arXiv:2601.03726v1 [math.DG] 7 Jan 2026

SOL 中测地线的编舞

Marc Troyanov

2026年1月7日

摘要

本文对三维李群 SOL 中的测地流给出了完整自足的几何描述。SOL 是 Thurston 的八种模型几何之一。测地线的几何由单一不变量 $k \in [0,1]$——其模数——所决定。一般测地线绕轴螺旋运动，其振幅 $A(k)$、周期 $T(k)$ 和水平漂移 $H(k)$ 均有明确定义。我们刻画了最短测地线段和割迹，并给出一个渐近估计，表明同一海拔上两点之间的距离呈对数增长。本文以 Grayson 和 Coiculescu-Schwartz 的先前研究为基础，进一步发展出一种不同的几何与动力学观点。

MSC2020。 53C22、53C20、37J35、70H03。
关键词。 Sol 几何、测地线流、割迹、可积系统、第一积分。

目录

1 引言 **2**

2 SOL 背景 **5**

3 揭开 SOL 测地线的奥秘 **7**
3.1 在 SOL 中初次漫步.7 3.2 测地线方程.8 3.3 测地线分类.10 3.4 特殊测地线.12

4 一般测地线 13
4.1 一般测地线的垂直周期性.14 4.2 格雷森圆柱.15 4.3 一个应用：模数作为完全不变量.17 4.4 格雷森圆柱的框架化.17 4.5 绕轴缠绕.19 4.6 一次测地线会合.22

5 SOL 中的割迹SOL **25**5.1 地平面中的渐近距离.27

A 一些重要的积分。 **28**
A.1 勒让德椭圆积分.28 A.2 通过椭圆积分表示 $T(k)$、 $M(k)$ 和 $H(k)$.30 A.3 函数 $T(k)$ $M(k)$，和 $H(k)$ 的基本性质.31

B 海森堡（NIL）几何中的测地线 **33**

Marc Troyanov，洛桑联邦理工学院 (marc.troyanov@epfl.ch)

1 引言

20世纪70年代末，William P. Thurston 提出了几何化猜想（如今由于佩雷尔曼的证明而成为定理），断言任何闭的、连通的三维流形都可以沿嵌入的二维球面和不可压缩二维环面分解为基本块，而每个基本块都带有一种完备的黎曼度量，使其局部等距于八种模型几何之一。[1] 其中，SOL 几何支配着具有阿诺索夫单值化的环面丛圆周。20世纪80年代初，普林斯顿盛行着高度富有创造力的氛围，正是在这一时期，Matthew A. Grayson 在 Thurston 的指导下撰写了他的学位论文 [10] 。学位论文的第3章专门研究 SOL 的测地流和闭 SOL 流形，并描述了环面纤维丛中代表自由同伦类的闭测地线可能具有的长度。

回顾 Thurston 慷慨的指导，以及他所营造的令人愉悦、随性而富有创造力的氛围，Grayson 在其学位论文的致谢中写道：

> “Bill 又培养出一名研究生。我不明白他为什么要这么做。我们给他添麻烦，问他愚蠢的问题，跟着他去 Boulder，向他索要推荐信，而且大多听不懂他想表达什么。”

自 Grayson 的学位论文问世以来，已有几项研究加深了我们对 SOL 的理解。特别是，M. P. Coiculescu 和 R. E. Schwartz 在 [7] 中分析了 SOL 中的割迹和度量球面的拓扑，而本文作者先前的一篇论文 [16] 描述了测地线的渐近行为以及 SOL 的视界。

SOL 定义为半直积 $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$，其由$\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$上的各向异性缩放作用决定，具体形式为

$$(x, y) \mapsto (\mathrm{e}^{z}x,\ \mathrm{e}^{-z}y).$$

它是一个可解李群，并且作为流形，它与 $\mathbb{R}^3$微分同胚。我们在 SOL 上赋予以下标准左不变黎曼度量

$$ds^2 = \mathrm{e}^{-2z}\,dx^2 \ +\ \mathrm{e}^{2z}\,dy^2 \ +\ dz^2.$$

SOL 几何呈现出丰富的内在结构。其等距变换群体现了底层的各向异性，而该流形具有若干自然的叶状结构。具体而言，它存在由全测地双曲平面构成的垂直叶状结构，以及由欧几里得平面构成的水平叶状结构；不过，后者既非全测地，也非等距嵌入。

