arXiv:2601.03695v1 [math.CA] 7 Jan 2026

$\mathbf{H}^1 \longrightarrow \mathbf{L}^q$有界性：具有旗形核的分数积分算子

具有旗形核

Jiashu Zhang 和 Zipeng Wang

摘要

我们研究一族分数积分算子

$$\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} f(x,y) \;=\; \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(x-u,y-v)\Big(\frac{1}{|u|}\Big)^{n-\alpha}\Big[\frac{1}{|u|^{\rho}+|v|}\Big]^{m-\beta}\,dudv$$

其参数为 $0<\alpha<n$、$0<\beta<m$ 和 $\rho\geq 1$。首先，我们证明 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}\colon L^p(\mathbb{R}^{n+m}) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^{n+m})$，$1<p<q<\infty$ 当且仅当 $\frac{\alpha}{n}\geq\frac{\beta}{m}$ 且 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$。其次，我们证明 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}$ 从经典的原子可分解 H^1-Hardy 空间到 $L^q(\mathbb{R}^{n+m})$ 有界，当且仅当 $\frac{\alpha}{n}>\frac{\beta}{m}$ 且 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=1-\frac{1}{q}$。

1 引言

设 $0<\alpha<n$。分数阶积分算子 $\mathbf{I}_\alpha$ 最初定义为

$$\mathbf{I}_\alpha f(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\Big[\frac{1}{|x-u|}\Big]^{n-\alpha}\,du. \tag{1.1}$$

1928年，Hardy 和 Littlewood [1] 得到了关于$\mathbf{T_a}$ 的一个正则性定理，其中$\mathbf{N}=1$。十年后，Sobolev [2] 将其推广到每个更高维空间。

◇ 在全文中，$B>0$ 视为依赖于其下标的泛常数。

Hardy-Littlewood-Sobolev 定理 设$\mathbf{I}_\alpha$ 为式 *(1.1)* 中定义的算子，其中 $0<\alpha<n$。我们有

$$\begin{aligned}&\big\|\mathbf{I}_\alpha f\big\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \mathfrak{B}_{p\,q}\,\big\|f\big\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1<p<q<\infty\\ &\qquad\textit{if and only if}\qquad \frac{\alpha}{n}\;=\;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

这一经典结果后来由 Krantz [7] 在 Hardy 空间上重新研究。

Krantz 定理 设 $\mathbf{I}_\alpha$ 为式（*1.1*）中定义的 $0<\alpha<n$。我们有

$$\begin{aligned}&\big\|\mathbf{I}_\alpha f\big\|_{\mathbf{H}^q(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \mathfrak{B}_{p\,q}\,\big\|f\big\|_{\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad 0<p<q<\infty\\ &\qquad\textit{if and only if}\qquad \frac{\alpha}{n}\;=\;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

注 1.1. $\mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n)$，$0<p\leq 1$ 是 *Fefferman* 和 *Stein* *[3]*研究的经典 $\mathbf{H}^p$*-Hardy* 空间。此外，*Coifman* *[4]*建立了它的原子分解刻画。

近年来，Tang [16]将 **Krantz 定理** 推广到多参数情形，其中 (1. 1) 中的$\mathbf{I}_\alpha$ 被强分数积分算子取代，其核在每个坐标子空间上都有奇异性。为更好地说明这一新结果与我们的结果之间的区别，我们聚焦于其双参数版本。令 $0 < \alpha < n$、 $0 < \beta < m$。定义

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta} f(x,y) \;=\; \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(u,v) \left[\frac{1}{|x-u|}\right]^{n-\alpha} \left[\frac{1}{|y-v|}\right]^{m-\beta} du dv. \tag{1. 4}$$

Tang 定理 令$\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ 为式（1.4）中定义的对象，其中 $0 < \alpha < n$， $0 < \beta < m$。我们有

$$\begin{gathered} \left\| \mathbf{I}_{\alpha\beta} f \right\|_{\mathbf{H}^q \times \mathbf{H}^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)} \;\le\; \mathfrak{B}_{p\,q} \, \left\| f \right\|_{\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)}, \qquad 0 < p < q < \infty \\ \text{if and only if} \qquad \frac{\alpha}{n} \;=\; \frac{\beta}{m} \;=\; \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{gathered} \tag{1. 5}$$

注 1.2. $\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), 0 \;<\; p \;\le\; 1$ 是 *Gundy* 和 *Stein* 引入的乘积 *Hardy* 空间 *[6]*。此外，它不能用“矩形原子”来刻画。参见 *Carleson* 的反例 *[5]*。

本文研究一族分数积分算子，其核在满足非各向同性膨胀的条件下，在某个坐标子空间上具有奇异性，通常称为旗核。研究这类算子的最初动机源自某些次椭圆边值问题。其解最终可表示为两个奇异积分算子的复合。其中一个是椭圆型的，另一个则是与非各向同性膨胀相关的抛物型算子。这类奇异积分已得到系统研究。例如，可参见 Phong 和 Stein [8], Muller、Ricci 和 Stein [9], Nagel、Ricci 和 Stein [10],Nagel、Ricci、Stein 和 Wainger [11], Han 等人 [12], Han、Lu 和 Sawyer [13] 以及 Han、Lee、Li 和 Wick[14]-[15]的论文。对于分数阶积分而言，这一研究方向仍基本处于开放状态。

设 $0 < \alpha < n$、 $0 < \beta < m$和 $\rho \ge 1$。我们定义

$$\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} f(x,y) \;=\; \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(u,v) \Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x-u, y-v) du dv \tag{1. 6}$$

其中 $\Omega^{\alpha\beta}_{\rho}$ 是 R^{n+m} 上的一个分布，与.....一致

$$\Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x,y) \;=\; \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{1}{|x|^{\rho} + |y|}\right]^{m-\beta}, \qquad x \neq 0. \tag{1. 7}$$

Muller、Ricci 和 Stein [9]给出了一个具体例子。设 $x \;=(z,w) \;\in \mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^d$。考虑 $\mathrm{L}^{-\mathbf{a}} T^{-\mathbf{b}}$，其中$0 < \mathbf{a} \;< d$， $0 < \mathbf{b} \;< 1$: $T \;= \partial_t$，且 L 是次拉普拉斯算子: $\mathrm{L} \;= -\sum^{d}{}_{i=1} \mathbf{Z}^2{}_i + \mathbf{W}^2{}_i$， $\mathbf{Z}_i = \partial_{z_i} + 2w_i \partial_t$， $\mathbf{W}_i = \partial_{w_i} - 2z_i \partial_t$。$\mathrm{L}^{\mathbf{a}}$ 的逆由 Riesz 势给出:

$$\mathcal{L}^{-\mathbf{a}} \;=\; \frac{1}{\Gamma(\mathbf{a})} \int_0^{\infty} s^{\mathbf{a}-1} e^{-s\mathcal{L}} ds$$

其中 Γ 表示伽马函数。$\mathrm{L}^{-\mathbf{a}} T^{-\mathbf{b}}$ 的核是 R^{2d+1} 上的一个分布，与函数 $\Gamma\left(\frac{1-\mathbf{b}}{2}\right)\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2d-2\mathbf{a}} \left[\frac{1}{|\,|^2+|xy|}\right]^{1-\mathbf{b}}$（当$x \neq 0$时）相似。[1]与（1. 7）比较可知，$n = 2d$、$m = 1$、 $\alpha = 2\mathbf{a}$、 $\beta = \mathbf{b}$ 以及$\rho = 2$。

