arXiv:2601.03634v1 [cs.LG] 7 Jan 2026

# 用于某些二阶随机过程均方逼近的 Kantorovich 型随机神经网络算子

**SachinSaini Uaday Singh**
印度理工学院鲁尔基分校数学系，印度鲁尔基 247667

sachin_saini@ma.iitr.ac.in, uaday.singh@ma.iitr.ac.in

2026年1月8日

**摘要**

人工神经网络算子（ANNO）已广泛用于逼近确定性输入—输出函数；然而，将其扩展至随机动力学领域仍相对缺乏探索。本文构造了一类新型**Kantorovich型随机神经网络算子（K-SNNO）**，其随机性并非融入系数层面，而是通过由随机积分器驱动的**随机神经元**引入。该框架使算子能够继承底层过程的概率结构，因此适用于随机信号的建模与近似。我们证明了K-SNNO均方收敛至目标随机过程，并推导出定量误差估计，以连续模表示近似速率。数值模拟进一步验证了理论结果，展示了对样本路径的准确重构以及均方误差（MSE）的快速衰减。包括逐样本逼近和经验均方误差表现的图形结果，体现了所提出的基于随机神经元的算子的稳健性和有效性。

***K*关键词：**随机神经元、随机过程、人工神经网络算子、K-SNNO、均方逼近。

**数学主题分类：41A30、41A58、47A58、60H25、92B20**。

## 1 引言

从经验中学习是神经网络（NN）在与其环境交互时所具备的一项基本能力。神经网络在科学和工程领域取得显著成功，源于其能够近似输入与输出之间关系的能力。Cybenko [1], 、Funahashi [2], 以及 Hornik 等 [3]已严格证明，确定性前馈神经网络（FNN）具有这种一致逼近性质。一个典型的单隐藏层前馈神经网络可表示为

$$\mathbf{N}_n(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^{n} c_j \, \sigma(\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{t} + b_j)\,, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$，参数$\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$和 $c_j$、$b_j \in \mathbb{R}$，而 $\sigma$表示激活函数。这些经典结果为现代神经网络逼近理论奠定了数学基础。

过去十年间，经典逼近理论已大幅拓展至深度神经网络和结构化神经网络。Bölcskei 等人 [4] 证明，深度神经网络（DNN）能够达到与小波、剪切波等仿射系统相同的最佳-$M$-项近似速率，从而为稀疏连接架构确立了最优精度—复杂度权衡。近来，Yang 等人 [5] 研究了卷积神经网络（CNN），并确立了回归和分类的极小极大最优学习率。这些进展有力地将神经

网络纳入非线性算子逼近理论的框架，明确揭示了架构、光滑性、维数与收敛阶之间的关系。

尽管已有这些确定性结果，许多现实环境仍表现出内在的随机行为。例如，金融市场会因不可预测的社会经济因素而波动，气候和天气系统中存在随机的大气扰动，无线通信信号会受到噪声和干扰的影响，种群动态和生物系统会随着随机的出生-死亡事件而演变，医院、银行和网络服务器等排队系统会经历随机的到达与服务模式，机器人学中的传感器测量值会受到噪声污染，而交通流则会因驾驶员行为的不确定性而变化。这些例子表明，仅靠确定性模型不足以捕捉此类情境中的不确定性，因此有必要采用随机框架。

因此，人们越来越关注如何构建理论模型，使神经网络能够在均方意义上学习随机函数或随机过程。随机神经网络（SNN）的若干早期研究包括 Amari 等 [6], 、Conti 等 [7], 和 Zhao 等 [8]的工作。Belli 等 [9] 证明，某些类别的 SNN 能够在均方意义上近似随机过程。最近，Fabiani [10]提出了随机物理信息神经网络（RPNN），并证明随机生成的激活函数能够以概率 1 插值任意数据集。与此同时，研究人员通过随机微分方程和逐样本反向传播分析了随机神经网络架构，为随机动力学下的学习提供了严谨的理论基础 [11]。这些进展将通用逼近理论扩展到具有随机或随机性激活函数的网络，并推动了对随机过程神经算子的研究。

在此背景下，由随机神经元激活的神经网络可定义为

$$\eta_n(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \eta_j(t,\omega), \tag{2}$$

其中 $t \in \mathcal{T} = [c,d]$ 和 $\omega \in \Omega$，随机神经元由随机积分激活函数给出

$$\eta_j(t,\omega) = \int_{\mathcal{T}} \sigma(nt - j, ns - j)\, dY_s,$$

其中 $\{Y_s(\omega)\}$表示具有正交增量 [9, 12]的随机过程。这类构造与随机粒子系统和平均场极限的测度值表述密切相关 [13], ，这些表述为理解大型随机神经网络集成的收敛性和稳定性提供了分析视角。

与这些进展并行，神经网络算子（NNOs）理论提供了一种构造性近似框架，其中网络系数、权重和阈值均有明确规定。Cardaliaguet 和 Eu- vrard [14] 最早针对单变量和多变量函数引入了钟形神经网络算子和压缩型神经网络算子。随后，Anastassiou [15, 16] 利用连续模建立了定量收敛结果。

此后，这些基于算子的方法已应用于随机过程的均值函数（即确定性函数），例如布朗运动和时间分离过程。值得注意的是，Makovoz [17] 以及Anastassiou及其合作者 [18, 19, 20, 21]证明了神经网络算子在近似随机过程的均值函数方面的有效性。

此外，SlimTrain [22] 等现代算子结构化神经网络架构表明，可分性、稳定性和高效的随机逼近在算子学习中发挥着核心作用。与随机神经元模型的进一步联系，可见于对相互作用粒子系统的平均场分析，例如 Inglis 和 Talay [23]研究的基于阈值的神经动力学。这些研究共同凸显了算子理论和随机框架在神经网络逼近中的重要意义。随机神经网络算子可以通过两种不同的方式构建：一种是将随机性引入算子的系数中（可参见 [24]），另一种是采用随机激活函数（随机神经元）。

受这些确定性与随机性研究进展的启发，本文提出了一类新的*Kantorovich*型随机神经网络算子（K-SNNO）。这些算子通过引入随机神经元激活和随机积分结构，将确定性Kantorovich神经网络算子推广到随机情形。从理论角度来看，所提出的K-SNNO保持了正性、线性和稳定性，同时实现了类似于最优神经逼近速率的均方收敛 [5]。从应用角度来看，K-SNNO为随机过程的建模与近似提供了灵活的数学框架，连接了确定性算子理论、随机分析和现代神经逼近理论。

## 2 预备知识

我们将 $L^2(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$记作在固定概率空间（$\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}$）上所有随机过程 $X_t(\omega)$的集合，其中 $t \in \mathcal{T} = [c, d]$。此外，对于每个 $t$，随机变量 $X_t(\omega)$满足以下条件

$$E[X_t(\omega)] = 0 \quad \text{and} \quad E[|X_t(\omega)|^2] < \infty,$$

其中，$\Omega$是样本点的集合，$\omega$，$\mathcal{F}$是博雷尔$\sigma$代数，$\mathbb{P}$是在$\mathcal{F}$上定义的概率测度。符号 $E(\cdot)$表示期望，而 $X_t(\omega)$称为二阶随机过程。

对于给定的具有正交增量的随机过程 $\{Y_s(\omega)\ s \in \mathcal{T}\}$，即，

$$E\{(Y_{s_2} - Y_{s_1})(Y_{s_4} - Y_{s_3})\} = 0; \quad s_1 \le s_2 \le s_3 \le s_4,$$

对于给定的任意函数 $\zeta(t,\ s) \in L^2(\mathcal{T} \times \mathcal{T})$，其均方意义下的随机积分定义为

$$X_t(\omega) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t, s) dY_s. \tag{3}$$

随机积分的一个关键特征是能够在空间 $L^2(\mathcal{T} \times \mathcal{T})$和 $L^2(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$之间建立等距映射。有关随机积分的详细信息，请参见 [25]。

本文仅讨论那些具有如下形式的确定性核表示（二阶过程的典范表示）的二阶过程

$$X_t(\omega) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t, s)\, dW_s(\omega), \qquad t \in \mathcal{T}, \tag{4}$$

对于某个核

$$\zeta \in L^2(\mathcal{T} \times \mathcal{T}), \qquad \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} |\zeta(t, s)|^2\, ds\, dt < \infty.$$

