arXiv:2601.03592v1 [math.CO] 7 Jan 2026

离散伪流形着色

BIPLAB BASAK、VANNY DOEM 和 CHANDAL NAHAK

Abstract. 本文给出了关于离散 d伪流形着色的三个主要结果：(1) 任意 d伪流形 K的一般色数界 $d+1 \leq X(K) \leq 2d+2$；(2) 可表示为 Zykov 联接$K = S^k + K'$的伪流形的改进界 $X(K) \leq 2d+1$；(3) 在球面连接因子 S^k 由偶环构成且其维数 k 接近 d的附加假设下，最优界 $X(K) \leq \lceil 3(d+1)/2 \rceil$。

1. Introduction

几何图色彩理论的现代深厚渊源，可追溯至 Steve Fisk 在一系列开创性著作 [2, 3, 4, 5]中奠定的组合拓扑。Fisk 研究了三角剖分流形的着色，并证明纯组合论证如何能够用于解决几何问题。然而，他的理论框架本质上仍局限于经典单纯复形及其拓扑实现。

Oliver Knill 通过离散流形理论 [9]，将这一范式转化为有限图论的纯粹语言。通过将离散流形 M 纯粹定义为一种有限简单图，其中每个单位球（由 x 的邻点生成的子图）都是一个（$d-1$）-球面，Knill 为任意离散 d-流形 M 提供了色数 $X(M)$ 的基础界限，[9, 定理 1],

$$d+1 \leq X(M) \leq 2d+2. \tag{1.1}$$

此外，利用两个一般有限图的 Zykov 联接 G 和 H（定义 2.3），其中色数 $X(G+H) = X(G) + X(H)$ [9, 第 3 节。1], Knill 构造了色数按 $3k$ 或 $3k+1$ 规模增长的高维球面，见 [9, 第 3 节。2]。这引出了这样的猜想：最优界限可能更为紧确，如 [9, 第 1 节。2]

$$d+1 \leq X(M) \leq 2d+1 \tag{1.2}$$

and

$$d+1 \leq X(M) \leq \lceil 3(d+1)/2 \rceil \tag{1.3}$$

其中 $\lceil - \rceil$ 是上取整函数。因此，Knill 的工作可以被视为对 Fisk 在 [5] 发起的几何着色问题进行图论式重新奠基与扩展。

本文将色数理论从离散 d流形拓展到范围显著更广的离散 d组合伪流形（定义 3.1）。一个核心问题是，(1.1) 中的基础界限是否仍适用于这一更一般的类别。我们证明，任意离散 d组合伪流形 K 的色数都满足 (1.1) 中同样稳健的界限（定理 3.7）。

定理 A. 任意 d-伪流形 K 的色数 $X(K)$ 满足

$$d+1 \leq X(K) \leq 2d+2.$$

Date：2026年1月8日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：05C15、05C10；次要分类号：52B70、55U10。*Key words and phrases.* 组合伪流形、色数、几何图论。

由此可知，色数 $X(S^k)$ 可以相对较小（命题 4.4），并构造一个离散 d-伪流形 K，使其可分解为$K = S^k + K'$。然后我们得到 (1.2) 中更紧的界（定理 5.3）。

定理 B. 若 $K = S^k + K'$ 使得 S^k 是一个 k-球面，且 K' 是一个 $(d-k-1)$-伪流形，

$$d+1 \le X(K) \le 2d+1.$$

此外，我们证明，在球面因子 S^k满足最优条件的情况下，例如 S^k 由偶圈构成且维数足够高，(1.3) 中猜想的最优上限可以达到（定理 5.7）。

定理 C. 若 $K = S^k + K'$ 使得 S^k 是一个偶圈 k-球面， K' 是一个 $(d-k-1)$-伪流形，且 k 足够接近 d，

$$d+1 \le X(K) \le \lceil 3(d+1)/2 \rceil.$$

1.1. **组织结构**。 在第 2 节中，我们回顾本文中会用到的一些预备知识。第 3 节讨论 d-伪流形的色数情形，并证明定理 A；第 4 节则介绍用于在第 5 节证明定理 B 和 C 的基础结果。

