摩卡壶压力驱动萃取的最简热流体模型

Syahril Siregar*

（日期：2026年1月8日）

arXiv:2601.03663v1 [physics.flu-dyn] 7 Jan 2026

摘要

摩卡壶是热驱动流动系统的一个常见例子，其中加热、蒸气压生成和流体萃取紧密耦合。我们提出一个简约的无量纲动力学模型，用于描述摩卡壶冲煮过程中温度、压力和萃取体积的变化。该模型由少量耦合常微分方程组成，纳入了恒定加热、热损失、蒸气压累积以及压力驱动流体流经咖啡粉床等因素。我们将模型的加热阶段与已发表的实验温度-时间数据进行定量比较，从而独立确定特征热时间尺度。以实验约束的温度变化为输入，模型无需额外的拟合参数，即可预测压力上升并确定萃取开始。尽管模型简单，却呈现出若干定性上截然不同的萃取状态，包括流动延迟起始、平稳萃取，以及由温度与压力之间的非线性反馈驱动的快速萃取。这些状态由少数具有明确物理解释的无量纲参数所支配。本模型并非旨在针对特定器具给出详尽的定量预测，而是作为一个直观的教学框架，展示物理学家如何在日常物理情境中，利用实验上易于获取的数据来构建、简化并检验耦合热流体模型。

I. 引言

家用咖啡冲煮器具提供了耦合热过程与流体过程的常见实例，广大受众都能理解，同时又蕴含丰富的物理原理[1]。在这些器具中，摩卡壶尤其适合作为教学示例：在受限几何空间内，加热、相变、压力积聚和压力驱动流相互作用[2]。尽管摩卡壶结构简单且应用广泛，但其萃取过程背后的物理机制鲜少在适用于物理教育或系统分析的定量框架中得到讨论。

从物理学角度来看，摩卡壶的运行涉及若干经典过程：部分封闭容器内液体的加热、蒸气压生成、由阈值驱动的流体穿过多孔介质，以及耦合腔室之间的质量与能量传输[3]。这些要素涵盖热力学、流体力学和传输现象，因此摩卡壶是一个具体且熟悉的系统，可借此探索这些概念[4]。

以往对咖啡冲煮的研究主要集中于滴滤或意式浓缩咖啡式萃取，往往强调经验优化或化学组成，而非第一性原理建模[5]。虽然某些研究采用了详细的计算方法，但其复杂性限制了教学上的可及性。相比之下，基于常微分方程的低维模型能够提供丰富的物理洞见，同时在解析和数值上仍易于处理，因此尤其适用于教学。

King（2008）详细分析了摩卡壶运行的物理过程，提出了一种热流体描述，该描述基于锅炉中的质量与能量平衡以及流体穿过咖啡粉床的过程[4]。该分析揭示了萃取的物理起源，着重阐释了蒸气压累积、水力阻力，以及导致流动迅速或不稳定的正反馈。尽管这类平衡定律方法有坚实的物理基础，但仍与特定装置的参数和量纲形式紧密相关。

基于这些思路，我们提出一个刻意简化、完全无量纲的模型，并用少量耦合常微分方程加以表示。每个无量纲参数都有明确的物理解释。与以往的有量纲处理不同，本模型着重采用动力系统视角，以区分不同的物理状态并——

系统地探索使用最少参数集描述的萃取行为。该模型捕捉了若干在定性上截然不同的状态，包括流动延迟起始、平稳萃取，以及由温度与压力之间的非线性反馈驱动的快速萃取。

本研究的一个核心目标是展示，如何以透明且具有教学意义的方式，将这种最简模型与实验数据进行对照。模型预测的加热阶段温度变化与已发表的实验测量结果进行了定量比较，从而能够独立确定特征热时间尺度。将受实验约束的温度作为输入后，模型便可预测压力上升，并在无需额外拟合参数的情况下识别萃取开始。这种将校准与预测分开的做法，凸显了如何利用有限的实验信息检验和改进简化模型。