**通过确定性核表示。** 设 $(W_t)_{t\in\mathcal{T}}$ 是有限区间 $\mathcal{T}$ 上的标准维纳过程，并设 $\{X_t(\omega)\}_{t\in\mathcal{T}}$ 是二阶过程，即对于所有 $t \in \mathcal{T}$，$X_t(\omega) \in L^2(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$。

我们关注以下形式的表示

$$X_t(\omega) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t, s)\, dW_s, \qquad t \in \mathcal{T},$$

对于某个确定性核 $\zeta \in L^2(\mathcal{T} \times \mathcal{T})$。

以下是这种表示可能成立的一个自然情形。

设 $\{X_t(\omega)\}_{t\in\mathcal{T}}$ 是具有协方差函数的中心高斯过程

$$R(t, u) := \mathbb{E}[X_t(\omega) X_u(\omega)], \qquad t, u \in \mathcal{T}.$$

假设存在一个核 $\zeta \in L^2(\mathcal{T} \times \mathcal{T})$，使得

$$R(t, u) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t, s)\, \zeta(u, s)\, ds, \qquad t, u \in \mathcal{T}. \tag{5}$$

那么，在适当的概　率空间上，存在一个承载维纳过程 $(W_t)_{t\in\mathcal{T}}$ 的空间，使得 $\{X_t(\omega)\}$ 存在一个版本，满足　t

$$X_t(\omega) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t, s)\, dW_s, \qquad t \in \mathcal{T}, \tag{6}$$

并且式 (6) 中定义的过程是一个协方差为 $R$ 的中心高斯过程。

特别是，存在确定性核表示 (6) 的一个必要条件是

$$R(t, u) = \mathbb{E}[X_t(\omega) X_u(\omega)]$$

具有因子分解 (5)。这意味着 $X_t(\omega)$ 的协方差算子具有如下形式

$$R(t, u) = \langle \zeta(t, \cdot), \zeta(u, \cdot) \rangle_{L^2(\mathcal{T})}.$$

反之，并非每个 $L^2(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 过程都具有确定性核表示；只有当协方差满足分解式（5）时，这才是可能的。因此，这里所考虑的类是所有二阶过程的真子集，其特征在于具有希尔伯特–施密特（或更一般的迹类）协方差结构。尽管存在这一限制，该类仍然十分丰富，并且包括若干重要模型，例如奥恩斯坦–乌伦贝克过程、分数高斯型过程以及其他核驱动高斯系统。

**定义 2.1**。 [26]A 函数 $\sigma$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 若其可测且满足以下极限行为，则称为 S 形函数 r:

$$\lim_{t\to-\infty} \sigma(t) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = 1.$$

全文中，我们关注满足条件 $\sigma(1) < 1$ 的非递减 S 型函数 $\sigma$，并作出以下附加假设。

(P1) 函数 $\sigma(t)-\frac{1}{2}$ 为奇函数；(P2) 函数 $\sigma$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶连续可微，且在 $t \geq 0$ 上为凹函数；(P3) 当 $t \to -\infty$ 时，对于某个 $\gamma > 0$，有 $\sigma(t) = \mathcal{O}(|t|^{-1-\gamma})$。

对于上述 S 型函数，我们将密度函数定义为

$$\mathcal{L}^\sigma(t) = \frac{1}{2}[\sigma(t+1) - \sigma(t-1)], \quad t \in \mathbb{R},$$

多元密度函数定义为

$$\Phi^\sigma(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{L}^\sigma(t_i), \text{ where } \mathbf{t} = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m.$$

**阶离散绝对矩** $\beta$的定义 2.2：令 $\beta \geq 0$。如果函数 $\mathcal{L}^\sigma$ 满足以下条件，则称其具有 $\beta$ 阶离散绝对矩：

$$\mathcal{M}_\beta(\mathcal{L}^\sigma) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}^\sigma(t-j)| \cdot |t-j|^\beta$$

是有限的。

这里，我们给出 $\mathcal{L}^\sigma(\cdot)$的关键性质。

**引理 2.3**。 对于任意如上定义的 $\mathcal{L}^\sigma(\cdot)$,

*(i)* $\mathcal{L}^\sigma(t) \geq 0$ *for every* $t \in \mathbb{R}$ *and* $\lim_{t\to\pm\infty} \mathcal{L}^\sigma(t) = 0$;

*(ii) For every* $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}^\sigma(t-j) = 1$, *and* $\|\mathcal{L}^\sigma(t)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^\sigma(t)dt = 1$;

*(iii)* 设 $t \in [c, d]$, $n \in \mathbb{N}$，且满足条件 $\lceil nc \rceil \leq \lfloor nd \rfloor - 1$.。那么，

$$\sum_{j=\lceil nc \rceil}^{\lfloor nd \rfloor - 1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j) \geq \mathcal{L}^\sigma(2) > 0;$$

*(iv)* $\mathcal{L}^\sigma(t) = \mathcal{O}(|t|^{-1-\gamma})$为 $t \to \pm\infty$;

*(v)* 级数 $\sum \mathcal{L}^\sigma(t-j)$ 在 $\mathbb{R}$；$_{j\in\mathbb{Z}}$的任意紧子集上一致收敛

*(vi)* $\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}^\sigma(t-j)| < \infty$;

详细证明可参见 [27]。

现在让我们重新审视 Costarelli [2 引入的单层多元 Kantorovich-NNO 7].

$_m$**定义 2.4.** 设 $f$: $\mathfrak{R} = \prod [c_i, d_i] \to \mathbb{R}$ 是一个局部可积函数， $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\lceil nc_i \rceil \leq \lfloor nd_i \rfloor - 1$。由 S 型函数 $\sigma$ 激活的$_{i=1}$多元线性正 Kantorovich 型 NNO-K$\mathbf{K}_n(f, \cdot)$定义为

$$\mathbf{K}_n(f, \mathbf{t}) = \frac{\sum_{j_1=\lceil nc_1 \rceil}^{\lfloor nd_1 \rfloor - 1} \cdots \sum_{j_m=\lceil nc_m \rceil}^{\lfloor nd_m \rfloor - 1} \left[ n^m \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},m}} f(\mathbf{v})d\mathbf{v} \right] \Phi^\sigma(n\mathbf{t} - \mathbf{j})}{\sum_{j_1=\lceil nc_1 \rceil}^{\lfloor nd_1 \rfloor - 1} \cdots \sum_{j_m=\lceil nc_m \rceil}^{\lfloor nd_m \rfloor - 1} \Phi^\sigma(n\mathbf{t} - \mathbf{j})}, \tag{7}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_m) \in \mathfrak{R}_{\mathbf{j}}$, $_m = \left[\underline{\frac{j_1}{n}}, \underline{\frac{j_1+1}{n}}\right] \times ... \times \left[\underline{\frac{j_m}{n}}, \underline{\frac{j_m+1}{n}}\right]$ 以及 $\mathbf{j} = (j_1, j_2, ..., j_m) \in \mathbb{Z}^m$.

现在，我们将讨论文献 [28, 27] 中研究的上述 Kantorovich 算子的逐点收敛和一致收敛，以及定量估计。

**定理 2.5.** 假设 $f$： $\mathfrak{R} \to \mathbb{R}$ 是一个有界函数。那么，对于每个满足 $f$ 连续的点$\mathbf{t} \in \mathfrak{R}$，下列极限成立：

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{K}_n(f, \mathbf{t}) = f(\mathbf{t}).$$

**定理 2.6.** 设 $1 \leq p < +\infty$。那么，对于任意函数 $f \in L^p(\mathfrak{R})$，下列收敛在 $L^p$-范数下成立：

$$\lim_{n \to +\infty} \|\mathbf{K}_n(f, \cdot) - f\|_p = 0.$$

## 3 Kantorovich 型随机 NNO

为定义 KSNNO，我们将先介绍随机神经元，并展示其若干性质。

**定义 3.1.** 考虑 S 型函数 $\sigma$ 和二维密度函数 $\Phi^\sigma(t, s) = \mathcal{L}^\sigma(t)\mathcal{L}^\sigma(s)$，如第 2 节所定义。随机积分

$$\varphi(t, \omega) := \int_{\mathcal{T}} \Phi^\sigma(t, s) dY_s$$

称为随机神经元。

现在，我们将展示上述定义的随机神经元的一些基本性质。

**引理 3.2**。 对于第 *2* 节中定义的任意 *S* 型函数 $\sigma$，有

*(i)* $E|\varphi(t, \omega)| = 0$; *if* $E|Y_t| = 0$.