[1]若存在某个 $\mathbf{c} > 0$，使得 $\mathbf{c}^{-1} B \;\le A \;\le \mathbf{c} B$，则称$A$ 与B 相似。

对于 $1 < p < q < \infty$，$\mathbf{L}^{-\mathbf{a}}T^{-\mathbf{b}} : \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^{2d+1}) \longrightarrow \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^{2d+1})$ 当且仅当$\mathbf{a} \geq d\mathbf{b}$ 且$\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b} = d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$时成立。利用复插值，这一结论在 [9] 第 6 节中得到证明。其中一个端点估计依赖于该节中建立的$\mathbf{L}^p$定理。首先，我们证明，每个核与（1.7）相似的卷积算子都满足所需的$\mathbf{L}^p \longrightarrow \mathbf{L}^q$正则性。

定理一 设 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}$ 为式（*1.6*）—（*1.7*）中针对 $0 < \alpha < n$、$0 < \beta < m$ 和 $\rho \geq 1$定义的算子。我们有

$$\left\| \mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} f \right\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})} \leq \mathfrak{B}_{\alpha\beta\rho pq} \left\| f \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^{n+m})}, \qquad 1 < p < q < \infty \tag{1.8}$$

当且仅当

$$\frac{\alpha}{n} \geq \frac{\beta}{m}, \qquad \frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \tag{1.9}$$

我们的主要结果是刻画 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha}$ 的 $\mathbf{H}^1 \longrightarrow \mathbf{L}^q$-有界性$_{\beta}$.

定理二 设 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}$ 为式（*1.6*）—（*1.7*）中针对 $0 < \alpha < n$、$0 < \beta < m$ 和 $\rho \geq 1$定义的算子。我们有

$$\left\| \mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} f \right\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})} \leq \mathfrak{B}_{\alpha\beta\rho q} \left\| f \right\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^{n+m})}, \qquad 1 < q < \infty \tag{1.10}$$

当且仅当

$$\frac{\alpha}{n} > \frac{\beta}{m}, \qquad \frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1 - \frac{1}{q}. \tag{1.11}$$

注意，$\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^{n+m})$ 与 Fefferman 和 Stein [3] 引入的$\mathbf{H}^1$-Hardy 空间相同，该空间具有由 Coifman [4]给出的原子分解。另一方面，由 Gundy 和 Stein [6] 定义的乘积 Hardy 空间 $\mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ 是$\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^{n+m})$ 的子空间。

其核 $\Omega^{\alpha\beta}_{\rho}$ 具有式（1.7）所定义的某种多参数结构的分数阶积分算子 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}$，仍然可以从经典的、可作原子分解的 $\mathbf{H}^1$-Hardy 空间有界映射到 $\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})$。

本文其余部分安排如下。在下一节中，我们证明 $\mathrm{I}^{\rho}_{\alpha\beta} : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{n+m}) \longrightarrow \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})$ 蕴含 $\frac{\alpha}{n} \geq \frac{\beta}{m}$ 和 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$，其中 $1 \leq p < q < \infty$。此外，当 $\frac{\alpha}{n} = \frac{\beta}{m}$ 且 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1 - \frac{1}{q}$ 时，我们给出 $\mathrm{I}^{\rho}_{\alpha\beta} : \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^{n+m}) \longrightarrow \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})$ 的一个反例。在第 3 节中，我们证明（1.9）蕴含（1.8）。第 4 节专门用于证明（1.11）$\Longrightarrow$ (1.10)。根据 $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^{n+m})$ 的原子分解刻画，只需证明 $\left\| \mathrm{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a \right\|_{\mathbf{L}^q}(\mathbb{R}^{n+m}) \leq \mathrm{B}_{\alpha\beta\rho q}$，其中 a 是一个 H^1- 原子：

$$\mathbf{supp}\, a \subset \mathbf{Q}, \qquad |a(x,y)| \leq \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}, \qquad \iint_{\mathbf{Q}} a(x,y)\,dxdy = 0 \tag{1.12}$$

其中，$\mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是某个与坐标轴平行的立方体。

2 必要条件的证明

设 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}$ 在 (1.6)-(1.7) 中定义，适用于 $0 < \alpha < n$、$0 < \beta < m$ 和 $\rho \geq 1$。我们有

$$\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} f(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(u,v) \left(\frac{1}{|x-u|} \right)^{n-\alpha} \left[\frac{1}{|x-u|^{\rho} + |y-v|} \right]^{m-\beta} dudv. \tag{2.1}$$

通过改变 ng 膨胀（$x,\ y$） $\longrightarrow(\delta x,\ \delta^{\rho}\lambda y)$ 和（$u,\ v$） $\longrightarrow(\delta u,\ \delta^{\rho}\lambda v)$，对于 $\delta>0$、$\lambda>1$，我们得到 d

$$\begin{aligned}
&\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f\left[\delta^{-1}u,\delta^{-\rho}\lambda^{-1}v\right]\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta}dudv\right\}^{q}dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&=\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(u,v)\left(\frac{1}{\delta|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{\delta^{\rho}|x-u|^{\rho}+\delta^{\rho}\lambda|y-v|}\right]^{m-\beta}\delta^{n+\rho m}\lambda^{m}dudv\right\}^{q}\delta^{n+\rho m}\lambda^{m}dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&=\delta^{\alpha+\rho\beta}\delta^{\frac{n+\rho m}{q}}\lambda^{\frac{m}{q}}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(u,v)\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+\lambda|y-v|}\right]^{m-\beta}\lambda^{m}dudv\right\}^{q}dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\geq \delta^{\alpha+\rho\beta}\delta_{\underline{n+\rho m}\,q}\ -\\
&\quad\lambda^{\frac{m}{q}}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(u,v)\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta}\lambda^{\beta-m}\lambda^{m}dudv\right\}^{q}dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\qquad(\lambda>1)\\
&=\delta^{\alpha+\rho\beta}\delta^{\frac{n+\rho m}{q}}\lambda^{\beta}\lambda^{\frac{m}{q}}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(u,v)\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta}dudv\right\}^{q}dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

考虑

$$\left\|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}f\right\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})}\lesssim\left\|f\right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^{n+m})},\qquad 1\leq p<q<\infty\tag{2.3}$$

这意味着（2.2）的最后一行有界于某个常数倍的

$$\begin{aligned}
&\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f\left[\delta^{-1}u,\delta^{-\rho}\lambda^{-1}v\right]\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta}dudv\right\}^{q}dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\lesssim\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left[f\left(\delta^{-1}x,\delta^{-\rho}\lambda^{-1}y\right)\right]^{p}dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&=\delta^{\frac{n+\rho m}{p}}\lambda^{\frac{m}{p}}\left\|f\right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^{n+m})}.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

这必须对每个 $\delta>0$和 $\lambda>1$都成立。因此必然有

$$\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\tag{2.5}$$

and

$$\beta\leq\frac{m}{p}-\frac{m}{q}.\tag{2.6}$$

结合（2.5）和（2.6），可得

$$\alpha m\geq\beta n.\tag{2.7}$$

2.1 $\mathbf{H}^1 \longrightarrow \mathbf{L}^q$估计的一个反例

现在，我们给出一个反例，说明当 $\alpha m = n\beta$ 时，$\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}: \mathbf{H}^1(\mathrm{R}^{n+m}) \longrightarrow \mathbf{L}^q(\mathrm{R}^{n+m})$.