因此，除了与咖啡制备相关之外，摩卡壶还是一个简洁的教学示例，用于展示日常物理系统中的耦合非线性热流体动力学。该模型可使用标准数值工具轻松实现，也可用于高年级本科课程或计算实验室。

本文其余部分安排如下。第二节介绍无量纲热流体模型及其控制方程。第三节给出温度、压力和萃取动力学耦合的数值结果。第四节将模型与实验数据进行比较，并讨论其局限性和可能的扩展。

II. 方法

A. 建模理念与范围

摩卡壶萃取过程涉及热学、热力学和流体输运现象的耦合，包括加热、蒸气压生成、压力积聚，以及通过多孔咖啡粉床的压力驱动流。若要进行完全解析的描述，则需要将具有空间依赖性的多相流方程与热传递相耦合，这会掩盖其基本机制，并限制教学上的可及性。

在本研究中，我们采用集总参数降阶建模方法，通过一组少量耦合的常微分

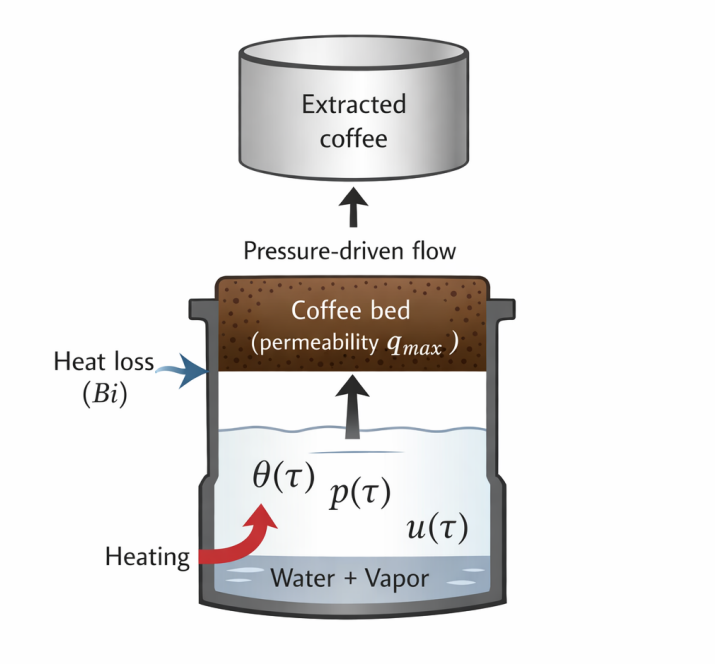

图 1. 摩卡壶及其简化动力学模型示意图。下腔室加热产生蒸气压，使无量纲温度 $\theta(\tau)$ 和压力$p(\tau)$ 升高。当压力超过阈值时，液体便被推动向上流经多孔咖啡粉床，其最大渗透率为 $q_{\max}$，从而产生体积流率 q 和萃取体积 $u(\tau)$。向环境的热损失由类比奥参数 Bi 表示。

方程来描述主要物理过程。这种策略常用于教学和降阶热流体建模[1]。我们不构建包含大量状态变量的详细守恒定律模型，而是建立一个最简无量纲系统，在保留基本定性动力学的同时，确保模型直观且易于进行数值计算。

B. 状态变量

该模型由三个随时间变化的无量纲状态变量描述：下腔室的无量纲温度 $\theta(\tau)$；锅炉中的无量纲压力 $p(\tau)$；以及已萃取液体的累积无量纲体积 $u(\tau)$（图 1）。无量纲时间变量 $\tau = t/t_0$ 以特征加热时间 t_0为尺度；在没有萃取的情况下，锅炉温度在这一时间尺度内会显著升高。温度和压力则以与.....相关的特征值为尺度

开始　　压力驱动流的特征值，而 u 则以初始液体体积归一化　　.

