最概　　然路径与噪声诱导的向湍流转变中的不变集

Yoshiki Hiruta,[1], * Kento Yasuda,[2], † 和 Kenta Ishimoto[3], ‡
[1] *Department of Physics and Astronomy, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, Chiba 278-8510, Japan* [2] *Laboratory of Physics, College of Science and Technology, Nihon University, Funabashi, Chiba 274-8501, Japan* [3] *Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan*(日期：2026年1月8日)

湍流转捩通常源于双稳态之间的亚临界跃迁，这些状态由确定性动力系统的不变集表征；此类跃迁可由系统噪声作为稀有事件触发。本研究采用随机动力学的 Onsager-Machlup（OM）表述，考察支配最概然转变路径（MPPs）的哈密顿方程。我们引入一种称为 OM 势的有效势函数，它取决于噪声强度。以 Dauchot-Manneville模型作为具有边缘态的最简系统为研究对象，我们全面分析了层流态与湍流态之间在不同转变时间下的最概然路径。我们发现，无论转变时间如何，最概然路径几乎都在同一点穿过分界线；所得 OM作用量值表明，向湍流态的转变比向层流态的转变更频繁。此外，我们通过数值计算证明，噪声诱导转变路径遵循 OM势景观及其分岔图，这表明最概然路径的定性行为由 OM 势决定。我们提出的适用于一般动力系统的方法，为预测动力学不变集之间的噪声诱导跃迁提供了理论基础。

arXiv:2601.03724v1 [physics.flu-dyn] 7 Jan 2026

I. 引言

自 Reynolds [1] 以来，从层流到湍流的跃迁一直是流体力学中的基本问题之一。在各种剪切流中，湍流会通过亚临界跃迁产生：足够大的扰动会发展为湍流，而无穷小扰动则因线性稳定性而衰减。跃迁的亚临界特性还会导致层流态与湍流态之间出现双稳态，这种现象已在多种流体系统中观察到，包括管流 [2–6], 、平面剪切流 [7–14],和 Kolmogorov流 [15–18]。

亚临界流中的双稳态通常表现为：状态空间中存在两个由吸引域边界 [19, 20] 隔开的吸引子。该边界的动力学骨架是边缘态，它是一种鞍型不变解，其不变流形将层流吸引域与湍流吸引域分隔开来[10, 11, 21]。由于边缘态的稳定流形构成一条分界线，边缘态一直是识别触发湍流的最小种子的关键结构 [22–24]。此外，边缘态邻域中的状态会沿其不稳定流形演化，呈现湍流爆发事件以及重新层流化过程 [10, 25–27]。

为捕捉这类涉及边缘态的亚临界跃迁的基本动力学特征，Dauchot & Manneville [28]提出了基于伽辽金近似的低维常微分方程模型。

* hiruta@rs.tus.ac.jp
† yasuda.kento@nihon-u.ac.jp
‡ kenta.ishimoto@math.kyoto-u.ac.jp

Waleffe [29, 30]也提出了这类模型。这些模型成功再现了完整 Navier–Stokes 系统的关键特征，包括边缘态的存在以及非线性项的能量守恒。在这些降阶模型中，仅含两个变量的 Dauchot-Manneville模型 [28], 近期被用作最简模型，用于检验数学理论和假设情景，例如拉格朗日相干结构 [31], 、旁路转捩情景 [32], 、基于谱子流形（SSM）理论的降阶建模[33] 以及流动控制 [34]。

化学反应和基因调控网络等随机模型中的亚稳态之间的跃迁也得到了研究 [35–37], ，其中跃迁主要由热噪声等内禀噪声驱动。在流体流动等宏观现象中，并不总能将所有详细过程纳入数学模型，因此通常会在确定性部分中加入噪声项。这种附加噪声可能会驱动亚稳态之间发生作为稀有事件的随机跃迁，这被称为噪声诱导转变 [38]。近年来，流体系统中的亚稳态跃迁被作为噪声诱导转变进行了研究，例如充分发展湍流 [39] 、大尺度流动中的环向反转 [40, 41], ，以及向湍流的转变 [42, 43]。

Wang 等人 [44]研究了在随机强迫项作用下，受到无穷小外部噪声影响的二维泊肃叶流。他们利用 Freidlin-Wentzel 理论 [46], 通过最小作用量算法 [45] 数值检测到这一稀有跃迁，并将其识别为一条跃迁路径。他们提出了一种情景：跃迁路径首先朝位于分界线上的伪转变态附近移动，然后沿分界线朝

边缘态移动。最近，Rolland [47] 通过对稀有事件进行采样 [48] 研究了平面库埃特流，并数值检测到跃迁路径。他指出，在小噪声极限下，跃迁路径会先经过分界线上的中介点，再到达边缘态附近；这一结果与文献 [44]提出的猜想一致。此外，Rolland [47] 还提出了另一种有限噪声强度下的跃迁情景：跃迁路径应在远离边缘态的位置穿过分界线。

这些研究建立了确定性系统的动力学信息与随机系统典型转变动力学之间的联系。然而，由于纳维–斯托克斯方程的高维性、湍流内在的混沌特性，以及弱噪声下跃迁事件的罕见性，要系统地确定跃迁路径在数值上颇具挑战。此外，跃迁事件通常包含多个跃迁时间尺度，这进一步限制了跃迁路径的可重复性。因此，要全面揭示噪声诱导湍流中跃迁路径的普适特征，需要一种能够连接确定性系统与随机系统的系统性方法。

近年来，最概然路径（MPP）作为研究随机跃迁的有力框架，已日益应用于气候模型、基因调控网络、可激发系统和活性软物质等多个研究领域 [49–53], ，因为其理论结果已得到实验验证 [54]。MPP 被表述为 Onsager-Machlup（OM）作用量的极小化路径；该作用量定义为随机动力学的路径积分 [55, 56] ，并且预期会在噪声强度较小但有限时实现。值得注意的是，在有限噪声强度下，OM 表述与 Freidlin-Wentzel 理论 [52, 54]存在显著偏差。

本研究基于 OM 形式，旨在阐明确定性模型的不变集与其对应随机模型的最概然路径之间的关系，从而为有限噪声强度下噪声诱导湍流跃迁中的典型转变路径提供统一图景。为探讨亚临界向湍流转变中最概然路径的普适性质，我们给出了 OM 形式的哈密顿结构，并引入一种有效势函数，称为 OM 势，证明该势函数决定了跃迁路径的定性行为。为展示本方法的适用性，本文聚焦于 Dauchot-Manneville（DM）模型的一个随机版本，将其作为具有边缘态的最简系统，并全面分析不同转变时间和噪声强度下的最概然路径；与此同时，本文提出的方法可直接应用于更高维模型。

本文结构安排如下。第II节中，我们为一般动力学系统表述 Onsager–Machlup 作用量，并介绍最概然路径的哈密顿结构以及相应的数值方案。在第III节介绍 Dauchot–Manneville 模型后，我们在第IV节阐述概率密度函数与哈密顿方程势函数之间的相似性。第V节展示最概然路径的数值结果，特别关注层流态与湍流态之间的跃迁。最后，在第VI节中，我们借助动力学系统对最可能路径的描述，展示一个简单的不变解如何支配层流态与湍流态之间的噪声诱导转变。第七节为结语。

II. 一般形式与数值方案

A. 确定性系统与随机系统

我们考虑一个 N 维状态变量为 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ 的随机系统，它由自主确定性过程 $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 与一个随机过程之和构成，可表示为以下含噪声强度为 D [57] 的朗之万方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sqrt{D}\,\boldsymbol{\xi}(t), \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}(t)$ 是均值为零的高斯白噪声，满足 $\langle \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \rangle = I$，$N$ 维单位矩阵为 I。对于短持续时间 Δt，采用离散表示 $\Delta \boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}(t+\Delta t) - \boldsymbol{x}(t)$，随机方程（1）随后按照 Stratonovich 解释改写为

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t+\Delta t)) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\right] + \Delta \boldsymbol{W}, \tag{2}$$

其中，$\Delta \boldsymbol{W}$ 是相应的维纳过程，其概率密度与 $\exp(-|\Delta \boldsymbol{W}|^2/(2D\Delta t))$ 成正比。 $\Delta \boldsymbol{W}$ 的每个实现，因而 $\boldsymbol{x}$ 的每个实现，都是无界的，因此在持续时间 Δt 内，任意两个状态之间都具有非零的转移概率。即使动力系统 $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 存在将相空间划分为不同吸引子吸引域的分界线，这种跃迁也可能发生。

B. Onsager–Machlup 作用量

现在，我们使用 Onsager-Machlup（OM）作用量 S [55]来计算状态$\{\boldsymbol{x}\}_{t=0}^{\tau}$ 从时间 $t = 0$ 到 $t = \tau$处某个有限时刻的路径概率。初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{X}_{\mathrm{init}}$ 与最终状态 $\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{X}_{\mathrm{final}}$ 之间的转移概率 $P(\boldsymbol{X}_{\mathrm{init}}, \boldsymbol{X}_{\mathrm{final}})$ 可通过路径积分公式表示为

$$P(\boldsymbol{X}_{\mathrm{init}}, \boldsymbol{X}_{\mathrm{final}}) \propto \int \mathcal{D}\boldsymbol{x} \exp\left(-\frac{1}{D} S(\{\boldsymbol{x}\}_{t=0}^{\tau})\right), \tag{3}$$

其中，积分 $\int \mathcal{D}\boldsymbol{x}$ 是对初始状态与最终状态之间的所有路径 $\{\boldsymbol{x}\}_{t=0}^{\tau}$ 进行的。这里，路径$\{\boldsymbol{x}\}_{t=0}^{\tau}$ 的 OM 作用量 S 定义为

$$S(\{\boldsymbol{x}\}_{t=0}^{\tau}) \equiv \int_0^{\tau} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})dt, \tag{4}$$

其中， $\mathcal{L}$ 是相应的OM拉格朗日量，定义为

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}\left(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right) + \frac{D}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f}, \tag{5}$$

上标符号T表示矩阵转置。

使作用量 S_{OM}最小的跃迁路径，在具有初始状态和最终状态的所有可能路径中表现出最高概率，因此被称为最概然路径（MPP）。在弱噪声极限下，通过鞍点近似，转移概率可以仅由最概然路径很好地表示，并被视为瞬子 [58] ，可类比于量子场论中的路径积分表述。

C. 最概然路径

OM作用量 S_{OM} 的极小化路径，或等价地，最概然路径，遵循欧拉–拉格朗日（EL）方程，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}, \tag{6}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p} + \frac{D}{2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})). \tag{7}$$

其中， $\boldsymbol{p}$ 是与OM拉格朗日量 $\mathcal{L}$相关的广义动量，定义为 $\boldsymbol{p} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\boldsymbol{x}}$； $J(\boldsymbol{x})$是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的雅可比矩阵。

通过从欧拉-拉格朗日方程 (6)–(7) 中消去广义动量，我们得到与带电粒子在电磁场中运动相同的方程，其形式为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{8}$$

其中电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \equiv -\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{x})$，与磁场相关的反对称张量为 $B(\boldsymbol{x}) \equiv J(\boldsymbol{x}) - J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ [59]。有效静电势 V 由确定性动力学$\boldsymbol{f}$ 和噪声强度 D 决定，具体为

$$V(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2}{2} - \frac{D}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

下文将其称为昂萨格-马赫卢普势，或简称 OM 势。容易发现，欧拉-拉格朗日方程 $\boldsymbol{X}^*$ 的一个不动点是 V的局部最小值或最大值，且 $\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{X}^*) = 0$。

有趣的是，OM势函数被发现与福克–普朗克方程背景下所称的有效势这一量完全相同 [56], 其中，$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla}U$ 形式的梯度系统通常被假定为 [参见附录 A]。我们注意到，此处的 OM 势 $V(\boldsymbol{x})$不同于梯度系统的势函数$U(\boldsymbol{x})$。在梯度系统中，平稳概率密度函数与 $\exp(-U/D)$ 成正比，而对于 V则不存在这种关系。此外，概率密度函数通常无法得到解析表达式。有关进一步讨论，请参见附录 A。