1.2. **记号**。 本文中使用以下记号。

- G和 H 表示有限图。
- $X(-)$表示色数。
- K 表示离散伪流形， M 表示离散流形。为方便起见，我们有时会省略前缀“离散”。

致谢。 第一作者（Biplab Basak）获得了 SERB 的数学研究影响力中心支持计划（MATRICS）研究资助（编号：MTR/2022/000036），第二作者获得了印度文化关系委员会（ICCR）的研究资助（编号：PHN/ICCR/321/1/2021）。

2. 预备知识

2.1. **图的对偶性**。 设 $G = (V, E)$ 是一个顶点为 V、边为 E 的图。下面回顾图论概念中的两种对偶类型。

定义 2.1。 设 H 是有限简单图 G 的一个子图。子图 H 在 G 中的补对偶图 H 定义为所有单位链接的交集

$$\hat{H} = \bigcap_{y \in H} L(y).$$

例如，空图 0 在 G 中的互补对偶图就是 G 本身（反之亦然）；单顶点子图 x 在 G 中的互补对偶图是 G 中的单位链接 $L(x)$；完全图 K_n 在 K_m 中的互补对偶图则是由 K_n 的互补顶点构成的 K_{m-n}。

定义 2.2。 d-图 G 的对偶图 $G^* = (V^*, E^*)$ 定义如下：以极大 d-单形为顶点，若两个不同的极大单形相交于一个 $(d-1)$-单形，则连接这两个顶点。

例如，边界为循环图 C_n 的轮图的对偶图是 C_n，八面体图（2-球面）的对偶图是立方体图，而 3-球面的对偶图是超立方体。请注意，这里所说的球面是指 [9, §1.1] 离散流形理论中的拓扑离散球面。

2.2. **图上的运算**。 在本小节中，我们回顾图上的两种代数运算：Zykov 在 [11], 首先引入的 Zykov 联接，以及 Stanley-Reisner [7] 提出的笛卡尔单形积。

定义 2.3。 设 $G=(V,\ E)$ 和 $H=(W,\ F)$ 是有限简单图。定义 Zykov 联接 $G+H$ 为不交并 $G\cup H$，其中 G 中的每个顶点都与 H 中的每个顶点相连。代数地，

$$G+H=(V\cup W, E\cup F\cup VW)$$

其中 VW 表示将任意顶点 V 与任意顶点 W 相连的所有边之和 .

定义 2.4。 对于两个图 G 和 H，笛卡尔单纯形积 $(G\times H)_1$ 是一个图，其顶点为有序对 $(g,\ h)$，其中 g 和 h 是 G 或 H 的完全子图；若两个有序对 $(g,\ h)$ 和 $(u,\ v)$ 不同，且满足 $g\subset u,\ h\subset v$ 或 $u\subset g,\ v\subset h$，则它们相连。代数地，

$$(G\times H)_1=(c(G)\times c(H), \{(a,b)\mid a\subset b \text{ or } b\subset a\}).$$

若 $H=1$ 是单点图，则积 $(G\times 1)_1$ 是 G 的重心细分。

3. Chromatic Numbers of Pseudomanifolds

拓扑离散球面有一种几何构造，由此可以用图论概念重新表述拓扑离散流形 [9, §1.1]。本节定义一类新的 d-图，称为离散 d-伪流形。为方便起见，有时会省略前缀“离散”。

定义 3.1. 离散 d-伪流形是一个有限简单图 K，其中每个单位链接 $L(x)$——由 x的邻点生成的子图——都是一个（$d-1$）-伪流形。这里默认空图 $\emptyset$是一个（-1）-链接，而 1-伪流形是一个循环图 C_n，其中 $n\geq 4$。

注意定义 3.1 中，单位链接 $L(x)$本质上是一个伪流形，它不一定是拓扑球面，正如 [9, §1.1]和 [6, §8]中所介绍的。因此，一般而言，伪流形不再是拓扑流形。