C. 控制方程

系统的时间演化由以下耦合的无量纲方程控制

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 1 - \mathrm{Bi}\,\theta - \Lambda\, q, \tag{1}$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \Lambda\left(e^{\theta} - p\right) - \Pi\, q, \tag{2}$$

$$\frac{du}{d\tau} = q. \tag{3}$$

参数 Λ 同时出现在方程 (1) 和 (2) 中，反映了蒸汽生成与对流能量移除共同的热力学来源。尽管记为 Bi，该参数并非经典的毕奥数，但在集总系统中，它通过比较热损失与加热输入，发挥着类似的作用。萃取开始定义为无量纲压力首次超过阈值 $p = 1$ 的时刻，此时咖啡粉床中开始出现非零流动（$q > 0$）。

1. 萃取前加热阶段

在初始加热阶段，内部压力保持低于萃取阈值，且不会发生液体流动（$q = 0$）。在此阶段，方程 (1) 可精确简化为

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 1 - \mathrm{Bi}\,\theta, \tag{4}$$

它决定了萃取前的温度变化。该简化方程用于将模型与实验温度-时间数据进行比较，并确定特征加热时间尺度 t_0。此阶段不拟合任何压力或流量参数。

2. 压力动力学

方程（2）描述了下腔室压力的演变。项 e^{θ} 表示与当前温度相关的无量纲平衡蒸汽压，捕捉了克劳修斯-克拉佩龙关系在沸腾附近所预测的主导阶指数依赖性

关系[6]。假设压力动态地趋向这一平衡值，而非瞬间达到该值，从而能够解析瞬态热流体反馈，同时避免数值刚性。

3. 萃取流量

萃取流率采用带阈值的线性关系建模

$$q = q_{\max}\,\max(p-1,0), \tag{5}$$

该关系表示压力驱动流通过多孔咖啡粉床，与多孔介质流动的达西型模型一致[7]。阈值 $p=1$ 对应于克服静水压头和流动阻力所需的最小压力。

D. 无量纲参数

模型包含四个无量纲参数:

- Bi：热损失参数,
- Λ：热流体耦合强度,
- $q_{\text{最大}}$：咖啡粉床的有效渗透率,
- Π：压力耗散系数。

这些参数定义了一个具有物理可解释性的参数空间，其中会呈现出不同的萃取行为。

E. 初始条件

在加热开始时,

$$\theta(0) = 0, \quad p(0) = 1, \quad u(0) = 0. \tag{6}$$

表 I。模拟中使用的无量纲参数数值。

参数	值	描述
Bi	0.15	热损失系数
Λ	1.5	蒸气压力耦合强度
Π	0.5	萃取导致的压力耗竭
$q_{\max}$	1.2	最大无量纲流量

F. 数值实现

使用变步长显式龙格–库塔方法（`solve ivp`，SciPy）求解耦合方程。相对容差和绝对容差分别设为 10^{-6} 和 10^{-8}。代表性模拟所采用的参数值列于表 I。

G. 模型局限性

该模型有意进行了简化。模型忽略了空间温度梯度、两相流效应以及随时间变化的渗透率变化。蒸气压采用最简指数形式表示，流动定律则经过线性化处理，以便于教学说明。因此，该模型并非用于特定设备优化，而是旨在说明如何对耦合热流体动力学进行建模、简化，并通过实验数据进行检验。

III. 结果

A. 无量纲温度与压力动力学

图 2 展示了通过改变类比奥热损失参数 Bi 和有效渗透率参数 $q_{\max}$，同时保持所有其他参数不变，得到的三种代表性萃取状态下的无量纲温度 $\theta(\tau)$ 和压力 $p(\tau)$。在所有情况下，温度最初都会因外部加热而升高，从而导致蒸汽生成，并使下腔室内的压力逐渐上升。

