arXiv:2601.03721v1 [math.AP] 7 Jan 2026

V-拉普拉斯算子的刘维尔定理与非线性椭圆方程的梯度估计

YIKE JIA

摘要。 本文为非线性椭圆方程的正解建立了梯度估计

$$\Delta_V u^m + \mu(x)u + p(x)u^\alpha = 0, \quad m > 1$$

在任意光滑度量测度空间上，若其 k-Bakry-Émery 曲率下界为 $-(k-1)K$，其中 $K \geq 0$。此外，我们还得到了相关的刘维尔定理和 Harnack 不等式。我们部分推广了 Wang 的结论；当 $V = 0, \mu = 0$ 时，该方程变为 $\Delta u^m + p(x)u^\alpha = 0$。而当 $V = f, \mu = c, \ p = 0$ 时，该方程变为 $\Delta_f u^m + cu = 0$。

1. 引言

1981 年，Gidas-Spruck [6]研究了方程

$$\Delta u + hu^\alpha = 0$$

在具有非负里奇曲率的完备流形上，其中 $1 \leq \alpha \leq \frac{n+2}{n-2}$ 和 $h(x) \geq 0$，若 $u(x)$ 是该方程的非负解，则$u(x) \equiv 0$。2010年，Yang [15] 研究了该方程

$$\Delta u + cu^{-\alpha} = 0$$

在非紧完备黎曼流形上，其中 $\alpha > 0$ 和 c 是两个实常数。2015年，Wang [11] 推导出了该方程正解的梯度估计和刘维尔型定理

$$\Delta_f u^m + cu = 0$$

在光滑测度空间上，其 m-Bakry-Émery 里奇曲率有界于$Ric_{f,\ m} \geq -(m-1)K$，其中 $K \geq 0$。2015年，Wang [12] 研究了该方程

$$\Delta u^m + \lambda(x)u^l = 0$$

在无边界完备黎曼流形上。其中 $m > 1$ 和l 是实数，且 $\lambda(x) \in C^2(M^n)$。

2020年数学主题分类。58J35，35J05。关键词和短语。非线性椭圆方程、梯度估计、刘维尔定理、Harnack不等式、Bakry-Émery 里奇曲率。

拉普拉斯算子的一种重要推广是 V-拉普拉斯算子

$$\Delta_V \star = \Delta \star + \langle V, \nabla \star \rangle$$

在黎曼流形 $(M^n,\ g)$ 上，其中 V 是 M 上的光滑场。称光滑函数 u 为 V-调和函数，若它是以下方程的解:

$$\Delta_V u = 0$$

V-调和函数是 Chen、Jost 和 Wang 引入的 V-调和映射的一个特例。按照 [3, 13], ，我们定义 k-Bakry-Émery 里奇张量

$$Ric_V^k = Ric - \frac{1}{2} L_V g - \frac{1}{k-n} V^\flat \otimes V^\flat,$$

$$Ric_V = Ric - \frac{1}{2} L_V g,$$

其中 Ric 是 M 的 Ricci张量， L 是李导数， $\flat$ 将向量场同构地映射到其对偶 1-形式， $k \geq n$ 是一个常数。全文中，我们约定 $k = n$ 当且仅当 $V = 0$。根据 Δ_V 的 Bochner公式

$$\frac{1}{2}\Delta_V |\nabla u|^2 = |\operatorname{Hess} u|^2 + \operatorname{Ric}_V(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla u, \nabla \Delta_V u \rangle.$$

受 [6, 11, 12, 15, 16] 的研究启发，我们研究以下非线性椭圆方程

$$\Delta_V u^m + \mu(x) u + p(x) u^\alpha = 0, \quad m > 1, \tag{1.1}$$

在一个完备黎曼流形上，其中 k-Bakry-Émery 里奇曲率有下界， $m > 1$ 和 α 为实数，且 $p(x)$ $\mu(x)$ $\in C^2(M^n)$。

定理1.1。 设(M^n, g) 是一个无边界的完备黎曼流形。假设 B_{2R} 是一个半径为 $2R$ 、以$q \in M$ 为中心的测地球，并且 $Ric_V^k(B_{2R}) \geq -K$ 满足 $K \geq 0$。此外，假设存在两个正数 δ_1、 δ_2，使得 $|p(x,t)| \leq \delta_1$、 $|\mu(x,t)| \leq \delta_2$。进一步，假设 $\mu p \geq 0$ 、 $|\nabla p|^2 \leq |p|^2$ 和 $|\nabla \mu|^2 \leq |\mu|^2$。设 $u(x)$ 是方程(1.1) 的一个正解，并且 $v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$。 ——

(1) 假设 $\alpha \geq 1$ 、 $\beta > 0$ ， 则

$$\sup_{B_q(R)} \frac{|\nabla v|^2}{v} \leq \frac{C_4(m-1)}{m+1} [\frac{1}{R^2}(1 + \sqrt{K}R) + 2K + 1] \sup_{x \in M^n} v + H_1. \tag{1.2}$$

(2) 假设 $\alpha < 1$, $\beta > 0$ ， 则

$$\sup_{B_q(R)} \frac{|\nabla v|^2}{v} \leq \frac{C_4(m-1)}{m+1} [\frac{1}{R^2}(1 + \sqrt{K}R) + 2K + 1] \sup_{x \in M^n} v + H_2. \tag{1.3}$$