定义 3.2。 伪流形 K 的子伪流形 K' 也是一个伪流形，其顶点集和边集分别是该伪流形的顶点集和边集的子集。

根据定义 2.1 和定义 3.1，我们得到以下事实。

ˆ命题 3.3。 对于完全子图 $K_n\leq K$，补对偶 K_n 是一个（$d-n$）-伪流形。

证明。 我们对索引 n使用归纳法。根据归纳步骤

$$\hat{K}_{n-1}=\bigcap_{y\in K_{n-1}} L(y)$$

是一个（$d-n+1$）-伪流形。现在我们证明 n的情形。记 $K_n=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。固定$v=v_n$ 并记 $K_{n-1}-v$。根据定义 2.1，我们有

$$\hat{K}_n=\bigcap_{y\in K_n} L(y)=\bigcap_{y\in K_{n-1}} L(y)\cap L(v)=\hat{K}_{n-1}\cap L(v).$$

ˆ 接下来我们必须验证 $v\in K_{n-1}$。对于每个 $y\in K_{n-1}$，v 都与 y 相邻，因为 $v\neq y$，且 ˆK_n 是一个完全图。因此，对于每个 $y\in K_{n-1}$，我们得到 $v\in L(y)$，也就是说，$v\in K_{n-1}$。

ˆ ˆ 现在考虑 $L_{\hat{K}_{n-1}}(v)$，即 K_{n-1} 中的单位链接 $L(v)$。由于 K_{n-1} 是 K 的诱导子图，

$$L_{\hat{K}_{n-1}}(v) = \{u \in \hat{K}_{n-1} \mid u \text{ adjacent to } v \in G\} = \hat{K}_{n-1} \cap L(v) = \hat{K}_{n-1}.$$

ˆ根据归纳假设， K_{n-1} 是一个（$d-n+1$）伪流形，因此 K_{n-1}中任意ˆ顶点的单位链接 $L_{\hat{}K_{n-1}}$ 都是一个（（$d-n+1$）-1）$=$（$d-n$）伪流形。这表明ˆK_n 是一个（$d-n$）伪流形，从而证明了该结论。□

ˆ命题 3.4。对于任意子图 $H \leq K$，其补对偶 H 要么是空图、子伪流形、完全图、棱锥，要么就是整个伪流形 K。

证明。我们对顶点 $|V$（H）$| = k$的基数使用归纳法。根据归纳步骤，对于所有满足 $|V$（H）$| \leq k$的子图，该结论均成立。现在证明$k+1$的情形。设 H 是一个满足 $|V$（H）$| = k+2 \geq 2$的子图。固定 $v \in H$，并记 $H' = H - v$。于是

$$\hat{H} = \hat{H}' \cap L(v).$$

根据归纳步骤，我们有 ˆH' 是以下情形之一。

情形 1：ˆ$H' = \emptyset$ 或 ˆ$H' = K$。若 ˆ$H' = \emptyset$，则 ˆ$H = \emptyset$。若 ˆ$H' = K$，则 ˆ$H = L(v)$ 根据定义 3.1 本质上是一个 $(d-1)$- 伪流形。

情形 2：ˆ$H' = K'$ 是一个子伪流形。因此，我们有 ˆ$H = K' \cap L(v)$。由于 K' 和 $L(v)$ 是子伪流形， $K' \cap L(v)$ 是它们二者的诱导子图。根据伪流形的局部性质， $K' \cap L(v)$ 要么是空图、子伪流形、完全子图（若交集是一个团），要么是棱锥（若交集是一个以子伪流形为底的锥）。

情形 3：ˆ $H' = K_n$ 是完全图。因此，ˆ $H = K_n \cap L(v)$。由于完全图的任意诱导子图 K_n 都是完全图，故ˆH 要么是 $\emptyset$，要么是完全子图。

情形 4： $\hat{H}'$ 是一个棱锥 $P = K' + w$，其中 K' 是子伪流形。于是

$$\hat{H} = P \cap L(v) = (K' + w) \cap L(v).$$

若 $v = w$，则ˆ$H = K' \cap L(v)$归结为情形 2。此外，若 $v \neq w$ 和 v 与 w相邻，ˆ则 $w \in L(v)$ 和 H 可能仍保持棱锥结构，或成为完全图。若 $v \neq w$和 v 与 w不相邻，则 $w \notin L(v)$和ˆ $H = K' \cap L(v)$又归结为情形 2。经过上述论证，我们完成了证明。□

现在，我们给出证明定理 3.7 中伪流形 K的色数 $X(K)$所需的、关于 d-伪流形对偶性的必要元素。注意， d-伪流形K 的对偶 K^* 是$(d+1)$-正则的，因为每个单形恰好与 $d+1$ 个邻点相连。

命题 3.5。 对于任意 d-伪流形 K，其对偶图 K^* 不含三角形 ee.