在没有显著萃取的情况下（无开采制度），压力保持在接近

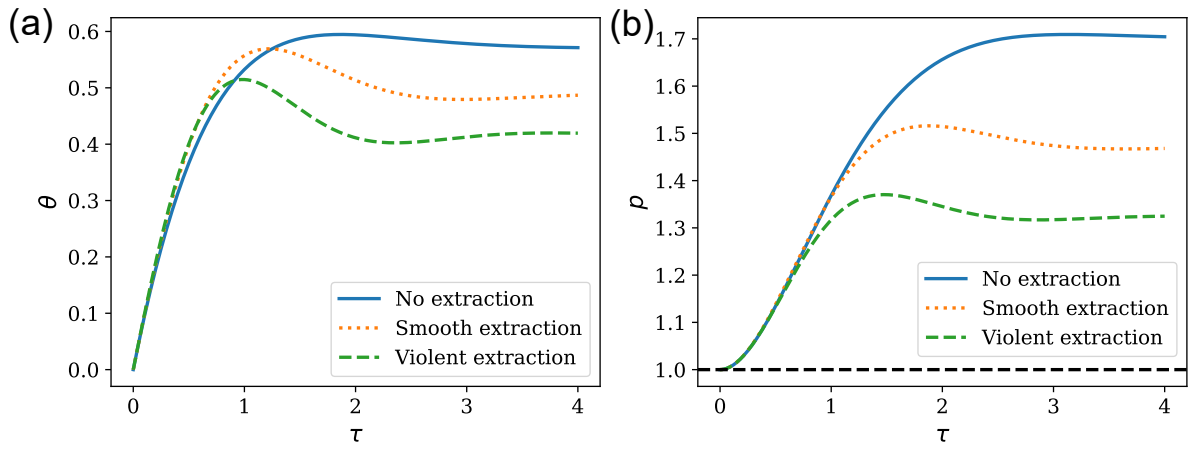

图 2. 三种具有代表性的萃取状态下的无量纲温度 $\theta(\tau)$（左）和压力 $p(\tau)$（右）。没有萃取时，热能会在锅炉中积累，导致稳态温度和压力升高。当出现压力驱动流时，萃取会同时带走质量和能量，从而降低峰值温度和压力。虚线表示流动开始的压力阈值。三条曲线对应表 I 中列出的参数值。

阈值的水平，热能则在锅炉中积累，导致稳态温度最高。当发生压力驱动流时，萃取会从下腔室带走质量和能量，从而限制温度和压力的进一步升高。这种效应在快速萃取工况下最为显著：强烈的热流体耦合会使压力提前达到峰值，随后出现部分弛豫。

这些结果表明，摩卡壶中的热过程与流体过程存在强烈耦合，并说明一旦流动启动，萃取便会发挥自调节机制的作用，限制温度和压力的升高。

B. 流速动态与萃取完成

相应的萃取流速 $q(\tau)$ 和累计萃取体积分数$u(\tau)$ 如图3所示。只有当压力超过阈值 $p = 1$后，流动才会开始，这反映了需要克服静水压头和咖啡粉床中的阻力。流动开始后，流速迅速增加，达到最大值，随后