通过勒让德变换，我们引入 OM 哈密顿量：$\mathcal{H} \equiv \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - \mathcal{L}$ [49]。因此，总能量

$$E = K(\dot{\boldsymbol{x}}) + V(\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

在时间演化过程中保持不变，其中动能为 $K \equiv |\dot{\boldsymbol{x}}|^2/2$。于是，OM 作用量可改写为

$$S = Q - E\tau, \tag{11}$$

with

$$Q \equiv \int_0^{\tau} \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}dt. \tag{12}$$

量 Q可在物理上解释为热库对系统所做的功。因此，我们在此将 Q称为热吸收。当功由热库传递给系统时（$\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} > 0$），这部分功会增加 OM 作用量。我们注意到， Q只取决于路径的形状，而与过程的速率无关。

遵循参考文献 [60], ，我们引入任意一对路径 $\{\boldsymbol{x}_1\}$ 和$\{\boldsymbol{x}_2\}$ 之间的相对路径概率，它们具有相同的初始时刻和最终时刻 $[0, \tau]$，而其初始状态和最终状态可以任意选取。我们首先将逗留概率 $P_R^{\{\boldsymbol{x}\}}$ 定义为随机轨迹始终处于以路径 $\{\boldsymbol{x}\}_{t=0}^{\tau}$为中心、半径为 R 的移动球内的概率。相对路径概率由两个逗留概率之比在 $R \to 0$ 趋于极限时得到：

$$\frac{e^{-S(\{\boldsymbol{x}_1\})}}{e^{-S(\{\boldsymbol{x}_2\})}} = \lim_{R\to 0}\frac{P_R^{\{\boldsymbol{x}_1\}}}{P_R^{\{\boldsymbol{x}_2\}}}, \tag{13}$$

这就是 $\exp(-\Delta S)$，其中 $\Delta S = S(\{\boldsymbol{x}_1\}) - S(\{\boldsymbol{x}_2\})$。

接下来，我们考察初始状态和最终状态各不相同的最概然路径之间的相对路径概率。分别将欧拉-拉格朗日方程的解记为 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1\}$ 和$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1\}$，则两条路径的作用量值之差可写为

$$\Delta S = \int_0^{\tau}(\boldsymbol{p}_1\cdot\dot{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{p}_2\cdot\dot{\boldsymbol{x}}_2)dt - (E_1 - E_2)\tau \tag{14}$$

$$= \Delta Q - \Delta E\cdot\tau. \tag{15}$$

这里， $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ 和 $\Delta E = E_1 - E_2$ 分别表示两条最可能路径的热吸收差异和能量差异。

D. 数值方法

为了从 OM 作用量中求得最可能路径，我们采用射击法，数值求解满足边界条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{X}_{\rm init}$ 和 $\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{X}_{\rm final}$ 的欧拉-拉格朗日方程 (6)-(7) 的边值问题。

这里我们为位置和动量这一对变量引入流映射 G_t：$\mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$，$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p})$，以如下形式表示欧拉-拉格朗日方程 (6)-(7) 的时间演化：

$$\boldsymbol{w}(t_0 + t) \equiv \boldsymbol{G}_t(\boldsymbol{w}(t_0)) \tag{16}$$

对于任意时间 t_0 和持续时间 t。流映射 $\boldsymbol{G}_t$ 通过四阶龙格-库塔法对常微分方程进行数值构造，并采用足够小的时间离散化，以确保满足系统哈密顿结构所要求的能量守恒。因此，我们的任务是找到一对 $(\boldsymbol{p}_{\rm init},\ \boldsymbol{p}_{\rm final})$，使其满足

$$\boldsymbol{G}_\tau((\boldsymbol{X}_{\rm init}, \boldsymbol{p}_{\rm init})) - (\boldsymbol{X}_{\rm final}, \boldsymbol{p}_{\rm final}) = \boldsymbol{0}. \tag{17}$$

然而，由于条件数较差，当 τ 较大时，这个问题在计算上颇具挑战性。为克服这一困难，我们采用多重射击法。我们将时间区间 $[0, \tau]$ 划分为等长的 M 个小区间

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_M = \tau, \tag{18}$$

其中 $\tau_m = m\tau/M (m = 0,\ 1,\ \ldots,\ M)$。应用公式 $G_{\tau_1} G_{\tau_2} = G_{\tau_1+\tau_2}$ 后，我们可以将边值问题改写为 $M+1$ 个方程：

$$\boldsymbol{G}_{\delta\tau_0}((\boldsymbol{X}_{\rm init}, \boldsymbol{p}_{\rm init})) = \boldsymbol{w}_1 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{G}_{\delta\tau_m}(\boldsymbol{w}_m) = \boldsymbol{w}_{m+1}\ (m = 1, \cdots, M-1) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{G}_{\delta\tau_{M-1}}(\boldsymbol{w}_{M-1}) = (\boldsymbol{X}_{\rm final}, \boldsymbol{p}_{\rm final}), \tag{21}$$

给定 $\delta\tau_m = \tau_{m+1} - \tau_m = 1/M$。于是，问题转化为求一个 $2NM$ 维非线性映射 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{X}_{\rm init};\boldsymbol{X}_{\rm final}}$ 的零点：$\mathbb{R}^{2NM} \to \mathbb{R}^{2NM}$，其定义如下

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{X}_{\rm init};\boldsymbol{X}_{\rm final}}(\boldsymbol{p}_{\rm init}, \boldsymbol{p}_{\rm final}, \boldsymbol{w}_1, \cdots \boldsymbol{w}_{M-1}) \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_{\delta\tau_0}((\boldsymbol{X}_{\rm init}, \boldsymbol{p}_{\rm init})) - \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{G}_{\delta\tau_1}(\boldsymbol{w}_1) - \boldsymbol{w}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_{\delta\tau_{M-2}}(\boldsymbol{w}_{M-2}) - \boldsymbol{w}_{M-1} \\ \boldsymbol{G}_{\delta\tau_{M-1}}(\boldsymbol{w}_{M-1}) - (\boldsymbol{X}_{\rm final}, \boldsymbol{p}_{\rm final}) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{22}$$

我们通过数值方法构造流映射，并使用牛顿-GMRES法求得 $2NM$ 个未知数（$\boldsymbol{p}_{\rm init}, \boldsymbol{p}_{\rm final}, \boldsymbol{w}_1, \cdots \boldsymbol{w}_{M-1}$）。

牛顿法的收敛性在很大程度上取决于初始猜测。为解释我们对该方案初始数据的选择，我们先引入重标度变量 $\tilde{t} = t/\tau$、$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{p}} = \tau\boldsymbol{p}$，从而得到重标度欧拉-拉格朗日方程，

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tau\boldsymbol{f} + \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}, \tag{23}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} = -\tau J^T\tilde{\boldsymbol{p}} + D\tau^2\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{f})/2, \tag{24}$$

其中，点符号表示对重标度时间 t 求导。重标度方程表明，恒定动量

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) = \left(\frac{(\boldsymbol{X}_{\rm final} - \boldsymbol{X}_{\rm init})t}{\tau} + \boldsymbol{X}_{\rm init}, \frac{\boldsymbol{X}_{\rm final} - \boldsymbol{X}_{\rm init}}{\tau}\right) \tag{25}$$

当 $\tau \ll 1$ 时，它能很好地近似欧拉-拉格朗日解；值得注意的是，式 (25) 与 $\boldsymbol{f}$ 无关。我们将这些恒定动量数据用作数值方案在较小 τ 时的初始猜测，并采用数值延拓法追踪较高 τ 下的解支。

尽管如此，欧拉-拉格朗日方程只能保证解是一个极值点，而该解不一定是作用量的全局最小值。为保证所得解具有全局最小性质，我们独立实现了一种神经网络架构，通过直接最小化 OM作用量来数值近似最可能路径。随后，我们确认两种方法得到的解高度吻合，因此得出结论：通过射击法得到的最可能路径实际上是OM作用量的全局最小值。为了提高数值精度，下面的结果部分仅展示通过射击法得到的最可能路径。神经网络架构的详细信息见附录 B。

III. 模型定义

A. Dauchot–Manneville模型

我们考虑由 Dauchot & Manneville 提出的亚临界跃迁二维常微分方程模型[28, 32]。尽管 Dauchot-Manneville（DM）模型最初被提出作为一种概念性数学模型，这个简单的常微分方程系统仍保留了剪切流中亚临界跃迁的一些基本物理特征。具体而言，DM模型表示为

$$\frac{dx}{dt} = s_1 x + y + xy, \tag{26}$$

$$\frac{dy}{dt} = s_2 y - x^2, \tag{27}$$

其中，变量 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ 在物理上代表速度偏差场相对于基流的主导模态，而两个参数 $s_1 < 0$ 和 $s_2 < 0$ 表示黏性效应。非线性项 xy 和 $-x^2$源自模态间耦合，方程（26）右端的第二项y 则表示与剪切基流的耦合。

DM模型的动能定义为 $E_{\rm DM} \equiv (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$，其时间演化遵循 $dE_{\rm DM}/dt = s_1x^2 + s_2y^2 + xy$。与 Navier-Stokes 方程的情况一样，非线性项的贡献全部相互抵消，而耗散 $s_1x^2 + s_2y^2 \le 0$ 则与来自基流的能量传递 xy相平衡。

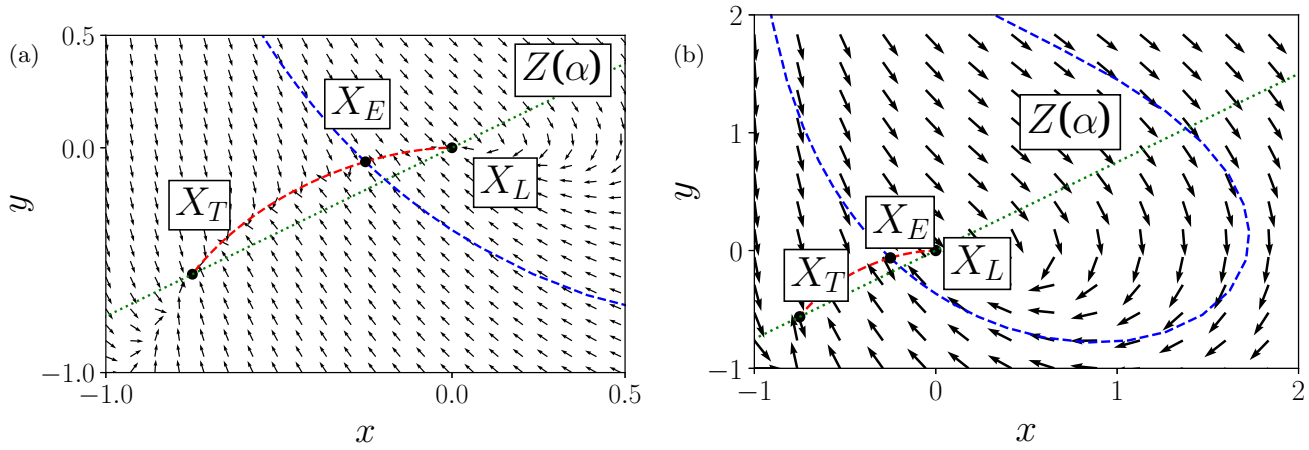

图1. 在（x, y）平面的（a）窄区域和（b）宽区域中， $s_1 = -0.1875$ 与 $s_2 = -1$ 时DM模型的不变流形和流。鞍点 $\boldsymbol{X}_E$ 包含两个不稳定流形 [红色虚线]，它们是连接两个稳定点 $\boldsymbol{X}_L$ 和 $\boldsymbol{X}_T$ 的异宿轨道。鞍点的稳定流形 [蓝色虚线] 是一条分界线，将两个稳定点的吸引域分隔开来。箭头表示流的方向 [方程（26）和（27）]，绿色点线是直线 $\boldsymbol{Z}$（α） [方程（31）]，该直线经过两个稳定点 $\boldsymbol{X}_L$ 和 $\boldsymbol{X}_T$。

当满足 $\Delta \equiv 1 - 4s_1 s_2 > 0$ 时，DM模型有三个不动点，分别为

$$\boldsymbol{X}_L = (0, 0), \tag{28}$$

$$\boldsymbol{X}_E = \left(\frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{(-1 + \sqrt{\Delta})^2}{4s_2} \right), \tag{29}$$

$$\boldsymbol{X}_T = \left(\frac{-1 - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{(-1 - \sqrt{\Delta})^2}{4s_2} \right). \tag{30}$$