证明。 设 K^* 含有一个由三个极大 d-单形 σ_1、 σ_2、 σ_3构成的三角形，其中每一对 $\sigma_i \cap \sigma_j = \tau_{ij}$都共享一个 $(d-1)$-单形。由于 K 中的每个 $(d-1)$-单形恰好包含在两个极大 d-单形中，这些面彼此不同；这是因为 K^*具有 $(d+1)$-正则性。

现在考虑 $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$。由于 τ_{12}、 τ_{13} 是 σ_1中不同的 $(d-1)$-面，因此交集σ 是一个 $(d-2)$- 单形。由定义 3.1 可知， K 中 $(d-2)$- 单形的链接 $L(\sigma)$ 是一个 1- 伪流形 C_n、 $n \geq 4$。然而， σ_1、 σ_2、 σ_3产生三个不同的顶点，即 a、 b、 $c \notin \sigma$，使得

$$\sigma_1 = \sigma \cup \{a, b\}, \sigma_2 = \sigma \cup \{a, c\}, \sigma_3 = \sigma \cup \{b, c\}.$$

在 $L(\sigma)$ 中，顶点 a、 b、 c两两相邻，因为 $\sigma \cup \{a, b\}$、 $\sigma \cup \{a, c\}$、 $\sigma \cup \{b, c\}$ 是d-单形。因此， $L(\sigma)$ 含有一个三角形 K_3，这与它必定是 C_n、 $n \geq 4$ 的事实矛盾。因此可知， K^* 不能含有三角形。□

命题 3.6。 对于每个 d-伪流形 K，对偶图 K^* 可以切分成树。

证明。 根据命题 3.5，我们可以如下将每个圈分解为其顶点的生成树。对于连通的 K，K^* 是连通的。然后，我们可以移除不属于 K^* 的生成树的所有边，从而得到一棵树。此外，如果 K 不连通，则 K^* 也不连通。因此，对每个分支应用相同的术语可得到一个生成森林，即由树组成的集合，每个分支对应一棵树。□

现在我们准备证明主要结果。对于下界，我们通过观察伪流形 K 中极大单纯形的存在来展示证明；对于上界，则通过分解对偶图 K^* 来展示。

定理 3.7。 任意 d-伪流形 K 的色数 $X(K)$ 满足

$$d+1 \leq X(K) \leq 2d+2.$$

证明。 假设 K 是一个连通的 d-伪流形。接下来我们对 d 使用归纳法。在归纳步骤中，我们有

$$d \leq X(K) \leq 2d$$

对于一个 $(d-1)$-伪流形 K。现在我们证明 d。对于界 $d+1$，由定义 3.1 可知显然成立。对于 $2d+2$，我们证明如下。

步骤 1：分解 K^*。首先注意到 K^* 是连通且$(d+1)$-正则的。根据命题 3.5，我们将 K^* 分成两组不相交的生成森林（树），分别记为 F_1 和 F_2。

步骤 2：为 F_1, F_2着色。对于 $F_1 \in K^*$中的所有单形，使用第一组 $d+1$ 种颜色为其着色

$$C_1 = \{1, 2, \cdots, d+1\}.$$

对于 $F_2 \in K^*$中的单形，使用第二组不同的 $d+1$ 种颜色为其着色

$$C_2 = \{d+2, d+3, \cdots, 2d+2\}.$$

步骤 3：合并 $F_1 \cup F_2$ 和 $C_1 \cup C_2$。由于 K 中的每个单形都属于两个森林之一，即 F_1, F_2，因此每个面都是 F_1 和 F_2中的一个顶点。因此， K的每个顶点都有两个潜在着色分配：一个来自 F_1，颜色取自 C_1；另一个来自 F_2，颜色取自 C_2。将两个森林 F_1, F_2 及其颜色 C_1, C_2合并后可知，每个顶点都能从总数为 $2d+2$的着色集合中获得唯一一种颜色，更确切地说，