*(ii)* $E|\varphi(nt - j, \omega)|^2 = \lambda_Y^2 \left(\mathcal{L}^\sigma(nt - j)\right)^2 \|\mathcal{L}^\sigma(\cdot)\|_2$, *where* $\lambda_Y^2$ *is the variance of the increments of* $Y_t(\cdot)$.

*(iii)* $E\left|\int_{\mathcal{T}} \left(\frac{\Phi^\sigma(nt-j, ns-j)}{\sum_{j=\lceil nc \rceil}^{\lfloor nd \rfloor - 1} \Phi^\sigma(nt-j, ns-j)}\right) dY_s\right|^2 = \frac{\lambda_Y^2 \|\mathcal{L}^\sigma(\cdot)\|_2^2}{n^2 \mathcal{L}^\sigma(2)^4} \left(\mathcal{L}^\sigma(nt - j)\right)^2$.

证明。 (i) 设 $\sigma$ 是第 2 节中定义的任意 S 型函数。则 $\Phi^\sigma(t, s) \in L^2(\mathcal{T} \times \mathcal{T})$，且随机积分 $\int_{\mathcal{T}} \Phi^\sigma(t, s) dY_s$ 关于正交过程 $Y_s(\omega)$ 在均方意义下有定义。

现在，若 $E|Y_s| = 0$，则

$$\begin{aligned} E\{|\varphi(t, \omega)|\} &= E\left|\int_{\mathcal{T}} \Phi^\sigma(t, s) dY_s\right| \\ &= \int_{\mathcal{T}} \mathcal{L}^\sigma(t)\mathcal{L}^\sigma(s) E|dY_s| \\ &= \mathcal{L}^\sigma(t) \int_{\mathcal{T}} \mathcal{L}^\sigma(s) E|dY_s| = 0. \end{aligned}$$

（ii）我们有

$$\begin{aligned} E|\varphi(nt - j, \omega)|^2 &= E\left|\int_{\mathcal{T}} \Phi^\sigma(nt - j, s) dY_s\right|^2 \\ &= E\left|\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} \Phi^\sigma(nt - j, s_1)\Phi^\sigma(nt - j, s_2) dY_{s_1} dY_{s_2}\right| \\ &= \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} \left(\mathcal{L}^\sigma(nt - j)\right)^2 \mathcal{L}^\sigma(s_1)\mathcal{L}^\sigma(s_2) E|dY_{s_1} dY_{s_2}|. \end{aligned} \tag{8}$$

由于 $Y_s(\omega)$ 具有正交增量，我们有

$$E|dY_{s_1}dY_{s_2}| = \begin{cases} E|dY_{s_1}|^2, & \text{if } s_1 = s_2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，取 $s_1 = s_2 = s$ 后，(8) 中的二重积分化简为

$$E|\varphi(nt-j,\omega)|^2 = \int_{\mathcal{T}} \left(\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\right)^2 \left(\mathcal{L}^\sigma(s)\right)^2 E\left|dY_s\right|^2.$$

若将 $\lambda_Y^2$ 记为 $Y_s(\cdot)$ 的增量方差，则可写为

$$\begin{aligned} E|\varphi(nt-j,\omega)|^2 &= \lambda_Y^2 \int_{\mathcal{T}} \left(\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\right)^2 \left(\mathcal{L}^\sigma(s)\right)^2 ds \\ &= \lambda_Y^2 \left(\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\right)^2 \left\|\mathcal{L}^\sigma(\cdot)\right\|_2. \end{aligned}$$

(iii) 为了计算

$$E\left|\int_{\mathcal{T}} \left(\frac{\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)}{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)}\right) dY_s\right|^2,$$

let

$$h(t,s) = \frac{\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)}{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)}$$

and

$$\phi_{j,n}(t,\omega) = \int_{\mathcal{T}} h(t,s)dY_s.$$

因此，我们有

$$E|\phi_{j,n}(t,\omega)|^2 = \int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}} h(t,s_1)h(t,s_2)E|dY_{s_1}dY_{s_2}|. \tag{9}$$

由于 $Y_s(\omega)$ 具有正交增量，我们可以将 $E|dY_{s_1}dY_{s_2}|$ 表示如下

$$E|dY_{s_1}dY_{s_2}| = \begin{cases} E|dY_{s_1}|^2, & \text{if } s_1 = s_2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，取 $s_1 = s_2 = s$ 后，(9) 中的二重积分化简为

$$\begin{aligned} E|\phi_{j,n}(t,\omega)|^2 &= \int_{\mathcal{T}} |h(t,s)|^2 E\left|dY_s\right|^2 \\ &= \int_{\mathcal{T}} \frac{\left(\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)\right)^2}{\left(\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)\right)^2} E\left|dY_s\right|^2. \end{aligned}$$

令 $\lambda_Y^2$ 表示 $Y_s(\cdot)$的增量方差。于是，我们得到

$$\begin{aligned} E|\phi_{j,n}(t,\omega)|^2 &= \lambda_Y^2 \int_{\mathcal{T}} \frac{\left(\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)\right)^2}{\left(\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)\right)^2} ds \\ &= \frac{\lambda_Y^2}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \left(\Phi^\sigma(nt-j,ns-j)\right)^2 ds \\ &= \frac{\lambda_Y^2}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \left(\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\right)^2 \left(\mathcal{L}^\sigma(ns-j)\right)^2 ds. \end{aligned}$$

通过变量替换 $ns - j = y$，我们得到

$$E|\phi_{j,n}(t,\omega)|^2 = \frac{\lambda_Y^2}{n^2\mathcal{L}^\sigma(2)^4}\int_{\mathcal{T}}\left(\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\right)^2\left(\mathcal{L}^\sigma(y)\right)^2 dy$$
$$= \frac{\lambda_Y^2\left\|\mathcal{L}^\sigma(\cdot)\right\|_2^2}{n^2\mathcal{L}^\sigma(2)^4}\left(\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\right)^2.$$

该结果表明，$|\phi_{j,n}(t,\omega)|^2$ 的期望值是有限的。

□

**定义 3.3.** 考虑随机过程 $X_t(\omega) \in L^2(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$。由随机神经元 $\phi_{j,n}(t,\omega)$ 激活并作用于与过程 $X_t(\cdot)$ 相关函数 $\zeta(t,s)$ 的 K-SNNO $\mathcal{X}_n(X_t,\omega)$ 定义如下

$$\mathcal{X}_n(X_t,\omega) := \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}\right)\phi_{j,n}(t,\omega). \tag{10}$$

这里，$\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2} = \left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]\times\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ 与过程的协方差有关，而 $\phi_{j,n}(t,\omega)$表示前面定义的可测随机神经元。(3.3)中定义的 K-SNNO 的结构如图 1 所示。