令 $\mathrm{Q}_o = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m: \ |\mathrm{x}_i| \le 1, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}; \ \ |\mathrm{y}_i| \le 1, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}\}$. 考虑 $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$符号函数$(\mathrm{x}_1)\chi_{\mathrm{Q}_o}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$，它是 R^{n+m} 中的一个 H^1-原子。定义 $\mathrm{U} \subset \mathrm{R}^n$ 为 $\mathrm{U} = \left\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n: \ 2 \le \mathrm{x}_i \le 4, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}\right\}$. 我们旨在证明

$$\iint_{\mathbf{U}\times\mathbb{R}^m} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^q dxdy = \infty. \tag{2. 8}$$

记$\mathbf{e}_1$ 为 x_1轴上的单位向量，并且 $\mathbf{Q}_o^+ = \mathbf{Q}_o \cap \{x_1 > 0\}$。对于 $(x,y) \in \mathbf{U} \times \mathrm{R}^m$，我们发现 nd

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y) &= \iint_{\mathbf{Q}_o} a(u,v)\Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x-u, y-v)dudv \\
&= \iint_{\mathbf{Q}_o^+} \left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} - \left(\frac{1}{|x-u+\mathbf{e}_1|}\right)^{n-\alpha} \left[\frac{1}{|x-u+\mathbf{e}_1|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} dudv \\
&\gtrsim \iint_{\mathbf{Q}_o^+} \left[\frac{1}{1+|y-v|}\right]^{m-\beta} dudv \\
&\gtrsim \left(\frac{1}{1+|y|}\right)^{m-\beta}.
\end{aligned} \tag{2. 9}$$

注意，$\alpha_n = \beta_m$ 以及 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1 - \frac{1}{q}$ 共同意味着 $\beta = m - \frac{m}{q}$。我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{U}\times\mathbb{R}^m} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^q dxdy &\gtrsim \iint_{\mathbf{U}\times\mathbb{R}^m} \left(\frac{1}{1+|y|}\right)^{q(m-\beta)} dxdy \qquad \text{by (2. 9)} \\
&\approx \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{1}{1+|y|}\right)^m dy = \infty.
\end{aligned} \tag{2. 10}$$

3 定理一的证明

回顾（1. 9）。对于 $\alpha_n \ge \beta_m$ 以及 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$，当 $1 < p < q < \infty$时成立。通过要求，隐式定义 $0 < \mathbf{a} \le \alpha < n$ 和 $0 < \beta \le \mathbf{b} < m$

$$\frac{\mathbf{a}}{n} = \frac{\mathbf{b}}{m}, \qquad \mathbf{a} + \rho\mathbf{b} = \alpha + \rho\beta. \tag{3. 1}$$

通过求解（3. 1）中的两个方程，我们得到

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha+\rho\beta}{1+\rho(\frac{m}{n})}, \qquad \mathbf{b} = \frac{\alpha+\rho\beta}{\frac{n}{m}+\rho}. \tag{3. 2}$$

此外，(3. 1) 与齐次条件 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ 共同推出

$$\frac{\mathbf{a}}{n} = \frac{\mathbf{b}}{m} = \frac{\mathbf{a}+\rho\mathbf{b}}{n+\rho m} = \frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \tag{3. 3}$$

令 $\mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\rho} f = f * \Omega_{\rho}^{\alpha\beta}$ 在 (1. 6)-(1. 7) 中定义。注意到

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\rho}^{\alpha\beta}(x,y) &= \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x|^{\rho}+|y|}\right]^{m-\beta} \\
&= \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x|^{\rho}+|y|}\right]^{m-\mathbf{b}}\left[\frac{1}{|x|^{\rho}+|y|}\right]^{\mathbf{b}-\beta} \\
&\le \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x|^{\rho}+|y|}\right]^{m-\mathbf{b}}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{\rho\mathbf{b}-\rho\beta} \\
&= \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-\mathbf{a}}\left[\frac{1}{|x|^{\rho}+|y|}\right]^{m-\mathbf{b}} \\
&\le \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-\mathbf{a}}\left(\frac{1}{|y|}\right)^{m-\mathbf{b}} \qquad x \neq 0.
\end{aligned}
\tag{3. 4}
$$

回顾本文开头所述的**Hardy-Littlewood-Sobolev 定理**。我们有

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\rho} f\right\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})} &= \left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(u,v)\Omega_{\rho}^{\alpha\beta}(x-u,y-v)dudv\right\}^q dxdy\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\left\{\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(u,v)\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\mathbf{a}}\left(\frac{1}{|y-v|}\right)^{m-\mathbf{b}} dudv\right\}^q dxdy\right\}^{\frac{1}{q}} \qquad \text{by (3. 4)} \\
&\le \left\{\int_{\mathbb{R}^m}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^m} f(x,v)\left(\frac{1}{|y-v|}\right)^{m-\mathbf{b}} dv\right\}^p dx\right\}^{\frac{q}{p}} dy\right\}^{\frac{1}{q}} \qquad \text{by (3. 3) and (1. 2)} \\
&\le \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^m}\left\{\int_{\mathbb{R}^m} f(x,v)\left(\frac{1}{|y-v|}\right)^{m-\mathbf{b}} dv\right\}^q dy\right\}^{\frac{p}{q}} dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad \text{by Minkowski intergal inequality} \\
&\le \left\|f\right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^{n+m})} \qquad \text{by (3. 3) and (1. 2).}
\end{aligned}
\tag{3. 5}
$$

4 定理二的证明

设 $0<\alpha<n$、$0<\beta<m$ 和 $\rho\ge 1$。由（1. 7）可得

$$
\Omega_{\rho}^{\alpha\beta}(x,y) = \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x|^{\rho}+|y|}\right]^{m-\beta}, \qquad x \neq 0.
$$

直接计算可得

$$\left|\nabla_x \Omega_\rho^{\alpha\beta}(x,y)\right| \le \mathfrak{B}_{\alpha\beta\rho}\, \Omega_\rho^{\alpha\beta}(x,y)\, \max\left\{\frac{1}{|x|}, \frac{|x|^{\rho-1}}{|x|^\rho+|y|}\right\},$$
$$\left|\nabla_y \Omega_\rho^{\alpha\beta}(x,y)\right| \le \mathfrak{B}_{\alpha\beta\rho}\, \Omega_\rho^{\alpha\beta}(x,y)\, \frac{1}{|x|^\rho+|y|}. \tag{4. 1}$$

由（4. 1），我们得出

$$\left|\nabla \Omega_\rho^{\alpha\beta}(x,y)\right| \le \mathfrak{B}_{\alpha\beta\rho}\, \Omega_\rho^{\alpha\beta}(x,y) \max\left\{\frac{1}{|x|}, \frac{1}{|x|^\rho+|y|}\right\}. \tag{4. 2}$$

