关于k连通图中的k-连通性预言机

Zeev Nutov以色列开放
大学 nutov@openu.ac.il

摘要

图 $G=(V,\ E)$ 的 k-**连通性预言机**是一种数据结构，给定 $s,\ t\in V$可判断图中是否存在至少 $k+1$ 条内部不相交的 st- 路径。对于无向图，Pettie 、 Saranurak 和 Yin [10] 证明，任何 k- 连通性预言机都需要 $\Omega(kn)$ 个空间位。我们将通过一个非常简单的证明表明，即使 G 是 k-连通的，这一结论仍然成立，从而回答了 [10] 中提出的一个开放问题。

2012年 ACM 学科分类计算理论 → 算法设计与分析

关键词与短语点连通性、最小割、数据结构、连通性查询

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs...

arXiv:2601.03643v1 [cs.DS] 7 Jan 2026

1 引言

给定一个有向图或无向图 $G=(V,\ E)$，令 $\kappa(s,\ t)$ 表示 G 中内部不相交的 st-路径的最大数量；若对于所有 $(s,\ t)$ 都有 $\kappa(s,\ t)\geq k$，则称 G 是 k-**连通的**。对于 G， k-**连通性预言机**是一种数据结构，给定 $s,\ t\in V$ 后可确定 $\kappa(s,\ t)>k$。我们将考察以下问题：一个具有 n 个节点的图的 k-连通性预言机至少需要多少比特?

不难证明，对于有向图和无向图，即使对于 $k=0$，也至少需要 n 比特。对于无向图和 $k=0$，我们只需为每个连通分量指定不同的标签，因此 $O(n\log n)$ 比特就足够了。更一般地，在边连通性的情况下，关系“存在 k 条边不相交的 st-路径”是一种等价关系，这意味着在这种情况下 $O(n\log n)$ 比特同样足够。Gomory-Hu 割树 [2]，也能达到这一界限，并且还可以返回一个最小 st-边割。相比之下，对于有向无环图（DAG）上的可达性查询（$k=0$ 的情形），至少需要 $n^2/4$ 比特；参见 [5, 7, 1]。这是因为 n 个元素上的不同偏序集的数量至少为 $2^{n^2/4}$ [5]。

现在我们来考察无向图中的点连通度。众所周知，任何图 G 对于任意 k 都存在一个“稀疏证书”——一个含有 $O(kn)$条边的生成子图，它能保持 G 中至多 k的成对连通度（以及成对最小点割），参见 [8]。这样的子图可以充当 k-连通性预言机。Pettie、Saranurak 和 Yin [10]证明了这基本上已是最优结果——无向图的 k-连通性预言机需要 $\Omega(kn)$ 空间位。他们提出了这样一个问题：如果 G 是k-连通的，是否仍然需要 $\Omega(kn)$ 位？我们将通过证明以下定理来回答这个问题。

▶ **定理 1.** 对于任意整数 $k\geq 1$ 和 $1\leq p\leq 2^{k^2/4}$，存在一个 k-连通图$G=G(k,p)$，它有 $n=k(p+1)$ 个节点，使得任何针对 G 的 k-连通性预言机至少需要 $p\cdot k^2/4=\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\cdot kn/4$ 空间位。因此，对于一个 k- 连通图， k- 连通性预言机需要 $\Omega(kn)$ 空间位。

对于 $p=1$，我们得到 $k=n/2$；而对于 $p=2^{k^2/4}$，我们得到$k=2\sqrt{\lg p}\approx 2\sqrt{\lg n}$。因此，就 n 而言，我们的构造大致适用于 $2\sqrt{\lg n}\leq k\leq n/2$ 的范围。我们还注意到，我们的构造比 [10] 中的构造简单得多。

© Zeev Nutov；根据知识共享署名许可协议授权。莱布尼茨国际信息学会议录，Dagstuhl 城堡 – 莱布尼茨信息学中心，Dagstuhl 出版社，德国
LIPICS

由于即使对于 k-连通图，区分 $\kappa(s,\ t) = k$ 和 $\kappa(s,\ t) > k$ 也需要 $\Omega(kn)$ 个空间位，因此我们的构造也排除了紧凑近似 k-连通性预言机的存在，详情请见 [10]。

关于一般图和 k-连通图的各种 k-连通性预言机，请参见 [3, 4, 11, 9, 10]。

2 定理 1 的证明

我们将使用 [6], 的一种构造：对于任意有向图 $D = (R,\ A)$，构造一个无向图 $G = (R \cup R',\ E)$（其中 R' 是 R 的一个副本），它能将连通度恰好"移位"$|R|$。形式上，这个无向图定义如下。

▶ **定义 2.** 有向图 $D = (R, A)$ 的**连通性移位图**是一个无向图 $G = (V, E)$，按如下方式构造。
1. 添加一个副本 R'，其为 R，并将每条弧 $uv \in A$ 替换为无向边 uv'，其中$v' \in R'$ 表示 $v \in R$的副本。**2.** 在每个 R、R' 上添加一个团，并添加匹配 $M = \{vv' :\ v \in R\}$。