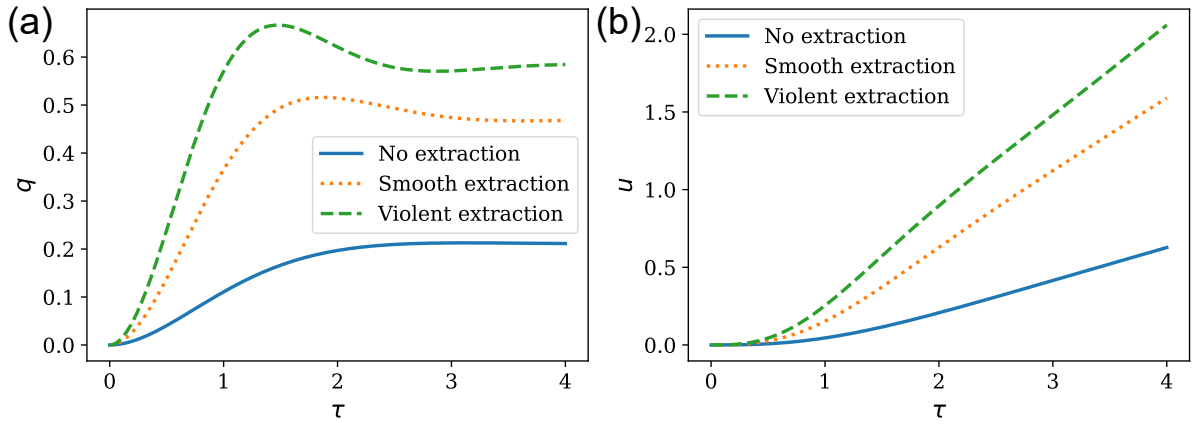

图3. 无量纲萃取流量 $q(\tau)$（左）和累计萃取体积分数$u(\tau)$（右）。只有当压力超过阈值后，流动才会开始，并呈现先快速上升、随后弛豫的特征。萃取体积呈现典型的 S 形变化，标志着从加热主导动力学向流动主导动力学的转变。

逐渐趋于准稳态值。

在快速萃取工况下，由于压力迅速累积，流率会在早期达到峰值；随后，随着压力弛豫和热驱动减弱，流率逐渐下降。相比之下，平稳萃取状态下流率上升较为缓慢，且流动持续时间较长，因此萃取时间也更长。无开采制度下，整个模拟时段内仅出现微弱流动，且萃取不完全。

累计萃取体积呈现典型的 S 形变化，标志着从加热主导动力学向流动主导动力学的转变。这种行为自然地源自热流体耦合模型，并且在家用摩卡壶冲煮过程中十分常见。

C. 实验温度与预测压力的比较

为评估最简模型的物理相关性，将其对加热阶段的预测与已发表的摩卡壶实验温度-时间数据进行比较。在初始加热阶段，内部压力低于萃取阈值，且没有流动发生（$q = 0$），因此温度方程可简化为一个常微分方程。通过将该简化方程拟合实验温度数据，以确定