$$C_2 \cup C_2 = \{1, 2, \cdots, d+1, d+2, \cdots, 2d+1, 2d+2\}.$$

至此，论断得证。 □

推论 3.8. 如果 $K' \leq K$ 是伪流形 K的子伪流形，那么我们有$X(K') \leq X(K)$。特别地，

$$\dim K' + 1 \leq X(K') \leq 2\dim K' + 2.$$

证明。 这由定理 3.7 立即得出。 □

备注 3.9. 观察定理 3.7 和 $[9,$ 定理 $1]$, 可知，尽管d-流形与范围更广的 d-伪流形类具有相同的一般色数界

$$d+1 \leq X(M), X(K) \leq 2d+2,$$

它们有效范围之间的关系仍是一个引人入胜的问题。与 $[9, \S 1.1]$, 中的离散流形类似， M 有证据支持一个猜想的更紧上界 $\lceil 3(d+1)/2 \rceil$，其中 $\lceil - \rceil$ 是上取整函数；此外，已有构造可达到按 $1.5d$ 增长的色数。伪流形更灵活的局部结构是否允许色数超过这一猜想的流形上限，抑或反而施加更严格的限制，仍有待在第 5 节进一步研究。

4. 伪流形上的色数算术

本节将考察伪流形上的图运算及其色数性质。一般图的色数已在 [9, §3] 中得到证明。不过，这里有一点颇为有趣：定义 2.3 中的 Zykov 联接和定义 2.4 中的笛卡尔单纯形积都保持伪流形这一性质；伪流形是一类图，其所有单位链接递归地都是低一维的伪流形。

命题 4.1。设 K 是一个 m-伪流形， K' 是一个 n-伪流形。那么，Zykov 联接 $K+K'$ 是一个 $(m+n+1)$- 伪流形。

证明。我们对总维数 $m+n$ 使用归纳法。归纳地假设，当维数之和为 $<m+n$ 时，所有 Zykov 联接都满足该结论。现在考虑维数为 m 的 K 和维数为 n 的 K'，以及 $m+n\geq 0$。

假设 v 是 $K+K'$ 中的一个顶点。那么， v 源自 K 还是 K' 有两种可能，即：

$$L_{K+K'}(v)=L_K(v)+K' \text{ or } L_{K+K'}(v)=K+L_{K'}(v).$$

根据定义 3.1， $L_K(v)$ 和 $L_{K'}(v)$ 分别是 $(m-1)$-伪流形和 $(n-1)$-伪流形。根据归纳假设，一个 $(m-1)$-伪流形与一个 n-伪流形的 Zykov 联接，以及一个 m-伪流形与一个 $(n-1)$-伪流形的 Zykov 联接，都是 $(m+n)$-伪流形。最后我们注意到，每个单位链接都是一个 $(m+n)$-伪流形，因此由定义 3.1 可知， $K+K'$ 是一个 $(m+n+1)$-伪流形。由此证明了该断言。□

注意，对于两个一般图 G 和 H，有公式 [1, 引理 2]

$$\dim(G+H)=\dim G+\dim H+1.$$

此外，根据 [9, 引理 1], ，色数 $X(G+H)$具有可加性

$$X(G+H)=X(G)+X(H). \tag{4.2}$$

特别是，

$$X(G+S^0)=X(G)+1 \tag{4.3}$$

where $S^0=\{\{a,b\},\emptyset\}$。在拓扑背景下， $G+S^0=SG$ 是 G的悬挂 .

关于球面着色曾有一个猜想，声称任意 k-球面 S^k 的色数为 $X(S^k)=k+1$ 或 $X(S^k)=k+2$，见 [8, §8.3]。后来， [9, 推论 1] 通过一个反例推翻了该猜想：任意 k- 球面 S^k 都有 $X(S^k)=3k$ 或 $X(S^k)=3k+1$。这表明 $X(S^k)$可以相当大。作为补充，也存在一个相对较小的色数 $X(S^k)$，如下所述。

命题 4.4。对于任意 k-球面 S^k，其色数为

$$X(S^k)=2\lceil (k+1)/2\rceil$$

其中 $\lceil -\rceil$ 是上取整函数。

证明。考虑一个 $(2k-1)$-球面 S^{2k-1}，它是一个偶圈球面，

$$C_n+C_n+\cdots+C_n$$

使得 $n\geq 4$ 为偶数。注意， $S^{2k}=S^{2k-1}+S^0$。因此，前者 S^{2k-1}使用 $2k$ 种颜色，而后者 S^{2k} 根据（4.3）使用 $2k+1$ 。这就证明了该结论。□

