arXiv:2601.03635v1 [math.DG] 7 Jan 2026

二维 Alexandrov 空间中测地曲率的比较定理与刚性定理

LE MA，JOHN MAN SHUN MA

Abstract. 本文研究曲率下界（CBB）二维 Alexandrov 空间边界的测地曲率。我们证明了若干关于测地曲率的比较定理和整体化定理，将已知的曲率上界（CBA）空间中曲线的相关结果加以推广 [1]。我们还证明了带角点的边界在测地曲率有下界时的一个刚性定理。这推广了 [12] 中关于二维情形的已知刚性结果。

1. Introduction

对于黎曼流形中的任意光滑曲线，其测地曲率是衡量曲线偏离测地线程度的二阶量。对于一般长度空间中的曲线，测地曲率有若干种推广定义。 [1], Alexander 和 Bishop 研究了曲率上界（CBA）空间中曲线的弧弦曲率 κ 和密切曲率 χ。相关定义回顾于第 2 节。在对 κ、 χ的上界作出假设后，他们得到了若干比较定理、整体化定理和刚性定理，推广了光滑情形中的已知结果。

在本文中，我们研究曲线在曲率下界为K的二维亚历山德罗夫空间 X 中的相应问题，其中 $K \geq 0$。众所周知， X 是一个拓扑曲面，可能带有边界 ∂X。我们假设 X 在拓扑上是一个边界为$\partial X \cong \mathbb{S}^1$ 的圆盘，并证明以下结果。

首先，我们证明一个关于弧弦曲率的整体化定理（定理 4.2）。回顾一下，曲率下界（ [7, 第 3]节）的整体化定理指出，三角形比较对 X 中的所有测地线三角形成立，并且 X 满足直径上界。粗略地说，在

日期：2026年1月8日。

定理 4.2 中，我们证明：如果边界 ∂X 上的几乎处处点都具有弧弦曲率（上）的点态下界，那么 ∂X 就具有全局弧弦曲率下界。

一般 CBA(K) 空间中曲线的相应整体化结果已在 [1] 中证明。在 CBB 情形下，我们需要假设 X 是二维的：与 CBA(K) 情形不同，测地曲率的逐点曲率下界对整体行为几乎没有约束（见注 2）。我们注意到，Reshetnyak 主定理 [3, 9。L], 在 [1] 中被用于建立 CBA 空间中测地曲率有上界的曲线的比较定理和整体化定理，但该定理在 CBB 框架下并不适用。

其次，我们推导出弧弦曲率与 ∂X的密切曲率之间的一个（几乎处处成立的）逐点不等式（定理 5.1）。当 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有凸边界 ∂X 的一个区域时， ∂X 的弧弦曲率 κ 和密切曲率 χ 几乎处处存在且相等（见附录 B）。在 [1, 推论 3.4], 中证明，对于 CBA 空间中的可求长曲线，弧弦曲率的（上）界 $\kappa \leq \kappa$ 蕴含密切曲率的（上）界 $\chi \leq \kappa$。关于有限维 $\overline{\text{CBB}}$ 空间中的类似结果，见 [2, 定理 5.3] 。据作者所知，定理 5.1 似乎是文献中唯一可用的（几乎处处成立的）逐点不等式。

第三个定理（定理 6.1）是关于带角点边界 ∂X 的刚性定理。当 X 是具有正高斯曲率的光滑黎曼曲面，且 ∂X 具有正测地曲率时，Toponogov [15] 为光滑边界推导出了长度上界（另见 [13, 第297]页和 [9, 定理 4]）。此后，该结果在 ∂X 具有正积分测地曲率（转向量）的 Alexandrov 情形中得到了推广 [6]。

在高维情形下，Petrunin [14] 证明，若 X 是曲率为 $\geq$ 1的 n维亚历山德罗夫空间，则其边界满足$\mathcal{H}^{n-1}(\partial X) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$。在 [12], , Grove 和 Peterson 证明，等号成立时， X 与一个 Alexandrov 透镜等距（即 $\mathbb{S}^n$中两个半球的交集）。关于半径估计和刚性的更多相关结果，参见 [8], [10], [11] ； 关于里奇曲率的类似刚性结果，参见 [9] 。在定理 6.1 中，我们证明，假设 ∂X 具有 $\geq \kappa$ 的弧弦曲率，且有一个转角为 θ 的角点，则 ∂X的长度存在上界。我们还证明了刚性结论：当达到该长度上界时， X 与一个 κ透镜等距（即 S_K中两个 κ 圆盘的交集）。

本文的结构如下。第 2 节介绍二维亚历山德罗夫空间的背景，以及测地曲率的不同概念。第 3 节将 ∂X 识别为 S_K中的一条凸曲线 $\tilde{\gamma}$ 。第 4 节利用这一结果证明弧弦曲率的整体化定理。第 5 节证明弧弦曲率与密切曲率之间的不等式。第 6 节证明刚性定理 6.1。

John Man Shun Ma 获得了中国国家自然科学基金（面上项目，资助编号：12471053）的资助。

2. 背景

本节首先回顾亚历山德罗夫空间的基础知识。主要参考文献为 [5], [3] 和 [4]。

设 X 为一个完备长度空间。 $p, q \in X$之间的距离记为 $|pq|_X$。从 p 到 q 的一条测地线记为 $[pq]$。设 $K \geq 0$，并令 S_K 为截面曲率恒为 K的二维模型空间。因此，当 $K > 0$且 $S_0 = \mathbb{R}^2$时， S_K 是半径为$1/\sqrt{K}$ 的二维球面。设 $p, q \in S_K$。我们用 $|pq|_K$或简记为 $|pq|$ 表示 S_K中 p, q之间的距离。

S_K 中的一条简单闭曲线若围成一个测地凸区域Ω，则称其为凸曲线。Ω称为该曲线的内部。当 $K > 0$时，任意闭凸曲线都包含在 S_K的某个半球内。

在 S_K 中具有常数测地曲率 κ 的 S_K 中的圆（分别为弧、劣弧、优弧）称为 S_K 中的 κ-圆（分别为弧、劣弧、优弧）。在 S_K 的刚性运动下，对任意 $\kappa \geq 0$，κ-圆都唯一。由 S_K 中的 κ-圆围成的凸区域称为 κ-圆盘，记作 $\mathbb{D}_\kappa$。

按照 [12], ， S_K 中两个 κ-圆盘的交集称为 κ-透镜。更精确地说，设 β 为两个 κ-圆盘边界之间的内角。κ-透镜的转角定义为 $\theta = \pi - \beta$，而 κ-透镜记作 $\mathcal{L}_{\kappa,\,\theta}$。注意，$\mathcal{L}_{\kappa,\,0}$ 只是一个 κ-圆盘。通过直接计算（见附录 C），可得

$$L(\partial \mathcal{L}_{\kappa,\alpha}) = \frac{4}{\sqrt{K+\kappa^2}} \cdot \arcsin \sqrt{1 - \frac{\kappa^2(1-\cos\theta)}{K(1+\cos\theta)+2\kappa^2}}. \tag{2.1}$$

注意，当 $\theta = 0$ 时，(2.1) 化为 $L(\partial \mathbb{D}_{K,\,\kappa}) = 2\pi/\sqrt{K+\kappa^2}$ 。

2.1. 密切曲率与弧弦曲率。以下定义摘自 [1]。设 $(X,\ d)$ 为一个度量空间，并

设 p, q, $m \in X$。令 $\triangle_K \tilde{q}\tilde{q}\tilde{m}$ 为其在 S_K 中的比较三角形（如果存在）。在 S_K 的刚性运动下，其比较三角形 $\Delta_K \tilde{p}\tilde{q}\tilde{m}$ 位于 S_K 中唯一的 κ-圆上。定义 $\chi_K(p, q, m) = \kappa$。

定义 2.1. 设 $\gamma: I \to X$ 是一条曲线，且 $q = \gamma(t_0) \in \gamma$。$\gamma$ 在 q 处的下密切曲率和上密切曲率分别为

$$\underline{\chi}_\gamma(q) = \liminf_{p,m \to q} \chi_K(p,q,m), \quad \overline{\chi}_\gamma(q) = \limsup_{p,m \to q} \chi_K(p,q,m), \tag{2.2}$$

其中，极限的取法使得 p, $m \to q$ 从 q 的两侧趋近。也就是说，$p = \gamma(s_1)$、$m = \gamma(s_2) = q$ 且 $s_1 < t_0 < s_2$。若 $\underline{\chi}_\gamma(q) = \overline{\chi}_\gamma(q)$，则将该极限记为 $\chi_\gamma(q)$，并称其为 γ 在 q 处的密切曲率。

注 1。在 [2], [12], 中，作者定义了有限维曲率下界（CBB）(K) 空间 X 的边界 ∂X 的基角/弦曲率。当 X 是二维的且 γ 是 ∂X 的参数化时，我们在附录 B 中证明，这与 γ 的密切曲率密切相关。

当 γ 可求长时，可如下定义弧弦曲率：设 I 是 γ 中端点为 p, q 的任意一段弧。当 $K > 0$ 时，我们要求 $|\widehat{I}| + |pq|_X \le 2\pi/\sqrt{K}$。在 S_K 的刚性运动意义下，存在唯一一条 $\widetilde{I}$ 的 κ-弧 $\widetilde{I}$，位于 S_K 中且端点为 $\tilde{p}$, $\tilde{q}$，使得 $|I| = |\widetilde{I}|$ 且 $|pq|_X = |\tilde{p}\tilde{q}|$。定义

$$\kappa_K(\widehat{I}) = \kappa. \tag{2.3}$$

定义 2.2。设 γ 是 X 中的一条可求长曲线，且 $q \in \gamma$。定义 γ 在 q 处的下弧弦曲率和上弧弦曲率为

$$\underline{\kappa}_\gamma(q) = \liminf_{q \in \widehat{I}, |\widehat{I}| \to 0} \kappa_K(\widehat{I}), \quad \overline{\kappa}_\gamma(q) = \limsup_{q \in \widehat{I}, |\widehat{I}| \to 0} \kappa_K(\widehat{I}), \tag{2.4}$$