由于 SOL 是带有左不变度量的李群，其测地流是一个具有丰富对称变换的哈密顿系统。根据诺特定理，这些对称变换会产生守恒量，从而使该系统完全可积。因此，可以用经典求积法求解测地流，也就是说，通过有限步显式积分并结合初等代数运算[2]来求解。

对于 SOL 中给定的测地线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$，量

$$a = \mathrm{e}^{2z}\dot{x}, \qquad b = \mathrm{e}^{-2z}\dot{y}$$

保持不变；我们称它们为主运动常数。垂直坐标于是满足自治常微分方程

$$\ddot{z} + U'_{a,b}(z) = 0, \qquad U_{a,b}(z) = \tfrac{1}{2}\big(a^2\mathrm{e}^{2z} + b^2\mathrm{e}^{-2z}\big).$$

[1]关于八种几何的经典论述，参见 Scott [14] ；关于以 Thurston 纲领为核心的三维流形几何结构综述，参见 Bonahon [4] 。[2]关于完全可积哈密顿系统的背景知识，参见 [1, 3, 8, 15]；关于诺特定理，参见 [11]。

求解测地线方程因此归结为对这一维微分方程进行积分，以求出 $z(t)$，再通过求积（即直接积分）求得水平坐标：[3]

$$x(t) = \int a\,\mathrm{e}^{-2z(t)}\,dt, \qquad y(t) = \int b\,\mathrm{e}^{2z(t)}\,dt.$$

精确解可以用雅可比椭圆函数表示，如 [16], 所示；不过在本文中，我们不需要这些显式公式。直接计算可知，以下量

$$c = a\,x(t) - b\,y(t) + \dot{z}(t)$$

也守恒，即 $\dot{c} = 0$，它为测地流提供了第三个重要的运动常数。

测地线分类中的一个基本几何不变量是模数 $k \in [0,1]$，其对单位速度测地线 γ 的定义为

$$k = \sqrt{\frac{1-2|ab|}{1+2|ab|}},$$

其中 a 和 b 是 γ的主运动常数。在命题 4.8 中，我们证明*SOL* 中的两条一般型测地线几何等价，当且仅当它们具有相同的模数k。当 $k \in \{0,1\}$时，我们称测地线为特殊测地线；当 $0 < k < 1$时，则称其为一般型测地线。特殊测地线很容易描述：它们要么是位于某个水平面内并平分坐标轴的水平直线，要么完全位于竖直全测地双曲平面内。现在我们转而讨论一般型测地线。

一般测地线的垂直坐标 $z(t)$ 以振幅 A 周期性振荡，该振幅由条件 $2U_{a,\,b}(A) = 1$ 确定；用模数表示，有 $A(k)$ =arctanh(k)。如 A.2 节所示，振荡周期为 $T(k) = \sqrt{8}\,(1+k^2)\,K(k)$，其中 $K(k)$ 表示第一类完全椭圆积分

沿用 Grayson 的定义，对于每条具有运动常数 γ，b，c 的一般测地线，我们将其与*Grayson* 圆柱相关联，该圆柱定义为

$$\mathcal{G}_{a,b,c} = \big\{(x,y,z) \in \mathrm{SOL} \;\big|\; (ax - by - c)^2 + 2U_{a,b}(z) = 1\big\}.$$

该曲面与一个圆柱 $S^1 \times \mathbb{R}$ 微分同胚，而 γ 完全包含于其中。每个 Grayson 圆柱都由具有相同模数 k 的测地线叶状分解，并引导运动：轨迹在高度方向上振荡，并在每个周期 $T = T(k)$ 后绕圆柱一周。该圆柱具有一个特殊的水平赤道平面，由 $\{z = h\}$ 给出，其中

$$h = \frac{1}{2}\log\left|\frac{b}{a}\right|,$$

表示振荡垂直坐标 $z(t)$ 的平均高度。该曲面关于此平面对称：水平拐点线（其中 $\ddot{z} = 0$）位于该平面内，而临界线（其中 $\dot{z} = 0$）则出现在海拔 $z = h \pm A(k)$ 处。最后，模数 k 是圆柱本身的不变量，与其中所包含的具体测地线无关。