按照命题 4.4 的证明中构造 k-球面 S^k 的方法，我们知道，任何 k-球面都是由两类圈 C_n 为 $n \geq 4$构造而成的。用符号表示，任何球面都可以通过 Zykov 联接构造，即 $n \geq 4$,

$$C_n + C_n + \cdots + C_n.$$

如果每个 $n \geq 4$ 都是偶数，我们称 S^k 为偶圈球面；如果每个 $n \geq 5$ 都是奇数，那么 S^k就是奇圈球面。为便于后文使用，我们记录其色数

$$X(S^k) = 2\lceil (k+1)/2 \rceil \text{ or } X(S^k) = 3\lceil (k+1)/2 \rceil \tag{4.5}$$

其中，第一个因子对应偶圈球面，第二个因子对应奇圈球面。利用定义 2.4，我们还记录如下结果。

命题 4.6。 设 K 是一个 m伪流形， K' 是一个 n伪流形，且m， $n \geq 1$。则笛卡尔单纯形积 $(K \times K')_1$是一个 $(m+n+1)$-伪流形。

证明。 按照 [9, 引理 3], 中的相同证明，或更详细地参见 [10, 引理 5]。 □

回顾 [9, 第 5 节.1]中的构造。设 $x = (x_0, \ldots, x_{d-2})$ 是d伪流形中的一个 $(d-2)$-单形。单形 x 的对偶链接定义为

$$O(K) = L(x_0) \cap \cdots \cap L(x_{d-1})$$

其中，记号 $O(K)$ 表示 Fisk 在 [5, VI.2] 中定义的奇数长度。若 K 是图，我们便将这种奇结构 $O(K)$ 称为 Fisk 集；若 K 是伪流形，则称为 Fisk 簇。

命题 4.7. 对于一个 m-伪流形 K 和一个满足 $m, n \geq 2$ 的 n-伪流形 K'，

$$O(K + K') = K + O(K') \cup O(K) + K'.$$

证明。 沿用 [9, 引理 6] 中的相同证明。 □

5. The Limit of Chromatic Pseudomanifolds

本节旨在考察定理 3.7 中先前界限的紧确性。为了得到更紧确的界，我们遵循 [9, §1.1] 中的两个猜想，并在伪流形的背景下加以阐释。猜想的第一个版本更具实用性，第二个则更为严格。

C猜想 5.1. 对于任意 d-伪流形 K，其色数 $X(K)$ 满足

$$d + 1 \leq X(K) \leq 2d + 1.$$

猜想 5.2。 对于任意 d-伪流形 K，其色数 $X(K)$ 满足

$$d + 1 \leq X(K) \leq \lceil 3(d+1)/2 \rceil$$

其中 $\lceil - \rceil$ 是上取整函数。

针对猜想 5.1 和 5.2，我们记录以下特殊情形。

定理 5.3。 如果 d-伪流形 $K = S^k + K'$ 满足： S^k 是一个 k-球面，且 K' 是一个 $(d-k-1)$-伪流形，

$$d + 1 \leq X(K) \leq 2d + 1.$$

证明。 重写恒等式 (4.2)

$$X(K) = X(S^k) + X(K').$$

考虑最大界

$$X(S^k) \leq 3k + 1 \text{ and } X(K') \leq 2(d-k) \tag{5.4}$$

其中第一项见（4.5），第二项由定理 3.7 得出。有两种可能。情况 1： k 是偶数（$k = 2p$）。那么 X（S^k）$= X$（S^{2p}）$\leq 3p$。利用（4.2）和（5.4），