其中，极限是对 γ 中所有包含 q 的子弧 I 取的。若 $\underline{\kappa}_\gamma(q) = \overline{\kappa}_\gamma(q)$，则将该极限记为 $\kappa_\gamma(q)$，并称其为 γ 在 q 处的弧弦曲率。

本文关注具有密切曲率或弧弦曲率下界的曲线，其中包括 $\chi_\gamma(s)$、$\kappa_\gamma(s)$ 几乎处处的下界，以及以下全局下界：

定义 2.3. 设 γ 是 X 中的一条曲线。若对任意三个点 $p, q, m \in \gamma$，只要 $|\triangle pqm| \le 2\pi/\sqrt{K}$ 且 $K > 0$，就有 $\chi(p,q,m) \ge \kappa$，则称 $\chi_{\gamma,K} \ge \kappa$ 全局地满足该性质。若 γ 可求长，则称 $\kappa_{\gamma,K} \ge \kappa$

$\widehat{\ }$全局地满足该性质，即对 γ 的任意端点为 p,q 的子弧 I，只要 $|I|_+|pq|_X \le 2\pi/\sqrt{K}$ 且 $K>0$，就有 $\kappa(\widehat{I}) \ge \kappa$。

注 2。以下例子说明，一般而言，测地曲率的逐点下界并不意味着如定义 2.3 中的全局界：螺旋线 $\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ 具有常数测地曲率 $\kappa_0 > 0$。然而，它不满足 $\chi_{\gamma,\,0} \ge r$ 对任意 $r>0$ 均不成立，因为它无限多次经过同一条直线。类似地，对于 $t>0$，曲线 $\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t^{-1})$ 具有一个正的测地曲率下界，但它不满足 $\kappa_{\gamma,\,0} \ge r$ 对任意 $r>0$均不成立。

注 3。一般而言，下弧弦曲率由 [1,命题 2.2]给出：

$$\underline{\kappa}_\sigma(q) = \liminf_{\widehat{I}} \sqrt{24\frac{\ell - r}{r^3}},$$

$\widehat{\ }$其中，极限取遍 σ 的所有包含 q 的子弧 I，其弧长度为 ℓ、弦长度为 r。类似地，对于$\kappa_\gamma(q)$也是如此。因此，κ 和 κ与所选的模型空间 S_K 无关。 $\bar{}$

注记 4。利用公式 (7.5) 计算 $\mathbb{R}^2$ 中三角形的密切曲率，并结合一个关于两点 $p,\ q \in S_K$和 $|p-q|$ 之间弧长的计算（在 $\mathbb{R}^3 \supset S_K$中计算），可知对于任意 $K \ge 0$，χ_γ 和 χ_γ 也与所选的S_K 无关。

2.2. $\mathbb{R}^2$中的凸曲线，支撑函数。 设 σ 是 $\mathbb{R}^2$中的一条凸曲线。对于几乎处处的 $q \in \sigma$，q 处的密切曲率和弧弦曲率均存在且相等。若 $\sigma = \sigma(s)$ 是 σ的弧长参数化，则对于几乎处处的 s，$\sigma(s)$ 处的密切曲率和弧弦曲率等于 $\theta'(s)$，其中 θ 是 $\sigma'(s)$ 与 x轴所成的角（见附录 A）。

对于每个 $\theta \in [0,2\pi]$，令 $e(\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$。$\sigma$ 的支撑函数定义为

$$h : [0,2\pi] \to \mathbb{R},\quad h(\theta) = \sup_{p\in\sigma} p\cdot e(\theta). \tag{2.5}$$

若 $\theta'(s) \ge \kappa > 0$ 几乎处处成立 $s \in [0,\ell]$，则 h 是 $C^{1,\,1}$ 并且满足

$$h'' + h = s'(\theta),\quad \text{for almost all } \theta \in [0,2\pi]. \tag{2.6}$$

这里，$s = s(\theta)$ 是 $s \mapsto \theta(s^{\pm})$ 的左逆。

支撑函数对于研究凸子集的曲率性质非常有用。例如，以下结果实质上已在 [6, 引理 1]中得到证明。

引理 2.1。 设 σ 是 S_K 中的一条闭凸曲线，满足 $\kappa_\sigma(q) \geq \kappa$对几乎所有 $q \in \sigma$都成立。那么，对每个 $p \in \sigma$ 以及 σ 在 p处的任意一条支撑直线，σ 都包含在由一条与该支撑直线在 p处相切的 κ-曲线所围成的区域内。

在本文中，我们利用支撑函数证明以下

定理 2.1. 设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条闭凸曲线，满足 $\kappa_\sigma(q) \geq \kappa > 0$ 对几乎处处的 $q \in \sigma$成立。则 $\kappa_{\sigma,0} \geq \kappa$ 在整体上成立。

证明。设 I 是 σ 的任意一个子弧，其端点为 p, q。令 $\sigma : [0, \ell_0] \to I$ 为 I 从 p 到 q的弧长参数化，其中 $\ell_0 = |I|$。不妨设 p 为原点，且 $\theta(0^+) = 0$。我们将证明$\kappa_0(I) \geq \kappa$。设 $\tilde{I}$ 为一条 κ-弧，其端点为 $\tilde{p}, \tilde{q}$，且满足 $|\tilde{I}| = |I|$。令 $\tilde{r} = |\tilde{p}\tilde{q}|$。则

$$\tilde{r} = \frac{2}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa \ell_0}{2}\right) \tag{2.7}$$

且当 $r = |pq| \leq \tilde{r}$时，$\kappa_0(I) \geq \kappa$。为证明这一点，令 h 为 σ 相对于原点 $p = 0$的支撑函数。因此 $r = r(\theta_0) = |\sigma(\theta_0)|$，其中 $\sigma(\theta) = \sigma(s(\theta))$. 利用 (2.5)，可得

$$h(\theta) = \sigma(\theta) \cdot e(\theta), \quad h'(\theta) = \sigma(\theta) \cdot e(\theta + \pi/2).$$

Thus

$$r^2(\theta) = h(\theta)^2 + (h'(\theta))^2. \tag{2.8}$$

另一方面，由 (2.6) 和 $h(0) = h'(0) = 0$，可得

$$h(\theta) = \int_0^\theta s'(\theta - \varphi) \sin\varphi \, d\varphi, \quad h'(\theta) = \int_0^\theta s'(\theta - \varphi) \cos\varphi \, d\varphi.$$

记 $u(\varphi) = s'(\theta - \varphi)$，则有

$$h^2 + (h')^2 = \left(\int_0^\theta u \cos\varphi d\varphi\right)^2 + \left(\int_0^\theta u \sin\varphi d\varphi\right)^2 \tag{2.9}$$

为了估计 $h^2(\theta_0) + (h'(\theta_0))^2$，我们将其表述为以下优化问题（注意，弧弦曲率几乎处处相等 θ'）：

$$\text{Maximize } \mathcal{F}(u) = \left(\int_0^{\theta_0} u \cos\varphi d\varphi\right)^2 + \left(\int_0^{\theta_0} u \sin\varphi d\varphi\right)^2 \tag{2.10}$$

在所有 $u \in \mathscr{C}$ 中，其中

$$\mathscr{C} = \left\{ u \in L^\infty(0, \theta_0) : 0 \le u \le \kappa^{-1}, \quad \int_0^{\theta_0} u = \ell_0 \right\}. \tag{2.11}$$

令 $\tilde{\mathcal{F}}\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R}^2$ 为映射

$$\tilde{\mathcal{F}}(u) = \left(\int_0^{\theta_0} u(\varphi)\cos\varphi d\varphi, \int_0^{\theta_0} u(\varphi)\sin\varphi d\varphi \right). \tag{2.12}$$

于是 $\mathcal{F}(u) = |\tilde{\mathcal{F}}(u)|^2$ 并且

$$\begin{aligned} \max_{u\in\mathscr{C}} \mathcal{F}(u) &= \max_{0\le\psi\le 2\pi} \max_{u\in\mathscr{C}} \left| \tilde{\mathcal{F}}(u) \cdot (\cos\psi, \sin\psi) \right|^2 \\ &= \max_{0\le\psi\le 2\pi} \max_{u\in\mathscr{C}} \left| \int_0^{\theta_0} u(\varphi)\cos(\psi-\varphi) d\varphi \right|^2 \end{aligned}$$

对于每个固定的 ψ，显然最大值

$$\max_{u\in\mathscr{C}} \left| \int_0^{\theta_0} u(\varphi)\cos(\psi-\varphi) d\varphi \right|^2$$

在 u 的质量尽可能接近 ψ 时取得。因此，当 $\varphi \in [\kappa\ell_0/2, 2\pi - \kappa\ell_0/2]$ 且 $u = \kappa^{-1}\chi_{I_\varphi}$时，最大值取得，其中 $I_\varphi = [\varphi - \kappa\ell_0/2, \varphi + \kappa\ell_0/2] \subset [0, \theta_0]$。由此，

$$\begin{aligned} \max_{u\in\mathscr{C}} \mathcal{F}(u) &= \frac{4}{\kappa^2} \left(\int_0^{\kappa\ell_0/2} \cos\varphi d\varphi \right)^2 \\ &= \frac{4}{\kappa^2} \sin^2\left(\frac{\kappa\ell_0}{2} \right) \\ &= \tilde{r}^2. \end{aligned}$$

因此 $r \le \tilde{r}$，这就完成了定理的证明。 □

回顾我们对 q 处密切曲率的定义，极限取遍 q 为其中一个顶点的三角形。在下面的命题中，我们证明了，对于 $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ 中几乎处处的点， q 处的密切曲率可以通过使用顶点位于 q 两侧且不会过于扁薄的三角形来计算。证明见附录 A。

命题 2.1。设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条闭凸曲线。那么对于几乎处处的 $q \in \sigma$，q 处的密切曲率存在，并且

$$\chi_\sigma(q) = \lim \chi_K(p_1, p_2, p_3), \tag{2.13}$$

其中极限取遍所有满足以下条件的 $p_1, p_2, p_3 \in \sigma$

(i) $p_1, p_2, p_3 \to q$, *(ii)* $p_2 q \in \widehat{p_1 p_3}$, 且 *(iii)* 弧长 $|\widehat{p_1 p_2}|$, $|\widehat{p_2 p_3}|$和 $|\widehat{p_1 p_3}|$满足

$$|\widehat{p_1 p_2}|, |\widehat{p_2 p_3}| \geq \frac{1}{3}|\widehat{p_1 p_3}|. \tag{2.14}$$