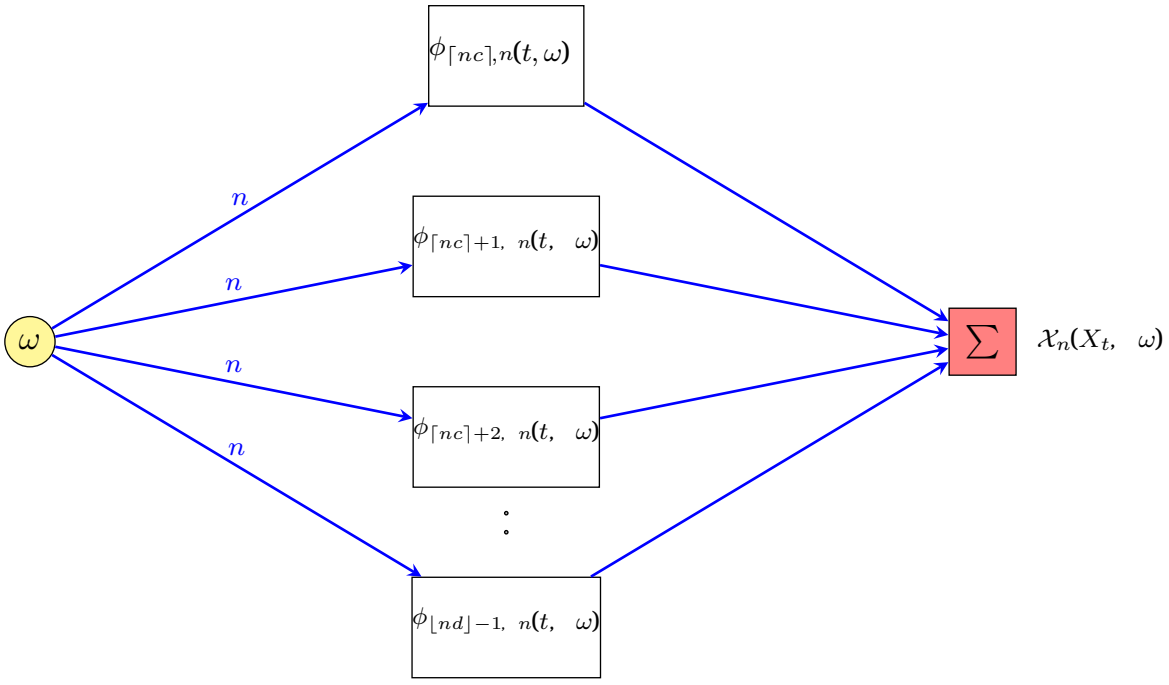


图 1：式 (3.3) 中定义的 K-SNNO 的结构示意图

注意，对于任意 $X_t(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，我们得到

$$\begin{aligned}
E|\mathcal{X}_n(X_t,\omega)|^2 &= E\left|\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right)\phi_{j,n}(t,\omega)\right|^2 \\
&\le E\left[\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\left|\left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right)\phi_{j,n}(t,\omega)\right|^2\right] \\
&= \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\left|n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right|^2 E\left|\phi_{j,n}(t,\omega)\right|^2 \\
&\le \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1}\left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}|\zeta(\mathbf{v})|^2d\mathbf{v}\right)E\left|\phi_{j,n}(t,\omega)\right|^2 \\
&\le \frac{\lambda_Y^2\left\|\mathcal{L}^\sigma(\cdot)\right\|_2^2\left\|\zeta(\cdot)\right\|_2^2}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4}\left(\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\right)^2
\end{aligned}$$

根据引理 3.2 的性质（$iii$）。
因此，对于每个 $t \in \mathcal{T}$，算子 $\mathcal{X}_n(X_t, \omega)$ 在集合 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 内均有定义，且在均方意义下有界。

现在，我们将考察算子序列 $\mathcal{X}_n(X_t, \omega)$ 在二阶过程背景下的收敛性质，并证明以下结果。

**定理 3.4.** 考虑一个随机过程 $X_t(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，其指标取自 $t \in \mathcal{T}$，并具有典范表示。那么，

$$E\left|\mathcal{X}_n(X_t,\omega) - X_t(\omega)\right|^2 \to 0, \quad \textit{for any } t \in \mathcal{T}.$$

证明。 过程 $X_t(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，具有典范表示

$$X_t(\omega) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t,s)dY_s, \tag{11}$$

其中 $\zeta(t, s)$ 是 $L^2$-可和的，即

$$\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}} |\zeta(t,s)|^2\, dtds < +\infty.$$

现在，根据二维情形的定理 2.6，对于任意满足以下条件的 $\epsilon > 0\, \exists\, \mathbf{K}_n(\cdot)$,

$$\left\|\mathbf{K}_n(\zeta,t,s) - \zeta\right\|_2 < \epsilon, \quad \text{for sufficiently large } n \tag{12}$$

以及 $\mathcal{X}_n(X_t,\omega) := \int_{\mathcal{T}} \mathbf{K}_n(\zeta,t,s)dY_s$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_n(X_t,\omega) &= \int_{\mathcal{T}} \frac{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)\left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right)}{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)} dY_s \\
&= \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \left(\frac{\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)}{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)}\right)\left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right) dY_s \\
&= \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right)\int_{\mathcal{T}} \left(\frac{\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)}{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)}\right) dY_s \\
&= \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \left(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\zeta(\mathbf{v})d\mathbf{v}\right)\phi_{j,n}(t,\omega),
\end{aligned}$$

where $\int_{\mathcal{T}} \left(\frac{\mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)}{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)}\right) dY_s = \phi_{j,n}(t,\omega).$

由于典范表示在 $L^2(\mathcal{T}\times\mathcal{T})$ 与 $L^2(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 之间建立了等距映射，故有以下等式

$$E\left\{\left|\mathcal{X}_n(X_t,\omega)-X_t(\omega)\right|^2\right\} = \int_{\mathcal{T}} \left|\mathbf{K}_n(\zeta,t,s)-\zeta(t,s)\right|^2 ds \tag{13}$$

由 (11) 和 (13) 可得，随机过程

$$\mathcal{X}_n(X_t,\omega) = \int_{\mathcal{T}} \mathbf{K}_n(\zeta,t,s)dY_s$$

能够在均方意义下逼近给定的过程 $X_t(\omega)$。 □

现在我们将考察空间 $L^2(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 中算子序列 $\mathcal{X}_n(X_t,\omega)$ 的定量估计，并根据下文定义的连续模来衡量逼近误差的速率。

设 $\zeta(t,s) \in L^2(\mathcal{T}\times\mathcal{T})$。对于 $\delta>0$，函数

$$\mathcal{W}_2(\zeta,\delta) = \sup_{|v_1-t|,|v_2-s|\le\delta} \left(\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}} \left|\zeta(v_1,v_2)-\zeta(t,s)\right|^2 dv_1\, dv_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

称为 $L^2$ 的 $\zeta(t,s)$ 连续模。我们记作 $Lip_2(u) = \{\zeta\in L^2(\mathcal{T}\times\mathcal{T}):\ \mathcal{W}_2(\zeta,\delta) = \mathcal{O}(\delta^u);\ 0<u\le 1\}$。

**定理 3.5.** 设 $X_t(\omega)\in L^2(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$、$\zeta(t,s)\in Lip_2(u)$，并设 $\mathcal{X}_n(X_t,\omega)$ 为其近似。假设*S*形密度函数 $\mathcal{L}^\sigma(\cdot)$ 满足：对于某些 $\alpha,\theta>0$, $\int_{x\le\frac{1}{n^\alpha}} n^2\mathcal{L}^\sigma(nx)x^{2u}dx = \mathcal{O}(n^{-\theta})$，当$n\to+\infty$. 时，则均方误差（*MSE*）满足

$$E\left|X_t(\omega)-\mathcal{X}_n(X_t,\omega)\right|^2 = \mathcal{O}(n^{-\mu}),$$

其中 $\mu=$最小值$\{\theta,\beta>0,2u\}$.

证明。 由于 $X_t(\omega) \in L^2(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 存在典范表示。根据引理 2.3 的条件（$iii$）和（$vi$），由随机积分等距性可得，均方误差满足，

$$
\begin{aligned}
E\left|e_n(t,\omega)\right|^2 &= E\left|\mathcal{X}_n(X_t,\omega) - X_t(\omega)\right|^2 \\
&= \int_{\mathcal{T}} \left|\mathbf{K}_n(\zeta,t,s) - \zeta(t,s)\right|^2 ds \\
&= \int_{\mathcal{T}} \left| \frac{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)\left(n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \zeta(\mathbf{v}) d\mathbf{v}\right)}{\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)} - \zeta(t,s) \right|^2 ds \\
&\le \frac{1}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \left| \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(nt-j)\mathcal{L}^\sigma(ns-j)\left(n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} [\zeta(\mathbf{v}) - \zeta(t,s)] d\mathbf{v}\right)\right|^2 ds \\
&\le \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(ns-j)\left(n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \left|\zeta(\mathbf{v}) - \zeta(t,s)\right|^2 d\mathbf{v}\right) ds \\
&\le \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(ns-j)\left(n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \left|\zeta(v_1,v_2) - \zeta(t,s)\right|^2 dv_1 dv_2\right) ds \\
&\le \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(ns-j)\Big(n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \Big|\zeta(v_1,v_2) - \zeta(v_1+s-\frac{j}{n}, v_2+s-\frac{j}{n}) \\
&\qquad + \zeta(v_1+s-\frac{j}{n}, v_2+s-\frac{j}{n}) - \zeta(t,s)\Big|^2 dv_1 dv_2\Big) ds \\
&\le \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(ns-j)\Big(n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \Big|\zeta(v_1,v_2) \\
&\qquad - \zeta(v_1+s-\frac{j}{n}, v_2+s-\frac{j}{n})\Big|^2 dv_1 dv_2 \\
&\qquad + n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \Big|\zeta(v_1+s-\frac{j}{n}, v_2+s-\frac{j}{n}) - \zeta(t,s)\Big|^2 dv_1 dv_2\Big) ds \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