其中 C_4 是一个依赖于 k的常数，

$$H_1 = \frac{(m-1)(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{n-1} + (m-2\alpha+1)|\delta_1\Big(\frac{m-1}{m}\sup_{x\in M^n} v\Big)^{\frac{\alpha-1}{m-1}} + \frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)} + 1|\delta_2,$$

$$H_2 = \frac{(m-1)(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{n-1} + (m-2\alpha+1)|\delta_1\Big(\frac{m-1}{m}\inf_{x\in M^n} v\Big)^{\frac{\alpha-1}{m-1}} + \frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)} + 1|\delta_2.$$

此外，若(M^n, g)具有非负里奇曲率，令 $R \to \infty$，则对于 $\alpha \geq 1$，有如下估计，

$$\frac{|\nabla v|^2}{v} \leq C(m, n, \alpha, k, \delta_1, \delta_2, \sup_{x\in M^n} v), \tag{1.4}$$

且对于 $\alpha < 1$

$$\frac{|\nabla v|^2}{v} \leq C'(m, n, \alpha, k, \delta_1, \delta_2, \sup_{x\in M^n} v, \inf_{x\in M^n} v). \tag{1.5}$$

其中

$$C(m, n, \alpha, k, \delta_1, \delta_2, \sup_{x\in M^n} v) = \frac{C_4(m-1)}{m+1}\sup_{x\in M^n} v + H_1,$$

$$C'(m, n, \alpha, k, \delta_1, \delta_2, \sup_{x\in M^n} v, \inf_{x\in M^n} v) = \frac{C_4(m-1)}{m+1}\sup_{x\in M^n} v + H_2.$$

推论 1.2. 设(M^n, g)为无边界的非紧完备黎曼流形。假设 $Ric_V^k(M^n) \geq 0$。设 $u(x)$是方程(1.1) 的正解，且 $v = \underline{\frac{m}{m-1}u^{m-1}}$。

若 $\alpha \geq 1$，则

$$v(x) \leq v(y)\exp[r(x,y)\sqrt{\frac{C(m, n, \alpha, k, \delta_1, \delta_2, K, \sup_{x\in M^n} v)}{\inf_{x\in M^n} v}}]. \tag{1.6}$$

如果 $\alpha < 1$，则

$$v(x) \leq v(y)\exp[r(x,y)\sqrt{\frac{C'(m, n, \alpha, k, \delta_1, \delta_2, K, \sup_{x\in M^n} v, \inf_{x\in M^n} v)}{\inf_{x\in M^n} v}}]. \tag{1.7}$$

定理 1.3。 设(M^n, g)是一个无边界完备黎曼流形。假设 B_{2R} 是以 $q \in M$为中心、半径为 $2R$ 的测地球，且 $Ric_V^k(B_{2R}) \geq -K$ 满足 $K \geq 0$。设 $u(x)$ 是方程的正解

方程 (1.1)。设 $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$, $\beta > 0$, $|\nabla p|^2 \leq |p|^2$ 和 $|\nabla \mu|^2 \leq |\mu|^2$ 。若 $p \geq 0$, $\mu \geq 0$ 和 $\alpha \leq \frac{(k+1)(m+1)}{2(k-1)}$, 则有

$$\sup_{B_q(R)} \frac{|\nabla v|^2}{v} \leq C_4[\frac{1}{R^2}(1+\sqrt{K}R) + 2K + 1] \sup_{x \in M^n} v, \tag{1.8}$$

其中 C_4 是一个依赖于 k 的常数。

令 $R \to \infty$, 则我们在完备非紧黎曼流形上推得,

$$\frac{|\nabla v|^2}{v} \leq C_4[2K+1] \sup_{x \in M^n} v. \tag{1.9}$$

推论 1.4. 设(M^n, g) 是一个无边界的非紧完备黎曼流形。假设 $Ric_V^k(M^n) \geq 0$, 且 $u(x)$ 是方程 (1.1)的一个正解, 其中 $p(x)$ 和 $\mu(x)$ 是常数。若 $p \geq 0$、$\mu \geq 0$ 和 $\alpha \leq \frac{(k+1)(m+1)}{2(k-1)}$, 则 u 是一个常数。

定理 1.5. 设(M^n, g) 是一个满足 $Ric_V^k(M^n) \geq -K$ 且满足 $K \geq 0$ 的完备非紧黎曼流形。设 $u(x)$ 是方程的一个正解

$$\Delta_V u^m + \mu u + p u^\alpha = 0, \tag{1.10}$$

其中 $p > 0$ 和 μ 是常数。设 $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$ 和 $1 \leq \alpha \leq \frac{(m+1)(k+1)}{2(k-1)}$.(1)若 $\mu \geq 0$,

$$\begin{aligned} p \leq & \frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1} + (m-2\alpha+1)} (\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}} (\sup_{x \in M^n} v)^{\frac{m-\alpha}{m-1}} \\ & - \frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1} + (m-2\alpha+1)} (\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)} + 1)\mu (\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}} (\frac{1}{\sup_{x \in M^n} v})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}. \end{aligned}$$