2.3. 二维亚历山德罗夫空间。 若完备长度空间 X 的曲率下界为 K, 则称 X 为曲率下界K。当 X 为二维时, X 是带边界∂X [5, 10的拓扑曲面。10.3]。对于任意 $p \in \partial X$, 方向空间 $\Sigma_p X$ 与某个 $\beta \in (0, \pi]$ 同构。若 $\Sigma_q X$ 与 $[0, \pi - \theta]$ 等距, 且 $\theta \in (0, \pi)$, 则称 $q \in \partial X$ 为角点, 其转角为 θ。否则, 称 $q \in \partial X$ 为边界正则点。注意, θ 可由下式计算:

$$\pi - \theta = \lim_{p,m \to q} \angle_K \tilde{p}\tilde{q}\tilde{m} \tag{2.15}$$

其中, 极限沿所有从 q两侧相向趋近于 q 的 p, $m \in \partial X$ 取值。此外, 对于 $q \in \partial X$, 有如下角度等式 [4, 第127页定理 2]: 设 σ_1, σ_2, σ_2 是 X中从 $q \in \partial X$ 出发的三条测地线, 且 σ_2 位于 σ_1, σ_3的中间; 也就是说, 对于所有靠近 q的 $p' \in \sigma_1$、 $m' \in \sigma_3$, 都存在一条连接 p', m' 并与 σ_2相交的测地线 σ 。那么

$$\angle(\sigma_1, \sigma_3) = \angle(\sigma_1, \sigma_2) + \angle(\sigma_2, \sigma_3). \tag{2.16}$$

3. Representing convex curves in $\mathrm{CBB}(K)$

设 (X, d) 是一个二维曲率下界为 K 的空间, 同胚于闭单位圆盘。设 γ 是 X 的边界。我们假设 γ 可求长, 长度为 $\ell > 0$。在本节中, 我们将边界 $\gamma = \partial X$ 与 S_K 中的一条凸曲线 $\tilde{\gamma}$ 对应起来, 使得 γ 的（上）弧弦曲率几乎处处与 $\tilde{\gamma}$ 的曲率一致。

设 $V = (a_m)_{m=1}^{\infty}$ 是 γ 中一列互不相同的点, 称为 V 的 $\frown$ $\frown$ 顶点。对每个 $m \geq 2$, 设 $I_1^m, \cdots, I_m^m$ 是 $\gamma \setminus \{a_1, \cdots, a_m\}$ 的连通分支。我们假设

$$i_m(V) := \max\{|\widehat{I_1^m}|, \cdots, |\widehat{I_m^m}|\} \to 0 \quad \text{as } m \to \infty. \tag{3.1}$$

以下构造将在后续论证中发挥关键作用。

定理 3.1。 设 $V = (a_m)_{m=1}^{\infty}$ 是满足 *(3.1)* 的顶点序列。那么, 在 S_K 中存在一条凸曲线 $\tilde{\gamma}$, 以及一个弧长

保持同胚

$$f = f_V : \gamma \to \tilde{\gamma}, \quad s \mapsto \tilde{s} := f(s)$$

具有以下性质。

(i) f 是距离不增的:

$$|\tilde{s}_1\tilde{s}_2| \le |s_1 s_2|_X, \quad \forall s_1, s_2 \in \gamma. \tag{3.2}$$

(ii) $|a_1a_2|_X = |\tilde{a}_1\tilde{a}_2|$ 并且如果 a_m 位于子弧 $I_j^{m-1} = \widehat{a_{i_1}a_{i_2}}$ 中，其中某个 $i_1, i_2 \in \{1, \cdots, m-1\}$，则

$$|a_m a_{i_1}|_X = |\tilde{a}_m\tilde{a}_{i_1}|, \quad |a_m a_{i_2}|_X = |\tilde{a}_m\tilde{a}_{i_2}|. \tag{3.3}$$

证明。对于每个 $k \ge 3$，令 P_k 为 X 中的、顶点为 $\{a_1, \cdots, a_k\}$的 k边形。我们通过归纳法构造一列凸 k边形 $(P_k)_{k=3}^{\infty}$，其顶点 $\{\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_k\}$ 位于 S_K中，使得定理 3.1陈述中的 (ii) 对任意 $3 \le k \le m$都成立。

令 $k = 3$，令 $P_3 = \triangle\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3$ 为 S_K 中关于 $\triangle a_1a_2a_3$ 的任意比较三角形，其中 X。显然，(ii) 对 $m = k = 3$成立。

一般而言，假设已构造出 P_N，使得对任意 $3 \le m \le N$，(ii) 均成立。注意，对于某个i_1，$i_2 \in \{1, \cdots, N\}$，a_{N+1} 位于子弧 $\widehat{a_{i_1}a_{i_2}}$ 上。令 $\triangle\tilde{a}_{i_1}\tilde{a}_{N+1}\tilde{a}_{i_2}$ 为 $\triangle a_{i_1}a_{N+1}a_{i_2}$ 的唯一比较三角形，它位于由 P_N 围成的区域之外；令P_{N+1}为 S_K 中顶点为 $\tilde{a}_1$，$\cdots$，$\tilde{a}_{N+1}$的 $N+1$ 边形。因此，序列 $(\tilde{a}_m)_{m=1}^{\infty}$ 以及 S_K 中由 k 边形组成的序列 $(P_k)_{k=3}^{\infty}$ 已通过归纳法构造出来。

首先，我们证明 P_k 是凸的。对于 P_k 的任意顶点 $\tilde{a}_j$，令 $\tilde{a}_i$、$\tilde{a}_k$ 为其相邻顶点。于是存在 $\tilde{a}_{i_0}$，$\cdots$，$\tilde{a}_{i_n}$，使得 $i_0 = i$、$i_n = k$,

$$\angle_K\tilde{a}_i\tilde{a}_j\tilde{a}_k = \sum_{m=1}^{n} \angle_K\tilde{a}_{i_{m-1}}\tilde{a}_j\tilde{a}_{i_m}, \tag{3.4}$$

且每个 $\triangle\tilde{a}_{i_{m-1}}\tilde{a}_j\tilde{a}_{i_m}$, $m = 1, \cdots, n$ 都是用于构造 P_k的比较三角形。根据角度比较$\angle_K\tilde{a}_{i_{m-1}}\tilde{a}_j\tilde{a}_{i_m} \le \angle a_{i_{m-1}}a_j a_m$、(3.4) 和 (2.16)，我们得出 $\angle_K\tilde{a}_i\tilde{a}_j\tilde{a}_k \le \angle a_i a_j a_k \le \pi$，因此$P_k$ 是凸的。

对于任意 k，令 f_k： $P_k \to P_k$由 $f_k(a_i) = \tilde{a}_i$给出，其中 $i = 1$，$\cdots$，k并且对于任意两个相邻的顶点 a_i，a_j，f_k 将 $[a_ia_j]$ 等距映射到 $[\tilde{a}_i\tilde{a}_j]$。接下来，我们断言 f_k 是距离不增的:

$$|f_k(p)f_k(q)| \le |pq|_X, \quad \text{for all } p, q \in P_k \tag{3.5}$$

我们用归纳法证明。对于 $k=3$，这或多或少就是曲率下界(K)空间的定义（例如 [5, 4.3.8]）。

现在假设该命题对 f_{m-1}： $P_{m-1}\to P_{m-1}$成立。注意， P_m 是通过沿公共边 $[\tilde{a}_{i_1}\tilde{a}_{i_2}]$将 $\triangle\tilde{a}_{i_1}\tilde{a}_m\tilde{a}_{i_2}$ 与 P_{m-1} 粘合而得到的。令 x， $y\in P_m$。弦 $[a_{i_1}a_{i_2}]$ 将曲线 P_m分为两部分： P_{m-1} 和 $\triangle a_{i_1}a_ma_{i_2}$。如果 x， y 位于同一部分，则由归纳假设以及针对$k=3$的论证可得结论。否则，如果 $x\in P_{m-1}$ 和 $y\in\triangle a_{i_1}a_ma_{i_2}$。由于 $[a_{i_1}a_{i_2}]$将 X 分为两个区域，$[xy]$ 与 $[a_{i_1}a_{i_2}]$ 交于一点 z。由归纳假设以及针对 $k=3$的论证，

$$\begin{aligned}|f_m(x)f_m(y)|&\leqslant|f_m(x)f_{m-1}(z)|+|f_{m-1}(z)f_m(y)|\\&\leqslant|xz|_X+|zy|_X\\&=|xy|_X.\end{aligned}$$

因此， f_m 也是距离不增的，这就完成了归纳证明。

现在定义 $f=f_V$。对于任意 a_j，定义 $f(a_j)=\tilde{a}_j$。记 $V\subset S_K$ 为所有 $\tilde{a}_j$的集合。利用（3.5）以及 V 在 γ中稠密这一事实，映射 f： $V\to V$ 可唯一延拓为一个距离不增映射f： $\gamma\to S_K$。注意到 $\tilde{\gamma}:=f(\gamma)$是凸$k$边形序列 $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ 的极限，因此在 S_K中是凸的。

令 a， $b\in V$。由于 $i_m(V)\to 0$ 作为 $m\to\infty$，对于任意 n，存在 $n+1$个顶点 a_1^n， $\cdots$， $a_n^n\in V\cap ab$，使得 $a_0^n=a$、 $a_n^n=b$ 以及 $|a_i^na_{i+1}^n|_X=|a_i^na_{i+1}^n|$ 对所有 $i=0$， $\cdots$， $n-1$ 均成立，并且$\sum_i|a_i^na_{i+1}^n|_X\to|ab|$ 作为 $n\to\infty$。因此

$$|\widetilde{\tilde{a}\tilde{b}}|=\lim_n\sum_i|\widetilde{a_i^n}\widetilde{a_{i+1}^n}|=\lim\sum_i|a_i^na_{i+1}^n|_X=|\widehat{ab}|$$