这里，不动点 $\boldsymbol{X}_L$ 代表层流解，并且始终是DM模型的一个解。另外两个不动点 $\boldsymbol{X}_E$ 和 $\boldsymbol{X}_T$在 $\Delta = 0$ 处通过鞍结分岔出现，分别对应于亚临界转捩系统中的边缘态和湍流态。

在图 1 中，展示了 (x, y) 平面上$s_1 = -0.1875$ 和 $s_2 = -1$ 时的流动力学。该参数组与参考文献 [32] 中的设置相同，并在全文中均采用这一设置。当 $\Delta > 0$ 时，如图 1 所示，两个稳定不动点 $\boldsymbol{X}_L$ 和 $\boldsymbol{X}_T$ 的吸引域由 $\boldsymbol{X}_E$ [的稳定流形（图 1], 中的蓝色虚线）分隔，并由 $\boldsymbol{X}_E$ 的不稳定流形（图 1] 中的红色虚线）连接。因此，该不稳定流形是 DM模型的一条异宿轨道。

为了进一步量化该模型的流结构，我们用归一化弧长 $\tilde{s}$ 对异宿轨道进行参数化 $\tilde{s} \in [0, 1]$，使得 $\tilde{\boldsymbol{X}}(\tilde{s}) = (\tilde{X}(\tilde{s}), \tilde{Y}(\tilde{s}))$，其中 $\tilde{\boldsymbol{X}}(0) = \boldsymbol{X}_L$，$\tilde{\boldsymbol{X}}(1) = \boldsymbol{X}_T$，以及边缘态 $\tilde{\boldsymbol{X}}(\tilde{s}) = \boldsymbol{X}_E$，且 $\tilde{s} \approx 0.265$。我们通过三次样条法对该参数化进行数值构造。

为便于后续使用，我们引入一条经过$\boldsymbol{X}_L$ 和 $\boldsymbol{X}_T$的直线，其参数化为 $\alpha \in \mathbb{R}$ [，如图 1] 中的绿色虚线所示，使得

$$\boldsymbol{Z}(\alpha) = (1 - \alpha)\boldsymbol{X}_L + \alpha \boldsymbol{X}_T. \tag{31}$$

我们发现， $\boldsymbol{Z}$（α）与分界线有两个交点，分别位于 $\alpha \approx 0.258$ 和 $\alpha \approx -1.84$。

B. DM模型的欧拉–拉格朗日方程

随机DM模型的最概然路径由欧拉-拉格朗日方程给出，

$$\frac{dx}{dt} = s_1 x + y + xy + p_x, \tag{32}$$

$$\frac{dy}{dt} = s_2 y - x^2 + p_y, \tag{33}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -(s_1 + y)x + 2xp_y, \tag{34}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -(x + 1)p_x - s_2 p_y + \frac{D}{2}., \tag{35}$$

其中，噪声强度 D 的影响仅出现在式（35）的右侧。尽管欧拉-拉格朗日方程中的自由度是原始DM系统（26）–（27）的两倍，但我们可以借助与电磁场 [中的运动（见式（8））], 的类比，将欧拉-拉格朗日方程化简为二维确定性系统，形式如下

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{E} + \begin{pmatrix} 0 & (3x + 1) \\ -(3x + 1) & 0 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}, \tag{36}$$

其中，相应的电势 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ 可表示为

$$V = -\frac{1}{2}\left[(s_1 x + y + xy)^2 + (s_2 y - x^2)^2 + D(s_1 + s_2 + y) \right], \tag{37}$$

这是DM模型的OM势函数。磁场垂直施加于(x, y)平面

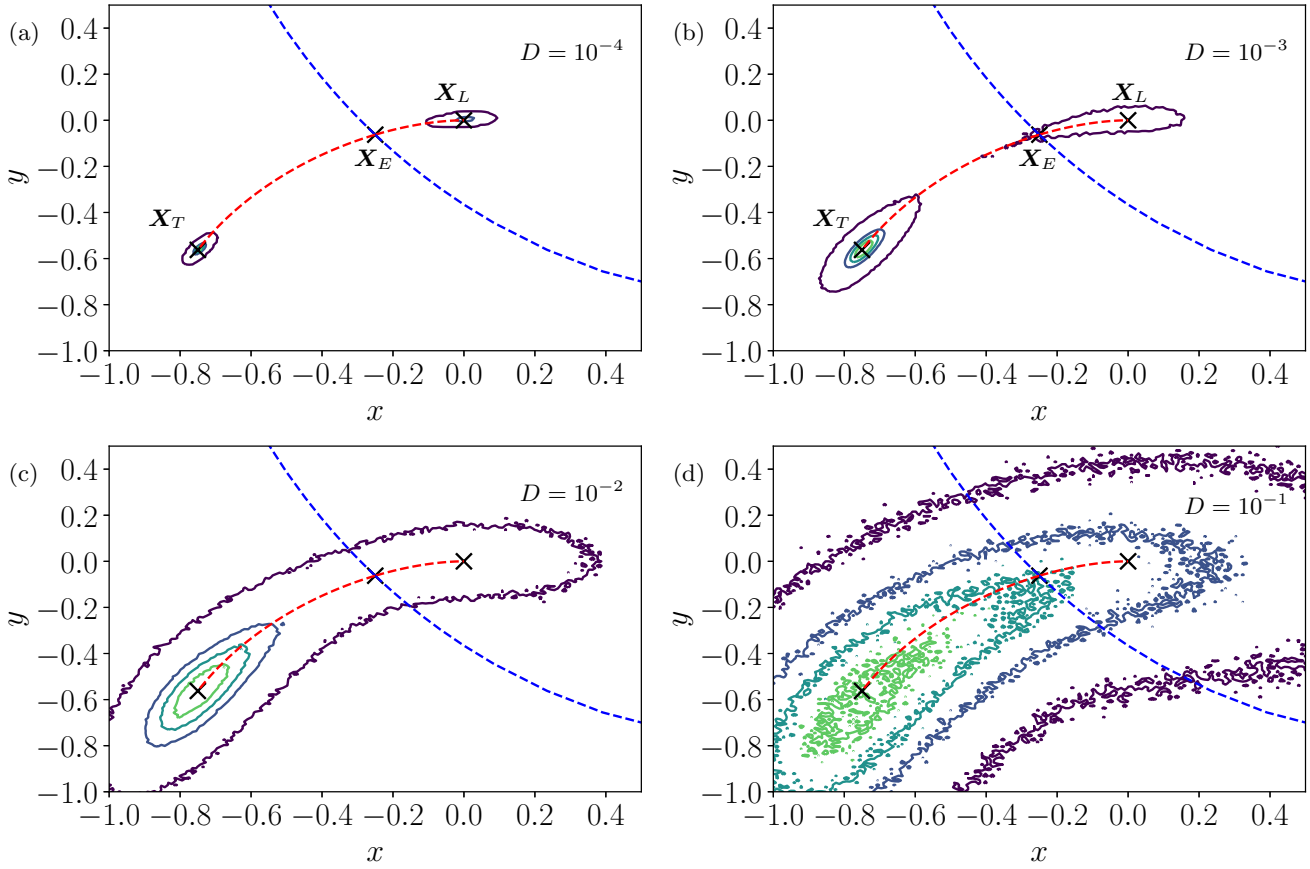

图 2. 随机DM模型的朗之万模拟所得概率密度分布（概率密度函数）， $P(x,\ y)$，对应不同噪声强度：(a) $D = 10^{-4}$，(b) $D = 10^{-3}$，(c) $D = 10^{-2}$，(d) $D = 10^{-1}$。 $P(x,\ y)$ 的最大值归一化为 1，并以彩色显示概率密度函数的等值线（ $P = 0$，0。25，……，1 的等值线）。三个不动点以及边缘态的稳定流形和不稳定流形如图 1 所示。

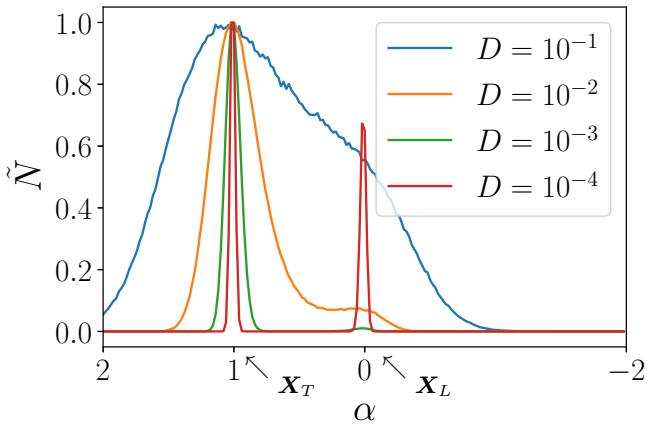

图 3. 沿着 $\boldsymbol{Z}(\alpha)$ 线的归一化边缘概率密度函数 $\tilde{N}(\alpha)$，其中 $D = 10^{-1}$、10^{-2}、10^{-3} 和 10^{-4}。水平轴已翻转，使相对位置与图 1 和图 2 中的图匹配，其中 $\alpha = 1$ 和$\alpha = 0$ 处的左右峰分别对应 $\boldsymbol{X}_T$ 和 $\boldsymbol{X}_L$。

其强度为 $3x + 1$。旋转运动

因此，与该磁场相关的方向在 $x > -1/3$ 时为逆时针，而在 $x < -1/3$时则反转为顺时针。

IV. 概率密度与 Onsager-Machlup 势景观

在详细分析最可能路径解之前，本节先考察随机 DM 模型的静态特征，重点关注平稳概率分布函数（概率密度函数），并讨论其与 OM 势景观的关系。

我们首先通过采用欧拉–丸山格式的朗之万模拟，数值计算随机 DM 方程的平稳概率密度函数。不同噪声强度 $D = \{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$下得到的概率密度函数 $P(x,\ y)$ 如图 2 所示，其最大值均归一化为 1，图中以不同颜色标出 P =0，0。25，……，1 的等值线；绘图使用了 3×10^7 个样本。

当噪声强度足够小时，如

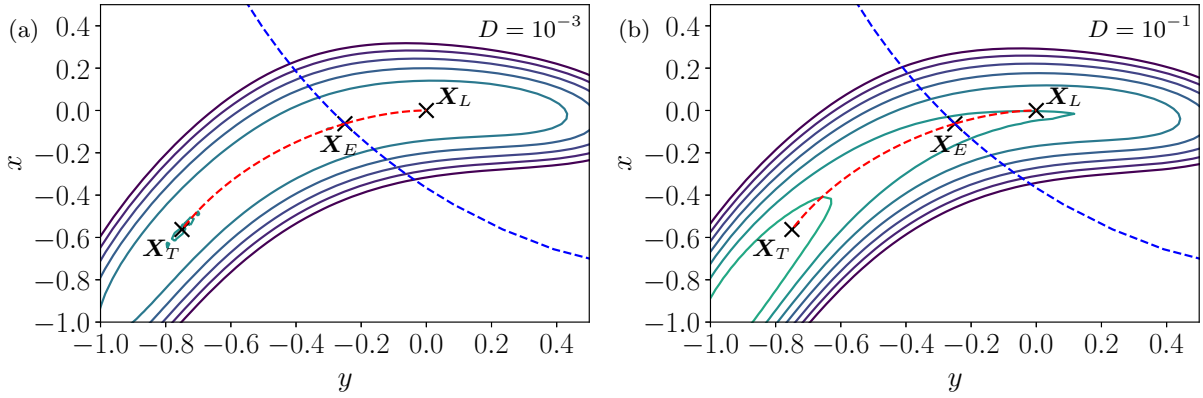

图 4. OM势函数 $V(x,\ y)$ [式（37）] 的等高线，其中 (a) $D = 10^{-3}$，(b) $D = 10^{-1}$。三个不动点以及边缘态的稳定流形和不稳定流形如图 1 和图 2 所示。图中以彩色标出 $V = -0.1$、0.012、.....、0.1 的等值线。