或者 $\mu < 0$,

$$\begin{aligned} p \leq & \frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1} + (m-2\alpha+1)} (\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}} (\sup_{x \in M^n} v)^{\frac{m-\alpha}{m-1}} \\ & - \frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1} + (m-2\alpha+1)} (\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)} + 1)\mu (\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}} (\frac{1}{\inf_{x \in M^n} v})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}, \end{aligned}$$

那么对于任意 $x \in M^n$,

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla v|^2}{v} \leq & \frac{2(m-1)^2(k-1)^2}{m(m+1)} K \sup_{x \in M^n} v \\ & - \frac{(m-1)(k-1)}{m(m+1)} [\frac{2(m+1)}{k-1} + (m-2\alpha+1)] p (\frac{m-1}{m} \sup_{x \in M^n} v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}} \\ & - \frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)} [\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)} + 1]\mu. \end{aligned}$$

(2) 如果当 $\mu \geq 0$ 时，

$$p \geq \frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\left(\sup_{x\in M^n} v\right)^{\frac{m-\alpha}{m-1}} - \frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}\left(\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+1\right)\mu\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\left(\frac{1}{\sup_{x\in M^n} v}\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}.$$

或 $\mu < 0$,

$$p \geq \frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\left(\sup_{x\in M^n} v\right)^{\frac{m-\alpha}{m-1}} - \frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}\left(\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+1\right)\mu\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\left(\frac{1}{\inf_{x\in M^n} v}\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}},$$

那么 v 必须是常数。

2. 预备知识

引理 2.1。 设(M^n, g) 是一个无边界的完备黎曼流形。假设 B_{2R} 是一个以 $q \in M$ 为中心、半径为 $2R$ 的测地球，并且$Ric_V^k(B_{2R}) \geq -K$ 满足 $K \geq 0$。设 $u(x)$ 是方程(1.1) 的一个正解，且 $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$。令 $\omega = \frac{|\nabla v|^2}{v}$ 和 $G = \overline{\varphi\omega}$，其中 $\varphi(x)$ 是一个光滑截断函数。假设 $G(x)$ 在 x_0 处取得最大值，且 $\varphi(x_0) > 0$。则在 x_0处，

$$\begin{aligned}\varphi\Delta_V\omega \geq & \left[\frac{k}{2(k-1)}+\frac{2m}{(k-1)(m-1)^2}+\frac{1}{m-1}\right]\frac{G^2}{v\varphi} \\ & +\left[\frac{2m}{m-1}-\frac{k}{k-1}-\frac{2}{(k-1)(m-1)}\right]\frac{\nabla v\nabla\varphi}{v\varphi}G+\frac{k}{2(k-1)}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}G \\ & +\left[\left(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1\right)\mu+\left(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1}\right)p\left(\frac{m-1}{m}v\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\right]\frac{G}{v} \\ & -\frac{2}{v}\varphi|\nabla v|\left(|\nabla\mu|+|\nabla p|\left(\frac{m-1}{m}v\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\right)-\frac{2}{k-1}\left[\mu+p\left(\frac{m-1}{m}v\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\right]\frac{\nabla v\nabla\varphi}{v} \\ & +\frac{2}{k-1}\left[\mu+p\left(\frac{m-1}{m}v\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\right]^2\frac{\varphi}{v}-2(k-1)KG.\end{aligned} \tag{2.1}$$

证明。 通过简单计算，我们可以得到

$$(m-1)v\Delta_V v+|\nabla v|^2 = -p(m-1)\left(\frac{m-1}{m}\right)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}v^{1+\frac{\alpha-1}{m-1}}-(m-1)\mu v. \tag{2.2}$$

我们可以计算

$$\begin{aligned}\Delta_V\omega &= \Delta_V(\frac{|\nabla v|^2}{v})\\ &= \frac{\Delta_V|\nabla v|^2}{v} - \frac{2\nabla|\nabla v|^2\nabla v}{v^2} - \frac{|\nabla v|^2\Delta_V v}{v^2} + \frac{2|\nabla v|^4}{v^3}\\ &= \frac{2}{v}[|\operatorname{Hess} v|^2 + \nabla v\cdot\nabla\Delta_V v + \operatorname{Ric}_V(\nabla v,\nabla v)]\\ &\quad - \frac{2\nabla|\nabla v|^2\cdot\nabla v}{v^2} - \frac{|\nabla v|^2\Delta_V v}{v^2} + \frac{2|\nabla v|^4}{v^3}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

由于 G 在 x_0处取得最大值，因此 $\nabla G = 0$。在 x_0处，我们有

$$\nabla\omega = -\frac{G\nabla\varphi}{\varphi^2} \tag{2.4}$$

and

$$\nabla|\nabla v|^2 = -\frac{vG}{\varphi^2}\nabla\varphi + \frac{G}{\varphi}\nabla v. \tag{2.5}$$

我们在 x_0附近选取一个标准正交标架 $\{e_1,\dots,e_n\}$，使得 $|\nabla v|e_1 = \nabla v$。我们有

$$\frac{|\nabla|\nabla v|^2|^2}{4|\nabla v|^2} = \sum_{j=1}^n v_{1j}^2, \tag{2.6}$$

$$\frac{\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^2}{2|\nabla v|^2} = v_{11}. \tag{2.7}$$