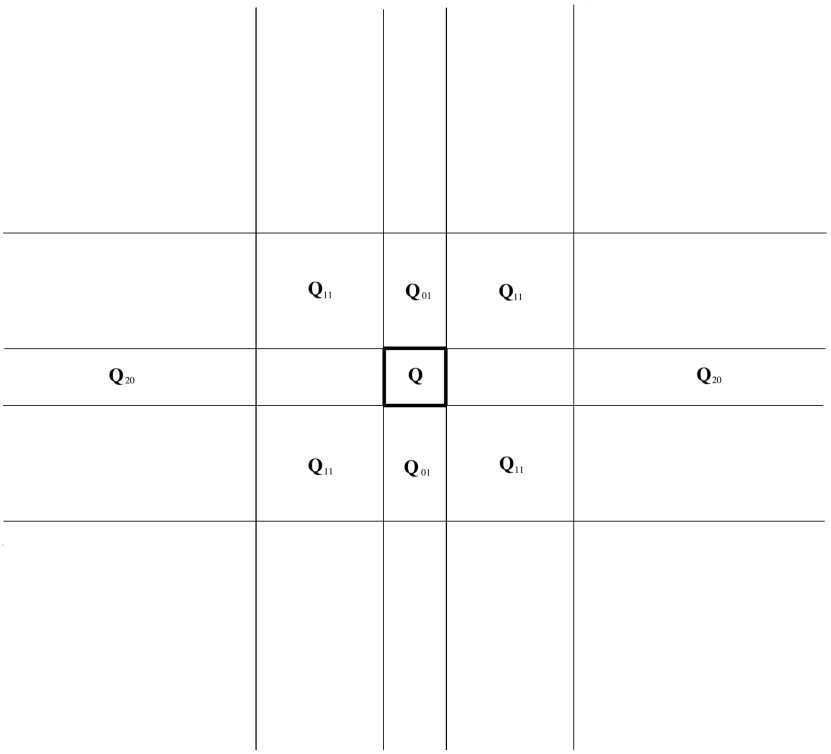
设$\mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\rho} f = f * \Omega_\rho^{\alpha\beta}$ 如（1. 6）-（1. 7）中所定义。我们旨在证明

$$\left\|\mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\rho} a\right\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^{n+m})} \le \mathfrak{B}_{\alpha\beta\rho q} \qquad \text{for} \qquad \frac{\alpha}{n} > \frac{\beta}{m}, \quad \frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1-\frac{1}{q} \tag{4. 3}$$

其中a是 R^{n+m} 中满足（1. 12）的$\mathbf{H}^1$-原子。

记$\mathbf{Q} \subset \mathrm{R}^{n+m}$ 为一个以原点为中心、边长为 2^L 的立方体。不失一般性，我们假设a 支撑在立方体 $1\ 2\mathbf{Q}$内：它与$\mathbf{Q}$ 同心，边长为 2^{L-1}。对于$k, l \ge 0$，我们定义

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{00}, \qquad \mathbf{Q}_{k\ell} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : 2^{L+k-1} \le |x| < 2^{L+k},\ 2^{L+\ell-1} \le |y| < 2^{L+\ell}\right\}. \tag{4. 4}$$



通过估计可得 (4. 5)

$$\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy, \qquad \frac{\alpha}{n} > \frac{\beta}{m}, \quad \frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1-\frac{1}{q} \tag{4. 5}$$

w.r.t **情形 1**: $k = \mathrm{l} = 0$, **情形 2**: $k > 0, \mathrm{l} > 0$, **情形 3**: $k > 0, \mathrm{l} = 0$ 以及**情形 4**: $k = 0, \mathrm{l} > 0$. 在继续之前，我们注意到 $\frac{\alpha}{n} > \frac{\beta}{m}$ 且 $\frac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1 - \frac{1}{q}$ 共同意味着

$$\frac{\alpha}{n} > 1-\frac{1}{q} \tag{4. 6}$$

and

$$\frac{\beta}{m} < 1-\frac{1}{q}. \tag{4. 7}$$

这两个严格不等式将在后文中用到。

4.1 情形 1: $k = \mathrm{l} = 0$

回顾 l that a 在 1 2$\mathbf{Q}$ 中成立，且 $|a(x,y)| \le 2^{n+m}\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}^{-1}$。令 $(x,y) \in \mathbf{Q}$。我们有

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right| &\le \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} |a(u,v)| \Big(\frac{1}{|x-u|}\Big)^{n-\alpha} \left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} dudv \\
&\lesssim \sum_{s\le L}\sum_{r\le L} \iint_{2^{s-1}<|x-u|\le 2^{s}, 2^{r-1}<|y-v|\le 2^{r}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}} 2^{s(\alpha-n)}\Big[2^{r}+2^{\rho s}\Big]^{\beta-m} dudv \qquad (4.\ 8)\\
&= 2^{-(n+m)L} \sum_{s\le L}\sum_{r\le L} \iint_{2^{s-1}<|x-u|\le 2^{s}, 2^{r-1}<|y-v|\le 2^{r}} 2^{s(\alpha-n)}\Big[2^{r}+2^{\rho s}\Big]^{\beta-m} dudv.
\end{aligned}$$

将上述求和拆分为两部分：$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ *w.r.t* $r \ge \rho s$ 和 $r < \rho s$。我们发现

$$\mathbf{S}_1 = 2^{-(n+m)L} \sum_{s\le \min\{L/\rho, L\}} \sum_{\rho s\le r\le L} \iint_{2^{s-1}<|x-u|\le 2^{s},\ 2^{r-1}<|y-v|\le 2^{r}} 2^{s(\alpha-n)}\Big[2^{r}+2^{\rho s}\Big]^{\beta-m} dudv \tag{4. 9}$$

and

$$\mathbf{S}_2 = 2^{-(n+m)L} \sum_{r\le \min\{L,\rho L\}} \sum_{\frac{r}{\rho}< s\le L} \iint_{2^{s-1}<|x-u|\le 2^{s},\ 2^{r-1}<|y-v|\le 2^{r}} 2^{s(\alpha-n)}\Big[2^{r}+2^{\rho s}\Big]^{\beta-m} dudv. \tag{4. 10}$$

考虑式 (4. 9) 中的$\mathbf{S}_1$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &\lesssim 2^{-(n+m)L} \sum_{s\le \min\{L/\rho, L\}} \sum_{\rho s\le r\le L} 2^{s(\alpha-n)}\Big[2^{r}+2^{\rho s}\Big]^{\beta-m} 2^{sn} 2^{rm} \\
&\le 2^{-(n+m)L} \sum_{s\le \min\{L/\rho, L\}} \sum_{\rho s\le r\le L} 2^{s\alpha} 2^{r\beta} \qquad (0<\beta<m) \qquad (4.\ 11)\\
&\le \mathfrak{B}_{\beta}\, 2^{-(n+m-\beta)L} \sum_{s\le \min\{L/\rho, L\}} 2^{s\alpha}.
\end{aligned}$$

对于 $L>0,\ \min\{L/\rho,\ L\}=L/\rho$。式 (4. 11) 中的$\mathbf{S}_1$进一步有界于 $\mathrm{B}_{\alpha\ \beta}2^{\left[(\alpha/\rho)+\beta-n-m\right]L}$。我们得到

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{Q}}\mathbf{S}_1^q dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{q\left[(\alpha/\rho)+\beta-n-m\right]L}2^{(n+m)L}\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{q\left[(\alpha/\rho)+\beta\right]L}2^{-(q-1)(n+m)L} = \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{(q-1)\left[\frac{n}{\rho}+m\right]L}2^{-(q-1)(n+m)L} \quad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=1-\tfrac{1}{q}\right)\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{(q-1)\left[\frac{n}{\rho}-n\right]L} \le \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho\ q}.\end{aligned} \tag{4. 12}$$