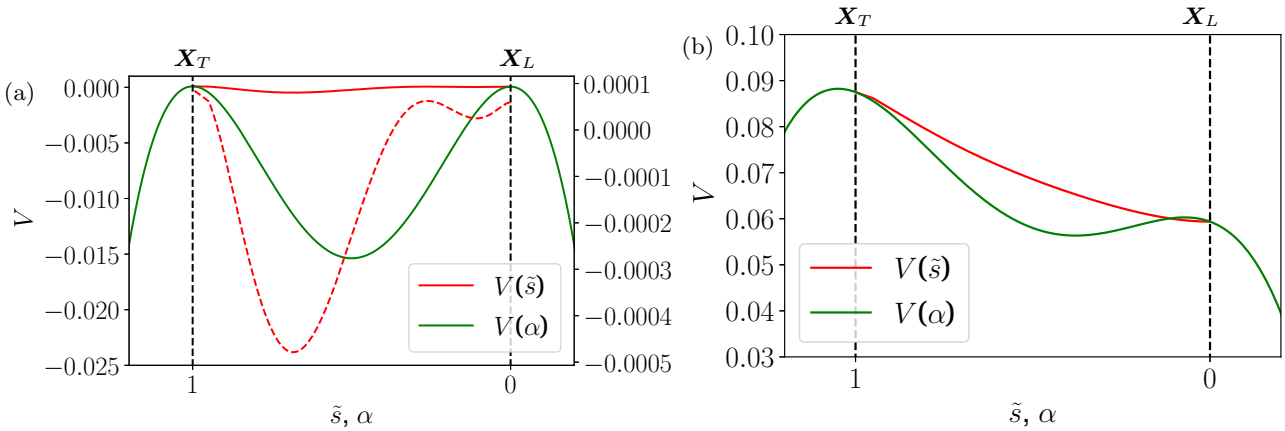

图 5. OM势景观 V [式 37]，沿 $\boldsymbol{Z}(\alpha)$ 曲线 [（红色） $\tilde{s} \in [0,1]$] 以及 $\tilde{X}(\tilde{s})$ 直线 [（绿色） $\alpha \in \mathbb{R}$]，其中 (a) $D = 10^{-4}$，(b) $D = 10^{-1}$。$\boldsymbol{Z}(\alpha)$ 曲线的放大图在 (a) 中以红色虚线表示（参见右侧垂直轴上的标签）。为便于与图 4 比较，水平轴进行了翻转。

$D = 10^{-4}$ 情形 [图 2(a)], 该分布呈现两个峰，分别对应 DM 模型的两个稳定不动点，表明稳定解附近存在小幅涨落。为进一步阐明分布结构，我们引入一条垂直于 $\boldsymbol{Z}(\alpha)$ 的直线，并将垂直方向标记为 β，从而得到边缘分布 $N(\alpha)$，其定义为 $N(\alpha) = \int P(\alpha, \beta)\, d\beta$。将边缘分布除以其最大值归一化后得到的结果 $N(\alpha)$ 如图 3 所示，展示了沿 $\boldsymbol{Z}(\alpha)$ 方向的概率密度函数结构。

当 D 增加到 $D = 10^{-3}$ [时，], 图 2(b) $\boldsymbol{X}_L$ 附近的峰消失，分布转变为单峰形状，这表明在随机DM模型中，$\boldsymbol{X}_L$ 不再是稳定状态。这种定性变化可以从物理角度解释如下：噪声强度较高时，分布的尾部变宽并延伸至分界线，进而渗入对侧吸引域。当我们进一步将 D 增加到 $D = 10^{-2}$[图 2(c)], 时，分布变得更加宽阔，随后覆盖了 $\boldsymbol{X}_L$ 不动点，这在图 3 中也可以看到。

在 $D = 10^{-1}$处，宽广的分布覆盖了 $\boldsymbol{X}_L$和 $\boldsymbol{X}_T$ [图 2(d)], ，我们发现分布峰值略微偏离 $\boldsymbol{X}_T$，朝向 $-y$方向，这一点在图 3 中也可以看到。

接下来，我们比较概率密度函数与 OM 势函数 V [式（37）]。注意，噪声强度只能通过式（8）中的 OM 势影响最概然路径。我们在图 4 中绘制了 $D = 10^{-3}$ 和 $D = 10^{-1}$ 时势函数 $V(x,\ y)$ 的等高线，显示出 $V(x,\ y)$ 与 $P(x,\ y)$ 的分布具有定性相似性，包括峰值位置及其对噪声强度 D 的依赖关系。为说明势极值的位置，我们进一步考察沿 $X(\tilde{s})$ 曲线和 $\boldsymbol{Z}(\alpha)$ 直线的势函数；图 5 展示了 $D = 10^{-3}$ 和 $D = 10^{-1}$ 时的结果。

在 $D = 10^{-3}$ 处，沿两条曲线绘制的 $V(x,\ y)$ 的数值大小差异显著（ [图 5(a)] ），且沿 $\boldsymbol{X}(\tilde{s})$ 曲线的 $\tilde{}$ 值仅有轻微变化，与沿 $\boldsymbol{Z}(\alpha)$ 线观察到的情况相比。此

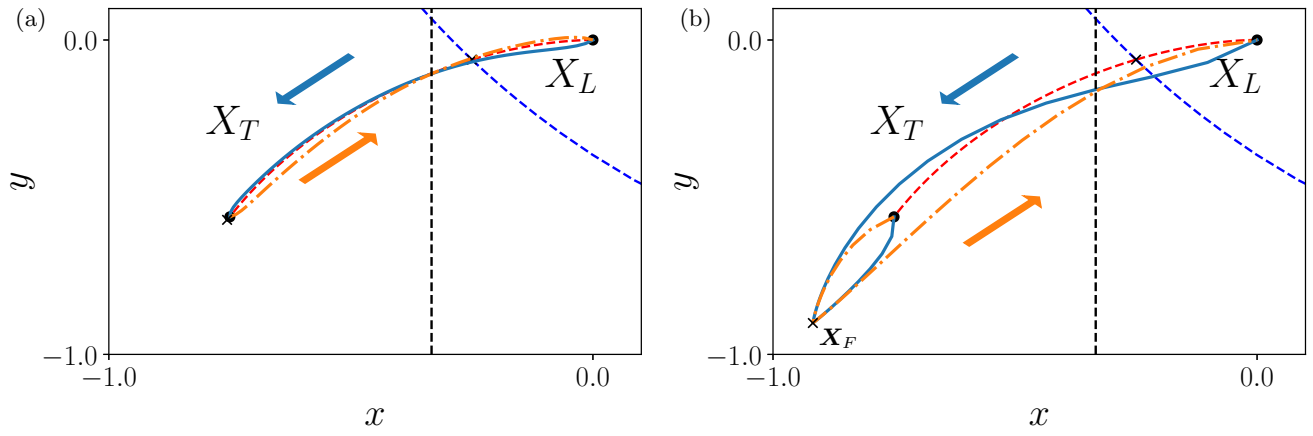

图6. 对于 (a) $D = 10^{-3}$ 和 (b) $D = 10^{-1}$ 且 $\tau = 30$ 的情形，连接 $\boldsymbol{X}_L$ 和 $\boldsymbol{X}_T$ 的最概然路径。实线（青色）表示湍流化路径，点划线（橙色）表示层流化路径。竖直虚线（黑色）表示 $x = -1/3$，磁场在该处反向，[见式 (36)]。OM势的最大值点记为 $\boldsymbol{X}_F$，并以“×”符号标出。

˜观察结果表明，曲线 $\boldsymbol{X}(\tilde{s})$ 是一条异宿轨道，其表现如同 OM势函数中的一条脊线。图 5(a) 中还用虚线展示了异宿轨道上势函数的放大图，可以看到三个局部极大值。$\tilde{s} \approx 0.265$ 附近的中间极大值对应边缘态 $\boldsymbol{X}_E$，而 $\tilde{s} = 0$ 和 $\tilde{s} = 1$ 处的局部极大值则分别对应 $\boldsymbol{X}_L$ 和 $\boldsymbol{X}_T$。

在 $D = 0.1$ 处，沿 $\boldsymbol{X}$（$\tilde{s}$）曲线的局部最大值点消失，其变化幅度变得与 $\boldsymbol{Z}$（α）线上的变化相当。有趣的是，势函数的最大值并不位于不动点 $\boldsymbol{X}_T$，而是略微偏离该点 [图4(b)、图5(b)]。这种 OM 势函数的定性偏移与随机 DM 系统的平稳概率密度函数显著相当。

平稳概率密度函数 $P(x,\ y)$ 与势景观 $V(x,\ y)$ 之间的这些定性一致性并非巧合。正如附录A中详细解释的那样，概率密度函数的时间演化可描述为处于电磁场下的欧几里得薛定谔方程，其标量势为 $-V(x,\ y)$。此外，平稳概率密度函数 $P(x,\ y)$ 是作为该薛定谔方程的基态得到的，从而为 $P(x,\ y)$ 与 $V(x,\ y)$ 的势景观之间的定性一致性提供了物理图像：图4中的势景观峰值可理解为薛定谔系统中的势约束。

在本节中，我们看到 OM 势函数将原始确定性系统的不变流形保留为一道脊线。此外，借助与电磁场下薛定谔方程的类比，我们通过势景观对随机动力学的稳态概率密度函数作出了物理解释。特别是，噪声的影响被充分纳入 OM 势景观。在接下来的几节中，我们将讨论最可能路径及其与 OM 势函数的关系。

V. 层流态与湍流态之间的跃迁及最概然路径

A. 层流态与湍流态之间的最概然路径

本节研究两个稳定不动点 $\boldsymbol{X}_L$ 和 $\boldsymbol{X}_T$ 之间的最概然路径，它们在物理上代表 DM模型中层流态与湍流态之间的噪声诱导转变。为便于后文叙述，以下将层流到湍流的跃迁路径 $(\boldsymbol{X}_{\text{init}},\ \boldsymbol{X}_{\text{final}}) = (\boldsymbol{X}_L,\ \boldsymbol{X}_T)$ 称为湍流化路径，将湍流到层流的跃迁路径 $(\boldsymbol{X}_{\text{init}},\ \boldsymbol{X}_{\text{final}}) = (\boldsymbol{X}_T,\ \boldsymbol{X}_L)$ 称为层流化路径。正如第II节所述，我们只考虑从小 τ 时的恒定动量解延续而来的单个最概然路径分支，并已确认，在所考察的状态空间内，数值上未发现其他分支。

首先，我们在图6中展示了在 $D = 10^{-3}$ 处由 $\tau = 30$ 连接 $\boldsymbol{X}_L$和 $\boldsymbol{X}_T$ 的跃迁路径。对于$D = 10^{-3}$的情况，湍流化路径和层流化路径都沿着（但并不完全位于）异宿轨道运行，OM势函数的脊线 V 就位于该轨道上。最可能路径偏离异宿轨道的微小程度，反映了公式（36）中以磁场表示的旋转动力学；两条路径在 $x = -1/3$处相交，此处磁场$|3x + 1|$ 的强度为零。

当 $D = 10^{-1}$时，如图6(b)所示，湍流化和层流化转变路径表现出显著的非互易性。尽管两条转变路径彼此存在显著偏离，但它们再次相交

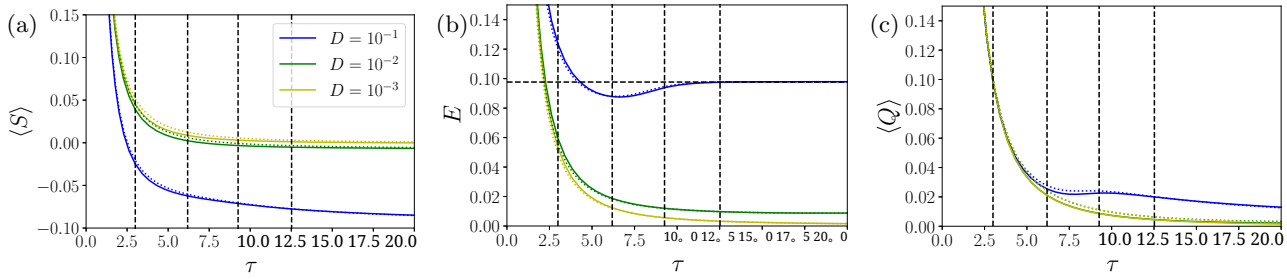

图 7. (a) 作用量 $\langle S \rangle = S/\tau$、(b) 能量 E和 (c) 热吸收 $\langle Q \rangle = Q/\tau$关于 $D = 10^{-3}$、 10^{-2}和 10^{-1}的图。实线和点线分别表示湍流化和层流化转变。竖直虚线标出了 $\tau = \tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的四个代表值，它们对应图 8 中的路径。