由 (2.2),

$$\begin{aligned}|\operatorname{Hess} v|^2 &\geq v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^n v_{1\alpha}^2 + \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha\alpha}^2\\ &\geq v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^n v_{1\alpha}^2 + \frac{1}{n-1}(\sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha\alpha})^2\\ &= v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^n v_{1\alpha}^2 + \frac{1}{n-1}(\Delta v - v_{11})^2\\ &= \frac{n}{n-1}v_{11}^2 + 2\sum_{\alpha=2}^n v_{1\alpha}^2 - \frac{2v_{11}}{n-1}\Delta v + \frac{1}{n-1}(\Delta v)^2\\ &= \frac{n}{n-1}v_{11}^2 + \frac{2v_{11}}{n-1}[\langle V,\nabla v\rangle + \frac{\omega}{m-1} + \mu + p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]\\ &\quad + \frac{1}{n-1}[\langle V,\nabla v\rangle + \frac{\omega}{m-1} + \mu + p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]^2 + 2\sum_{\alpha=2}^n v_{1\alpha}^2.\end{aligned}$$

于是，我们有

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{Hess}\ v|^2+\mathrm{Ric}_V(\nabla v,\nabla v)\\
&\quad\geq \frac{n}{n-1}v_{11}^2+\frac{2v_{11}}{n-1}[\langle V,\nabla v\rangle+\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]\\
&\quad+\frac{1}{n-1}[\langle V,\nabla v\rangle+\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]^2+2\sum_{\alpha=2}^{n}v_{1\alpha}^2\\
&\quad-(k-1)K|\nabla v|^2+\frac{1}{k-n}\langle V,\nabla v\rangle^2\\
&\quad=\frac{n}{n-1}v_{11}^2+2\sum_{\alpha=2}^{n}v_{1\alpha}^2+\frac{2v_{11}}{n-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\\
&\quad+\frac{1}{n-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2+\frac{k-1}{(k-n)(n-1)}(\langle V,\nabla v\rangle)^2\\
&\quad+\frac{2\langle V,\nabla v\rangle}{n-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}+v_{11}\big)-(k-1)K|\nabla v|^2.
\end{aligned}
$$

由于 $a>0$，我们有 $ax^2+bx\geq-\frac{b^2}{4a}$，因此

$$
\begin{aligned}
&\frac{k-1}{(k-n)(n-1)}(\langle V,\nabla v\rangle)^2+\frac{2\langle V,\nabla v\rangle}{n-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}+v_{11}\big)\\
&\geq-\frac{k-n}{(k-1)(n-1)}(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}+v_{11})^2.
\end{aligned}
$$

那么，

$$
\begin{aligned}
&|\operatorname{Hess}v|^2+\mathrm{Ric}_V(\nabla v,\nabla v)\\
&\quad\geq\frac{n}{n-1}v_{11}^2+2\sum_{\alpha=2}^{n}v_{1\alpha}^2+\frac{2v_{11}}{n-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\\
&\quad+\frac{1}{n-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2-(k-1)K|\nabla v|^2\\
&\quad-\frac{k-n}{(k-1)(n-1)}(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}+v_{11})^2\\
&\quad=\frac{k}{k-1}v_{11}^2+2\sum_{\alpha=2}^{n}v_{1\alpha}^2+\frac{2v_{11}}{k-1}(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}})\\
&\quad+\frac{1}{k-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2-(k-1)K|\nabla v|^2\\
&\quad\geq\frac{k}{k-1}\sum_{j=1}^{n}v_1^2+\frac{2v_{11}}{k-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\\
&\quad+\frac{1}{k-1}\big(\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2-(k-1)K|\nabla v|^2.
\end{aligned}
$$