另一方面，(4. 6) 蕴含 $q\alpha>(q-1)n$。对于 $L\le 0,\ \min\{L/\rho,\ L\}=L$。(4. 11) 中的 $\mathbf{S}_1$ 还可以进一步估计为 $\mathrm{B}_{\alpha\ \beta}2^{\left[\alpha+\beta-\ n-m\right]L}$。我们有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{Q}}\mathbf{S}_1^q dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{q\left[\alpha+\beta-n-m\right]L}2^{(n+m)L}\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{q\alpha\left[1-\frac{1}{\rho}\right]L}2^{q\left[(\alpha/\rho)+\beta\right]L}2^{-(q-1)(n+m)L}\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{q\alpha\left[1-\frac{1}{\rho}\right]L}2^{(q-1)\left[\frac{n}{\rho}+m\right]L}2^{-(q-1)(n+m)L} \quad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=1-\tfrac{1}{q}\right)\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{q\alpha\left[1-\frac{1}{\rho}\right]L}2^{(q-1)\left[\frac{n}{\rho}-n\right]L}\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta}\,2^{\left[q\alpha-(q-1)n\right]\left[1-\frac{1}{\rho}\right]L}\\ &\le \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho\ q}.\end{aligned} \tag{4. 13}$$

考虑 (4. 10) 中的$\mathbf{S}_2$。我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_2 &\lesssim 2^{-(n+m)L}\sum_{r\le\min\{L,\rho L\}}\ \sum_{\frac{r}{\rho}<s\le L}2^{s(\alpha-n)}\left[2^r+2^{\rho s}\right]^{\beta-m}2^{sn}2^{rm}\\ &\le 2^{-(n+m)L}\sum_{r\le\min\{L,\rho L\}}\ \sum_{\frac{r}{\rho}<s\le L}2^{s\left[\alpha+\rho\beta-\rho m\right]}2^{rm} \qquad (0<\beta<m)\\ &\le \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\,2^{-(n+m)L}\sum_{r\le\min\{L,\rho L\}}\max\left\{2^{(r/\rho)(\alpha+\rho\beta)},2^{L\left[\alpha+\rho\beta-\rho m\right]}2^{rm}\right\}.\end{aligned} \tag{4. 14}$$

对于 $L>0,\ \min\{L、\ \rho L\}=L$。式（4.14）中的 $\mathbf{S}_2$进一步有界于 $\mathrm{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}2^{-(n+m)L}\max\left\{2^{\left[(\alpha/\rho)+\beta\right]L},\ 2^{\left[\alpha+\rho\beta-\rho_m\right]L}2^{mL}\right\}$。

我们得到

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{Q}} \mathbf{S}_2^q dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\ \max\left\{2^{q\left[(\alpha/\rho)+\beta\right]L}, 2^{q\left[\alpha+\rho\beta-\rho m\right]L}2^{qmL}\right\}2^{-(q-1)(n+m)L}\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\ \max\left\{2^{(q-1)\left[\frac{n}{\rho}+m\right]L}, 2^{\left[(q-1)n-\rho m\right]L}2^{qmL}\right\}2^{-(q-1)(n+m)L} \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=1-\tfrac{1}{q}\right) \qquad (4.\ 15)\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\ \max\left\{2^{(q-1)\left[\frac{n}{\rho}-n\right]L}, 2^{(1-\rho)mL}\right\} \le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}.\end{aligned}$$

对于 $L \le 0$, $\min\{L、\ \rho L\} = \rho L$。式 (4. 14) 中的 $\mathbf{S}_2$ 进一步可由 $\mathrm{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}2^{-(n+m)L}2^{(\alpha+\rho\beta)L}$ 控制。我们有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{Q}} \mathbf{S}_2^q dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\ 2^{q(\alpha+\rho\beta)L}2^{-(q-1)(n+m)L}\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\ 2^{(q-1)(n+\rho m)L}2^{-(q-1)(n+m)L} \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=1-\tfrac{1}{q}\right) \qquad (4.\ 16)\\ &= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\ 2^{(q-1)(\rho-1)mL} \le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}.\end{aligned}$$

4.2 情形 2：$k > 0$,l > 0

令 $(x,y) \in \mathbf{Q}_{k\ell}$。我们有 $|x-u| \sim 2^{k+L}, |y-v| \sim 2^{\ell+L}$。考虑 $k + L \ge 0$ 或 l $\ge k$。我们得到

$$|x-u|^\rho + |y-v| \gtrsim |x-u|. \qquad (4.\ 17)$$

利用 a 的消去性质：$\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} a(x,y)dxdy = 0$, 我们有

$$\mathbf{I}^\rho_{\alpha\beta}a(x,y) = \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} a(u,v)\left[\Omega^{\alpha\beta}_\rho(x-u,y-v) - \Omega^{\alpha\beta}_\rho(x,y)\right]dudv. \qquad (4.\ 18)$$

回顾式 (4. 2) 中的估计。由式 (4. 18)，可得

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{I}^\rho_{\alpha\beta}a(x,y)\right| &\le \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left|\nabla\Omega^{\alpha\beta}_\rho(x-u,y-v)\right|dudv\\ &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^\rho+|y-v|}\right]^{m-\beta}\\ &\qquad \max\left\{\frac{1}{|x-u|}, \frac{1}{|x-u|^\rho+|y-v|}\right\}dudv\\ &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^\rho+|y-v|}\right]^{m-\beta}\frac{1}{|x-u|}dudv \qquad \text{by (4. 17)}\\ &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} 2^{-(n+m)L}2^L2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{\ell+L}\right]^{\beta-m}2^{-(k+L)}dudv\\ &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{-k}2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{\ell+L}\right]^{\beta-m}. \qquad (4.\ 19)\end{aligned}$$

假设 $\rho(k+L) \geq l + L$。式 (4. 19) 的最后一行可进一步由 $B_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-k} 2^{(k+L)(\alpha-n)} 2^{\rho(k+L)(\beta-m)}$ 控制。于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}} 2^{-qk} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{q\rho(k+L)(\beta-m)} dxdy \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}} 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} 2^{(k+L)n} 2^{(\ell+L)m}.
\end{aligned} \tag{4. 20}$$

通过使用（ 4. 33) 并对每个 k、$l \geq 0$: $\rho(k+L) \geq l + L$ 求和，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,\ell\geq 0:\ \rho(k+L)\geq \ell+L} \iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0} \sum_{\ell\leq \rho(k+L)-L} 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} 2^{(k+L)n} 2^{(\ell+L)m} \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0} 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} 2^{(k+L)n} 2^{\rho(k+L)m} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0} 2^{-qk} 2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)(n+\rho m)\right]} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0} 2^{-qk} \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1 - \tfrac{1}{q}\right) \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}.
\end{aligned} \tag{4. 21}$$

设 $\rho(k+L) \leq l + L$。式（4. 19）的最后一行进一步被 $B_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-k} 2^{(k+L)(\alpha-n)} 2^{(\ell+L)(\beta-m)}$ 控制。我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}} 2^{-qk} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{q(\ell+L)(\beta-m)} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-qk} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{q(\ell+L)(\beta-m)} 2^{(k+L)n} 2^{(\ell+L)m} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-qk} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{(\ell+L)\left[q(\beta-m)+m\right]} 2^{(k+L)n}.
\end{aligned} \tag{4. 22}$$