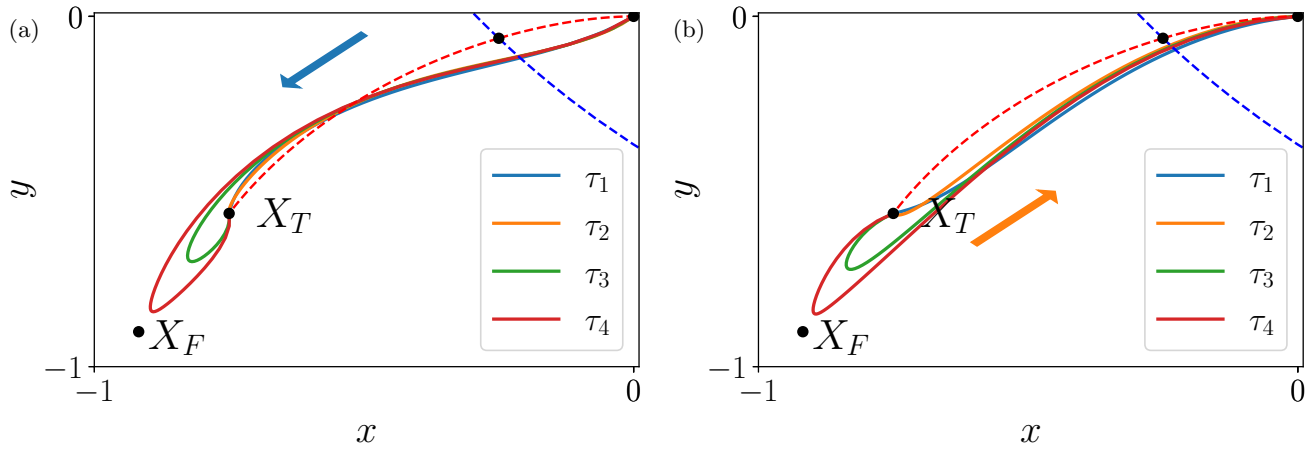

图 8. (a) 湍流化和 (b) 层流化的跃迁路径，持续时间各不相同 $\tau = \tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$。$\tau_1 = 3$和 $\tau_4 = 12.5$，以及另外两个 τs（ τ_2和 τ_3），将时间区间 $[\tau_1, \tau_4]$等分。

在 $x = -1/3$。

如上一节所述，在较大的 D下，OM势函数的最大值偏离 $\boldsymbol{X}_T$[另见图4(d)]。我们将OM势函数的最大值记为 $\boldsymbol{X}_F$，并在图6(b)中用 $\times$ 符号标出。湍流化和层流化转变路径在到达最终状态之前，均经过 $\boldsymbol{X}_F$ 点。

这些结果凸显了表征最可能路径（MPP）的 OM 势景观的重要作用，因此也揭示了层流态与湍流态之间的转变路径；而在小 D 情形下，MPP 沿着原确定性系统的异宿轨道运动，该轨道构成了 OM 势的脊线。

B. τ 依赖性

要获得最可能路径（MMP），需要固定转变时间 τ 的取值。然而，在物理装置中，转变时间并非可控参数。在本小节中，我们考察层流态与湍流态之间最可能路径（MPP）对 τ 的依赖关系，并基于第 II C 节讨论的最可能路径动力学运动学公式讨论最可能路径（MPP）的定性变化。

我们在第 II C 节中看到，根据最可能路径动力学的哈密顿结构，总能量是一个守恒量。首先，我们计算了不同 τ 值下最可能路径的能量，如图 7 所示，其中 D =10^{-3}、10^{-2}和 10^{-1}。图中还展示了 OM 作用量和热吸收，因此有

$$\langle S \rangle = \langle Q \rangle - E \tag{38}$$

根据式（11），其中 $\langle S \rangle = S/\tau$ 和 $\langle Q \rangle = Q/\tau$。

如图 7(a) 所示，无论噪声强度如何，作用量 $\langle S \rangle = S/\tau$ 都单调递减。值得注意的是，在所有 τ 和 D 情形下，层流化路径的作用量 S 高于相应的湍流化路径，这表明在固定跃迁时间 [下，湍流化比层流化更容易发生（见式（13）]）。

图 7(b) 展示了所获得的最可能路径的能量 $E(\tau)$。当 $D = 10^{-3}$ 和 $D = 10^{-2}$时，能量 E 也会随着 τ 增大而单调下降。然而，当 D 增大到 $D = 10^{-1}$时，能量 $E(\tau)$ 在 $\tau \approx 6$ 处达到局部最小值，随后随着 τ 进一步增大而渐近趋近于常数值 $E \approx 0.1$ 。发现 E 的这一渐近值与

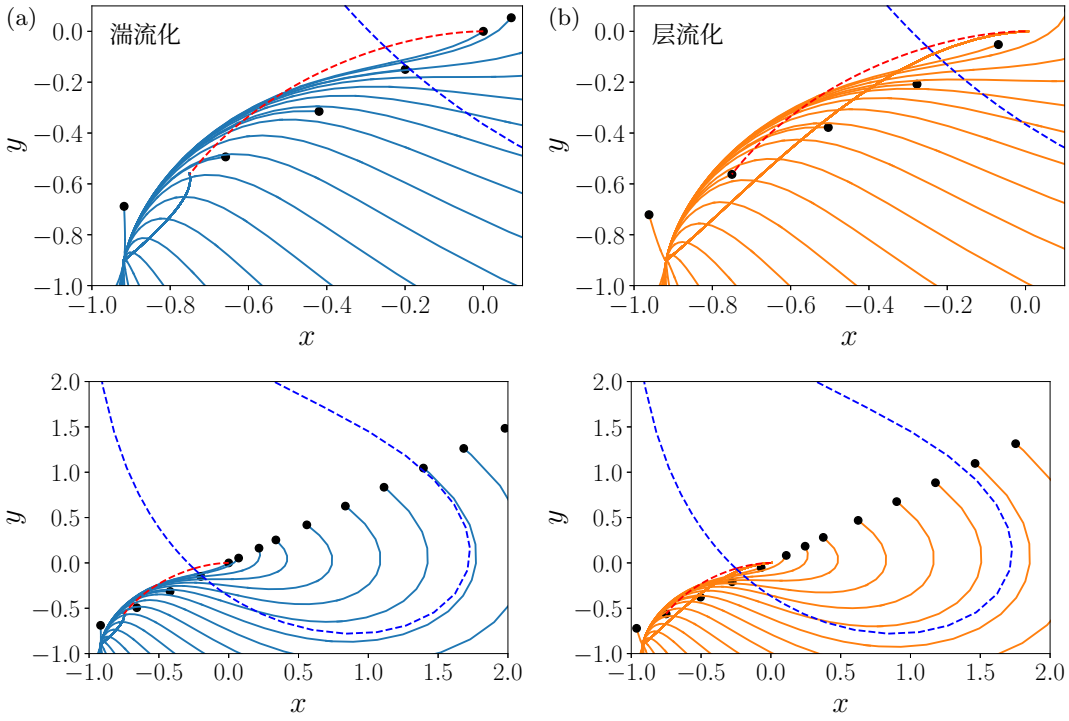

图 9. 不同初始状态下湍流化（a）和层流化（b）的最概然路径 X_{init}，对应 $\tau = 100$ 和 $D = 0.1$。初始状态以圆点标出。上、下两幅图分别展示了（x, y）平面的窄区域和宽区域，如图 1 所示。

势函数的最大值 $V(x, y)$ 相同。在所有情况下，湍流化路径与层流化路径之间均未发现显著差异。

在噪声强度较低时（$D = 10^{-3}$ 和 $D = 10^{-2}$），热吸收 $\langle Q\rangle = Q/\tau$ 不会发生变化，并且呈单调递减趋势 [图 7(c)]。然而，在$D = 10^{-1}$的情况下，$\langle Q\rangle$的值显著高于噪声强度较低时的值 D，并呈现非单调变化，在 $\tau \approx 6$ 处达到局部最小值。值得注意的是，无论噪声强度如何，在噪声强度较低时这些值几乎相同$\tau \lesssim 5$。

这些观察结果表明，在 $D = 10^{-1}$ 处的最概然路径中存在多个特征时间尺度。为进一步分析这些行为，我们引入 τ_i (i = 1、2、3、4) 的四个代表值，如图 7 中的竖直虚线所示。更确切地说，我们将$\tau_1 = 3$ 和 $\tau_4 = 12.5$ 设为代表性的短时间尺度和长τ，并以 τ_2和 τ_3等距划分区间 $[\tau_1, \tau_4]$。

不同 τ_i 下对应的最概然路径如图 8 所示。在短时间尺度（$\tau = \tau_1$、τ_2）下，无论是湍流化 [图 8(a)]还是层流化 [图 8(b)]过程，跃迁路径都沿着异宿轨道，仅因非互易磁场而略有偏离，这与图6(a)类似。对于 $\tau = \tau_1$ 和 $\tau = \tau_2$ 情形，图 8 中的路径几乎重合。

在较长的时间尺度上，$\tau = \tau_3$ 和 τ_4，其中 $E(\tau) \simeq V(\boldsymbol{X}_F)$，跃迁路径会暂时停留在$\boldsymbol{X}_F$ 附近，随后继续前往最终状态。路径形状的变化仅在 $\boldsymbol{X}_T$附近观察到，而且值得注意的是，我们发现所有路径几乎都在同一点与分界线相交，与时间尺度 τ无关。尽管在物理系统中，τ 的值并不是一个可控制的参数，但由此产生的跃迁路径具有一些共同的普适性质，这些性质或许可以通过实验观测到，并将在第七节中进一步讨论。

C. 初始状态依赖性

最后，我们考察初始位置对MPP的影响。图9展示了湍流化和层流化过程所获得的跃迁路径，其中初始状态选自 $\boldsymbol{X}_{\text{init}}(\alpha) = \boldsymbol{Z}(\alpha)$，并使用 $\tau = 100$。

由于持续时间 τ 相对较长（$\tau \gg \tau_4$），所有获得的路径在湍流化和层流化过程中都会首先趋近于 $\boldsymbol{X}_F$ 并在其附近停留。环流型MPP轨迹主要沿着DM模型的确定性流运动，直到到达 $\boldsymbol{X}_F$的邻域。离开 $\boldsymbol{X}_F$的邻域后，所有获得的路径几乎沿着相同的轨迹到达最终状态 $\boldsymbol{X}_{\text{final}}$，这表明初始状态依赖性仅在轨迹到达 $\boldsymbol{X}_F$ 点之前可见。

接下来，我们计算具有不同初始状态 $\boldsymbol{X}_{\text{init}}(\alpha) = \boldsymbol{Z}(\alpha)$ 时 OM 作用量 S 的值。在图 10(a) 中，

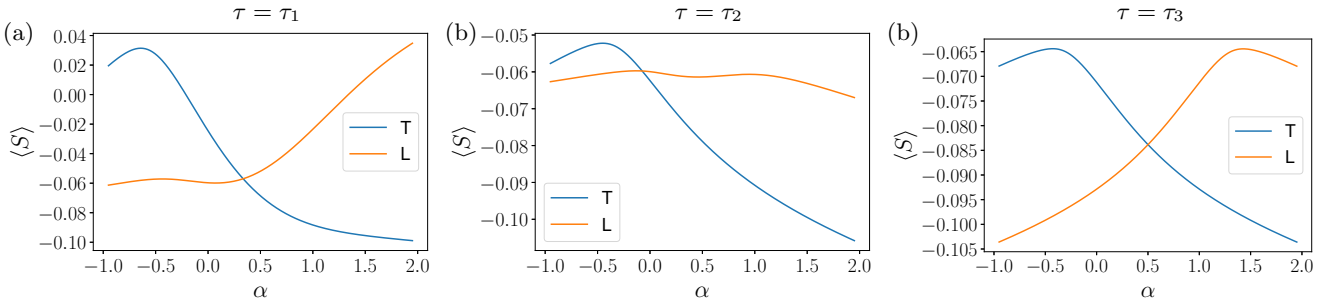

图 10. 在 $D = 10^{-1}$ 条件下，不同初始条件 $\boldsymbol{X}_{\text{init}}(\alpha) = \boldsymbol{Z}(\alpha)$ 时，湍流化（T，青色）和层流化（L，橙色）路径的 OM 作用量 $\langle S \rangle = S/\tau$ 曲线。τ 的取值设为：(a) $\tau = \tau_1$，(b) $\tau = \tau_2$，(c) $\tau = \tau_3$。