令 $\kappa(G) = \min\{\kappa(s,\ t) : (s,\ t) \in V \times V\}$ 表示有向图或无向图 G 的（节点）连通度。以下结论已在 [6]中证明。

▶ **引理 3** ([6])。 设 G 是有向图 $D = (R, A)$ 的连通性移位图。则有以下结论。

(i) $\kappa_G(u,\ v') = \kappa_D(u,\ v) + |R|$ 对所有 $u,\ v \in R$。**(ii)** $\kappa(G) = \kappa(D) + |R|$。

如前所述，支持对一个含 n 个节点的有向无环图进行可达性查询，至少需要$n^2/4$ 空间位，参见 [5, 7, 1]。注意，对于任意有向无环图 D，$\kappa(D) = 0$ 。结合引理 3 可得以下结论。

▶ **推论 4**。 设 G 是一个含 k 个节点的有向无环图 $D = (R, A)$ 的连通性移位图。则：
1. $\kappa_G(u,\ v') = \kappa_D(u,\ v) + k$ 对所有 $u,\ v \in R$。**2.** G 具有 $2k$ 个节点和 $\kappa(G) = k$。**3.** 支持 k-连通性查询需要 G 至少 $k^2/4$ 空间位。

推论 4 已经表明，对于具有 $n = 2k$ 个节点的 k-连通图，回答 k-连通性查询的数据结构至少需要 $k^2/4 = kn/8$ 空间位。我们想要证明，即使 n 远大于 k，结论仍然成立。实现这一点的一种常见方法是，直接采用推论 4 中的 p 个"构件"，这些构件来自对应于不同偏序集的不同有向无环图；已知在 k 个元素上至少存在 $2^{k^2/4}$ 个不同的偏序集[5]。这样得到的图将有 $n = 2pk$ 个节点，下界为 $pk^2/4 = nk/8$ 空间位。对于一般图，这种方法是有效的；也就是说，我们可以简单地证明，对于具有 $n = 2pk$ 个节点的一般图，下界为 $kn/8$ 空间位。但它不能直接应用于k-连通图，因为所得的图甚至不是连通图。

为将这一构造用于 k 连通图，我们作如下修改。设 p 个构件图的节点集为 $R \cup R_1$、$R \cup R_2$、.....、$R \cup R_p$。我们将所有 p 个构件的集合 R 识别为同一集合。所得图 G 有 $n = k(p+1)$ 个节点，其 k 连通性预言机的空间下界为 $pk^2/4 = \frac{1-1/p}{4} \cdot kn$ 位。为完成定理 1 的证明，我们证明如下结论。

▶**引理5**。 构造出的图 G 是 k-连通的。

证明。已知图 G 不是 k-连通的，当且仅当其节点集存在一个真划分 S, C, T，满足 $|C| < k$，且 G没有 ST-边。反设构造出的图 G 存在这样的划分。若 $S \cap R \neq \emptyset$，则 $T \cap R = \emptyset$，并且对所有 i都有 $T \cap R_i = \emptyset$，因为对所有 i，由$R \cup R_i$ 诱导的子图 $G[R \cup R_i]$ 都是 k-连通的；这与 $T \neq \emptyset$矛盾。同理， $T \cap R \neq \emptyset$也不可能成立。因此可得 $R \subseteq C$，从而与 $|C| \geq |R| = k$矛盾。◀

至此，定理 1 的证明完成。

参考文献

1 M. Duleba、P. Gawrychowski 和 W. Janczewski。用于有向无环图可达性的高效标记。载于 ISAAC，第 27:1–27:14 页，2020年。2 R. E. Gomory 和 T. C. Hu。多终端网络流。工业与应用数学学会期刊，9，1961年。3 T-H. Hsu 和 H-I. Lu。节点连通性的最优标记。载于第 20 届国际算法与计算研讨会（ISAAC），第 303–310 页，2009年。4 R. Izsak 和 Z. Nutov。关于图连通性标记方案的注记。信息处理快报，112(1-2):39–43，2012年。5 D. J. Kleitman 和 B. L. Rothschild。有限拓扑的数量。美国数学会会刊，25:276–282，1970年。6 Y. Lando 和 Z. Nutov。生存网络的不可近似性。理论计算机科学，410(21-23):2122–2125，2009年。7 J. I. Munro 和 P. K. Nicholson。简洁偏序集。Algorithmica，76:445–473，2016年。8 H. Nagamochi 和 T. Ibaraki。在线性时间内，为 k-连通图寻找稀疏的 k-连通生成子图的算法。Algorithmica，7(5&6):583–596，1992年。9 Z. Nutov。用于节点连通性查询的数据结构。载于 ESA，第 82:1–82:12 页，2022年。完整版本见 https://arxiv.org/abs/2110.09102。10 S. Pettie、T. Saranurak 和 L. Yin。最优顶点连通性预言机。载于第 54 届计算理论研讨会（STOC），第 151–161 页，2022年。完整版本见 https://arxiv.org/abs/2201.00408。11 S. Pettie 和 L. Yin。最小顶点割的结构。载于第 48 届国际自动机、语言与程序设计研讨会（ICALP），第 105:1–105:20 页，2021年。