由于 V 在 γ中稠密，$|ab|_X=|\widetilde{\tilde{a}\tilde{b}}|$ 对任意 a， $b\in\gamma$。因此， f 保持弧长。□

我们有以下推论。

推论 3.1。 设定理 *3.1* 中给出 γ、 $\tilde{\gamma}$、 f。则

$$\overline{\kappa}_\gamma(q)\leq\overline{\kappa}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}),\quad \textit{for all } q\in\gamma. \tag{3.6}$$

and

$$\overline{\kappa}_\gamma(q)=\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}),\quad \textit{for almost all } q\in\gamma. \tag{3.7}$$

特别地， $\kappa_\gamma(q)<\infty$ 对几乎处处的 $q\in\gamma$成立。

证明。由于 f 保持弧长且距离不增，$\widetilde{\kappa_K(bc)} \le \kappa_K(\tilde{b}\tilde{c})$ 对所有子弧 $bc \subset \gamma$ 均成立。对 $q \in \gamma$ 两边取 $b, c \to q$，可得（3.6）。 $\tilde{\gamma}$ 是一条凸曲线，因此在 $\tilde{\gamma}^2 \subset \tilde{\gamma}$ 上二阶可微，其中 $\tilde{\gamma}$ 具有满测度。对于任意$q \in f^{-1}(\tilde{\gamma}^2) \setminus V$，存在顶点序列（$b_n$），（$c_n$）位于 V 中，从两侧收敛至 q，且满足 $|b_n c_n|_X = |b_n \tilde{c}_n|$。因此

$$\kappa_K(\widehat{b_n c_n}) = \kappa_K(\widehat{\tilde{b}_n \tilde{c}_n}) \to \kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}).$$

因此，对所有 $q \in f^{-1}(\tilde{\gamma}^2) \setminus V$，都有 $\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}) \ge \kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q})$。 □

4. Globalization for the arc/chord curvature

本节证明弧弦曲率的整体化定理（定理 4.2）。我们首先证明在 S_K 中，凸曲线的若干曲率下界条件等价，其中 $K \ge 0$。以下命题 a 是将定理 2.1 推广到 S_K 中关于 $K > 0$ 的凸曲线的第一步。

命题 4.1. 设 $K > 0$，且 σ 是 S_K 中的一条闭凸曲线，并且 $\kappa_\sigma(q) \ge \kappa$ 几乎处处成立。则对所有 $q \in \sigma$，都有 $\underline{\kappa}_\sigma(q) \ge \kappa$。

证明. 固定 $q \in \sigma$。根据定义，存在点列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$，它们属于 σ 且收敛到 q，使得 $q \in b_n c_n$，并且

$$\kappa_K(\widehat{b_n c_n}) \to \underline{\kappa}_\sigma(q) \text{ as } n \to \infty. \tag{4.1}$$

对于每个 n，令 $V = (a_m)_{m=1}^{\infty}$ 为 σ 中满足$a_1 = b_n$，$a_2 = c_n$ 且 $i_m(V) \to 0$ 当 $m \to \infty$ 时的顶点序列。由于 $K > 0$，S_K 是一个 CBB(0) 空间。根据定理 3.1，存在 $\mathbb{R}^2$ 中的凸曲线 $\tilde{\sigma}$，以及一个弧长保持且距离不增的映射

$$f_1 : \sigma \to \tilde{\sigma}, \quad q \mapsto \tilde{q},$$

使得对于几乎处处的 $q \in \sigma$，$\kappa_\sigma(q) = \kappa_{\tilde{\sigma}}(\tilde{q})$。因此，对于几乎处处的 $\tilde{q} \in \tilde{\sigma}$，$\kappa_{\tilde{\sigma}}(\tilde{q}) \ge \kappa$。根据定理 2.1，$\kappa_0(b_n \tilde{c}_n) \ge \kappa$。由 f_1 的构造 $\widetilde{\kappa_0(b_n c_n)} = \widehat{\kappa_0(b_n \tilde{c}_n)} \ge \kappa$。因此，

$$\liminf_n \kappa_0(\widehat{b_n c_n}) \ge \kappa$$

因此，根据 (4.1) 和注 3，$\underline{\kappa}_\sigma(q) \ge \kappa$。 □

我们得到关于 S_K 中凸曲线的以下整体化定理。

定理 4.1。设 σ 是 S_K 中的一条闭凸曲线。设 $\kappa \in [0, \infty)$。以下各命题等价：

(a) $\kappa_\sigma(q) \geq \kappa$ 对几乎处处的 $q \in \sigma$ 成立；*(b)* $\chi_\sigma(q) \geq \kappa$ 对几乎处处的 $q \in \sigma$ 成立；*(c)* $\kappa_{\sigma,\ K} \geq \kappa$ 在整体上成立；
(d) $\chi_{\sigma,\ K} \geq \kappa$ 在整体上成立。

证明。(a) $\Leftrightarrow$ (b)，因为 $\kappa_\sigma = \chi_\sigma$ 几乎处处成立。显然，(c)⇒(a) 且 (d)⇒(b)。另一方面，已有证明表明，对于任意度量空间 [1, Remark 2.6]，(d)⇒(c) 成立。为完成证明，我们证明 (a)⇒(d)。根据命题 4.1，只需证明以下两个断言。

断言 1 如果对所有 $q \in \sigma$，$\kappa_\sigma(q) \geq \kappa$，则对所有 $q \in \sigma$，$\chi_\sigma(q) \geq \kappa$。

Proof of claim 1: 假设对于某个 $p \in \sigma$，$\chi_\sigma(p) < \kappa$。根据定义，存在 $\kappa' < \kappa$ 以及度量空间 σ中的两个点列（$\bar{m}_n$）、（$\bar{q}_n$），从两侧收敛到 p，使得 $\chi_K(\bar{m}_n, p, \bar{q}_n) \leq \kappa'$。由于当 $n \to \infty$ 时 $|\bar{m}_n \bar{q}_n| \to 0$，对于所有足够大的 n，p 严格位于 $L(\bar{m}_n, \bar{q}_n)$内部，即具有两个角点 $\bar{m}_n$、$\bar{q}_n$的κ'-透镜。令 σ_n 为包含 p 的 $\sigma \cap L(\bar{m}_n, \bar{q}_n)$ 的连通分支，令 m_n、q_n 为 γ_n 的端点。由于γ_n是凸的，并且完全位于 $L(m_n, q_n)$ 中，我们有 $\kappa_K(\gamma_n) \leq \kappa'$。取 $n \to \infty$、$\kappa_\sigma(p) \leq \kappa' < \kappa$，这与假设矛盾。

断言 2: 如果 $\chi_\sigma(q)$ 对所有 q 都成立，那么 $\chi_\sigma \geq \kappa$ 在整体上成立。

Proof of claim 2: 反设不然。那么存在 p，q，$r \in \sigma$，它们位于一个κ' 圆上，且满足 $\kappa' < \kappa$。不妨设连接 p 和 q 的 σ 子弧 σ' 位于由弦 pq 和一段 κ' 劣弧围成的区域内。现在，我们沿着pq 的垂直平分线向下平移 κ'-劣弧。因此，可以找到 $q' \in \sigma'$，使得 σ' 与一段 κ'-劣弧在 q' 处相切，并且该 κ' 劣弧位于 Ω 内；Ω 是由 σ 围成的区域。因此，$\chi_\sigma(q') \leq \kappa' < \kappa$，这就导致了矛盾。□

现在我们准备证明弧弦曲率的整体化定理。

定理 4.2. 设 X 是一个 *CBB(K)* 空间，且与单位圆盘同胚。γ 是其边界。若对于几乎处处的 $s \in \gamma$，都有 $\kappa_\gamma(s) \geq \kappa$。则 $\kappa_{\gamma,\ K} \geq \kappa$ 在整体上成立。

证明。令 $I = \widehat{pq}$ 为 γ 的任意子弧，其端点为 p，q。令 $f : \gamma \to \tilde{\gamma}$ 为定理 3.1 中构造的同胚，其中 $a_1 = p$，$a_2 = q$。由 (3.7)，$\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)$ 几乎处处成立，因此根据定理 4.1，$\kappa_{\tilde{\gamma}} \geq \kappa$ 整体成立。于是，$\kappa_K(\widehat{pq}) = \kappa_K(\tilde{p}\tilde{q}) \geq \kappa$ 且 $\kappa_\gamma \geq \kappa$ 整体成立。□

5. The arc/chord curvature and the osculating curvature

本节证明第二个主要结果，即 ∂X的弧弦曲率与密切曲率之间的一个不等式。证明方法是选取一组特定的顶点并应用定理 3.1。作为推论，我们还证明了密切曲率的整体化。

定理 5.1. 设 γ 中有三点 p, q, m。则存在一条位于 $\tilde{\gamma}$ 中的闭凸曲线，其位于 S_K 中，并存在一个弧长保持且距离不增的映射

$$f : \gamma \to \tilde{\gamma}, \quad s \mapsto \tilde{s} := f(s),$$

使得

$$|pq|_X = |\tilde{p}\tilde{q}|, \quad |qm|_X = |\tilde{q}\tilde{m}|, \quad |mp|_X = |\tilde{m}\tilde{p}| \tag{5.1}$$

and

$$\overline{\chi}_\gamma(s) \geq \overline{\kappa}_\gamma(s) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s}) \geq \underline{\chi}_\gamma(s) \tag{5.2}$$

几乎处处对 $s \in \gamma$ 成立。

定理 *5.1* 的证明. 我们将构造 γ 中的顶点序列 $V_2 = (a_m)_{m=1}^{\infty}$，并应用定理 3.1。

（步骤 1）：令 $a_1 = p, \ a_2 = q, \ a_3 = m$。

（步骤 2）：点 a_1，a_2，a_3 将 γ 分成三个子弧 I_1^1，I_2^1，I_3^1。对于每个 I_i^1，令 J_i^1 为 I_i^1 的中间三分之一。也就是说，$I_i^1 \setminus J_i^1$ 由两个连通分支组成，每个分支的弧长等于 $|I_i^1|/3$。令 a_{i+3}、$i = 1, \ 2, \ 3$ 为 J_i^1 中的点，使得

$$\chi_K(b_{i,1}^1, a_{i+3}, b_{i,2}^1) = \max_{q \in \widehat{J_i^1}} \chi_K(b_{i,1}^1, q, b_{i,2}^1),$$