分别绘制湍流化路径（$\boldsymbol{X}_{\text{final}} = \boldsymbol{X}_T$）和层流化路径（$\boldsymbol{X}_{\text{final}} = \boldsymbol{X}_L$）在不同 α 值下的曲线。各面板分别显示 $\tau = \tau_1$ [图 10(a)]、$\tau = \tau_2$ [图 10(b)], 和$\tau = \tau_3$ [图 10(c)]的结果。

在每个 τ 中，我们发现，作用量 S 在初始状态接近 $\boldsymbol{X}_T$ 点（$\alpha = 1$）时取值较低，这表明初始状态接近 $\boldsymbol{X}_T$ 时，湍流化更有可能发生。然而，从 $\tau = \tau_2$ 处 S 的平坦曲线可以看出，层流化路径并不会出现这种直观过程。

接着，我们定义湍流化的作用量 S_T 与层流化的作用量 S_L 之差为 $\Delta S = S_T - S_L$，它量化了固定初始状态 [（方程（15）]）下两种跃迁的相对路径概率。ΔS 为正值表示向湍流转变的概率高于层流化的概率。两种跃迁概率相等时的 α 临界值，可由图 10 中作用量曲线的交点确定。在 $\tau = \tau_1$ 时，临界 α 值从 $\alpha^* \approx 0.335$ 移至 $\alpha^* \approx -0.0743$；在 $\tau = \tau_2$ 时移至 $\alpha^* \approx 0.506$ ；在 $\tau = \tau_3$ 时移至.....这表明跃迁过程中存在多个时间尺度。根据这些观察，我们发现，在 $\tau = \tau_2$ 附近的中间时间尺度上，湍流化转变得到增强。

VI. 欧拉-拉格朗日方程不动点的分岔

在上一节中，我们看到，最可能路径动力学的定常解（记为 $\boldsymbol{X}_F$）在决定最可能路径的定性行为方面发挥了重要作用。本节为进一步刻画最可能路径，将考察最可能路径动力学的稳态解及其在不同噪声强度下的分岔图。

图 11(a) 展示了欧拉-拉格朗日方程 [Eqs. (6)-(7)] 的不动点分岔曲线。在 $D = 0$，我们发现了五个不动点，它们对应于 OM 势的极值点 [另见图 5(a)]。其中三个不动点与确定性 DM 模型的不动点相同，另外两个不动点具有有限动量（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{p}$）=（$\boldsymbol{x}^*$，$-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$）。我们将连接到 $\boldsymbol{X}_L$、$\boldsymbol{X}_E$ 和 $\boldsymbol{X}_T$ 的分支上的解分别称为 $\boldsymbol{W}_L$、$\boldsymbol{W}_E$ 和 $\boldsymbol{W}_T$。此外，两个有限动量解分别记为 $\boldsymbol{W}_L$ 和 $\boldsymbol{W}_E$

如图11(a)所示，不动点 $\boldsymbol{W}_L$ 和 $\boldsymbol{W}_E$ 分别与 $\boldsymbol{W}_L$ 和 $\boldsymbol{W}_E$碰撞后，在 $D \approx 0.005$ 处消失。我们还通过数值计算发现，不动点 $\boldsymbol{W}_T$ 在任意大的 D下仍然存在。此外，我们发现不动点 $\boldsymbol{W}_T$ 与 $\boldsymbol{X}_F$相同，后者是OM势函数的极大值点。分岔点 $D \approx 0.005$附近的OM势景观发生了显著变化。

这里，我们分析欧拉-拉格朗日方程的不动点，以理解跃迁路径的形状。图11(b)展示了不动点的位置，以及确定性DM模型的不变集。值得注意的是，即使 D不为零，也发现有四个不动点 $\boldsymbol{W}_L$、$\boldsymbol{W}_E$、$\boldsymbol{W}_L$和 $\boldsymbol{W}_E$ 位于不变集中。另一个不动点 $\boldsymbol{W}_T$则随着 D 增大，从 $\boldsymbol{X}_T$ 朝 $-y$ 方向偏移，这与图4(b)中的OM势景观一致。

从分岔图可以清楚地看到，在最后一次分岔之后，当 D ($D \gtrsim 0.005$) 较大时，最概然路径轨迹由三部分组成：(1) 从 $\boldsymbol{X}_{\text{init}}$ 到 $\boldsymbol{X}_F$ 的一段相对笔直的路径，(2) 在 $\boldsymbol{X}_F$ 处停留，以及 (3) 从 $\boldsymbol{X}_F$ 到 $\boldsymbol{X}_{\text{final}}$ 的一段相对笔直的路径。

在这里，最概然路径的形态仅由 OM势函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的景观决定。即使对于自由度较多的一般系统，该函数也可以通过式（9）从原始确定性系统直接得到。回想一下，正如第 IID 节所述，即使在二维模型系统中，求解最概然路径也需要谨慎处理边值问题的计算；而 OM势函数则提供了一条系统性途径，帮助我们理解具有原始确定性问题不变集的随机系统。

七、总结

在本研究中，我们考察了双变量模型中噪声诱导跃迁的最概然路径，该模型描述的是

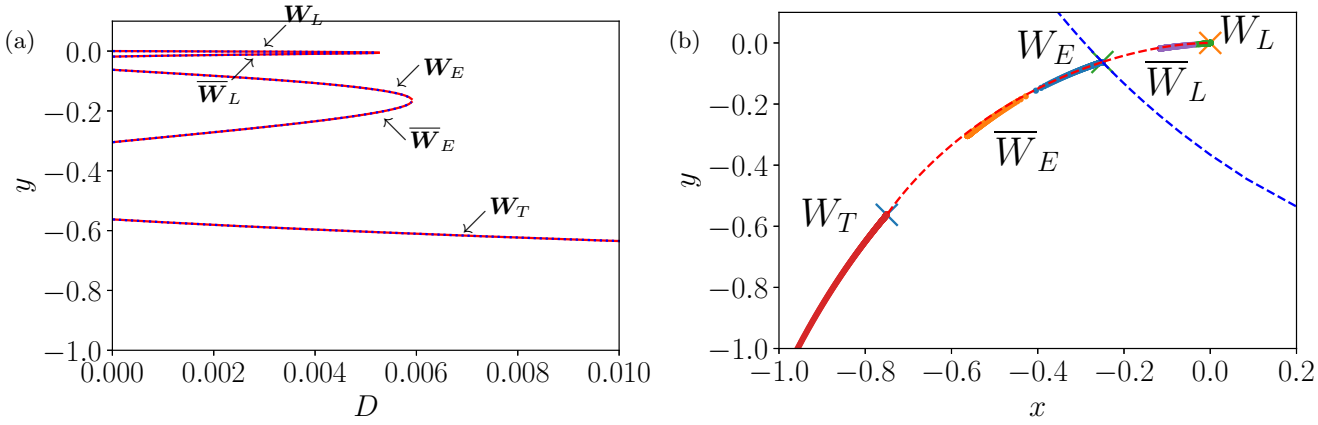

图11. (a) DM模型中欧拉–拉格朗日方程的不动点分岔曲线随 D的变化。实线和点线分别表示不动点和驻点，正如预期，二者完全吻合。(b) 对于 $D \in [0, 0.1]$，五个不动点的位置叠加在确定性DM系统的不变集上。

亚临界跃迁。我们通过最小化 Onsager–Machlup 作用量，推导出欧拉-拉格朗日方程，并发现最概然路径遵循电磁场作用下、具有有效势函数的哈密顿方程。我们将该势函数称为 Onsager-Machlup 势。我们发现，OM 势有助于定性估计随机动力学的稳态概率密度，也有助于理解层流态与湍流态之间的跃迁路径。

我们通过数值计算证明，最概然路径能够捕捉层流态与湍流态之间的非互易跃迁概率。我们借助能量和热吸收之间的运动学关系，分析了持续时间固定为τ 的最概然路径形态；这一关系由哈密顿结构推导而来。通过评估能量函数，我们发现，转变动力学会随转变时间 τ 而变化，同时OM势最大值偏离湍流不动点的程度也会改变。我们还发现，无论 τ取何值，湍流化过程所得的OM作用量始终低于层流化过程，这表明在DM模型中，湍流化转变比层流化转变更为频繁。

哈密顿结构还使我们能够将该模型的欧拉-拉格朗日方程的解改写为噪声诱导系统的OM势函数的极值点。值得注意的是，我们发现这些极值点继承了确定性系统的不变集，因此噪声诱导转变路径会沿着OM势景观及其随噪声强度变化的分岔图演化。

在流体流动等高维系统中，噪声诱导的动力学通常不可重复，而要获得随机运动的基本量——概率密度函数，几乎是不可能的。相比之下，计算动力系统中不变解的方法已在流体力学中得到广泛发展，并成功捕捉了纳维–斯托克斯方程 [21]的本质运动。基于 OM 作用量的哈密顿结构得出的当前结果可直接应用于此类高维系统，并有望为从确定性系统预测噪声驱动动力学提供理论基础。

在本研究中，从未在边缘态的分界线或稳定流形上发现欧拉-拉格朗日方程的不动点，或者等价地说，未发现OM势的极值点；这与由无穷小噪声 [44]提出的湍流转变情景相反。相反，通过对有限噪声强度 D采用OM表述，我们用数值方法证明，所有转变路径都会在远离边缘态的同一点处与分界线相交，从而支持有限噪声下的转变情景 [47]。此外，我们用数值方法确认，无论转变时间 τ 和初始状态如何，转变路径都会收敛。因此，尽管噪声诱导转变通常不可控制，但包括流体湍流在内的物理系统中的转变情景仍有望通过实验和数值方法得到复现。

噪声诱导的湍流化和再层流化过程有助于将湍流转捩理解为一种非平衡相变，相关实例包括定向渗流普适类的近期进展[17, 18, 61–64]。在定向渗流格点模型中，这种相变由活性位点与非活性位点之间的随机局部相互作用触发。相比之下，流体流动的控制动力学本质上是确定性的，并通过压力场包含空间非局域相互作用。我们的理论方法能够一致地涵盖确定性系统的不变集及其在有限尺寸噪声作用下的随机行为，或可架起湍流转捩这两个不同方面之间的桥梁。

湍流转捩。

双稳态并非湍流跃迁所独有；众所周知，各种其他流体系统也会呈现多个共存的稳定状态，例如泰勒–库埃特流中的多个状态 [65], 大尺度流动的流动反转 [16, 66–68], 以及生物对流中的局域结构 [69–71]。除了纳维–斯托克斯流之外，我们基于 OM 作用量建立的表述也有望应用于包括活性流体[72–74], 在内的介观现象，这些现象的模型方程通常并非从第一性原理推导而来。

尽管当前的亚临界转捩模型仅限于二维，但包括混沌行为在内的高维相空间动力学，对于更真实、准确地表征湍流系统应当至关重要。正如本研究所展示的，即使对于高维系统，OM 势也能够在没有计算困难的情况下求得。因此，未来的工作旨在聚焦于此类大规模非线性系统，并且我们预计，即使对于充分发展湍流，我们的方法也能奏效。

致谢

Y.H.、K.Y. 和 K.I. 感谢日本学术振兴会（JSPS）科研费（资助编号：21H05309）；K.Y. 感谢 JSPS 科研费（资助编号：25K17357）；K.I. 感谢 JSPS 科研费（资助编号：24K21517），以及日本科学技术振兴机构（JST）的 FOREST（资助编号：JP-MJFR212N）和 CREST（资助编号：JPMJCR25Q1）。