由 (2.4)、(2.5)、(2.6) 和 (2.7)，可得

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{Hess}\ v|^2+\mathrm{Ric}_V(\nabla v,\nabla v)\\
&\geq \frac{k}{k-1}\frac{|\nabla|\nabla v|^2|^2}{4|\nabla v|^2}+\frac{\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^2}{(k-1)|\nabla v|^2}[\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]\\
&\quad+\frac{1}{k-1}[\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]^2-(k-1)K|\nabla v|^2\\
&=\frac{k}{4(k-1)|\nabla v|^2}[\frac{G}{\varphi}\nabla v-\frac{vG}{\varphi^2}\nabla\varphi]^2+\frac{1}{k-1}[\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]^2\\
&\quad+\frac{1}{(k-1)|\nabla v|^2}[\frac{G}{\varphi}|\nabla v|^2-\frac{vG}{\varphi^2}\nabla v\nabla\varphi][\frac{\omega}{m-1}+\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]\\
&\quad-(k-1)K|\nabla v|^2\\
&=\frac{k}{4(k-1)}(\frac{G}{\varphi})^2+\frac{kv^2}{4(n-1)|\nabla v|^2}\frac{G^2}{\varphi^4}|\nabla\varphi|^2-\frac{k}{2(k-1)|\nabla v|^2}\cdot\frac{vG^2\nabla v\nabla\varphi}{\varphi^3}\\
&\quad+\frac{\omega^2}{(k-1)(m-1)^2}+\frac{2\omega}{(k-1)(m-1)}\big(\mu+p(\frac{m}{m-1}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\\
&\quad+\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m}{m-1}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2+\frac{1}{(k-1)(m-1)}\frac{G}{\varphi}\omega+\frac{1}{k-1}\frac{G}{\varphi}(\mu+p\big(\frac{m}{m-1}v\big)^{\frac{\alpha-1}{m-1}})\\
&\quad-\frac{1}{(k-1)|\nabla v|^2}\frac{vG}{\varphi^2}\nabla v\nabla\varphi\frac{w}{m-1}-\frac{1}{(k-1)|\nabla v|^2}\frac{vG}{\varphi^2}\nabla v\nabla\varphi\big(\mu+p\big(\frac{m}{m-1}v\big)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\\
&\quad-(k-1)K|\nabla v|^2\\
&=\frac{k}{4(k-1)}(\frac{G}{\varphi})^2+\frac{kv}{4(k-1)}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}\frac{G}{\varphi}-\frac{k}{2(k-1)}\frac{G}{\varphi}\frac{\nabla v\nabla\varphi}{\varphi}\\
&\quad+\frac{1}{(k-1)(m-1)^2}(\frac{G}{\varphi})^2+\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2\\
&\quad+\frac{2}{(k-1)(m-1)}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\frac{G}{\varphi}+\frac{1}{(k-1)(m-1)}(\frac{G}{\varphi})^2\\
&\quad+\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\frac{G}{\varphi}-\frac{1}{(k-1)(m-1)}\frac{G}{\varphi}\frac{\nabla v\nabla\varphi}{\varphi}\\
&\quad-\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\frac{\nabla v\nabla\varphi}{\varphi}-(k-1)K|\nabla v|^2\\
&=[\frac{k}{4(k-1)}+\frac{m}{(k-1)(m-1)^2}]\frac{G^2}{\varphi^2}-[\frac{k}{2(k-1)}+\frac{1}{(k-1)(m-1)}]\frac{G}{\varphi^2}\nabla v\nabla\varphi\\
&\quad+\frac{k}{4(k-1)}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^3}vG+\frac{m+1}{(k-1)(m-1)}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\frac{G}{\varphi}\\
&\quad-\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\frac{\nabla v\nabla\varphi}{\varphi}+\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2\\
&\quad-(k-1)K|\nabla v|^2.
\end{aligned}
$$

注意到 $v>0$ 当 $m>1$时。将该不等式代入 (2.3)，即可得到 (2.1)。□

3. The proof of main theorems.

本节证明定理1.1。

证明。定义光滑截断函数 $\varphi:\ M\to\mathbb{R}$，使其满足 $\varphi(x)=\theta(\frac{r(x)}{R})$。假设 $G=\varphi\omega=\varphi\frac{|\nabla v|^2}{v}$，且在 $x_0\in B_{2R}$处取得最大值。我们假设 $G(x_0)>0$，则 $\varphi(x_0)>0$。于是，在 x_0处有

$$\begin{aligned}\Delta_V G&=\Delta_V\varphi\cdot\omega+2\nabla\varphi\nabla\omega+\varphi\Delta_V\omega\\&=\Delta_V\varphi\cdot\omega-2G\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}+\varphi\Delta_V\omega\\&=\frac{\Delta_V\varphi}{\varphi}G-2G\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}+\varphi\Delta_V\omega.\end{aligned}$$

注意,

$$\nabla\varphi=\frac{\theta'\nabla r}{R},$$

根据加权拉普拉斯比较定理,

$$\Delta_V\varphi=\frac{\theta''}{R^2}+\frac{\theta'\Delta_V r}{R}\geq\frac{\theta''}{R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)\theta'}{R^2}.$$

由于在 x_0 处有 $\Delta_V G\leq 0$，我们得到

$$\begin{aligned}0\geq&[\frac{\theta''}{\theta R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)\theta'}{\theta R^2}]G-\frac{3k-4}{2(k-1)}\frac{(\theta')^2}{R^2\theta^2}G\\&+\frac{(m-1)(km+k-2)+4m}{2(m-1)^2(k-1)}\frac{G^2}{v\theta}-\frac{(m+1)(k-2)}{(k-1)(m-1)}\frac{G\sqrt{G}|\theta'|}{R\theta\sqrt{v\theta}}\\&+\left[(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1)\mu+(\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1})p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\right]\frac{G}{v}\\&-2(k-1)KG-\frac{2}{v}\theta|\nabla v|\big(|\nabla\mu|+|\nabla p|(\frac{m}{m-1}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\\&-\frac{2}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\frac{\sqrt{G}|\theta'|}{R\sqrt{v\theta}}+\frac{2}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2\frac{\theta}{v}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

由于 $\mu p\geq 0$、$|\nabla p|^2\leq|p|^2$ 和 $|\nabla\mu|^2\leq|\mu|^2$，我们得到

$$\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2\frac{\theta}{v}=\frac{1}{k-1}\big(|\mu|+|p|(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2\frac{\theta}{v}$$

$$-\frac{2}{v}\theta|\nabla v|\big(|\nabla\mu|+|\nabla p|(\frac{m}{m-1}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\geq-\frac{2}{v}\theta|\nabla v|\big(|\mu|+|p|(\frac{m}{m-1}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}$$