回顾（4. 7）。注意, $\frac{\beta}{m} < 1 - \frac{1}{q}$ 意味着 $q(\beta - m) < -m$。

利用（ （4. 22），并对每个$k,\mathrm{l}\geq 0$: $\rho(k+L)\leq \mathrm{l}+L$求和，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,\ell\geq 0:\ \rho(k+L)\leq \ell+L}\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}}\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right|^{q}dxdy\\
&\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq\rho(k+L)-L}2^{-qk}2^{q(k+L)(\alpha-n)}2^{(\ell+L)\left[q(\beta-m)+m\right]}2^{(k+L)n}\\
&\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\sum_{k\geq 0}2^{-qk}2^{q(k+L)(\alpha-n)}2^{\rho(k+L)\left[q(\beta-m)+m\right]}2^{(k+L)n}\qquad(q(\beta-m)<-m)\\
&=\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\sum_{k\geq 0}2^{-qk}2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)(n+\rho m)\right]}\\
&=\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\sum_{k\geq 0}2^{-qk}\ \leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho\ q}.\qquad\left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=1-\tfrac{1}{q}\right)
\end{aligned}\tag{4. 23}$$

注意到 | $x-u|\sim 2^{k+L},|y-v|\sim 2^{\ell+L}$ 对于（x,y） $\in\mathbf{Q}_{k\ell}$。考虑$k+L<0$ 以及$\mathrm{l}<k$。我们完 d

$$|x-u|^{\rho}+|y-v|\ \lesssim\ |x-u|.\tag{4. 24}$$

回忆（4. 2）和（4. 18）。我们有

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right|\ &\leq\ \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}}\frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left|\nabla\Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x-u,y-v)\right|dudv\\
&\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}}\frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta}\\
&\qquad\qquad\max\left\{\frac{1}{|x-u|},\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right\}dudv\\
&\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}}\frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta}\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}dudv\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{by (4. 24)}\\
&\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}}2^{-(n+m)L}2^{L}2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{\ell+L}\right]^{\beta-m}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{\ell+L}\right]^{-1}dudv\\
&\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\,2^{L}2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{\ell+L}\right]^{\beta-m}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{\ell+L}\right]^{-1}.
\end{aligned}\tag{4. 25}$$

假设 $\rho(k+L)\geq\mathrm{l}+L$。(4. 25) 中最后一行进一步有界于 $\mathrm{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}2^{L}2^{(k+L)(\alpha-n)}2^{\rho(k+L)(\beta-m)}2^{-\rho(k+L)}$。我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}}\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right|^{q}dxdy\ &\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}}2^{qL}2^{q(k+L)(\alpha-n)}2^{q\rho(k+L)(\beta-m)}2^{-q\rho(k+L)}dxdy\\
&\leq\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\,2^{qL}2^{q(k+L)(\alpha-n)}2^{q\rho(k+L)(\beta-m)}2^{-q\rho(k+L)}2^{(k+L)n}2^{(\ell+L)m}\\
&=\ \mathfrak{B}_{\alpha\ \beta\ \rho}\,2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]}2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta-n-\rho m)+n\right]}2^{(\ell+L)m}.
\end{aligned}\tag{4. 26}$$

利用 (4. 26)，并对每个 k、满足 ≥ 0: $\rho(k+L) \geq l+L$ 的 l 求和，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,\ell\geq 0:\ \rho(k+L)\geq \ell+L} \iint_{Q_{k\ell}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq -(\rho-1)L/\rho} \sum_{\ell\leq \rho(k+L)-L} 2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]_2 (k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta-n-\rho m)+n\right]_2 (\ell+L)m} \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq -(\rho-1)L/\rho} 2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]_2 (k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta-n-\rho m)+n\right]_2 \rho(k+L)m} \qquad (4.\ 27) \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq -(\rho-1)L/\rho} 2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]_2 (k+L)\left[q(\alpha+\rho m)-(q-1)(n+\rho m)\right]} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq -(\rho-1)L/\rho} 2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]} \leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}. \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1-\tfrac{1}{q}\right)
\end{aligned}$$

设 $\rho(k+L) < l+L$。(4. 25) 中的最后一行可进一步由 $B_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{L} 2^{(k+L)(\alpha-n)} 2^{(\ell+L)(\beta-m)} 2^{-(\ell+L)}$ 控制。

$$\begin{aligned}
\iint_{Q_{k\ell}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy &\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{Q_{k\ell}} 2^{qL} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{q(\ell+L)(\beta-m)} 2^{-q(\ell+L)} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} 2^{qL} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{q(\ell+L)(\beta-m)} 2^{-q(\ell+L)} 2^{(k+L)n} 2^{(\ell+L)m} \qquad (4.\ 28) \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-q\ell} 2^{(k+L)\left[q(\alpha-n)+n\right]_2 (\ell+L)\left[q(\beta-m)+m\right]}.
\end{aligned}$$

回顾（4.6）。注意，$\alpha > 1-\frac{1}{q}$ 意味着 $q(\alpha-n) > -n$。利用（4.28）并对每个 $k,l \geq 0$:$\rho(k+L) < l+L$ 求和，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,\ell\geq 0:\ \rho(k+L)<\ell+L} \iint_{Q_{k\ell}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{\ell\geq 0} \sum_{k<\ell/\rho+L/\rho-L} 2^{-q\ell} 2^{(k+L)\left[q(\alpha-n)+n\right]_2 (\ell+L)\left[q(\beta-m)+m\right]} \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{\ell\geq 0} 2^{-q\ell} 2^{\left[\ell/\rho+L/\rho\right]\left[q(\alpha-n)+n\right]_2 (\ell+L)\left[q(\beta-m)+m\right]} \qquad (q(\alpha-n) > -n) \qquad (4.\ 29) \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{\ell\geq 0} 2^{-q\ell} 2^{(\ell+L)\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)(n+\rho m)\right]/\rho} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{\ell\geq 0} 2^{-q\ell} \leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}. \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1-\tfrac{1}{q}\right)
\end{aligned}$$

4.3 情形 3：$k > 0, l = 0$ 或 $k = 0, l > 0$

Let $(x, y) \in \mathbf{Q}_{k0}$。我们有 $|x - u| \sim 2^{k+L}$。考虑 $\rho(k + L) \geq L$。若 $k + L \geq 0$，则可得

$$|x-u|^{\rho} \gtrsim |x-u|. \tag{4.30}$$

回顾 (4.2) 和 (4.18)。我们有

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right| &\leq \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}} \sqrt{|u|^2+|v|^2}\left|\nabla\Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x-u, y-v)\right| dudv \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\frac{1}{2}\mathbf{Q}\}} \sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} \max\left\{\frac{1}{|x-u|}, \frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right\} dudv \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}} \sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} \frac{1}{|x-u|} dudv \qquad \text{by (4.30)} \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} 2^{-(n+m)L} 2^{L} 2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{L}\right]^{\beta-m} 2^{-(k+L)} dudv \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-k} 2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{L}\right]^{\beta-m}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

最　后一行 (4.31) 还可以用 $\mathrm{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-k} 2^{(k+L)(\alpha-n)} 2^{\rho(k+L)(\beta-m)}$ 进一步估计。我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{Q}_{k0}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy &\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\mathbf{Q}_{k0}} 2^{-qk} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{q\rho(k+L)(\beta-m)} dxdy \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\mathbf{Q}_{k0}} 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} 2^{(k+L)n} 2^{Lm}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

利用（4.32）并对每个 $k \geq 0$: $\rho(k + L) \geq L$ 求和，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 0:\ \rho(k+L)\geq L} \iint_{\mathbf{Q}_{k0}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0:\ \rho(k+L)\geq L} 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} 2^{(k+L)n} 2^{Lm} \\
&\leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0} 2^{-qk} 2^{q(k+L)\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]} 2^{(k+L)n} 2^{\rho(k+L)m} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0} 2^{-qk} 2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)(n+\rho m)\right]} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\geq 0} 2^{-qk} \leq \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}. \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1 - \tfrac{1}{q}\right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