附录 A：作为非厄米薛定谔系统的福克–普朗克方程

式（1）中朗之万动力学对应的福克–普朗克方程给出了概率密度函数 $P(\boldsymbol{x},\ t)$ 的时间演化，其形式为：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J}, \tag{A1}$$

概率流场为：

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \frac{D}{2}\nabla P(\boldsymbol{x}). \tag{A2}$$

这里，福克-普朗克哈密顿量定义为 $\partial_t P = -\mathcal{H}_{\mathrm{FP}}/D$，写作

$$\mathcal{H}_{\mathrm{FP}} = -\frac{D^2}{2}\left[\nabla - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right]^2 - V(\boldsymbol{x}), \tag{A3}$$

其中，向量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 定义为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})/D$，标量势 $V(\boldsymbol{x})$ 与式（9）中引入的 OM 势函数完全一致。在福克–普朗克方程的语境中，这个势函数称为有效势 [56], ，尽管在福克–普朗克方程的语境中，通常假设梯度场为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\nabla U(\boldsymbol{x})$。

福克-普朗克哈密顿量 [式（A3）] 可解释为电磁场 [75]作用下的欧几里得非厄米量子哈密顿量。相应的薛定谔方程描述粒子在电磁场中运动，其中粒子质量为 $m = 1$，普朗克常数为 $\hbar = 1/D$，标量势为 $V(\boldsymbol{x})$，纯虚矢势为 $-i\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$。

假设概率流 $\boldsymbol{J}$ 在外部边界（包括无穷远处）处消失，则存在平稳概率密度函数 $P(\boldsymbol{x})$，其形式为

$$\mathcal{H}_{\mathrm{FP}} P = 0. \tag{A4}$$

因此，平稳概率密度函数可由零能模的右本征函数得到，该模给出基态。需要注意的是，由于哈密顿量非厄米，本征函数并不正交。

于是，稳态下流场满足无散条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$，但流场不一定为零。为进一步考察这一效应，我们将动力学分解为可逆部分和不可逆部分，即 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{rev}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{irr}}$，其中 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{rev}}$ 写作势 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{rev}} = -\nabla U$ 和$\boldsymbol{f}_{\mathrm{irr}} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{\mathrm{rev}}$的梯度。满足细致平衡时，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{irr}} = \boldsymbol{0}$成立，平稳概率密度函数则为 $P(\boldsymbol{x}) \propto \exp(-U(\boldsymbol{x})/D)$，且 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$。然而，细致平衡被破坏时，概率流仍为 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{\mathrm{irr}}(\boldsymbol{x})$，从而导致非互易的跃迁路径 [76, 77]。与矢势 $\boldsymbol{A}$ 相关的磁场也仍然非零，即$\nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{f}_{\mathrm{irr}}/D$；在可逆情形下，该磁场应为零。

尽管存在非零流场，平稳概率密度函数的景观本质上可视为标量势 $V(\boldsymbol{x})$下薛定谔方程的基态。因此，图 4 中势景观的峰值可解读为福克-普朗克哈密顿量中的势约束，从而产生平稳概率密度函数 $P(\boldsymbol{x})$的峰值。

附录 B：使用深度神经网络搜索最概然路径

在本节中，为补充正文中介绍的射击法，我们提出一种替代性的数值方法，用于构造 DM模型 [方程 (32)–(35)]的欧拉-拉格朗日方程近似解。为此，我们采用物理信息神经网络（PINNs）技术，通过在边界条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{X}_{\mathrm{init}}$ 和 $\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{X}_{\mathrm{final}}$的约束下最小化 OM作用量，来逼近该解 [78]。

为了对路径 $\{\boldsymbol{x}\}_{t=0}^{\tau}$进行数值近似，我们基于多层感知机（MLP） [79, 80]构建了一个函数 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\boldsymbol{\theta}}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$，其参数为 $\boldsymbol{\theta}$。MLP 由带偏置线性映射构成的层实现，我们使用了

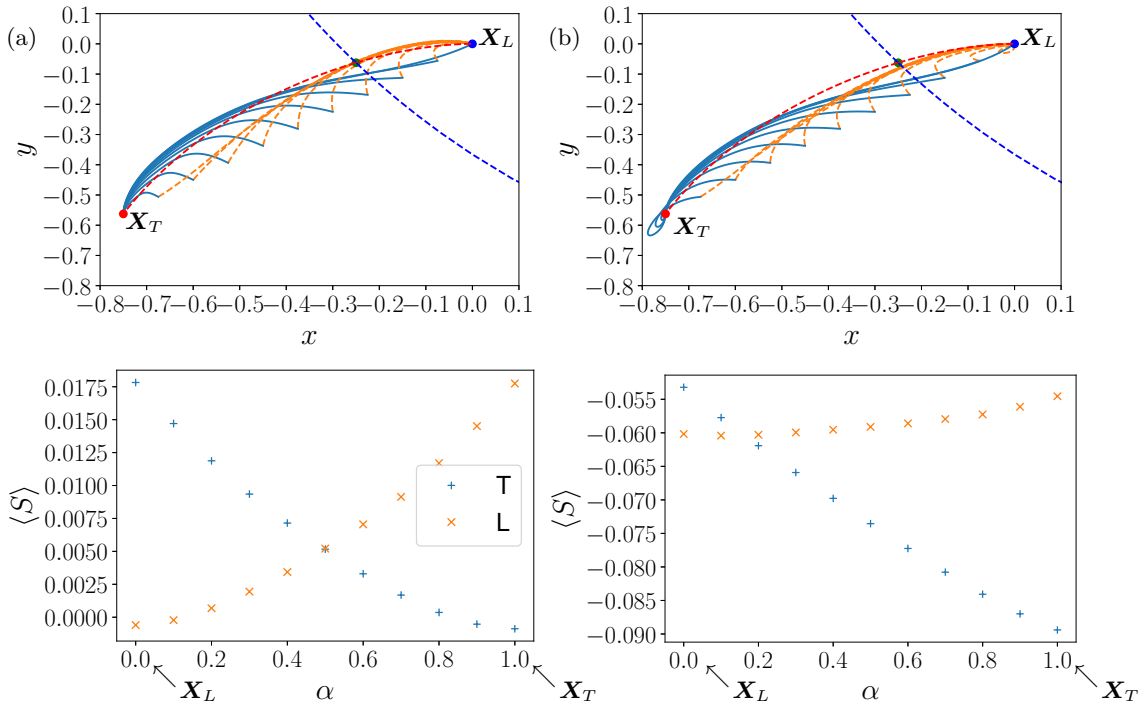

图 12. 对于 (a) $D = 10^{-3}$ 和 (b) $D = 10^{-1}$ 且 $\tau = 5$，不同初始状态 $\boldsymbol{X}_{\text{init}} = \boldsymbol{Z}(\alpha)$对应的最概然路径（上）及其作用量值（下）。与图 6、图 9 和图 10 一样，图中展示了湍流化（T，青色）和层流化（L，橙色）跃迁。

高斯误差线性单元（GELU）作为激活函数。我们在输入层和输出层之间插入了三个隐藏层，节点数分别为 16、128 和 16。

以下变换严格满足边界条件，

$$\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\theta}}(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\boldsymbol{\theta}}(t) + C\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}, \tag{B1}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为常向量，C为常矩阵。对于 DM模型的欧拉-拉格朗日方程，这些常数可表示为：

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{X_{\text{final}} - X_{\text{init}}}{\tau}, \frac{Y_{\text{final}} - Y_{\text{init}}}{\tau}, 0, 0\right), \tag{B2}$$

$$\boldsymbol{b} = (X_{\text{init}}, Y_{\text{init}}, 0, 0), \tag{B3}$$

$$C = \text{diag}(0, 0, 1, 1). \tag{B4}$$

其中，$\boldsymbol{\phi}_\theta$ 满足 x 和y 分量上的边界条件，而未对 p_x 和 p_y 分量施加特定的边界条件。部分 $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ 对应于正文 [式（25）]中的恒定动量解。

我们引入一种损失函数，该函数基于欧拉-拉格朗日方程残差的系综平均值 $\langle R \rangle$，定义如下 as

$$R(\boldsymbol{\phi}, t) \equiv \left|\frac{d\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\theta}}}{dt}(t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\theta}}(t))\right|^2 \tag{B5}$$

时间导数 $d\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\theta}}/dt$ 通过自动微分精确且快速地计算，自动微分由机器学习库 PyTorch [81] 实现。此外，我们还引入另一种基于作用量值$L_{\text{action}} = S(\{\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\theta}}\})$的损失函数，并使用梯形法则计算作用量值。对于图 10 中展示的示例，其中 $\tau = 5$，我们使用了 128 个等间隔时间点。

总损失 L 定义为 L_1 和 L_2的组合，

$$L = cL_{\text{res}} + (1 - c)L_{\text{action}}, \tag{B6}$$

其中参数为 $c \in [0, 1]$。使用 Adam 方法求解 L 的最小化问题，并通过余弦退火调度器调整学习率。

在优化过程中，我们通过从 $c = 0$ 开始并逐渐将 c 增加到$c = 1$，来为c 安排方案。如图 12 所示，对于不同的初始状态，所得解及其作用量与射击法得出的结果十分接近：$\boldsymbol{X}_{\text{init}} = \boldsymbol{Z}(\alpha)$，其中 $\tau = 5$ 和 $D = 10^{-1}$。采用其他方案也能得到几乎相同的结果，例如在整个优化过程中将 c 固定为 1 或 0。