利用不等式 $ax^2+bx\geq -\frac{b^2}{4a}$、 $a>0$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k-1}\big(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2\frac{\theta}{v}-\frac{2}{k-1}(\mu+p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}})\frac{\sqrt{G}|\theta'|}{R\sqrt{v\theta}}\\&\geq -\frac{G(\theta')^2}{(k-1)R^2\theta^2},\end{aligned}\tag{3.2}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k-1}\big(|\mu|+|p|(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)^2\frac{\theta}{v}-\frac{2}{v}\theta|\nabla v|\big(|\mu|+|p|(\frac{m}{m-1}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}\big)\\&\geq -(k-1)G.\end{aligned}\tag{3.3}$$

由柯西不等式可得

$$-\frac{G\sqrt{G}|\theta'|}{R\theta\sqrt{v\theta}}\geq -\frac{G^2}{2v\theta}-\frac{G(\theta')^2}{2R^2\theta^2}.\tag{3.4}$$

将 (3.2)、(3.3) 和 (3.4) 代入 (3.1)，得到

$$\begin{aligned}0\geq\ &[\frac{\theta''}{\theta R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)\theta'}{\theta R^2}]G-\frac{3k-2}{2(k-1)}\frac{(\theta')^2}{R^2\theta^2}G\\&+\frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}\frac{G^2}{v\theta}-\frac{(m+1)(k-2)}{2(m-1)(k-1)}\frac{G(\theta')^2}{R^2\theta^2}\\&-2(k-1)KG-(k-1)G\\&+[(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1)\mu+(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1})p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]\frac{G}{v}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

接下来，我们构造一个光滑函数 $\theta(t):\ [0,+\infty)\ \to[0,1]$

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t\leq 1\\ 0, & t>2\end{cases},$$

and

$$-C_1\sqrt{\theta}\leq\theta'\leq 0,\quad |\theta''|\leq C_2\theta.\tag{3.6}$$

利用 (3.6),

$$
\begin{aligned}
0 \geq & -[\frac{C_2}{R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)C_1}{\sqrt{\theta}R^2}]G+\frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}\frac{G^2}{v\theta} \\
& -[\frac{2m}{m-1}-\frac{k}{(m-1)(k-1)}]\frac{C_1^2}{R^2\theta}G-2(k-1)KG-(k-1)G \\
& +[(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1)\mu+(\frac{2(m+1)}{(k-1)(n-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1})p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]\frac{G}{v} \\
\geq & -[\frac{C_2}{R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)C_1}{\sqrt{\theta}R^2}]G+\frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}\frac{G^2}{v\theta} \\
& -\frac{2m}{m-1}\frac{C_1^2}{R^2\theta}G-2(k-1)KG-(k-1)G \\
& +[(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1)\mu+(\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1})p(\frac{m-1}{m}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}]\frac{G}{v}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

将 (3.7) 两边乘以 $v\theta$，并且 $0 \leq \theta \leq 1$ 我们有，对于 $\alpha \geq 1$

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}G^2-\frac{2m}{m-1}\frac{C_1^2}{R^2}G\sup_{x\in M^n}v \\
& -[\frac{C_2}{R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)C_1}{R^2}]G\sup_{x\in M^n}v \\
& -[2(k-1)K+(k-1)]G\sup_{x\in M^n}v \\
& -|\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1|\cdot|\mu|G \\
& -|\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1}|\cdot|p|(\frac{m-1}{m}\sup_{x\in M^n}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}G.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

此外，对于 $\alpha < 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}G^2-\frac{2m}{m-1}\frac{C_1^2}{R^2}G\sup_{x\in M^n}v \\
& -[\frac{C_2}{R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)C_1}{R^2}]G\sup_{x\in M^n}v \\
& -[2(k-1)K+(k-1)]G\sup_{x\in M^n}v \\
& -|\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1|\cdot|\mu|G \\
& -|\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1}|\cdot|p|(\frac{m-1}{m}\inf_{x\in M^n}v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}G.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

我们注意到

$$\left[\frac{C_2}{R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)C_1}{R^2}\right]\sup_{x\in M^n} v\le\frac{C_3}{R^2}(1+\sqrt{K}R)\sup_{x\in M^n} v,\quad(3.10)$$

对于某个仅依赖于 k 的常数 C_3。

相反，对于不等式 $Ax^2-Bx\le 0$（其中 $A>0$、$B>0$），我们有 $x\le\frac{B}{A}$。将此结果应用于方程 (3.8) 和 (3.9)，并考虑条件 (3.10)，我们得到 $\alpha\ge 1$ 的最大点 x_0

$$\begin{aligned}
&\sup_{B_q(R)}\omega(x)\le\varphi\omega(x_0)=G(x_0)\\
&\le\frac{2(m-1)(k-1)}{m+1}\frac{C_1^2}{R^2}\sup_{x\in M^n} v+\frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}\frac{C_3}{R^2}(1+\sqrt{K}R)\sup_{x\in M^n} v\\
&\quad+\frac{(m-1)^2(k-1)^2}{m(m+1)}(2K+1)\sup_{x\in M^n} v\\
&\quad+\frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1|\cdot|\mu|\\
&\quad+\frac{(m-1)(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)|\cdot|p|(\frac{m-1}{m}\sup_{x\in M^n} v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}},
\end{aligned}$$