我们首先估计 $I_1$。应用詹森不等式并作变量代换 $x = s - \frac{j}{n}$，对于某个 $\alpha > 0$,_可得

$$
\begin{aligned}
I_1 =& \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \mathcal{L}^\sigma(ns-j)\Big(n^2 \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \Big|\zeta(v_1,v_2) \\
&\qquad - \zeta(v_1+s-\frac{j}{n}, v_2+s-\frac{j}{n})\Big|^2 dv_1 dv_2\Big) ds \\
=& \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} n^2 \mathcal{L}^\sigma(nx)\Big(\sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor -1} \int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}} \Big|\zeta(v_1,v_2) - \zeta(v_1+x, v_2+x)\Big|^2 dv_1 dv_2\Big) dx \\
\le& \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} n^2 \mathcal{L}^\sigma(nx)\Big(\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}} \Big|\zeta(v_1,v_2) - \zeta(v_1+x, v_2+x)\Big|^2 dv_1 dv_2\Big) dx \\
\le& \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma) n^2}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \left[\int_{0\le x\le \frac{1}{n^\alpha}} + \int_{x > \frac{1}{n^\alpha}}\right] \mathcal{L}^\sigma(nx)\Big(\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}} \Big|\zeta(v_1,v_2) - \zeta(v_1+x, v_2+x)\Big|^2 dv_1 dv_2\Big) dx \\
=& J_1 + J_2.
\end{aligned}
$$

对于 $J_1$，由于 $\zeta(t,\ s) \in Lip_2(u)$，我们有

$$\begin{aligned} J_1 \leq & \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{0\leq x\leq \frac{1}{n^\alpha}} n^2\mathcal{L}^\sigma(nx)\Big(\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}}\Big|\zeta(v_1,v_2)-\zeta(v_1+x,v_2+x)\Big|^2 dv_1dv_2\Big)dx \\ \leq & \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{0\leq x\leq \frac{1}{n^\alpha}} n^2\mathcal{L}^\sigma(nx)x^{2u}dx = \mathcal{O}(n^{-\theta}) \text{ as } n\to+\infty. \end{aligned} \tag{14}$$

对于 $J_2$，我们有

$$\begin{aligned} J_2 \leq & \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)n^2}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{x>\frac{1}{n^\alpha}} \mathcal{L}^\sigma(nx)\Big(\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}}\Big|\zeta(v_1,v_2)-\zeta(v_1+x,v_2+x)\Big|^2 dv_1dv_2\Big)dx \\ \leq & \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)n^2}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{x>\frac{1}{n^\alpha}} \mathcal{L}^\sigma(nx)\left\{\Big\|\zeta(\cdot,\cdot)\Big\|^2+\Big\|\zeta(\cdot+x,\cdot+x)\Big\|_2^2\right\}dx \\ \leq & \frac{2\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)\Big\|\zeta(\cdot,\cdot)\Big\|_2^2}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{x>\frac{1}{n^\alpha}} n^2\mathcal{L}^\sigma(nx)dx. \end{aligned}$$

通过变量替换 $y=nx$，我们有

$$\int_{x>1/n^\alpha} n^2\mathcal{L}^\sigma(nx)\,dx = n\int_{y>n^{1-\alpha}} \mathcal{L}^\sigma(y)\,dy.$$

利用（P3），存在 $\gamma>0$ 和 $C>0$，使得当 $y$ 足够大时，$\mathcal{L}^\sigma(y)\leq Cy^{-1-\gamma}$。

因此，当 $n$ 足够大时，我们有

$$n\int_{y>n^{1-\alpha}} \mathcal{L}^\sigma(y)\,dy \leq Cn\int_{n^{1-\alpha}}^{\infty} y^{-1-\gamma}\,dy = \frac{C}{\gamma}\,n^{\,1-\gamma(1-\alpha)}.$$

令 $\beta := \gamma(1-\alpha)-1$。则

$$\int_{x>1/n^\alpha} n^2\mathcal{L}^\sigma(nx)\,dx = \mathcal{O}(n^{-\beta}). \tag{15}$$

现在，我们可以估计 $I_2$。利用詹森不等式、变量替换 $y_1 = v_1 - \frac{j}{n}$，$y_2 = v_2 - \frac{j}{n}$ 以及 Eubini-Tonelli 定理，我们有

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{\mathcal{M}_0(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}} \sum_{j=\lceil nc\rceil}^{\lfloor nd\rfloor-1} \mathcal{L}^\sigma(ns-j)\Big(n^2\int_{\mathfrak{R}_{\mathbf{j},2}}\Big|\zeta(v_1+s-\frac{j}{n},v_2+s-\frac{j}{n}) \\ & \qquad -\zeta(t,s)\Big|^2 dv_1dv_2\Big)ds \\ \leq & \frac{\mathcal{M}_0^2(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4} \int_{\mathcal{T}}\Big(n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\Big|\zeta(s+y_1,s+y_2)-\zeta(t,s)\Big|^2 dy_1dy_2\Big)ds \\ \leq & \frac{\mathcal{M}_0^2(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4}\Big(n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\Big\|\zeta(\cdot+y_1,\cdot+y_2)-\zeta(\cdot,\cdot)\Big\|_2^2 dy_1dy_2\Big) \\ \leq & \frac{\mathcal{M}_0^2(\mathcal{L}^\sigma)\mathcal{W}_2^2(\zeta,\frac{1}{n})}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4}\Big(n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}} dy_1dy_2\Big) \\ \leq & \frac{\mathcal{M}_0^2(\mathcal{L}^\sigma)\mathcal{W}_2^2(\zeta,\frac{1}{n})}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4}. \end{aligned}$$

由于 $\zeta\in \text{Lip}_2(u)$，$\mathcal{W}_2^2(\zeta,\ \delta) = \mathcal{O}(\delta^{2u})$，因此

$$I_2 \leq \frac{\mathcal{M}_0^2(\mathcal{L}^\sigma)}{\mathcal{L}^\sigma(2)^4}\mathcal{W}_2^2\big(\zeta,\tfrac{1}{n}\big) = \mathcal{O}(n^{-2u}). \tag{16}$$

综合所有估计式 (14)、(15) 和 (16)，我们得到

$$E|X_t(\omega)-\mathcal{X}_n(X_t,\omega)|^2 = \mathcal{O}(n^{-\mu}), \qquad \mu=\min\{\theta,\beta,2u\}.$$

证明至此完成。 □

## 4 数值验证

为对我们的理论结果进行数值验证，我们首先指定一个二阶随机过程 $\{X_t(\omega)\}$，然后确定相应的确定性核 $\zeta(t,\ s)$，该核通过维纳积分表示生成该过程

$$X_t(\omega) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t,s)\, dW_s(\omega).$$

考虑过程

$$X_t(\omega) = t^2 \left[ W(1) - \int_0^1 W_s\, ds \right], \qquad t \in [0,1],$$

对于每个 $t$，该过程属于 $L^2(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$。满足条件的相关核 $\zeta(t,\ s)$

$$X_t(\omega) = \int_{\mathcal{T}} \zeta(t,s)\, dW_s$$

可表示为

$$\zeta(t,s) = \begin{cases} t^2 s, & s \in [0,1], \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

因此，

$$X_t(\omega) = \int_0^1 t^2 s\, dW_s(\omega) = t^2 \left[ W(1) - \int_0^1 W_s\, ds \right]. \tag{17}$$

有关上述随机积分的详细信息，可参考 [29]。

这种表示 使我们能够从理论和数值两方面计算误差 $E\left|\mathcal{X}_n(X_t,\omega) - X_t(\omega)\right|^2$。过程 (17) 相对于 $dW_s$ 的一个固定实现的一些实现如下面的图2所示。这里，$E|X_t(\omega)| = 0$，因此对于 $t,\ s \in [0,1]$，我们有

$$\begin{aligned} E|X_t(\omega)|^2 &= t^4 E\left[ \left( \int_0^1 s dW_s \right)^2 \right] \\ &= t^4 \int_0^1 s^2 ds = \frac{t^4}{3}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} E\left|X_t(\omega) X_s(\omega)\right| &= E\left| t^2 s^2 \int_0^1 \int_0^1 v_1 v_2 dW_{v_1} dW_{v_2} \right| \\ &= t^2 s^2 \int_0^1 v_1^2 dv_1 = \frac{(ts)^2}{3}. \end{aligned}$$