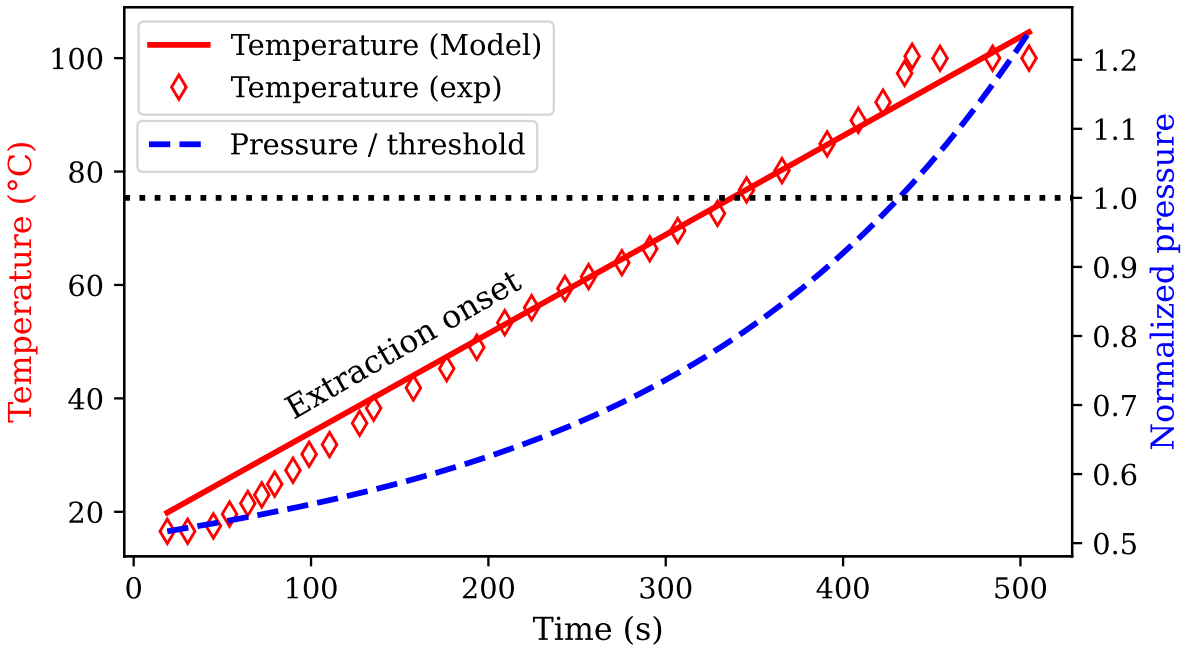

图 4. 引用文献[3] 中的实验温度数据（符号）与摩卡壶加热阶段的模型预测（实线）。归一化压力（蓝色虚线，右轴）根据实验约束的温度计算得到。萃取阈值（$p = 1$）定义了预测的萃取开始。

特征加热时间尺度 t_0。

图 4 展示了实验测得的温度变化以及模型预测。整个加热阶段直至沸腾开始，两者吻合良好。随后，以实验约束的温度变化为输入，结合压缩空气和水蒸气的贡献，利用模型计算锅炉内部的压力上升。

所得的压力变化在图 4 中用单独的坐标轴表示。在加热初期，压力低于萃取阈值；接近沸腾时，压力迅速上升，并在 $t \approx 4.3 \times 10^2$ s 时越过阈值。该交叉点定义了预测的萃取开始时刻。重要的是，压力变化和萃取开始并非通过独立拟合得到，而是直接由实验约束的温度推导而来。

IV. 讨论

A. 萃取动力学的物理解释

本研究建立的最简模型凸显了加热、蒸气压生成与压力驱动流之间的非线性反馈在摩卡壶萃取过程中的核心作用。随着下腔室受热，温度升高并引起蒸气压呈指数增长。一旦压力超过由静水压头和流动阻力决定的阈值，液体便会被迫穿过咖啡粉床，从而开始萃取。

萃取开始从根本上改变了系统动力学。压力驱动流会从锅炉中带走质量和热能，引入负反馈，从而限制温度和压力的进一步升高。这一反馈机制解释了摩卡壶运行的自调节特性，以及实际观察到的有限萃取持续时间。

在这一框架下，该模型自然预测出三种定性萃取状态。当渗透率较低或热损失较强时，压力保持在阈值附近，萃取会延迟发生或几乎不发生。对于中等参数，会出现平稳萃取状态，其特征是持续的压力驱动流和体积逐渐增加。当热流体耦合较强且流动阻力较低时，会发生快速萃取，其表现为压力较早达到峰值，随后随着萃取过程耗尽驱动压力而发生弛豫。“快速”（或“剧烈”）萃取这一术语是描述性的，用于表示强耦合的压力–流动动力学；它并不意味着存在机械失稳。

这些状态源于耦合热流体系统内在的非线性结构，而不是源于特定装置的详细几何结构或材料特性。

B. 与先前研究及实验观察的关系

尽管本模型经过有意简化并采用无量纲形式，但它与先前对摩卡壶运行的分析和实验观察一致。具体而言，流动延迟起始、有限萃取时间的存在，以及萃取动力学对加热和流动阻力的敏感性，在定性上均与实验研究以及 King[4]所建立的热流体分析相符。

与有量纲平衡律模型相比，本文方法着重采用一种约

化且完全无量纲的描述，突出动力学状态和反馈机制。因此，这两种方法互为补充：详细模型提供物理基础和定量解释，而本文提出的约化框架则概念清晰，便于教学。

与实验温度数据的比较进一步阐明了这一区别。加热动力学由测量结果直接约束，而压力变化和萃取开始则是模型真正给出的预测。这种校准与预测之间的区分说明，简化模型即使不牺牲可解释性，也能依据有限的实验数据进行检验。