另一方面，若$k+L<0$，则可得

$$|x-u|^{\rho}+|y-v| \lesssim 2^{\rho(k+L)}+2^{L} \lesssim 2^{k+L} \approx |x-u|. \tag{4.34}$$

回顾 (4.2) 和 (4.18)。我们有

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right| &\le \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left|\nabla\Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x-u,y-v)\right|dudv \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} \\
&\qquad\qquad \max\left\{\frac{1}{|x-u|},\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right\}dudv \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\sqrt{|u|^2+|v|^2}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta}\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}dudv \\
&\qquad\qquad \text{by (4.34)} \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} 2^{-(n+m)L}2^{L}2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{L}\right]^{\beta-m}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{L}\right]^{-1}dudv \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{L}2^{(k+L)(\alpha-n)}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{L}\right]^{\beta-m}\left[2^{\rho(k+L)}+2^{L}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

由于 $\rho(k+L)\ge L$，最后一行 (4.35) 可进一步估计为 $\mathrm{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}2^{L}2^{(k+L)(\alpha-n)}2^{\rho(k+L)(\beta-m)}2^{-\rho(k+L)}$。我们有

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}}\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right|^{q}dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\mathbf{Q}_{k\ell}}2^{qL}2^{q(k+L)(\alpha-n)}2^{q\rho(k+L)(\beta-m)}2^{-q\rho(k+L)}dxdy \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}2^{qL}2^{q(k+L)(\alpha-n)}2^{q\rho(k+L)(\beta-m)}2^{-q\rho(k+L)}2^{(k+L)n}2^{Lm} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]}2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta-n-\rho m)+n\right]}2^{Lm}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

利用 (4.36)，并对每个 $k\ge 0$: $\rho(k+L)\ge L$ 求和，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge 0:\ \rho(k+L)\ge L}\iint_{\mathbf{Q}_{k0}}\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right|^{q}dxdy \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{k\ge 0:\ \rho(k+L)\ge L}2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]}2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta-n-\rho m)+n\right]}2^{Lm} \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{k\ge -(\rho-1)L/\rho}2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]}2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho\beta-n-\rho m)+n\right]}2^{\rho(k+L)m} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{k\ge -(\rho-1)L/\rho}2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]}2^{(k+L)\left[q(\alpha+\rho m)-(q-1)(n+\rho m)\right]} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{k\ge -(\rho-1)L/\rho}2^{q\left[L-\rho(k+L)\right]} \le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}. \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m}=1-\tfrac{1}{q}\right)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

考虑 $\rho(k+L) < L$。回顾在 (1. 6)-(1. 7) 中定义的 $\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} f = f * \Omega^{\alpha\beta}_{\rho}$。我们有 e

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right| &\le \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}} \Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x-u, y-v)\,du dv \\
&\le \sum_{s\le L} \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}\cap\{\sqrt{m}2^{s-1}\le|y-v|<\sqrt{m}2^{s}\}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}} \Omega^{\alpha\beta}_{\rho}(x-u, y-v)\,du dv \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{s\le L} 2^{-(n+m)L} 2^{(k+L)(\alpha-n)} \left[2^{\rho(k+L)} + 2^{s}\right]^{\beta-m} 2^{Ln} 2^{sm} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{s\le L} 2^{-Lm} 2^{(k+L)(\alpha-n)} \left[2^{\rho(k+L)} + 2^{s}\right]^{\beta-m} 2^{sm} \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{s\le L} 2^{-Lm} 2^{(k+L)(\alpha-n)} 2^{s\beta} \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{(k+L)(\alpha-n)} 2^{L(\beta-m)}.
\end{aligned}
\tag{4. 38}
$$

利用（4. 38），我们得到

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{Q}_{k0}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \iint_{\mathbf{Q}_{k0}} 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{qL(\beta-m)} dxdy \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{q(k+L)(\alpha-n)} 2^{qL(\beta-m)} 2^{(k+L)n} 2^{Lm} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\, 2^{(k+L)\left[q(\alpha-n)+n\right]} 2^{L\left[q(\beta-m)+m\right]}.
\end{aligned}
\tag{4. 39}
$$

回顾 (4. 6)。注意，$^{\alpha}{}_{n} \succ 1-{}^{1}{}_{q}$意味着 $q(\alpha-n) > -n$。利用 (4. 39) 并对$k \ge 0$: $\rho(k+L) < L$求和，可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\ge 0:\ \rho(k+L)<L} \iint_{\mathbf{Q}_{k0}} \left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta} a(x,y)\right|^{q} dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{k\ge 0:\ \rho(k+L)<L} 2^{(k+L)\left[q(\alpha-n)+n\right]} 2^{L\left[q(\beta-m)+m\right]} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho} \sum_{0\le k<L/\rho-L} 2^{(k+L)\left[q(\alpha-n)+n\right]} 2^{L\left[q(\beta-m)+m\right]} \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}\, 2^{L\left[q(\alpha-n)+n\right]/\rho} 2^{L\left[q(\beta-m)+m\right]} \qquad (q(\alpha-n)+n>0) \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}\, 2^{L\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)(n+\rho m)\right]/\rho} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}. \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1-\tfrac{1}{q}\right)
\end{aligned}
\tag{4. 40}
$$

4.4 情形4：$k = 0$且$l > 0$

设 $(x, y) \in \mathbf{Q}_{0\ell}$。我们有 $|y - v| \sim 2^{\ell+L}$。回顾 (1. 7) 中定义的 $\Omega_{\rho}^{\alpha\beta}(x, y)$。此外，$\mathbf{supp}a \subset \frac{1}{2}\mathbf{Q}$ 和$|a(x,y)| \le 2^{n+m}\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}^{-1}$。我们有

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\rho}a(x,y)\right| &\le \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} |a(u,v)|\Omega_{\rho}^{\alpha\beta}(x-u,y-v)dudv \\
&\lesssim \iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} dudv \\
&\le \sum_{s\le L}\iint_{\frac{1}{2}\mathbf{Q}\cap\{\sqrt{n}2^{s-1}\le|x-u|<\sqrt{n}2^{s}\}} \frac{1}{\mathbf{vol}\{\mathbf{Q}\}}\left(\frac{1}{|x-u|}\right)^{n-\alpha}\left[\frac{1}{|x-u|^{\rho}+|y-v|}\right]^{m-\beta} dudv \qquad (4.\ 41) \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{s\le L} 2^{-(n+m)L}2^{s(\alpha-n)}\left[2^{\rho s}+2^{\ell+L}\right]^{\beta-m}2^{sn}2^{Lm} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{s\le L} 2^{-Ln}2^{s\alpha}\left[2^{\rho s}+2^{\ell+L}\right]^{\beta-m}.
\end{aligned}$$

假设 $l \ge (\rho-1)L$。我们发现 $\rho s \le \rho L \le l + L$。(4. 41) 的最后一行可进一步估计为

$$\mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{s\le L} 2^{-Ln}2^{s\alpha}2^{(\ell+L)(\beta-m)} \le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{L(\alpha-n)}2^{(\ell+L)(\beta-m)}. \qquad (4.\ 42)$$

由 (4. 41)-(4. 42)，可得

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{Q}_{0\ell}}\left|\mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\rho}a(x,y)\right|^{q}dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\mathbf{Q}_{0\ell}} 2^{qL(\alpha-n)}2^{q(\ell+L)(\beta-m)}dxdy \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{qL(\alpha-n)}2^{q(\ell+L)(\beta-m)}2^{Ln}2^{(\ell+L)m} \qquad (4.\ 43) \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{L\left[q(\alpha-n)+n\right]}2^{(\ell+L)\left[q(\beta-m)+m\right]}.
\end{aligned}$$