其中 $b_{i,\ 1}^1, \ b_{i,\ 2}^1 \in \{a_1, a_2, a_3\}$ 是 I_i^1 的两个端点。

（步骤 $k+1$）令 $g_k = 3 \cdot 2^{k-1}$，并假设 $\{a_1, \cdots, a_{g_k}\} \subset \gamma$ 已经找到。同样，$\gamma \setminus \{a_1, \cdots, a_{g_k}\}$ 由 g_k 个子弧 $\widehat{I_j^k}$、$j = 1, \ \cdots, \ g_k$ 组成。对于每个 j，令 $\widehat{J_j^k}$ 为 $\widehat{I_j^k}$ 的中间三分之一，并令 $a_{j+g_k} \in J_j^k$ 使得

$$\chi_K(b_{j,1}^k, a_{j+g_k}, b_{j,2}^k) = \max_{q \in \widehat{J_j^k}} \chi_K(b_{j,1}^k, q, b_{j,2}^k),$$

其中 $b_{j,\ 1}^k, \ b_{j,\ 2}^k \in \{a_1, \cdots a_{g_k}\}$ 是 $\widehat{I_j^k}$ 的两个端点。

我们已归纳构造出一个顶点序列 $V_2 = (a_m)_{m=1}^{\infty}$。由于

$$|\widehat{I}_j^{k+1}| \leq \frac{2}{3} \max\{|\widehat{I}_1^k|, \cdots |\widehat{I}_{g_k}^k|\},$$

有 $i_m(V_2) \to 0$ 如 $m \to \infty$。因此定理 3.1 适用，存在一条闭凸曲线 $\tilde{\gamma} \subset S_K$ 以及一个弧长保持且距离不增的映射

$$f_2 = f_{V_2} : \gamma \to \tilde{\gamma}, \quad s \mapsto \tilde{s}$$

根据推论 3.1，对于几乎所有 $s \in \gamma$，都有 $\kappa_\gamma(s) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s})$。还需证明，对于几乎所有$s \in \gamma$，(5.2) 中的两个不等式都成立。

对于每个 k，令 $E_k \subset \gamma$ 为子集

$$E_k = \bigcup_{i=1}^{g_k} \widehat{I}_i^k \setminus \widehat{J}_i^k. \tag{5.3}$$

定义 $\mathcal{G}$、$\mathcal{B}$ 为

$\mathcal{G} = \{q \in \gamma :$ 存在一个子序列 $(E_{k_j})_j$，使得对所有 $j\}$，都有 $q \notin E_{k_j}$，并且

$$\mathcal{B} = \gamma \setminus \mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k \geq n} E_k \right).$$

断言： $\mathcal{B}$ 是零测度集。

Proof of claim：只需证明对于所有 n，$\cap_{k \geq n} E_k$ 是零测度集。现在固定 n。如果我们能找到一个子列k_j，使得 $k_1 = n$ 且

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_j}$$

是零测度集。我们将归纳地选取

$$k = k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \cdots$$

使得对于所有 N,

$$\left| \bigcap_{j=1}^{N} E_{k_j} \right| < \left(\frac{3}{4} \right)^N \ell. \tag{5.4}$$

$N = 1$情形显然，因为 $|E_k| = \frac{2}{3}\ell < \frac{3}{4}\ell$。-假设对于某个 N，(5.4) 成立。注意，$E_{k_1} \cap \cdots \cap E_{k_N}$由 $M = M_N$组成

互不相交的子弧 $I_1, \cdots, I_M$ 属于 γ。令 $\epsilon > 0$ 足够小，使得

$$\frac{2}{3}|\widehat{I_\alpha}| + 2\epsilon < \frac{3}{4}|\widehat{I_\alpha}|, \quad \alpha = 1, \cdots, M.$$

令 $k_{N+1} > k_N$ 满足：若 $m = k_{N+1} - 1$，则对于任意 $i = 1, \cdots, g_m$，每个子弧 I_j^m 的长度都小于 ϵ。

固定 I_α。令 I 为位于 I_α 中的任意一个形如 I_j^m 的子弧。由于 $E_{k_{N+1}} \cap I_j^m = I_j^m \setminus J_j^m$，我们得到

$$|E_{k_{N+1}} \cap \widehat{I_\alpha}| \le \frac{2}{3}|\widehat{I_\alpha}| + 2\epsilon < \frac{3}{4}|\widehat{I_\alpha}|$$

对 $\alpha = 1, \cdots, M$ 求和，并利用归纳假设，我们得出

$$\left|\bigcap_{j=1}^{N+1} E_{k_j}\right| = \sum_{\alpha=1}^{M} \left|E_{k_{N+1}} \cap I_\alpha\right| < \frac{3}{4}\sum_{\alpha=1}^{M} |I_\alpha| = \frac{3}{4}\left|\bigcap_{j=1}^{N} E_{k_j}\right| < \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1} \ell$$

因此，我们完成了归纳证明。

现在我们回到定理 5.1 的证明。

首先，根据 F_2 的构造，对于任意 $q \in \gamma \setminus V_2$，存在从 q 两侧收敛至 q 的顶点序列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$、$(c_n)_{n=1}^{\infty}$，使得对所有 n 都有 $|b_n c_n|_X = |b_n \tilde{c}_n|$。由于 F_2 是距离不增的，$|b_n q|_X \ge |b_n \tilde{q}|$ 且 $|q c_n|_X \ge |\tilde{q}\tilde{c}_n|$。这意味着

$$\chi_K(b_n, q, c_n) \ge \chi_K(\tilde{b}_n, \tilde{q}, \tilde{c}_n) \tag{5.5}$$

对所有 n 均成立。因此

$$\overline{\chi}_\gamma(q) \ge \limsup_{m\to\infty} \chi_K(a_m, q, b_m) \ge \lim_{m\to\infty} \chi_K(\tilde{a}_m, \tilde{q}, \tilde{b}_m) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}). \tag{5.6}$$

每当 $\tilde{\gamma}$ 在 $\tilde{q}$ 处二阶可微且 $q \notin V_2$ 时。因此，对于几乎处处的 $s \in \gamma$，$\chi_\gamma(q) \ge \kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q})$。

剩下需要证明的是

$$\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}) \ge \underline{\chi}_\gamma(q) \quad \text{for almost all } q \in \gamma. \tag{5.7}$$

首先，令 $V_2 = F(V_2) = (\tilde{a}_m)_{m=1}^{\infty}$ 为 $\tilde{\gamma}$ 中的顶点序列。由于 F 保持弧长，$i_m(V_2) \to 0$ 当 $m \to \infty$ 时。因此，根据定理 3.1，存在一条凸曲线 $\bar{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$ 和一个同胚 $\tilde{F}: \tilde{\gamma} \to \bar{\gamma}$，$\tilde{s} \mapsto \bar{s}$，使得对于几乎处处的 $\tilde{s} \in \tilde{\gamma}$，$\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s}) = \kappa_{\bar{\gamma}}(\bar{s})$。因此，为证明（5.7），不妨通过将 $\tilde{\gamma}$ 认作 $\bar{\gamma}$，假设 $\tilde{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$

令 $q \in \mathcal{G}$。那么存在一个序列 $(k_j)_{j=1}^{\infty}$，使得对所有 j 都有 $q \notin E_{k_j}$。因此，对于每个 j，都存在 $i \in \{1, \cdots, g_{k_j}\}$，使得 $q \in J_i^{k_j}$。根据

对 $a_{i+g_{k_j}}$ 的选取，我们有

$$\chi_K(b_{i,1}^{k_j}, q, b_{i,2}^{k_j}) \le \chi_K(b_{i,1}^{k_j}, a_{i+g_{k_j}}, b_{i,2}^{k_j}) = \chi_K(\tilde{b}_{i,1}^{k_j}, \tilde{a}_{i+g_{k_j}}, \tilde{b}_{i,2}^{k_j}). \tag{5.8}$$

~比较三角形序列 $(\triangle_j)_{j=1}^{\infty}$，其中

$$\widetilde{\triangle}_j = \triangle \tilde{b}_{i,1}^{k_j} \tilde{a}_{i+g_{k_j}} \tilde{b}_{i,2}^{k_j}$$

⌢在 $\mathbb{R}^2$ 中收敛到 $\tilde{q}$，当 $j \to \infty$ 时。由于 $\tilde{a}_{i+g_{k_j}} \in \widehat{J}_i^{k_j}$, $s \in \tilde{b}_i^{k_j}{}_{,\,1}\tilde{b}_i^{k_j}{}_{,\,2}$ 以及

$$|\widehat{\tilde{b}_{i,1}^{k_j}} \tilde{a}_{i+g_{k_j}}|, |\widehat{\tilde{a}_{i+g_{k_j}}} \tilde{b}_{i,2}^{k_j}| \ge \frac{1}{3} |\widehat{\tilde{b}_{i,1}^{k_j}} \tilde{b}_{i,2}^{k_j}|$$

因此由命题 2.1,

$$\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}) = \lim_{j \to \infty} \chi_K(\widetilde{\triangle}_j)$$

只要 $\tilde{\gamma}$ 在 $\tilde{q}$ 处二阶可微。结合 (5.8)，可得

$$\underline{\chi}_{\gamma}(q) \le \kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s}) \tag{5.9}$$

只要 $\tilde{\gamma}$ 在 $\tilde{q}$ 和 $q \in \mathcal{G}$ 处二阶可微。因此，这对几乎处处的 $q \in \gamma$ 都成立。□

定理 5.2 （密切曲率的整体化定理）。设 γ 是 ***CBB(K)*** 空间中的一条凸曲线。那么，当且仅当 $\chi_{\gamma,\,K} \ge \kappa$ 在全局成立时，$\underline{\chi}_{\gamma}(q) \ge \kappa$对几乎处处的 $q \in \gamma$ 成立。