且对于 $\alpha<1$

$$\begin{aligned}
&\sup_{B_q(R)}\omega(x)\le\varphi\omega(x_0)=G(x_0)\\
&\le\frac{2(m-1)(k-1)}{m+1}\frac{C_1^2}{R^2}\sup_{x\in M^n} v+\frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}\frac{C_3}{R^2}(1+\sqrt{K}R)\sup_{x\in M^n} v\\
&\quad+\frac{(m-1)^2(k-1)^2}{m(m+1)}(2K+1)\sup_{x\in M^n} v\\
&\quad+\frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1|\cdot|\mu|\\
&\quad+\frac{(m-1)(k-1)}{m(m+1)}|\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)|\cdot|p|(\frac{m-1}{m}\inf_{x\in M^n} v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}},
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

我们证明定理 1.3

证明。 经过简单计算可得 $^2\frac{(m+1)}{(k-1)(m-1)}+\frac{m-2\alpha+1}{m-1}\ge 0$，当 $p\ge 0$且 $\mu\ge 0$ 时。因此，舍去 (3.7) 中最后一个非负项后，即得所需的不等式

$$\begin{aligned}
0\ge&-[\frac{C_2}{R^2}+\frac{(k-1)(1+\sqrt{KR})C_1}{\sqrt{\theta}R^2}]G+\frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}\frac{G^2}{v\theta}\\
&-\frac{2m}{m-1}\frac{C_1^2}{R^2\theta}G-(k-1)(2K+1)G.
\end{aligned}$$

将 (3.7) 两边乘以 $v\theta$，并且 $0 \le \theta \le 1$，可得

$$\begin{aligned} 0 \ge & \frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}G^2 - \frac{2m}{m-1}\frac{C_1^2}{R^2}G \sup_{x\in M^n} v \\ & - [\frac{C_2}{R^2} + \frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)C_1}{R^2}]G \sup_{x\in M^n} v \\ & - (k-1)(2K+1)G \sup_{x\in M^n} v. \end{aligned}$$

因此，在最大点 x_0 处，我们得到

$$\begin{aligned} \sup_{B_q(R)} \omega(x) &\le \varphi\omega(x_0) = G(x_0) \\ &\le \frac{2(m-1)(k-1)}{m+1}\frac{C_1^2}{R^2} \sup_{x\in M^n} v \\ &\quad + \frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}\frac{C_3}{R^2}(1+\sqrt{K}R) \sup_{x\in M^n} v \\ &\quad + \frac{(m-1)^2(k-1)^2}{m(m+1)}(2K+1) \sup_{x\in M^n} v. \end{aligned}$$

我们在上述不等式中使用了 (3.10)。证明至此完成。 □

接下来，我们证明定理 1.5

证明。 不难看出 $^{2}{}_{(m+1)}\ \frac{(k-1)(m-1)}{} + \frac{m-2\alpha+1}{m-1} \ge 0$ 当 $1 \le \alpha \le \frac{(k+1)(m+1)}{2(k-1)}$ 时成立。于是得到式（3.7），

$$\begin{aligned} 0 \ge & \frac{m(m+1)}{(m-1)^2(k-1)}G^2 - \frac{2m}{m-1}\frac{C_1^2}{R^2} \sup_{x\in M^n} vG \\ & - \Big[\frac{C_2}{R^2} + \frac{(k-1)(1+\sqrt{K}R)C_1}{R^2}]G \sup_{x\in M^n} v \\ & - [2(k-1)K + (k-1)]G \sup_{x\in M^n} v \\ & + [\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)} + 1]\mu G \\ & + [\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)} + \frac{m-2\alpha+1}{m-1}]p(\frac{m-1}{m} \sup_{x\in M^n} v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}}G. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由式（3.11）和（3.10），我们在最大点 x_0处得到,

上确界 $\omega(x) \leq \varphi\omega(x_0) = G(x_0)$

$B_q(R)\}$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2(m-1)(k-1)}{m+1}\frac{C_1^2}{R^2}\sup_{x\in M^n} v + \frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}\frac{C_3}{R^2}(1+\sqrt{K}R)\sup_{x\in M^n} v \\
&\quad + \frac{2(m-1)^2(k-1)^2}{m(m+1)}K\sup_{x\in M^n} v \\
&\quad - \frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}[\frac{2(m+1)}{(k-1)(m-1)}+1]\mu \\
&\quad - \frac{(m-1)(k-1)}{m(m+1)}[\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)]p(\frac{m-1}{m}\sup_{x\in M^n} v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}},
\end{aligned}$$

令 $R\to\infty$，当 $\mu \geq 0$

$$\begin{aligned}
p \leq & \frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\sup_{x\in M^n} v)^{\frac{m-\alpha}{m-1}} \\
& - \frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+1)\mu(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\frac{1}{\sup_{x\in M^n} v})^{\frac{\alpha-1}{m-1}},
\end{aligned}$$

当 $\mu < 0$

$$\begin{aligned}
p \leq & \frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\sup_{x\in M^n} v)^{\frac{m-\alpha}{m-1}} \\
& - \frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+1)\mu(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\frac{1}{\inf_{x\in M^n} v})^{\frac{\alpha-1}{m-1}},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{|\nabla v|^2}{v} \leq & \frac{2(m-1)^2(k-1)^2}{m(m+1)}K\sup_{x\in M^n} v \\
& - \frac{(m-1)(k-1)}{m(m+1)}[\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)]p(\frac{m-1}{m}\sup_{x\in M^n} v)^{\frac{\alpha-1}{m-1}} \\
& - \frac{(m-1)^2(k-1)}{m(m+1)}[\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+1]\mu.
\end{aligned}$$