回忆式（4. 7）。我们有 $\beta_m < 1 - \frac{1}{q} \Longrightarrow q(\beta-m)+m < 0$。利用式（4. 43）并对 $l \ge 0: l \ge (\rho-1)L$ 求和，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\ge 0:\ \ell\ge(\rho-1)L}\iint_{\mathbf{Q}_{0\ell}}\left|\mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\rho}a(x,y)\right|^{q}dxdy &\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{\ell\ge 0:\ \ell\ge(\rho-1)L} 2^{L\left[q(\alpha-n)+n\right]}2^{(\ell+L)\left[q(\beta-m)+m\right]} \\
&\le \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}\,2^{L\left[q(\alpha-n)+n\right]}2^{\rho L\left[q(\beta-m)+m\right]} \qquad (4.\ 44) \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}\,2^{L\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)(n+\rho m)\right]} \\
&= \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}. \qquad \left(\tfrac{\alpha+\rho\beta}{n+\rho m} = 1-\tfrac{1}{q}\right)
\end{aligned}$$

设 $\mathrm{l} < (\rho-1)L$。式（4.41）的最后一行可进一步估计为

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{s\le L}2^{-Ln}2^{s\alpha}\left[2^{\rho s}+2^{\ell+L}\right]^{\beta-m}\ \le\\
&\mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{s\le(\ell+L)/\rho}2^{-Ln}2^{s\alpha}2^{(\ell+L)(\beta-m)}\ +\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{(\ell+L)/\rho<s\le L}2^{-Ln}2^{s\alpha}2^{\rho s(\beta-m)}\\
&\le\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{-Ln}2^{(\ell+L)\left[\alpha+\rho\beta-\rho m\right]/\rho}\ +\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{L\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]}.
\end{aligned}\tag{4.45}$$

由 (4.41) 和 (4.45)，可得

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbf{Q}_{0\ell}}\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right|^{q}dxdy\ \le\\
&\mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\mathbf{Q}_{0\ell}}2^{-qLn}2^{q(\ell+L)\left[\alpha+\rho\beta-\rho m\right]/\rho}dxdy+\mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\iint_{\mathbf{Q}_{0\ell}}2^{qL\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]}dxdy\\
&\le\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{-qLn}2^{q(\ell+L)\left[\alpha+\rho\beta-\rho m\right]/\rho}2^{Ln}2^{(\ell+L)m}\ +\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{qL\left[\alpha+\rho\beta-(n+\rho m)\right]}2^{Ln}2^{(\ell+L)m}\\
&=\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{-L(q-1)n}2^{(\ell+L)\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)\rho m\right]/\rho}\ +\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\,2^{L\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)n-q\rho m\right]}2^{(\ell+L)m}.
\end{aligned}\tag{4.46}$$

注意到 $\underline{\alpha+\rho\beta}_{n+\rho m}=1=\frac{1}{q}\Longrightarrow q(\alpha+\rho\beta)=(q-1)(n+\rho m)$，这进一步表明 $q(\alpha+\rho\beta)>(q-1)\rho m$。利用 (4.46)，并对 $\mathrm{l}\ge 0:\mathrm{l}<(\rho-1)L$ 求和，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell\ge 0:\ \ell<(\rho-1)L}\iint_{\mathbf{Q}_{0\ell}}\left|\mathbf{I}^{\rho}_{\alpha\beta}a(x,y)\right|^{q}dxdy\ \le\\
&\mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{\ell<(\rho-1)L}2^{-L(q-1)n}2^{(\ell+L)\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)\rho m\right]/\rho}\ +\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho}\sum_{\ell<(\rho-1)L}2^{L\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)n-q\rho m\right]}2^{(\ell+L)m}\\
&=\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}\,2^{L\left[q(\alpha+\rho\beta)-(q-1)(n+\rho m)\right]}\ =\ \mathfrak{B}_{\alpha\,\beta\,\rho\,q}.
\end{aligned}\tag{4.47}$$

参考文献

[1] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood，分数阶积分的一些性质，《数学杂志》**27**：第1期，565-606，1928年。

[2] S. L. Sobolev，泛函分析中的一个定理，《数学文集》**46**：471-497，1938年。

[3] C. Fefferman 和 E. M. Stein，$\mathbf{H}^{p}$ 多变量空间，《数学学报》，**129**：137-193，1972年。

[4] R. R. Coifman，《实变数刻画》 $\mathbf{H}^{p}$，《数学研究》**51**：269-274，1974年。

[5] L. Carleson，关于在$\mathbf{H}^{p}$ 上有界测度的反例：双圆盘情形，Mittag Keffker 报告，第7期，1974年。[6] R. F. Gundy 和 E. M. Stein，H^{p} 多圆盘上的理论，《美国国家科学院院刊》**76**：1026-1029，1979年。

[7] *S. G Krantz*，《*Hardy* 空间上的分数阶积分》，《数学研究》*73*：第*2*期，*87-94*，*1982*年。[8] *D. H. Phong* 和 *E. M. Stein*，《边值问题中出现的若干其他类伪微分算子与奇异积分算子 *I*：算子复合》，美国数学杂志 *104*：第*1*期，*141-172*，*1982*年。[9] *D. M¨uller*，*F. Ricci*，*E. M. Stein*，《*Heisenberg*（类型）群上的 *Marcinkiewicz*乘子与多参数结构 *I*》，数学创刊 *119*：第*2*期，*199-233*，*1995*年。[10] *A. Nagel*，*F. Ricci* 和 *E. M. Stein*，《具有旗核的奇异积分及二次*CR*流形上的分析》，泛函分析杂志 *181*：*29-118*，*2001*年。[11] *A. Nagel*，*F. Ricci*，*E. M. Stein* 和 *S. Wainger*，《齐性群上具有旗核的奇异积分：*I*》，伊比利亚美洲数学杂志 *28*：*631-722*，*2012*年。[12] *Y. Han*，*C. Lin*，*G. Lu*，*Z. Ruan* 和 *E. Sawyer*，《与不同齐次性相关的 *Hardy* 空间及复合算子的有界性》，伊比利亚美洲数学杂志 *29*：第*4*期，*1127-1157*，*2013*年。[13] *Y. Han*，*G. Lu* 和 *E. Sawyer*，《*Heisenberg*群上的旗*Hardy*空间与 *Marcinkiewicz*乘子》，分析与偏微分方程 *7*：*1465-1534*，*2014*年。[14] *Y. Han*，*M-Y. Lee*，*J. Li* 和 *B. D. Wick*，《多参数旗结构中的极大函数、*Littlewood-Paley*理论、*Riesz*变换与原子分解》，美国数学会回忆录 *279*（*2022*年）*1373*。[15] *Y. Han*，*M-Y. Lee*，*J. Liand B. D. Wick*，《多参数旗结构中 *Calder´on-Zygmundoperator* 的端点估计》，数学进展 *482*（*2025*年）*110629*。[16] *Y. Tang*，《乘积区域上 *Hardy* 空间的分数阶积分》，*arXiv*：*2509.03158*。

复旦大学数学科学学院，中国上海市，邮编 200433，电子邮箱：
20114010001@fudan.edu.cn

西湖大学数学系，中国杭州，邮编 310014，电子邮箱：
wangzipeng@westlake.edu.cn