证明。（⇐）显然，我们只证明（⇒）。设 p、q、$m \in \gamma$是任意三个互不相同的点。设 $F : \gamma \to \tilde{\gamma}$ 是定理 5.1 中构造的映射。那么 $\chi_K(p,q,m) = \chi_K(\tilde{p},\tilde{q},\tilde{m})$。另一方面，由（5.2），$\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{q}) \ge \kappa$ 对几乎处处的 $\tilde{q} \in \tilde{\gamma}$成立。由定理 4.1，$\chi_{\tilde{\gamma},K} \ge \kappa$在全局成立，因此 $\chi_K(\tilde{p},\tilde{q},\tilde{m}) \ge \kappa$。所以 $\chi_K(p,q,m) \ge \kappa$，定理得证。□

6. Rigidity of the κ-lens

本节的主要定理是以下刚性定理。

定理 6.1. 设 γ 是 X 中的一条凸曲线，使得 $\kappa_\gamma(q) \ge \kappa$ 对几乎处处的 $q \in \gamma$ 都成立。假设 γ 在 q 处有一个转角为 $\theta \in [0,\pi)$ 的角点。那么，γ 的弧长满足

$$L(\gamma) \le L(\partial L_{\kappa,\theta}), \tag{6.1}$$

当且仅当 X 与 S_K 中一个转角为 θ的 κ透镜等距时，等号成立。

定理 *6.1* 的证明。设 V 是 γ 上的一个顶点序列，使得$q \in V$ 且 $i_m(V) \to 0$ 当 $m \to \infty$时成立。令 $f = f_V\colon \gamma \to \tilde{\gamma}$ 为定理 3.1 中构造的同胚。根据推论 3.1，对于几乎处处的 $s \in \gamma$， $\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s}) = \kappa_\gamma(s)$。因此，对于几乎处处的 $\tilde{s} \in \tilde{\gamma}$， $\kappa_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s}) \geq \kappa$。

由于 q 是顶点之一，可以找到两列顶点序列 $(c_j)_{j=1}^{\infty}(d_j)_{j=1}^{\infty}$，它们属于 V，从 q 的不同侧收敛到 q，并且

$$\angle c_1 q d_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \angle c_j q c_{j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \angle d_j q d_{j+1} = \pi - \theta. \tag{6.2}$$

由于 X 是 CBB(K)，角度比较可得

$$\angle_K \tilde{c}_1 \tilde{q} \tilde{d}_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \angle_K \tilde{c}_j \tilde{q} \tilde{c}_{j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \angle_K \tilde{d}_j \tilde{q} \tilde{d}_{j+1} \leq \pi - \theta, \tag{6.3}$$

˜，也就是说， $\tilde{\gamma}$ 在 $\tilde{q}$ 处有一个角点，转角为 $\theta \geq \theta$。因此，$\tilde{q}$ 有˜条支撑直线，它们相交成角 θ。根据引理 2.1， $\tilde{\gamma}$˜ 位于 κ-透镜$\mathcal{L}_{\kappa,\,\theta}$ 中，转角为 θ。结合 $\tilde{\gamma}$ 的凸性，

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) \leq L(\partial \mathcal{L}_{\kappa,\tilde{\theta}}) \leq L(\partial \mathcal{L}_{\kappa,\theta}).$$

在证明的其余部分，我们假设 (6.1) 中等号成立，并证明 X 与 κ-透镜 $\mathcal{L}_{\kappa,\,\theta}$ 等距。情形 $\kappa = 0$ 已在 [12]中证明。从现在起，我们假设 $\kappa > 0$。在此情形下， $\tilde{q}$ 处的转角˜角 θ 等于 θ，且 $\tilde{\gamma} = \partial \mathcal{L}_{\kappa,\,\theta}$。

断言 1：有

$$|xy|_X = |\tilde{x}\tilde{y}|, \quad \text{for all } x, y \in \gamma. \tag{6.4}$$

Proof of claim 1: 设 x， $y \in \gamma$，设 $V = (\bar{a}_m)_{m=1}^{\infty}$为 γ 中的顶点序列¯，满足 $\{q, x, y\} \subset \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ 且 $i_m(V) \to 0$，当 $m \to \infty$ 时。设$f = f_{\bar{V}}\colon \gamma \to \bar{\gamma}$, $s \mapsto \bar{s}$ 为定理 3.1 中构造的保弧长同胚。则 $\bar{\gamma}$ 也是 S_K 中一个转角为 θ 的 κ-透镜的边界。若有必要，通过与 S_K 的刚性运动复合，我们可以假设 $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma}$ 且 $\tilde{q} = \bar{q}$。由于 f， f 二者均为保弧长映射，因此必有 $f = f$ 或 $f = Rf$，其中 R 是 S_K 上的反射。因此， $|xy|_X = |\bar{x}\bar{y}| = |\tilde{x}\tilde{y}|$。

令 $r \in \gamma$ 使得 $\tilde{r}$ 是 $\tilde{\gamma} = \partial \mathcal{L}_{\kappa,\,\theta}$ 的另一个角点。这是 γ 中满足 $\gamma \setminus \{q, r\}$ 被分成两条长度相等的子弧的唯一点。

断言 2： γ 在 r 处也有一个转角为 θ的角点。

Proof of claim 2：这是因为根据断言 **1**，存在一个等距映射 $R:\ \gamma\to\gamma$，使得 $R(q)=r$ 且 $|s_1s_2|_X=|R(s_1)R(s_2)|_X$对所有 $s_1,\ s_2\in\gamma$均成立。

断言3：对于任意三个点 a、b、$c\in\gamma$以及给定的两条测地线$[ba]$、$[bc]$，有 $\angle([ba],\ [bc])=\angle_K\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$。

Proof of claim 3：由角度比较，我们总有

$$\angle([ba],[bc])\geq\angle_K\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}.$$

当 $b=q$ 时，在（6.2）中取 $c_1=a$、$d_1=b$。结合（6.3）以及˜ ˜满足 $\theta=\theta$这一事实，我们得出 $\angle abc=\angle_K\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$。$b=r$ 时的情况类似。

˜当 $b\notin\{q,r\}$ 时，b 是$\partial\mathcal{L}_\kappa$、$_\theta$的光滑点。$b$ 处的转角（因此 b）为零。取顶点序列 $\{c_j\}$、$\{d_j\}$，使其从 b 两侧趋近于 b，且满足 $c_1=a$、$d_1=c$，由此得出˜，与 $b=q$的情形相同。

断言4：对于任意两个 $a,\ b\in\gamma$，在 X中存在一条连接 a 与 b的唯一测地线。

Proof of claim 4：这样的测地线存在，因为 X 是曲率下界(K)。为证明唯一性，设 $\sigma_1,\ \sigma_2$ 是 X 中连接 a 与 b的两条测地线。取 $\gamma\setminus\{a,b\}$中的任意一点 c，并设 σ 是一条连接至 a 到 c的测地线。由˜断言3，$\angle(\sigma_1,\ \sigma)=\angle_K b\tilde{a}\tilde{c}=\angle(\sigma_2,\ \sigma)$，且 σ_1与σ_2 之间的角为零。因此 $\sigma_1=\sigma_2$。

断言5：对于每个 $x\in X\setminus\partial X$ 和 $p\in\partial X$，存在唯一的$p_x\in\partial X$，使得连接 p、p_x 的测地线 σ 经过 x。

Proof of claim 5：由于 x 位于内部，这样的测地线必定唯一。为证明其存在，设 $\gamma:\ [0,\ell]\to\partial X$ 是 ∂X 的一个参数化，使得 $\gamma(0)=p$。对于每个 $t\in[0,\ell]$，设 σ_t 是连接 p与 $\gamma(t)$的唯一测地线。测地线 σ_t 将 X 分成两个连通分支 $X_t^+,\ X_t^-$，其中 X_t^+是这样的连通分支：对于所有较小的 $\bar{t}>0$、$\bar{t}$，$\gamma(\bar{t})\in X_t^+$。

令 $I\subset(0,\ell)$，使得 $t\in I$ 当且仅当 $x\in X_t^-$。注意，当 t 较小时，$t\in I$。此外，若 $\bar{t}\in I$，则 $(0,\bar{t})\subset I$。类似地，令 $J\subset(0,\ell)$，使得 $t\in J$ 当且仅当 $x\in X_t^+$。那么，$\bar{t}\in J$意味着 $(\bar{t},\ell)\subset J$。根据定义，$I\cap J=\emptyset$。

我们通过反证法论证 $I\cup J\neq(0,\ell)$ 如下：若 $I\cup J=(0,\ell)$，则 I、J 共有一个端点 $t_0\in(0,\ell)$。

若 $t_0\notin I$，设 $(t_j)_{j=1}^\infty$ 是 I 中的一个递增序列，并且收敛于 t_0。如有必要，对 $\{t_j\}$ 取一个子序列，我们可以假设 $(\sigma_{t_j})_{j=1}^\infty$ 一致收敛于一条连接 p 和 $\gamma(t_0)$ 的测地线。由

断言4，这条测地线必定是 σ_{t_0}。由于 $x \in X_{t_j}^-$ 对所有 j都成立，我们有$x \notin X_{t_0}^+$，因此 $t_0 \notin J$。这是不可能的，因为 $I \cup J$包含 t_0。因此， $t_0 \in I$。然而，同样的论证表明， $t_0 \notin J$是不可能的。因此， $t_0 \in I \cap J$；根据I， J的定义，这是不可能的。

因此，存在 $t_0 \in (0, \ell)$ 不属于 $I \cup J$，且测地线 σ_{t_0}包含 x。断言5的证明到此结束。

断言6：对于任意 $x, y \in X \setminus \partial X$，存在一条唯一的测地线，位于 X 中，连接 x、 y 以及 ∂X上的两点。

Proof of claim 6：设给定 $x, y \in X \setminus \partial X$。设 σ 是断言5中构造的任意一条经过 x 的测地线。若 σ 包含y，则结论成立。否则，令 Y 为包含 y 的 $X \setminus \sigma$ 的连通分支。令$\gamma:\ [0, \ell] \to X$ 为边界的一个参数化，并令 $t_1 < t_2$ 满足： $\gamma(t) \in Y$ 当且仅当 $t \in (t_1, t_2)$。现在，对每个 $t \in (t_1, t_2)$，令 σ_t 为断言5中构造的、经过 x 和 $\gamma(t)$ 的测地线。运用与断言5相同的连续性论证，可找到 $t_3 \in (t_1, t_2)$，使得测地线 σ_{t_3} 经过 y。