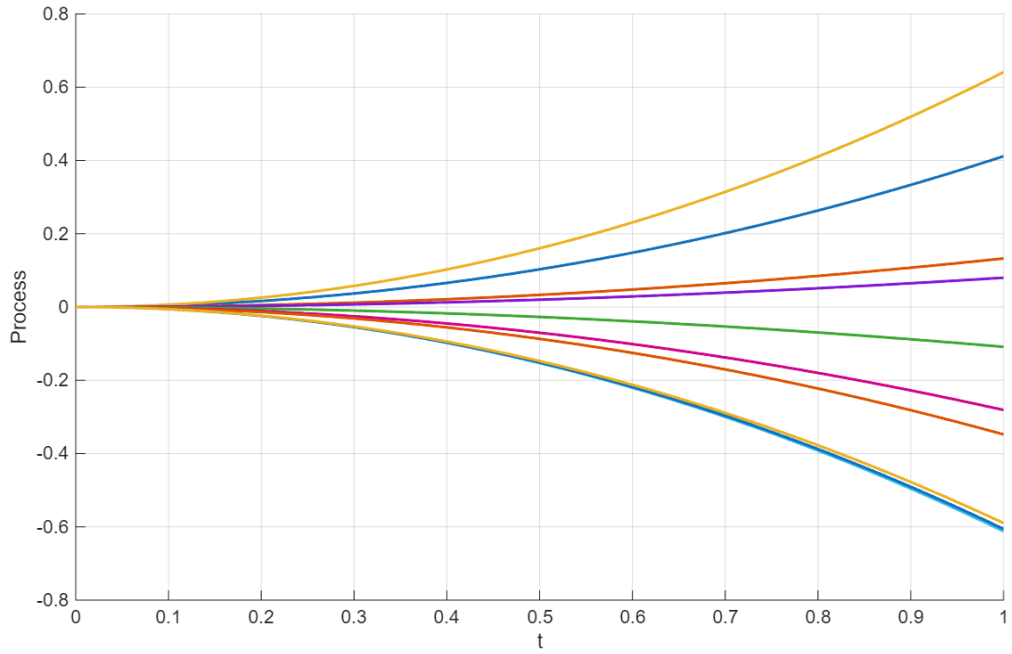


图2：过程 $X_t(\cdot)$的10个实现，如(17)中所定义

现在，取 $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$；　$t \in \mathcal{T} = [0,1]$，我们有

$$\mathcal{L}^{\sigma}(t) = \frac{1}{2}[\sigma(t+1) - \sigma(t-1)]$$

and

$$\phi_{j,n}(t,\omega) = \int_0^1 \left( \frac{\mathcal{L}^{\sigma}(nt-j)\mathcal{L}^{\sigma}(ns-j)}{\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\sigma}(nt-j)\mathcal{L}^{\sigma}(ns-j)} \right) dW_s; \quad t,s \in [0,1]. \tag{18}$$

上述定义的随机过程(17)经K-SNNO (3.3)近似后如下所示。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_n(X_t,\omega) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( n^2 \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(v_1,v_2)\, dv_1 dv_2 \right) \phi_{j,n}(t,\omega) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( n^2 \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} v_1^2 v_2\, dv_1 dv_2 \right) \phi_{j,n}(t,\omega), \quad t \in \mathcal{T}. \end{aligned} \tag{19}$$

图3展示了对应于 $n = 20$ 时 $dW_s$ 的一个固定实现的近似(19)的一个实现。此外，表1给出了 $n = 20$对应的数值数据，展示了实际值与近似值之间的比较。

| $t_i$ | $dW_{t_i}$ | $W_{t_i}$ | $X_{t_i}$ | $\mathcal{X}_n(X_{t_i})$ | 绝对误差 | 平方误差 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0044 | 0.0044 | 0.000019 |
| 0.050 | 0.0714 | 0.0714 | 0.0010 | 0.0066 | 0.0056 | 0.000032 |
| 0.100 | -0.0902 | -0.0188 | 0.0041 | 0.0105 | 0.0063 | 0.000040 |
| 0.150 | 0.0586 | 0.0399 | 0.0093 | 0.0161 | 0.0069 | 0.000047 |
| 0.200 | -0.0317 | 0.0082 | 0.0165 | 0.0238 | 0.0073 | 0.000054 |
| 0.250 | -0.2241 | -0.2159 | 0.0257 | 0.0335 | 0.0078 | 0.000061 |
| 0.300 | 0.0306 | -0.1853 | 0.0370 | 0.0452 | 0.0082 | 0.000067 |
| 0.350 | -0.1392 | -0.3244 | 0.0504 | 0.0589 | 0.0085 | 0.000073 |
| 0.400 | -0.0348 | -0.3593 | 0.0658 | 0.0746 | 0.0088 | 0.000078 |
| 0.450 | -0.3190 | -0.6783 | 0.0833 | 0.0923 | 0.0090 | 0.000081 |
| 0.500 | 0.1985 | -0.4798 | 0.1029 | 0.1120 | 0.0091 | 0.000082 |
| 0.550 | -0.1134 | -0.5932 | 0.1245 | 0.1335 | 0.0090 | 0.000082 |
| 0.600 | 0.1818 | -0.4114 | 0.1481 | 0.1570 | 0.0089 | 0.000079 |
| 0.650 | 0.2563 | -0.1551 | 0.1739 | 0.1823 | 0.0084 | 0.000071 |
| 0.700 | 0.3746 | 0.2195 | 0.2016 | 0.2092 | 0.0076 | 0.000057 |
| 0.750 | -0.3119 | -0.0924 | 0.2315 | 0.2372 | 0.0058 | 0.000033 |
| 0.800 | 0.0381 | -0.0543 | 0.2634 | 0.2655 | 0.0021 | 0.000005 |
| 0.850 | -0.0914 | -0.1457 | 0.2973 | 0.2923 | 0.0050 | 0.000025 |
| 0.900 | -0.0063 | -0.1520 | 0.3333 | 0.3152 | 0.0181 | 0.000328 |
| 0.950 | -0.0124 | -0.1645 | 0.3714 | 0.3321 | 0.0392 | 0.001538 |
| 1.000 | 0.3964 | 0.2320 | 0.4115 | 0.3428 | 0.0687 | 0.004716 |