相反，当 $\mu \geq 0$

$$\begin{aligned}
p \geq & \frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\sup_{x\in M^n} v)^{\frac{m-\alpha}{m-1}} \\
& - \frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+1)\mu(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\frac{1}{\sup_{x\in M^n} v})^{\frac{\alpha-1}{m-1}},
\end{aligned}$$

当 $\mu<0$

$$p\geq\frac{2(m-1)(k-1)K}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\sup_{x\in M^n}v)^{\frac{m-\alpha}{m-1}}$$
$$-\frac{m-1}{\frac{2(m+1)}{k-1}+(m-2\alpha+1)}(\frac{2(m+1)}{(m-1)(k-1)}+1)\mu(\frac{m}{m-1})^{\frac{\alpha-1}{m-1}}(\frac{1}{\inf_{x\in M^n}v})^{\frac{\alpha-1}{m-1}},$$

我们推导出 v 必须是常数。 □

推论 1.2 的证明。

证明。 设极小测地线 $\gamma(s):[0,1]\to M^n$，使得 $\gamma(0)=y$，$\gamma(1)=x$，则

$$\begin{aligned}\ln\frac{v(x)}{v(y)}&=\int_0^1\frac{d\ln(v(\gamma(s)))}{ds}=\int_0^1\frac{\nabla v\cdot\gamma'}{v(\gamma(s))}ds\\&\leq\int_0^1\frac{|\nabla v|\cdot|\gamma'|}{|v(\gamma(s))|}ds=r(x,y)\int_0^1\frac{|\nabla v|}{|v(\gamma(s))|}ds\\&\leq r(x,y)\int_0^1\sqrt{\frac{C(m,n,\alpha,k,\delta_1,\delta_2,K,\sup_{x\in M^n}v)}{\inf_{x\in M^n}v}}ds\\&=r(x,y)\sqrt{\frac{C(m,n,\alpha,k,\delta_1,\delta_2,K,\sup_{x\in M^n}v)}{\inf_{x\in M^n}v}}.\end{aligned}$$

□

致谢。我们衷心感谢韩英博教授给予我们的鼓励与关怀。我们也感谢曾凡奇教授对本文提出的宝贵意见，并解答了我们的问题。

参考文献

[1] G. Bonanno、G. Molica Bisci、V. Radulescu；黎曼流形上的非线性椭圆问题及其在 Emden-Fowler 型方程中的应用，《数学手稿》142，157–185（2013）。[2] A. Barros、A. K. Silva：《算子 Δ_V 的特征函数梯度估计》。《微分几何及其应用》60，147–155（2018）。[3] Q. Chen、J. Jost、H. Qiu：《完备流形上 V-调和映射的存在性与刘维尔定理》。《全球分析与几何年刊》42(4)，565–584（2012）。[4] Q. Chen、J. Jost、G. Wang：《Hermitian、仿射、Weyl 和芬斯勒几何中调和映射推广形式的极大值原理》。《几何分析杂志》25(4)，2407–2426（2015）。[5] Q. Chen、H. Qiu：《 V-拉普拉斯算子非线性抛物方程的梯度估计与 Harnack 不等式》。《全球分析与几何年刊》50(1)， 47¨C64（2016）。[6] B. Gidas、J. Spruck：《非线性椭圆方程正解的整体与局部行为》。《纯粹与应用数学通讯》34，525–598（1981）。[7] G. Huang、Z. Li：《 V-拉普拉斯算子非线性椭圆方程的刘维尔型定理》。《数学与物理分析》8(1)， 123¨C134（2018）。[8] P. Lu、L. Ni、J. V¨¢zquez、C. Villani：《流形上多孔介质方程和快速扩散方程的局部 Aronson¨CB¨¦nilan 估计与熵公式》。《纯粹数学与应用数学杂志》 91，1–19 （ 2009 ）。

[9] P. Li、丘成桐：《关于薛定谔算子的抛物型核》。《数学学报》156，153–201（1986）。[10] G. Molica Bisci：《球面上的变分问题》，载于《非线性偏微分方程近期趋势：定常问题》，《当代数学》595，273–291（2013）。[11] L. F. Wang：《非线性椭圆方程的刘维尔定理与梯度估计》。《微分方程杂志》260(1)，567–585（2016）。[12] W. Wang、H. Zhou、X. Zhang：《黎曼流形上非线性椭圆方程的刘维尔定理与梯度估计》（2017）。[13] G. Wei、W. Wylie：《Bakry¨CEmery Ricci 张量的比较几何》。《微分几何杂志》83(2)，377–406（2009）。[14] 丘成桐：《完备黎曼流形上的调和函数》。《纯粹与应用数学通讯》28(2)，201–228（1975）。[15] Y. Y. Yang：《黎曼流形上方程 $\Delta u + cu^{-\alpha} = 0$ 的梯度估计》。《数学学报（英文版）》26(6)，1177–1182（2010）。[16] G. Zhao：《V-拉普拉斯算子非线性椭圆方程的梯度估计》。《数学档案》114(4)，457–469（2020）。

信阳师范大学数学与统计学院，信阳，464000，中华人民共和国。电子邮箱地址：1136904169@qq.com