C. 教学意义与适用范围

除了与咖啡制备相关之外，摩卡壶还为日常物理系统中的耦合非线性热流体动力学提供了一个简洁的教学范例。由于该模型仅由三个耦合的常微分方程构成，且参数具有明确的物理含义，因此非常适合用于课堂教学、计算实验室和学生主导的探索。

无量纲 formulation 便于开展系统性的参数研究，可用于展示阈值现象、反馈回路、弛豫动力学和自调节。该模型可利用标准数值工具轻松实现，并可逐步扩展以探索其他物理效应，因此尤其适用于高年级本科教学。

从这个意义上说，摩卡壶是一个熟悉且引人入胜的平台，能够将热力学、流体力学和非线性动力学中的抽象概念与日常经验联系起来。

V. 结论

我们提出了一个精简且完全无量纲的摩卡壶运行热流体模型，捕捉了加热、蒸气压生成与压力驱动萃取之间的关键耦合关系。通过将系统简化为一组参数具有明确物理意义的常微分方程，该模型提供了一个清晰的框架，

用于理解的工作 用于理解支配萃取动力学的非线性反馈机制 .

本研究的一项关键成果是将模型与实验数据进行明确对照。我们将加热阶段的温度演化与已发表的测量结果进行定量比较，从而独立确定特征热时间尺度。随后，以实验约束下的温度作为输入，模型无需额外拟合参数，即可预测压力上升和萃取开始。预测的萃取开始时间与实验观测到的加热时间尺度一致，表明该最简模型抓住了支配摩卡壶运行的主要物理机制。

尽管模型十分简单，却能再现几种定性上迥异的萃取状态，包括萃取延迟或几乎不发生、平稳萃取，以及由强热流体耦合驱动的快速萃取。这些状态自然源于控制方程的非线性结构，而非针对特定设备进行调校。虽然该模型并不试图针对具体的摩卡壶设计作出详细的定量预测，但它提供了具有物理意义的趋势和时间尺度，可用于实验对比和概念性理解。

除了咖啡制备之外，本文还将摩卡壶作为一个简明的教学案例，展示物理学家如何利用有限的实验输入，构建、简化并检验耦合非线性系统模型。该框架易于使用标准数值工具实现，非常适合用于热力学、流体力学和计算物理课程的教学。可以在此框架内进一步开发纳入空间变化、两相流或更精细本构关系的模型；但本研究表明，即使是高度简化的描述，也能带来重要的物理洞见。

* syahril.siregar@ui.ac.id；印度尼西亚大学数学与自然科学学院物理系[1] Bossart, A., Fleury, R. & Apffel, B. 咖啡杯科学：一位物理学家走进酒吧……《流体物理学》. **37**(2025)[2] Navarini, L., Nobile, E., Pinto, F., Scheri, A. & Suggi-Liverani, F. 炉灶式咖啡机中蒸汽压力咖啡萃取的实验研究。《应用热工程》.**29**,

998-1004 (2009)[3] Gianino, C. 意大利咖啡壶“摩卡壶”的实验分析。《美国物理学杂志》。**75**, 43-47 (2007)[4] King, W. 炉灶式浓缩咖啡机的物理学。《美国物理学杂志》。**76**, 558-565 (2008)[5] Cameron, M., Morisco, D., Hofstetter, D., Uman, E., Wilkinson, J., Kennedy, Z., Fontenot, S., Lee, W., Hendon, C. & Foster, J. 系统地改进浓缩咖啡：来自数学建模与实验的见解。《*Matter*》。**2**, 631-648 (2020)[6] Callen, H. 热力学与热统计学导论。约翰·威立父子出版公司。**2**(1993)[7] Bear, J. 多孔介质中的流体动力学。（Courier Corporation，2013）