现在我们可以将同胚 $f:\ \gamma \to \tilde{\gamma}$ 扩展为等距映射 $F: X \to \mathcal{L}_{\kappa,\theta}$。固定 $p \in \partial X$。对于任意 $x \in X$。令 σ为 X 中包含 x并连接 p 与某个$s \in \gamma$的唯一测地线。令 $[\tilde{p}\tilde{s}]$ 为 $\mathcal{L}_{\kappa,\theta}$ 中连接 $\tilde{p}$, $\tilde{s}$的唯一测地线。我们定义$F(x) = \tilde{x}$ 为 $[\tilde{p}\tilde{s}]$ 上的唯一一点，使得 $|px|_X = |\tilde{p}\tilde{x}|$。

断言7：映射 $F: X \to \mathcal{L}_{\kappa,\theta}$ 与所选的 $p \in \partial X$ 无关。

Proof of claim 7: 令 $p_1 \in \partial X$，并令 $[p_1 s_1]$ 为经过 p_1, x 和 $s_1 \in \partial X$ 的测地线。只需证明 $\tilde{x} \in [\tilde{p}_1\tilde{s}_1]$ 和$|p_1x|_X = |\tilde{p}_1\tilde{x}|$。由断言3，得到 $\angle([pp_1],\ [ps]) = \angle_K \tilde{p}_1\tilde{p}\tilde{s}$，这意味着 $|px|_X = |\tilde{p}\tilde{x}|$。类似地，得到 $|s_1x|_X = |\tilde{s}_1\tilde{x}|$。因此

$$|\tilde{p}_1\tilde{s}_1| = |p_1s_1|_X = |p_1x|_X + |xs_1|_X = |\tilde{p}_1\tilde{x}| + |\tilde{x}\tilde{s}_1|$$

且 $\tilde{x} \in [\tilde{p}_1\tilde{s}_1]$。因此，断言7得证。

最后，我们完成定理的证明：设 x， $y \in X$。设 σ 为 X中包含 x， y 且连接 p， $s \in \partial X$的测地线。我们可以假设 $|py|_X \geq |px|_X$。根据断言7，

$$|\tilde{x}\tilde{y}| = |\tilde{p}\tilde{y}| - |\tilde{p}\tilde{x}| = |py|_X - |px|_X = |xy|_X.$$

因此 $F: X \to \mathcal{L}_{\kappa,\theta}$ 是一个等距映射。 □

下面的刚性定理可直接由定理 6.1 和 (5.2) 得出。

定理 6.2。 设 $\gamma = \partial X$ 是二维曲率下界(K) X 的边界，且该空间与闭单位圆盘同胚。假设$^{\chi}\gamma(q) \geq \kappa$ 对几乎处处的 $q \in \gamma$ 成立，并且 γ 在 $q \in \gamma$ 处有一个转角为 θ的角点。那么

$$L(\gamma) \leq L(\mathcal{L}_{\kappa,\theta})$$

且当且仅当 X 与 S_K中的转角为 θ 的 κ-透镜等距时，等号成立。

7. Appendix A: Geodesic curvatures for convex curves in Euclidean plane

在本附录中，我们证明凸曲线 σ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的弧弦曲率和密切曲率存在且几乎处处相等。若 σ 局部是函数 f的图像，则曲率与 f 的二阶导数相等；若 σ 采用弧长参数化，则点 $\gamma(s)$处的曲率为 $\theta'(s)$，其中 θ 是 $\sigma'(s)$与 x-轴所成的角。

首先考虑图像表示。设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭凸曲线，且 $q \in \sigma$。如有必要，对 σ 进行平移和旋转后，可设 $q = (0, 0)$，并且在 $(0, 0)$ 附近， σ 是凸函数 f 的图像，且 $f(0) = 0$。由 σ的凸性，

$$f'_{\pm}(t) := \lim_{s \to t^{\pm}} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}$$

对所有 t 均存在，并且关于 t 和 $f'_{+}(s) \leq f'_{-}(t) \leq f'_{+}(t^{+})$ 对所有 $s < t$ 都是非递减的。因此， $f'_{\pm}(t)$ 是连续的，并且几乎处处可微。下文假设 $f'(0)$ 存在，且 $f'_{\pm}(t)$ 在 $t = 0$ 处可微，其导数为 $A \geq 0$。因此

$$f'_{\pm}(t) = At + o(t) \quad \text{as } t \to 0, \tag{7.1}$$

and

$$f(t) = \frac{A}{2}t^2 + o(t^2), \quad \text{as } t \to 0. \tag{7.2}$$

这正是一维情形下的亚历山德罗夫定理。

设 p_1、p_2、p_3 是 σ 上形如 $p_i = (t_i, f(t_i))$ 的三个点，其中 $i = 1, 2, 3$。记 $t_{\max} = \max\{|t_1|, |t_2|, |t_3|\}$。直接计算可得，当 $i \neq j$ 时，

$$|p_i p_j|^2 = |t_i - t_j|^2 \left(1 + \frac{A^2}{4}(t_i + t_j)^2 + o(t_{\max}^2)\right)$$

从而

$$|p_1p_2|\cdot|p_2p_3|\cdot|p_3p_1| = |t_1-t_2|\cdot|t_2-t_3|\cdot|t_3-t_1|(1+O(t_{\max})). \tag{7.3}$$

另一方面，令 $\mathcal{A}$ 为三角形 $\triangle p_1p_2p_3$ 的面积。那么

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\det(p_1\vec{p}_2, p_3\vec{p}_2)| \tag{7.4}$$

密切曲率由下式给出

$$\chi_0(p_1,p_2,p_3) = \frac{4\mathcal{A}}{|p_1p_2|\cdot|p_2p_3|\cdot|p_3p_1|}. \tag{7.5}$$

命题 7.1. σ 在 q 处的密切曲率等于 A。

证明。在上述计算中，我们假设 $t_2 = 0$ 和 $t_1 < 0 < t_3$。利用(7.2)和(7.4)，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left|\frac{A}{2}t_1t_3^2 - \frac{A}{2}t_3t_1^2 + t_1o(t_3^2) - t_3o(t_1^2)\right| \\ &= \frac{A}{4}|t_1t_3|(|t_3-t_1| + o(t_{\max}))\end{aligned}$$

由于 $t_1 < 0 < t_3$, $|t_3-t_1| \geq t_{\max}$。因此

$$\frac{o(t_{\max})}{|t_3-t_1|} \to 0, \quad \text{as } t_1, t_3 \to 0. \tag{7.6}$$

结合 (7.5)、(7.3)，我们得出 $\chi_\sigma(q) = A$。 □

接下来，我们证明命题 2.1。

命题 *2.1* 的证明。一般地，假设 p_1, p_2, p_3 满足 (2.14)。利用

$$f'_+(t_1) \leq \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq f'_-(t_2),$$

对每个 $t_1 < s < t < t_2$，我们有 $|f(t)-f(s)| \leq \max\{|f'_+(t_1)|, |f'_-(t_2)|\}|t-s|$。由 (7.1)，当 $t \to 0$ 时，$f'_\pm(t) \to 0$。因此

$$|t_2-t_1| \leq |\widehat{p_1p_2}| \leq |t_2-t_1|(1+C(t_1,t_2)), \tag{7.7}$$

其中 $C(t_1,t_2) \to 0$ 当 $t_1, t_2 \to (0,0)$。因此，若 p_1, p_2, p_3 足够接近 q，

$$|t_1-t_2|, |t_2-t_3| \geq \frac{1}{4}|t_3-t_1|.$$

另请注意，$t_1 < 0 < t_3$，因此 $|t_3-t_1| \geq t_{\max}$。于是我们有

$$|t_2-t_1|\cdot|t_3-t_2|\cdot|t_1-t_3| \geq \frac{1}{16}t_{\max}^3.$$

这意味着

$$\frac{o(t_{\max}^3)}{|t_2-t_1|\cdot|t_3-t_2|\cdot|t_1-t_3|}\to 0,\quad \text{as } t_{\max}\to 0.$$

最后，注意到由 (7.4),

$$\mathcal{A}=\frac{1}{4}|A(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_1-t_3)+o(t_{\max}^3)|. \tag{7.8}$$

结合 (7.5) 和 (7.3),

$$A=\lim_{p_1,p_2,p_3}\chi_0(p_1,p_2,p_3), \tag{7.9}$$

其中，极限是沿着所有满足命题 2.1 中 (i)–(iii) 的 $p_1,\ p_2,\ p_3\in\sigma$ 取得的。至此命题的证明完成。□

接下来，我们证明 σ 的弧弦曲率几乎处处存在，且等于密切曲率。利用 σ 由 f 给出的相同图示表示以及命题 7.1，只需证明

命题 7.2。 σ 在 q 处的弧弦曲率等于 A。

证明。 对于任意 $a<0<b$，令

$$\ell=\ell(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+(f')^2},$$
$$r=r(a,b)=\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}.$$

由注释 3 以及 $\lim_{a,b\to 0} r/(b-a)=1$，只需证明

$$\lim_{a,b\to 0}\frac{\ell-r}{(b-a)^3}=\frac{A^2}{24}. \tag{7.10}$$

利用估计 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+O(x^2)$、(7.2)，并注意到$b-a\geq\max\{|a|,b\}$,

$$\ell=b-a+\frac{A^2}{6}(b^3-a^3)+O((b-a)^5). \tag{7.11}$$

类似地，利用

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\max\{|f'_+(a)|,f'_-(b^-)\},$$

以及 (7.2),

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2}\\ &=b-a+\frac{1}{2}\frac{(f(b)-f(a))^2}{b-a}+O\left((b-a)^4\right). \end{aligned}$$

对于右侧的第二项，我们再次使用 (7.2)：

$$\frac{1}{2}\frac{(f(b)-f(a))^2}{b-a} = \frac{A^2}{8}(b-a)(b+a)^2 + o((b-a)^3)$$