表1： $n = 20$.对应的数值数据

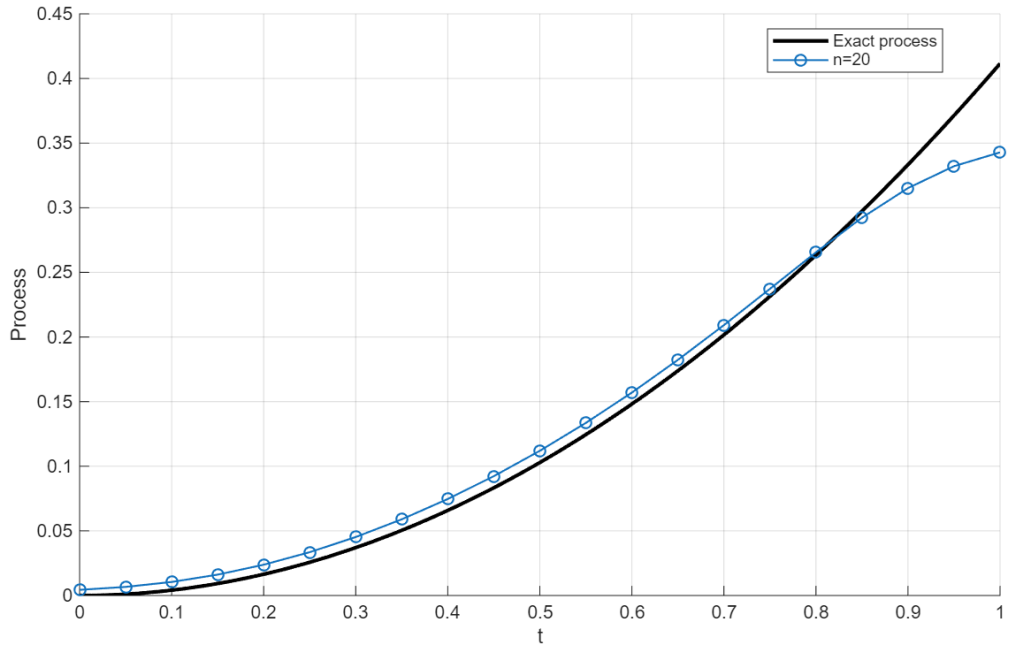


图3：对于 $n = 20.$，与 $dW_s$ 的一个固定实现相对应的近似式（19）的一次实现

若干个实现　　对应于 $dW_s$ 一次实现的近似（19）如图 4 和图 5 所示。

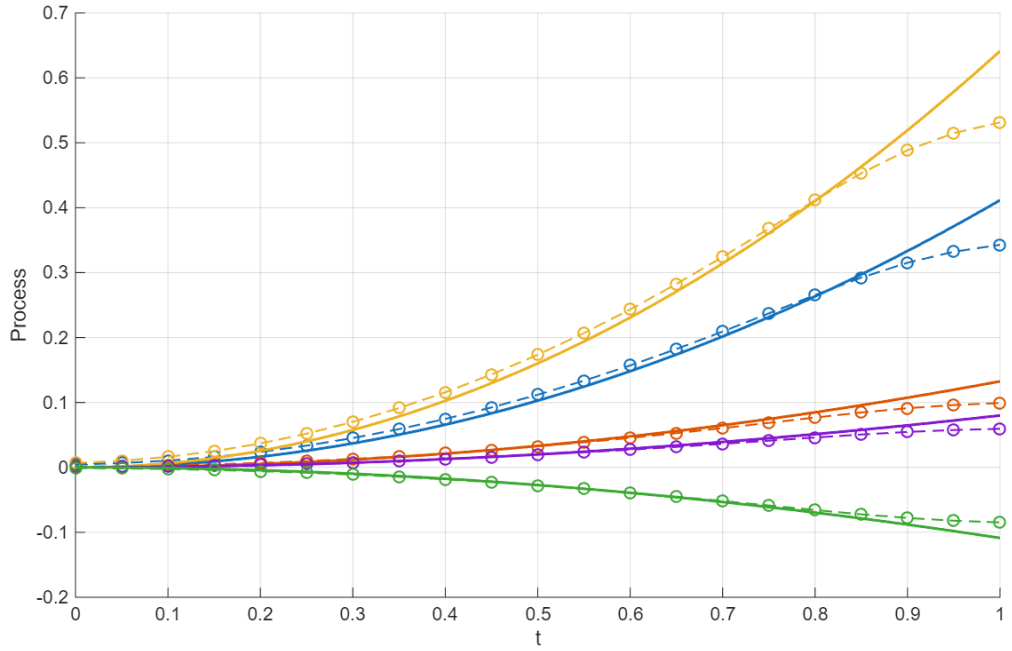


图4：原始随机过程 $X_t(\omega)$ (17) 的5个实现（实线）与通过 K-SNNO (19) 得到的相应近似（虚线）的比较，其中 $n = 20$ 固定。

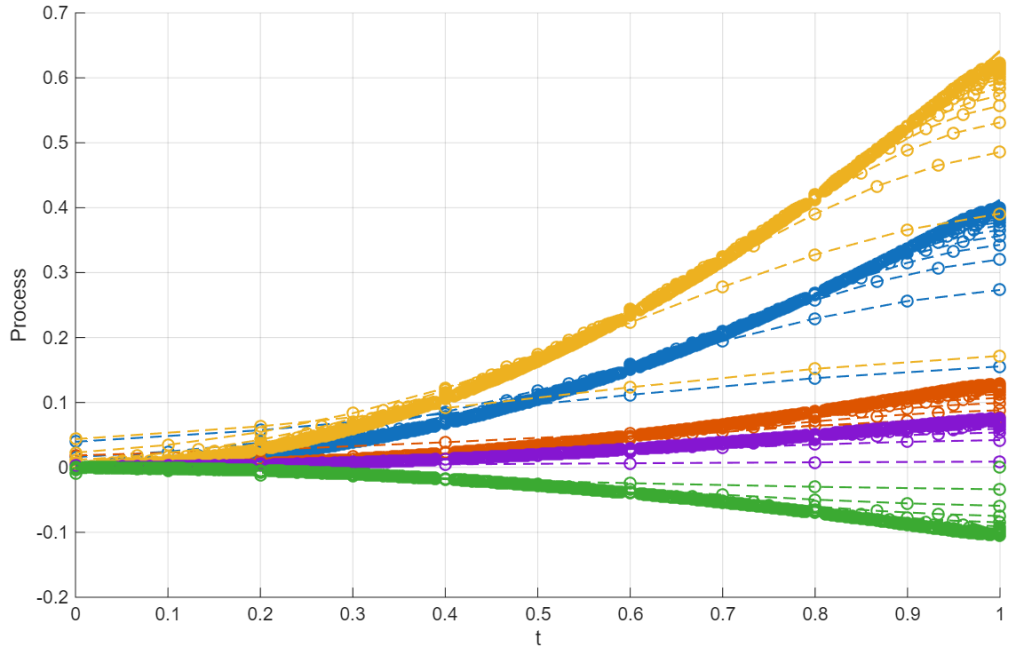


图5：原始随机过程 $X_t(\omega)$ (17) 的5个实现（实线）与通过 K-SNNO (19) 得到的相应近似（虚线）的比较，其中 $n = 5$, 10，15，.....100。

在图 4 和图 5 中，近似曲线紧密跟随真实轨迹，表明 K-SNNO 能有效保留该过程的随机行为。在所有实现中，近似都捕捉到了整体趋势和曲率，且未引入振荡。在区间中部附近观察到一些偏差，这可能是由激活函数 $\phi_{j,n}(t, \omega)$ 的局部化行为导致的。总体而言，结果证实了基于 K-SNNO 的近似具有光滑性、一致性和准确性。