[1] O. Reynolds, 《Xxix. 关于决定水的运动是直线还是曲线的条件，以及平行通道中阻力定律的实验研究》，伦敦皇家学会哲学汇刊**174**，935（1883）。[2] K. Avila、D. Moxey、A. de Lozar、M. Avila、D. Barkley 和 B. Hof, 《管流中湍流的起始》，《科学》**333**，192（2011）。[3] M. Avila、F. Mellibovsky、N. Roland 和 B. Hof, 《管流湍流起始时的流向局域解》，物理评论快报**110**，224502（2013）。[4] R. R. Kerswell, 《理解管流向湍流转变的最新进展》，Nonlinearity**18**，R17（2005）。[5] M. Shimizu 和 S. Kida, 《管流中湍流猝发团的驱动机制》，《流体动力学研究》**41**，045501（2009）。[6] M. Avila、D. Barkley 和 B. Hof, 《管流向湍流的转变》，《流体力学年度评论》**55**，575（2023）。[7] M. Nagata, 《平面库埃特流中的三维有限振幅解：无穷远分岔》，Journal of Fluid Mechanics**217**，519–527（1990）。[8] J. Jim´enez 和 P. Moin, 《近壁湍流中的最小流动单元》，Journal of Fluid Mechanics**225**，213（1991）。[9]J. M. Hamilton、J. Kim 和 F. Waleffe, 《近壁湍流结构的再生机制》，Journal of Fluid Mechanics**287**，317（1995）。[10] T. Itano 和 S. Toh, 《壁面湍流中的猝发过程动力学》，《日本物理学会杂志》**70**，703（2001）。[11] G. Kawahara 和 S. Kida, 《嵌入平面库埃特湍流中的周期运动：再生循环与猝发》，Journal of Fluid Mechanics**449**，291（2001）。[12] J. F. Gibson、J. Halcrow 和 P. Cvitanovi´c, 《平面库埃特流状态空间几何的可视化》，Journal of Fluid Mechanics**611**，107（2008），ISBN：0022112008002。[13]E. Marensi、G. Yalnız、B. Hof 和 N. Budanur, 《近壁湍流的对称性约化动态模态分解》，Journal of Fluid Mechanics**954**，A10（2023）。[14] M. Engel、O. Ashtari、T. M. Schneider 和 M. Linkmann, 《利用对称性约化动态模态分解搜索槽道流中的不稳定相对周期轨道》，Journal of Fluid Mechanics**1013**，A45（2025）。[15] Y. Hiruta 和 S. Toh, 《包含空间局域混沌的孤立解及其在二维 Kolmogorov流中的相互作用》，Physical Review E**92**，063025（2015）。[16] Y. Hiruta 和 S. Toh, 《在二维 Kolmogorov流中观测到的移动空间局域湍流的间歇性方向反转》，Physical Review E**96**，063112（2017）。[17] Y. Hiruta 和 S. Toh, 《二维 Kolmogorov流中的亚临界层流–湍流转捩作为非平衡相变》，《日本物理学会杂志》**89**，044402（2020）。[18] Y. Hiruta 和 S. Toh, 《一种简单的热对流系统tem展示了二维周期性区域中的亚临界跃迁与局域湍流，《日本物理学会杂志》91, 013401 (2022)。[19] J. D. Skufca, J. A. Yorke, and B. Eckhardt, 《平行剪切流中的混沌边缘》，Phys. Rev. Lett. 96, 174101 (2006)。[20] T. Khapko, T. Kreilos, P. Schlatter, Y. Duguet, B. Eck- hardt, and D. S. Henningson, 《边缘态作为边界层流动中旁路转捩的中介》，Journal of Fluid Mechanics 801, R2 (2016)。[21] G. Kawahara, M. Uhlmann, and L. v. Veen, 《湍流中简单不变解的重要性》，《流体力学年度评论》44, 203 (2012)。[22] C. C. T. Pringle and R. R. Kerswell, 《利用非线性瞬态增长构造剪切流湍流的最小种子》，Phys. Rev. Lett. 105, 154502 (2010)。[23] C. C. Pringle, A. P. Willis, and R. R. Kerswell, 《剪切流湍流的最小种子：利用非线性瞬态增长触及混沌边缘》，Journal of Fluid Me- chanics 702, 415–443 (2012)。[24] R. Kerswell, 《非线性非模态稳定性理论》，《流体力学年度评论》50, 319 (2018)。[25] T. M. Schneider, B. Eckhardt, a nd J. A. Yorke, 《管流中的湍流转捩与混沌边缘》，Phys. Rev. Lett. 99, 034502 (2007)。[26] J. Wang, J. Gibson, and F. Waleffe, 《剪切流中的下分支相干态：转捩与控制》，Phys. Rev. Lett. 98, 204501 (2007)。[27] T. M. Schneider, J. F. Gibson, M. Lagha, F. De Lillo, and B. Eckhardt, 《平面库埃特流中的层流-湍流边界》，Phys. Rev. E 78, 037301 (2008)。[28] O. Dauchot and P. Manneville, 《流体动力学稳定性理论中的局部与整体概念》，Journal de Physique II 7, 371 (1997)。[29] F. Waleffe, 《剪切流中的转捩：非线性正规性与非正规线性》，流体物理学 7, 3060 (1995)。[30] F. Waleffe, 《论剪切流中的自持过程》，流体物理学 9, 883 (1997)。[31] M. Beneitez, Y. Duguet, P. Schlatter, and D. S. Hen- ningson, 《边缘流形作为高维状态空间中的拉格朗日相干结构》，物理评论研究 2, 033258 (2020)。[32] M. Beneitez, Y. Duguet, and D. S. Henningson, 《当两条转捩路径竞争时边缘塌缩的建模》，Phys. Rev. E 102, 053108 (2020)。[33] B. Kasz´as, *New Methods for Reduced-order Modeling and Uncertainty Quantification for Nonlinear Analysis of Fluid Flows* 2023，博士论文，苏黎世联邦理工学院（）。[34] M. Salmon, *closed-loop control of finite amplitude per- turbations: application to sub and super-critical flow- bifurcations.*，博士论文，巴黎高等工艺学院（2024）。[35] E. Pollak and P. Talkner, 《反应速率理论：它的过去、现状与未来走向？》，Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Scie nce 15 (2005)。[36] L. S. Tsimring, 《生物学中的噪声》，物理学进展报告 77, 026601 (2014)。[37] X. Fang, K. Kruse, T. Lu, and J. Wang, 《生物学中的非平衡物理学》，现代物理评论 91, 045004 (2019)。

[38] E. Forgoston and R. O. Moore, 《应用动力系统中噪声诱导转变入门》, SIAM Review 60, 969 (2018)。[39] L. Xu, A. van Kan, C. Liu, and E. Knobloch, 《各向异性二维湍流中的涨落诱导转变》, Phys. Rev. Fluids 9, 064605 (2024)。[40] B. Podvin and A. Sergent, 《方形瑞利-贝纳德胞中的风向反转前兆》, Physical Review E 95, 013112 2017( )。[41] J. Soons, T. Grafke, and H. A. Dijkstra, 《二维伯辛内斯克流体模型中经向翻转环流最可能发生的噪声诱导临界转变》, Journal of Fluid Me- chanics 1009, A53 (2025)。[42] F. Bouchet, J. Rolland, and E. Simonnet, 《稀有事件算法将湍流中的转变与激活成核联系起来》, 物理评论快报 122, 074502 (2019)。[43]S. Gom´e, L. S. Tuckerman, and D. Barkley, 《转捩湍流中的极端事件》, Philosophical Transac- tions of the Royal Society A 380, 20210036 (2022)。[44] X. Wan, H. Yu, and E. Weinan, 《将壁面剪切流的非线性失稳视为稀有事件：二维泊肃叶流研究》, Nonlinearity 28, 1409 (2015)。[45] X. Wan, 《二维平行剪切流小随机扰动的最小作用量方法》, Journal of Computational Physics 235, 497 (2013)。[46] M. I. Freĭ dlin and A. D. Venttsel, 《动力系统的随机扰动》（1984）。[47] J. Rolland, 《平面库埃特流中稀有的噪声诱导旁路转捩可绕过瞬子》, Phys. Rev. E 110, 065106 (2024)。[48] J. Rolland, 《利用稀有事件算法捕捉转捩壁湍流的崩塌》, Journal of Fluid Me- chanics 931, A22 (2022)。[49] Y. Li, J. Duan, and X. Liu, 《用于计算随机动力系统最概然路径的机器学习框架》, Phys. Rev. E 103, 012124 (2021)。[50] J. Hu, X. Chen, and J. Duan, 《基因调控网络最概然转变路径的 Onsager–Machlup 方法》, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 32 (2022)。[51] K. Yasuda and K. Ishimoto, 《活性布朗粒子的最概然路径》, Phys. Rev. E 106, 064120 (2022)。[52] R. B¨orner, R. Deeley, R. R¨omer, T. Grafke, V. Lucarini, and U. Feudel, 《多尺度系统中噪声诱导转变的鞍点规避》, Phys. Rev. Res. 6, L042053 (2024)。[53] K. Yasuda, K. Ishimoto, and S. Komura, 《信息活性物质的恶魔变分原理》, arXiv预印本 arXiv:2510.13145 (2025)。[54] J. Gladrow, U. F. Keyser, R. Adhikari, and J. Kappler, 《相对路径概率与随机作用量的实验测量》, Physical Review X 11, 031022 (2021)。[55] L. Onsager and S. Machlup, 《涨落与不可逆过程》, Phys. Rev. 91, 1505 (1953)。[56] H. Risken, 《福克–普朗克方程》, 载于 *The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications* (Springer, 1989) 第63–95页。[57] 噪声强度 D 可能与扩散系数的标准定义相差一个因子2。 [56]。[58] T. Grafke, R. Grauer, and T. Sch¨afer, 《瞬子方法及其在流体力学中的数值实现—力学, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**48**, 333001 (2015)。[59] J. Wang、K. Zhang 和 E. Wang, 《动力学路径、时间尺度与底层景观：一种用于研究非平衡系统和网络整体性质的路径积分框架》, 《化学物理学杂志》**133**, 125103 2010( )。[60] J. Gladrow、U. F. Keyser、R. Adhikari 和 J. Kappler, 《相对路径概率与随机作用量的实验测量》, Phys. Rev. X**11**, 031022 (2021)。[61] M. Sano 和 K. Tamai, 《槽道流中向湍流的普适跃迁》, 《自然·物理》**12**, 249 (2016)。[62] G. Lemoult、L. Shi、K. Avila、S. V. Jalikop、M. Avila 和 B. Hof, 《库埃特流中持续湍流的定向渗流相变》, 《自然·物理》**12**, 254 (2016)。[63] L. S. Tuckerman、M. Chantry 和 D. Barkley, 《壁面剪切流中的图样》, Annual Review of Fluid Mechanics**52**, 343 (2020)。[64] S. Gom´e、L. S. Tuckerman 和 D. Barkley, 《转捩湍流中的极端事件》, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**380**, 20210036 (2022)。[65] S. G. Huisman、R. C. A. van der Veen、C. Sun 和 D. Lohse, 《高度湍流泰勒–库埃特流中的多重状态》, Nature Communications**5**, 3820 (2014)。[66] K. Sugiyama、R. Ni、R. J. A. M. Stevens、T. S. Chan、S.-Q. Zhou、H.-D. Xi、C. Sun、S. Grossmann、K.-Q. Xia 和 D. Lohse, 《热驱动湍流中的流动反转》, 物理评论快报**105**, 034503 (2010)。[67] P. K. Mishra、J. Herault、S. Fauve 和 M. K. Verma, 《二维科尔莫哥洛夫流中反转与凝聚态的动力学》, Physical Review E**91**, 053005 (2015)。[68] B. Suri, 《湍流中流动反转与偏移的预测框架》, 物理评论快报**133**, 154002 (2024)。[69] E. Shoji、H. Nishimori、A. Awazu、S. Izumi 和 M. Iima, 《环形容器中裸藻悬液的局部生物对流图样及其对初始状态的依赖性》, 《日本物理学会杂志》**83**, 043001 2014( )。[70] H. Yamashita、T. Yamaguchi、N. J. Suematsu、S. Izumi 和 M. Iima, 《负趋光性诱导裸藻悬液形成单个生物对流斑》, 流体物理学**37**, 071909 (2025)。[71] Y. Hiruta 和 K. Ishimoto, 《双周期区域中生物对流的局域化与双稳态》, 《日本物理学会杂志》**94**, 104401 (2025)。[72] J. Dunkel、S. Heidenreich、K. Drescher、H. H. Wensink、M. B¨ar 和 R. E. Goldstein, 《细菌湍流的流体力学》, 物理评论快报 **110**, 228102 (2013)。[73] Y. Hiruta 和 K. Ishimoto, 《波动与受限环境中的往复微游动》, Phys. Rev. Res.**6**, 013117 (2024)。[74] D. Nishiguchi、S. Shiratani、K. A. Takeuchi 和 I. S. Aranson, 《涡旋反转是受限细菌湍流的前兆》, Proceedings of the National Academy of Sciences**122**, e2414446122 (2025)。[75] A. Mazzolo 和 C. Monthus, 《通过非厄米电磁量子力学研究非平衡扩散过程及其在布朗陀螺熵产生统计中的应用》, Physical Review E**107**, 014101 (2023)。[76] K. Yasuda

Y. Hosaka 和 S. Komura，奇异朗之万系统的时间关联函数，《化学物理学杂志》**157**（2022 年）。[77] K. Ishimoto、C. Moreau 和 K. Yasuda，奇异弹性流体动力学：黏性流体中的非互易活性材料，PRX Life **1**，023002（2023 年）。[78] M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. Karniadakis，物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题和反问题的深度学习框架，Journal of Computational Physics **378**，686（2019 年）。[79] D. E. Rumelhart、G. E. Hinton 和 R. J. Williams，通过误差反向传播学习表征，《自然》**323**，533（1986 年）。

[80] Y. Hiruta 和 K. Ishimoto，《Kolmogorov流中的极限环自编码器》，《日本物理学会杂志》**94**，064401（2025）。[81] A. Paszke、S. Gross、F. Massa、A. Lerer、J. Bradbury、G. Chanan、T. Killeen、Z. Lin、N. Gimelshein、L. Antiga、A. Desmaison、A. Kopf、E. Yang、Z. DeVito、M. Rai- son、A. Tejani、S. Chilamkurthy、B. Steiner、L. Fang、J. Bai 和 S. Chintala，《PyTorch：一种命令式风格的高性能深度学习库》，载于 *Neural Information Processing Systems* 32，由 H. Wallach、H. Larochelle、A. Beygelzimer、F. d'Alch´e-Buc、E. Fox 和 R. Garnett 编（Curran Associates, Inc.，2019）。