因此

$$\ell - r = \frac{A^2}{24}(b-a)^3 + O((b-a)^4), \tag{7.12}$$

这意味着 (7.10)。 □

最后，当 s 是 σ 的弧长参数化，且 $\theta(s)$ 是 $\sigma'(s)$ 与 x 轴所成的角时，通过直接计算即可验证以下结论。

命题 7.3。 对于几乎处处的 s， $\theta'(s)$ 存在，且与弧弦曲率一致。

8. Appendix B: base angle/chord curvature

定义 8.1. 设 X 是一个曲率为 $\geq K$ 且满足 $\partial X \neq \emptyset$的二维亚历山德罗夫空间。设 $p \in \partial X$，并令 γ 为 ∂X的一个参数化。 ∂X 在p 处的下（分别为上）底角/弦曲率为

$$\underline{\lambda}_\gamma(p) = \liminf \frac{2\alpha}{|pq|_X} \quad \left(\text{ resp. } \overline{\lambda}_\gamma(p) = \limsup \frac{2\alpha}{|pq|_X}\right), \tag{8.1}$$

其中，极限取遍所有收敛到 p 的 $q \in \partial X$，且 α 是 $[pq]$ 与弧 $\widehat{pq} \subset \gamma$ 之间的角。

命题 8.1. 对所有 $q \in \partial X$,

$$\underline{\lambda}_\gamma(q) \leq \underline{\chi}_\gamma(q). \tag{8.2}$$

证明. 记 $\lambda = \lambda_\gamma(q)$。我们假设 $\lambda < \infty$。情形 $\lambda = \infty$ 的证明类似。令 $\epsilon > 0$。则有

$$\frac{2\alpha_p}{|pq|_X} \geq \lambda - \epsilon, \quad \frac{2\alpha_m}{|qm|_X} \geq \lambda - \epsilon \tag{8.3}$$

当 $|pq|_X, |qm|_X$较小时，其中 $\alpha_p = \angle([qp], \widehat{qp})$，对$\alpha_m$也有类似结论。假设 p, m 位于 q的不同侧。那么

$$\chi_0(p,q,m) = \frac{2\sin \angle_0 pqm}{|pm|_X}$$

首先假设 γ 在 q处可微。那么 $\alpha_p + \alpha_m + \angle pqm = \pi$。当 p, m 足够接近 q 时，我们有

$$\frac{\pi}{2} < \angle_0 pqm \leq \angle qpr = \pi - (\alpha_p + \alpha_m)$$

and

$$\begin{aligned}\chi(p,q,m) &\geq \frac{2\sin(\alpha_p+\alpha_m)}{\sqrt{|qp|_X^2 + |pm|_X^2 + 2|qp|_X|pm|_X\cos(\alpha_p+\alpha_m)}} \\ &\geq \frac{\sin(\alpha_p+\alpha_m)}{\sqrt{\alpha_p^2+\alpha_m^2+2\alpha_p\alpha_m\cos(\alpha_p+\alpha_m)}}(\lambda-\epsilon)\end{aligned}$$

由于 $\alpha_p,\ \alpha_m \to 0$当 $p,\ m \to q$时，我们有 $\chi_\gamma(q) \geq \lambda - \epsilon$，取 $\epsilon \to 0$即可得到 (8.2)。

现在假设 γ 在 q 处有一个转角为 θ的角点。则对于任意 $p,\ m \to q$, $\angle_0 pqm \leq \pi - \theta < \pi$，因此对于所有接近 q的 $p,\ m$，都有 $\sin \angle_0 pqm \geq \sin\ \theta > 0$。因此 $\chi_\gamma(q) = \infty$，因为当 $p,\ m \to q$时 $|pm|_X \to 0$。□

命题 8.2。 如果 q 是 γ的正则边界点，那么 $\chi_\gamma(q) \leq \lambda_\gamma(q)$ 以及 $\lambda_\gamma(q) \leq \chi_\gamma(q)$。

证明。令 $p \in \partial X \setminus \{q\}$ 接近 q，并令 m 为 q 另一侧上任意一个接近 ∂X 的点。于是

$$\chi(p,q,m) = \frac{2\sin\angle_0 pqm}{|pm|_X}.$$

当 $m \to q$ 时，右侧收敛到

$$\frac{2\sin(\pi-\alpha)}{|pq|_X} = \frac{2\sin\alpha}{|pq|_X},$$

其中 $\alpha = \angle([pq],\ \gamma'_+(q))$ □

9. Appendix C: Perimeter of the κ-lens $\mathcal{L}_{\kappa,\theta}$

在最后这个附录中，我们计算 κ-透镜的周长。

命题 9.1. $\partial\mathcal{L}_\kappa$ 的周长$_\theta$ 为

$$L(\partial\mathcal{L}_{\kappa,\theta}) = \frac{4}{\sqrt{K+\kappa^2}} \cdot \arcsin\sqrt{1 - \frac{\kappa^2(1+\cos\theta)}{K(1-\cos\theta)+2\kappa^2}}.$$

证明。我们仅考虑 $K > 0$ 的情形，因为 $K = 0$ 更为简单。回顾$S_K = \{(x,\ y,\ z)\colon\ x^2+y^2+z^2 = 1/K\} \subset \mathbb{R}^3$。对 S_K作刚性运动后，S_K的每个 κ-圆都是 $O_1 = S_K \cap \{z = \frac{\kappa}{\sqrt{K}\sqrt{K+\kappa^2}}\}$，令$R = \frac{1}{K+\kappa^2}$，$a =$

$=\frac{\kappa}{\sqrt{K}\sqrt{K+\kappa^2}}\frac{1}{}$。现在，将 O_1 绕 x轴沿与 y轴相反的方向旋转角度 ϕ，得到另一个 κ-圆 O_2,

$$\begin{cases} x^2+(y+a\sin\phi)^2+(z-a\cos\phi)^2=R^2, \\ z\cos\phi-y\sin\phi=a, \end{cases}$$

O_1 和 O_2 在两点处相交 P_+， P_- 这两点是

$$P_\pm=\left(\pm\sqrt{R^2-a^2\tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)},-a\tan\left(\frac{\phi}{2}\right),a\right).$$

我们假设 $\mathcal{L}_{\kappa,\,\theta}=O_1\cap O_2$。也就是说，在 P_+， P_-处的转角均为 θ。通过在 P_+处直接计算，可得

$$\phi=2\arctan\sqrt{\frac{K(1-\cos\theta)}{K(1+\cos\theta)+2\kappa^2}}.$$

令 β 为 O_1 中对应于弧 $\overset{\frown}{P_1P_2}$的扇区的角。容易看出， $\beta=2\arcsin\sqrt{R^2-a^2\tan^2(\frac{\phi}{2})}\,R$。因此 $\overline{\qquad\qquad}^{-}$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{L}_{\kappa,\theta}) &= 4R\arcsin\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}\tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{K+\kappa^2}}\cdot\arcsin\sqrt{1-\frac{\kappa^2(1-\cos\theta)}{K(1+\cos\theta)+2g^2}}. \end{aligned}$$

□

References

1. Alexander, S.; Bishop, R.: 曲率上界度量空间中测地曲率有界曲线的比较定理. Differ. Geom. Appl. 6, No. 1, 67-86 (1996). 2. Alexander, S.; Bishop, R.: 亚历山德罗夫几何中半凸子空间的外在曲率. Ann. Global Anal. Geom. 37, No. 3, 241-262 (2010). 3. Alexander, S.; Kapovitch, V.; Petrunin, A.: 亚历山德罗夫几何：基础. 数学研究生教材 236. 罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）（ISBN 978-1-4704-7302-0/hbk; 978-1-4704-7536-9/pbk; 978-1-4704-7535-2/ebook）。xvii, 282 页（2024）。4. Alexandrov, A. D.; Kutateladze, S. S.（编）：文选：凸曲面的内蕴几何. 第2卷。S. S. Kutateladze 编。S. Vakhrameyev 从俄文译出。佛罗里达州博卡拉顿：Chapman & Hall/CRC（ISBN 0-415-29802-4/hbk）。xiii, 426 页（2005）。5. Burago, D.; Burago, Yu.; Ivanov, S.: 度量几何教程. 数学研究生教材。33. 罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）。xiv, 415 页（2001）。6. Borisenko, A.: 二维亚历山德罗夫空间中凸曲线长度的估计. J. Math. Phys. Anal. Geom. 16, No. 3, 221-227 (2020)。

7. Burago, Yu.; Gromov, M. 和 Perelman, G., 曲率下界的亚历山德罗夫空间. Russian Math. Surveys 47 (1992), no. 2, 1–58 8. Deng, Q.; Kapovitch, V.: 亚历山德罗夫空间边界体积的精确界与刚性. arXiv:2308.14668 9. Hang, F.; Wang, X.: 具有边界和正里奇曲率的紧流形刚性定理. J. Geom. Anal. 19 (2009), no. 3, 628–642. 10. Ge, J.; Li, R.: 具有边界的正曲率亚历山德罗夫空间的刚性. Geom. Dedicata 213, 315-323 (2021). 11. Ge, J.; Li, R.: 具有边界的亚历山德罗夫空间的半径估计. J. Geom. Anal. 31, No. 1, 619-630 (2021). 12. Grove, K.; Petersen, P.: 具有最大半径的亚历山德罗夫空间. Geom. Topol. 26 (4) 1635 - 1668, 2022. https://doi.org/10.2140/gt.2022.26.1635 13. Klingenberg. W：黎曼几何. 第2版, 修订版。柏林；纽约：德格鲁伊特出版社，1995（德格鲁伊特数学研究丛书；1）ISBN 3-11-014593-6 NE: GT 14. Petrunin, A.: 亚历山德罗夫几何中的半凹函数. Cheeger, Jef- frey（编）等，《度量与比较几何》。微分几何综述，第XI卷。马萨诸塞州萨默维尔：国际出版社（ISBN 978-1-57146-117-9/hbk）。《微分几何综述》11, 137-201 (2007)。15. Toponogov, V. A.: 凸曲线长度的估计¨（题名残片）¨（题名残片），《西伯利亚数学杂志》4 (1963), No. 5, 1189-1193。

李马，数学系，南方科技大学，广东省深圳市南山区西丽学苑大道1088号，邮编518055，邮箱：12432025@mail.sustech.edu.cn

JOHN MAN SHUN MA，数学系，南方科技大学，广东省深圳市南山区西丽学苑大道1088号，邮编518055，邮箱：hunm@sustech.edu.cn