$$X(K) = X(S^{2p}) + X(K') \leq 2d - p.$$

因此，对于 $p \geq 0$， $X(K) \leq 2d + 1$ 始终成立。

情形 2： k 是奇数（$k = 2p + 1$）。同样根据 (4.2) 和 (5.4),

$$X(K) = X(S^{2p+1}) + X(K') \leq 2d - p + 1.$$

因此，对于 $p \geq 0$， $X(K) \leq 2d + 1$ 始终成立。证明至此完成。 □

如命题 4.4 所示，偶圈球面的色数 S^k 可以相对较小。根据定理 5.3，这引出了以下研究。

情形 A： S^k **是一个偶圈球面**。根据 (4.5) 和定理 5.3,

$$X(K) = X(S^k) + X(K') \leq 2d - k. \tag{5.5}$$

接下来我们要求

$$X(K) \leq \lceil 3(d+1)/2 \rceil.$$

然而，当且仅当

$$k \geq 2d - \lceil (3d+1)/2 \rceil$$

这等价于说，维数 k 接近 d，更准确地说,

$$k = \begin{cases} d/2 - 1, & d \text{ is even} \\ (d+1)/2 - 1, & d \text{ is odd.} \end{cases} \tag{5.6}$$

情形 B： S^k **是一个奇圈球面**。在这种情况下，上界

$$X(K) \leq \lceil (3d+1)/2 \rceil$$

根据我们在表 1 中的观察，对于作为奇圈球面的 S^k，上界可能不再成立。在表中，我们选取最大的色数

$$X(K')_{\max} = 2(d-k)$$

对于子伪流形 K'。这提供了一个保守估计，考虑了最坏情况下的色数，从而确保后续不等式普遍成立。

我们将上述对**情况 A、B** 的分析表述为以下命题。

d	k	S^k	维数K'	$X(S^k)$	$X(K')_{\max}$	$X(K)_{\max}$	X(K)
3	1	C_5	1	3	3	6	6
5	1	C_5	3	3	7	10	9
5	3	$C_5 + C_5$	1	6	3	9	9
7	1	C_5	5	3	11	14	12
7	3	$C_5 + C_5$	3	6	7	13	12
7	5	$C_5 + C_5 + C_5$	1	9	3	12	12

TABLE 1. 我们记以下符号： $X(K)_{\max} = X(S^k) + X(K')_{\max}$， $X(K')_{\max} = 2(d-k)$，以及 $X(K) = \lceil 3(d+1)/2 \rceil$。

定理 5.7。 如果 d-伪流形 $K = S^k + K'$ 满足 S^k 是一个偶圈 k-球面，K' 是一个 $(d-k-1)$-伪流形，并且 k 如 (5.6) 所示接近 d，

$$d + 1 \leq X(K) \leq \lceil 3(d+1)/2 \rceil$$

其中 $\lceil - \rceil$ 是上取整函数。

References

[1] K. Betre and E. Salinger, *The inductive graph dimension from the minimum edge clique cover*, Graphs Combin., 37 (2021), 第 2637–2654 页。[2] S. Fisk, *Combinatorial structure on triangulations. I. The structure of four colorings*, Advances in Math., 11 (1973), 第 326–338 页。[3] , *Combinatorial structures on triangulations. II. Local colorings*, Advances in Math., 11 (1973), 第 339–350 页。[4] , *Combinatorial structures on triangulations. III. Coloring with regular polyhedra*, Advances in Math., 12 (1974), 第 296–305 页。[5] , *Variations on coloring, surfaces and higher-dimensional manifolds*, Advances in Math., 25 (1977), 第 226–266 页。[6] O. Knill, *Coloring graphs using topology*, arXiv 预印本 arXiv:1412.6985, (2014)。[7] , *On the arithmetic of graphs*, arXiv 预印本 arXiv:1706.05767, (2017)。[8] , *Eulerian edge refinements, geodesics, billiards and sphere coloring*, arXiv 预印本 arXiv:1808.07207, (2018)。[9] , *Coloring discrete manifolds*, arXiv 预印本 arXiv:2106.14374, (2021)。[10] , *Characteristic topological invariants*, arXiv 预印本 arXiv:2302.02510, (2023)。[11] A. A. Zykov, *On some properties of linear complexes*, Mat. Sbornik N.S., 24/66 (1949), 第 163–188 页。

Math Department, Indian Institute of Technology Delhi, New Delhi 110016, India
Email address: biplab@iitd.ac.in

Math Department, Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur 721302, India
Email address: vanny.doem@gmail.com

Math Department, Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur 721302, India
Email address: cnahak@maths.iitkgp.ac.in