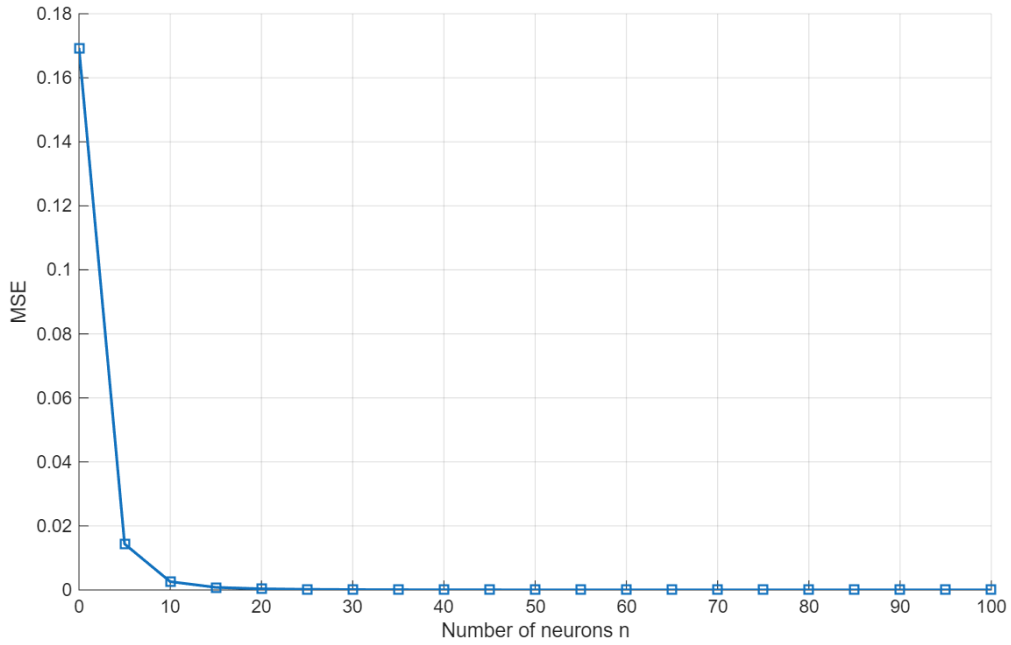


图 6：展示固定实现下均方误差随 $n$ 的变化而减小。

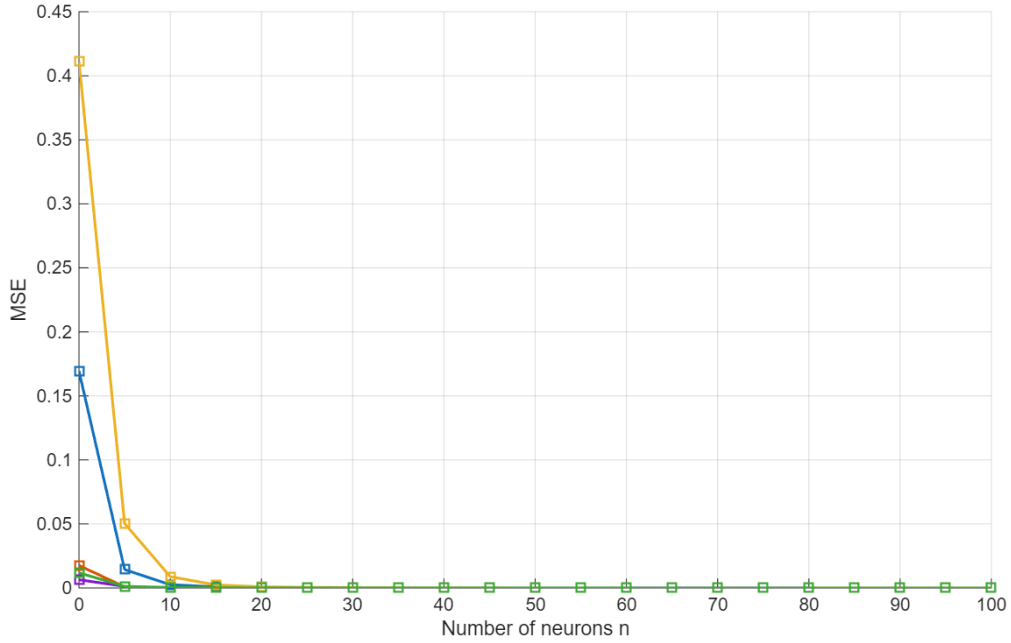


图 7：展示不同实现下均方误差随 $n$ 的变化而减小。

绘制的曲线表明，随着离散化参数 $n$ 增大，K-SNNO 近似的均方误差 (MSE) 持续减小。这证实了界所预测的理论收敛行为

$$E\left|X_t(\omega) - \mathcal{X}_n(X_t, \omega)\right|^2 \leq \mathcal{O}(n^{-\mu}),$$

其中 $\mu > 0$ 取决于激活函数的光滑性和局部化性质，以及过程协方差结构。对数尺度强调，超过 $n \approx 100$ 后，均方误差趋于稳定，这表明由于随机波动有界以及核饱和效应，提高分辨率带来的收益逐渐减少。这验证了 K-SNNO 算子能够以可控的误差率近似二阶随机过程。

## 5 结论

在这项工作中，我们提出了用于随机过程均方近似的 Kantorovich型随机神经网络算子（K-SNNO）。通过使用合适的激活函数，我们建立了其理论基础，并通过数值模拟验证了其性能。图形结果表明，随着神经元数量增加，逼近误差会减小，证实了 K-SNNO 的准确性和效率。未来的研究方向包括将该框架扩展到多维过程、探索各种激活函数，以及分析实际应用中计算成本与准确性之间的权衡。

## 利益冲突声明

作者声明，不存在可能影响本文所呈现内容或结果的经济或个人关系。

## 参考文献

[1] George Cybenko。S 形函数叠加的逼近。《数学、控制与信号系统》，2(4):303–314，1989。[2] Ken-Ichi Funahashi。利用神经网络对连续映射的近似实现。《神经网络》，2(3):183–192，1989。[3] Kurt Hornik、Maxwell Stinchcombe 和 Halbert White。多层前馈网络是通用逼近器。《神经网络》，2(5):359–366，1989。[4] Helmut Bolcskei、Philipp Grohs、Gitta Kutyniok 和 Philipp Petersen。利用稀疏连接深度神经网络实现最优近似。《*SIAM* 数学与数据科学杂志》，1(1):8–45，2019。[5] Yunfei Yang、Han Feng 和 Ding-Xuan Zhou。卷积神经网络学习的收敛速率。《*SIAM* 数学与数据科学杂志》，7(4):1755–1772，2025。[6] Shun ichi Amari、Koji Kurata 和 Hiroshi Nagaoka。玻尔兹曼机的信息几何。*IEEE Trans.Neural Netw.*，3(2):260–271，1992。[7] Massimo Conti 和 Claudio Turchetti。利用连续时间循环近似恒等神经网络逼近动力系统。*Neural,Parallel &Sci.Comput.*，2(3):299–320，1994。[8] Jieyu Zhao 和 John Shawe-Taylor。具有随机权重的循环网络。载于国际神经网络会议论文集（*ICNN'96*），第 2 卷，第 1302–1307 页。IEEE，1996。[9] Marcello R Belli 、 Massimo Conti 、 Paolo Crippa 和 Claudio Turchetti。人工神经网络作为随机过程的逼近器。《神经网络》，12(4-5):647–658，1999。[10] Gianluca Fabiani。最佳逼近的随机投影神经网络：收敛理论与实际应用。《*SIAM* 数学与数据科学杂志》，7(2):385–409，2025。[11] Richard Archibald、Feng Bao、Yanzhao Cao 和 Hui Sun。随机神经网络训练的逐样本反向传播方法收敛性的数值分析。《*SIAM* 数值分析杂志》，62(2):593–621，2024。[12] Claudio Turchetti。神经网络随机模型，第 102 卷。IOS Press，2004。[13] Samuel A Isaacson、Jingwei Ma 和 Konstantinos Spiliopoulos。基于粒子的随机反应扩散模型的平均场极限。*SIAMJ. Math.Anal.*，54(1):453–511，2022。[14] Pierre Cardaliaguet 和 Guillaume Euvrard。利用神经网络逼近函数及其导数。《神经网络》，5(2):207–220，1992。[15] George A Anastassiou。某些神经网络算子趋近单位一元情形的收敛速率。《数学分析及其应用杂志》，212(1):237–262，1997。[16] George A Anastassiou。某些多元神经网络算子趋近单位的收敛速率。《计算数学及其应用》，40(1):1–19，2000。[17] Yuly Makovoz。随机逼近函数与神经网络。《逼近理论杂志》，85(1):98–109，1996。[18] George A Anastassiou 和 Dimitra Kouloumpou。利用神经网络逼近布朗运动。《优化理论通讯》，2022。[19] George A Anastassiou 和 Dimitra Kouloumpou。利用参数化与变形神经网络逼近布朗运动。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院院刊 *A*辑：数学》，118(1):14，2024。

[20] George A Anastassiou 和 Dimitra Kouloumpou。简单图上的布朗运动逼近。数学，11(20):4329，2023。[21] George A Anastassiou 和 Dimitra Kouloumpou。时间分裂随机函数的神经网络逼近。数学，11(9):2183，2023。[22] Elizabeth Newman、Julianne Chung、Matthias Chung 和 Lars Ruthotto。SlimTrain——用于训练可分离深度神经网络的随机逼近方法。*SIAM J.Sci. Comput.*，44(4):A2322–A2348，2022。[23] James Inglis 和 Denis Talay。通过阈值命中时间进行平滑交互的随机粒子系统的平均场极限，以及其在具有树突组件的神经网络中的应用。*SIAM J. Math. Anal.*，47(5):3884–3916，2015。[24] Sachin Saini 和 Uaday Singh。通过随机插值神经网络算子对随机过程进行构造性逼近。*arXiv* 预印本 *arXiv:2512.24106*，2025。[25] JL Doob。随机过程。Wiley Classics Library，1990。[26] Danilo Costarelli 和 Michele Piconi。采用 Hardy-Littlewood 极大不等式的神经网络算子的渐近分析。*Mediterr. J.Math.*，21(7):199，2024。[27] Danilo Costarelli 和 Renato Spigler。Kantorovich型神经网络算子族的收敛性。《逼近理论杂志》，185:80–90，2014。[28] Lucian Coroianu、Danilo Costarelli 和 Uˇgur Kadak。由 S 形激活函数的渐近行为所蕴含的神经网络算子的定量估计。*Mediterr. J. Math.*，19(5):211，2022。[29] Zdzislaw Brzezniak 和 Tomasz Zastawniak。基础随机过程：通过习题学习的课程。Springer Science & Business Media，2000。