]0,\Lambda_*\right[\right)$都严格属于下类 $\partial_x v_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)>1/2$。对于每一个最慢平面波属于下中间类$\partial_x v_{\mathbf{y}}(\Lambda_*;1)=1/2$的环境，都存在无数个环境，其中 $\mathbb{V}(\Lambda_*)$属于上中类 $\partial_x v_{\mathbf{y}}(\Lambda_*;1)>1/2$。后者完全没有下中间类，而是在 $\partial_x v_{\mathbf{y}}(\Lambda;1)$处存在不连续性 $\Lambda=\Lambda_{*\mathrm{o}}$

证明. 固定假定的环境为(r_h,D)，并要求 $\|r_h\|_D<1/\Lambda_*=-4D\,\partial_x\overline{r}_h\mathbf{(1)}$。现在取任意满足方程（2.1）–（2.4）且 $\partial_x r_{nh}\mathbf{(1)}=0$的 r_{nh}。那么，根据定义 7.7，只要$(\|r_{nh}\|_D+\|r_h\|_D)>-4D\,\partial_x r_h\mathbf{(1)}$，环境$(\overline{r}_h+r_{nh},D)$就不存在下中间类。□

注 8.3. 最后，一个自然且广为人知的扩展是引入截断反应：只有当产物足够充足时，反应才会进行。这在火焰建模中极为常见，其中点火温度 X 可用于缓解臭名昭著的冷边界问题。

推论 8.4. 考虑引言中提出的原始物理问题，并对其进行修改以纳入反应截断

$$\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})=0\quad \textit{for all}\quad \check{\mathsf{x}}\le\check{\mathsf{X}}$$

该问题仅存在一个以特征波速 $V=V_\dagger<V_*(1-\check{\mathsf{X}})^{-1/2}$传播的平面波。

证明。引入

$$\overline{Y}:=1/(1-\check{\mathsf{X}})$$

采用缩放后的动力系统表述

$$\mathbf{u}:=(x,y,z)^{\intercal}:=\overline{Y}\left((1-\check{\mathsf{x}}),(1-\partial_\xi\check{\mathsf{x}}-\check{\mathsf{x}}),\check{\mathsf{z}}\right)^{\intercal}$$

$$\Lambda r(\mathbf{u}):=\overline{Y}\,V^{-2}\,\check{\mathsf{r}}(\check{\mathsf{x}},\check{\mathsf{z}})$$

该表述在 $x\ge1$时截断反应。这就是此前研究过的原始问题，只是现在终端边界约束为 $\mathbf{u}(\Lambda;+\infty)=\mathbf{1}Y$。向后积分，截断后的通解为

$$\overline{\mathbf{u}}(\Lambda;\xi)=\mathbf{1}\overline{Y}+\mathbf{1}_{\mathbf{x}}\left(1-\overline{Y}\right)\exp(\Xi-\xi)+\mathbf{1}_{\mathbf{z}}\left(\overline{Z}-\overline{Y}\right)\exp(D\Xi-D\xi)$$

当且仅当它在$\mathbf{u}=(\mathbf{1},\ Y,\ Z)$处与原始问题的一个严格上类轨道相连时，便会终止平面波。趋近终止时，平面波类似于图 3中描绘的上类轨道，此时虚拟的（灰色）区域成为实际区域，并将任意轨道汇聚到实线所示的水平非双曲轨迹上。定义 7.9要求 $\partial_{\Lambda+}Y>0$ 属于上类，因此恰好允许在某个 $\Lambda=\Lambda_\dagger>\Lambda_*$处存在一个平面波。□

注释 8.5。 最后，我们应重申，此处给出的结论绝非新颖之见 [Marion，1985年，Volpert 等人， 1994]，但证明方法却是新的。作为基本方法一项相当具体的应用，它希望能在其所涵盖的有限但极其重要的问题类别方面，具有一定的教学价值。此外，此处提出的简单思路——轨道对比和突破级联——或许有助于理解其他与本研究毫不相关的动力系统。最后，不妨思考一下这种方法与 Leray-Schauder 方法之间的关系。就此而言，突破级联依赖于反应函数的高阶导数 $r \in \mathbb{F}^{(\infty)}(\mathbb{U})$，这一点似乎难以协调。在等扩散（$D = 1$）环境中，光滑性并非必需；但在这一特殊情形之外，光滑性对于所采用的突破级联则绝对不可或缺。无论如何，Leray-Schauder 方法并不要求这一点。

References

D.V. Anosov、S.Kh. Aranson、V.I. Arnol′d、I.U. Bronshtein、V.Z. Grines 和 Yu.S. Il'Yashenko。《常微分方程与光滑动力系统》。数学问题丛书。施普林格，柏林，第三版，1997年。ISBN 9783540612209。Vladimir I. Arnol′d。《常微分方程》。施普林格教材。施普林格出版社，柏林，1992。ISBN 9783540548133。D.G Aronson 和 H.F Weinberger。群体遗传学中出现的多维非线性扩散。《数学进展》，30(1):33 – 76，1978年。ISSN 0001-8708。doi: http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708(78)90130-5。Paul C. Fife 和 J.B. McLeod。非线性扩散方程的解趋近于行波前解。《理性力学与分析档案》，65(4):335–361，1977年。ISSN 0003-9527。doi: 10.1007/ BF00250432。Ronald A. Fisher。有利基因的扩展波。《优生学年刊》，7:353–369，1937年。Dominic William Jordan 和 Peter Smith。《非线性常微分方程》。牛津应用数学与工程数学丛书。牛津大学出版社，牛津，第四版，2007年。ISBN 9780199208258。A. N. Kolmogorov、I. G. Petrovskiĭ 和 N. S. Piskunov。对物质数量增加时扩散方程的研究及其在生物学问题中的应用。《莫斯科国立大学通报：数学与力学》，1 (6):1–25，1937年。Martine Marion。无点火温度层流火焰非线性系统的定性性质。《非线性分析》，9(11):1269–1292，1985年11月。doi: 10.1016/0362-546X(85)90035-5。Walter Rudin。《数学分析原理》。纯粹与应用数学国际丛书。麦格劳-希尔，纽约，第三版，1976年。ISBN 9780070856134。Eric Schechter。《分析及其基础手册》。学术出版社，圣迭戈，1997年。ISBN 9780126227604。Gerald Teschl。《常微分方程与动力系统》，数学研究生教材第140卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012。ISBN 9780821883280。Aizik I. Volpert、Vitaly A. Volpert 和 Vladimir A. Volpert。《抛物型系统的行波解》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。ISBN 0821846094。Ya. B. Zel′dovich 和 D. A. Frank-Kamenetskiĭ。火焰热传播理论。《苏联物理化学学报》，9:341–350，1938年。

Email address: robert.gomez.milton@gmail.com