为了描述 Grayson 圆柱的几何，我们引入以下全局向量场：

$$\xi = a\mathrm{e}^{2z}\,\frac{\partial}{\partial x} + b\mathrm{e}^{-2z}\,\frac{\partial}{\partial y} + (c - ax + by)\,\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \eta = b\,\frac{\partial}{\partial x} + a\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

二者都与圆柱 $\mathcal{G}_{a,\,b,\,c}$ 相切。ξ 的积分曲线恰好是$\mathcal{G}$上的测地线，而 η 的积分曲线则是平行于轴的水平直线。ξ 和 η 的流彼此可交换，保持圆柱不变，且二者之间的角始终有一个严格大于零的下界。

[3]关于求积法应用于测地线的历史，请参阅 Nabonnand [13]。

一般测地线绕其对应的 Grayson 圆柱盘旋，每经过一个周期都会产生恒定的水平漂移。对于一般型单位速度测地线 γ，我们引入由 H 定义的量

$$H^2 = |x(t_0 + T(k)) - x(t_0)|\,|y(t_0 + T(k)) - y(t_0)|\,,$$

它度量一次振荡后的净水平位移。该表达式与初始时间 t_0 无关，只取决于模数 k。更准确地说，我们有

$$H = H(k) = \frac{4E(k) - 2(1-k^2)K(k)}{\sqrt{1-k^2}},$$

其中， $E(k)$ 表示第二类完全椭圆积分。我们称 $H(k)$ 为测地线 γ 的水平漂移不变量，或者按照 [7] 的术语，称为整体不变量。

一般测地线的一项基本性质可以表述为相遇定理。该定理断言，对于任意一般型单位速度测地线 γ 以及任意时刻 t_1，点 $\gamma(t_1)$ 和 $\gamma(t_1 + T(k))$ 要么沿 γ 共轭，要么可以由两条不同的、长度为 $T(k)$ 的测地线弧连接。

其几何机制如下：将 Grayson 圆柱 $\mathcal{G}_{a,b,c}$ 沿水平方向滑动至另一个圆柱 $\mathcal{G}_{a,b,c'}$（具有相同的常数 a, b），会得到沿不同水平直线相交的两个圆柱。沿这些直线，速度的水平分量相同，而垂直分量仅差一个符号。这产生了一条自然的伴随测地线 $\gamma^\star$，它在一个周期 $T(k)$ 后再次与 γ 相交。

作为会合现象的推论，一般测地线段的长度一旦超过 $T(k)$，便不再是极小的。反过来的结论则深刻得多：这是 Coiculescu 和 Schwartz [7], 证明的主要定理，即一般测地线段恰好在长度不超过 $T(k)$ 时是极小的，其中 k 是其模数。

同一篇论文还完整描述了割迹，内容远超我们在此所能概述的范围。这里只提及，竖直测地线或双曲测地线的割长为无穷大，一般型测地线的割长为 $T(k)$，而在水平情形下则为 $\sqrt{2}\pi$，即 $T(k)$ 的下确界。在所有情形下，一点的割迹都包含在其水平面内；特别地，$\mathrm{Cut}(0) \subset \{z = 0\}$。

除了这些结果，我们还为沿固定水平方向的大距离建立了一个渐近公式。具体而言，若 $P_\lambda = \lambda(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，则在 SOL 中，从原点到 P_λ 的距离满足

$$d(0, P_\lambda) = 4\log\lambda + O(1),$$

如 $\lambda \to \infty$。

最后，尽管本文聚焦于 SOL，我们仍在附录 B 中简要讨论三维海森堡几何 NIL 中的测地线，并从相同的求积视角加以考察。这既展示了通用的李群／左不变框架，也突显了 SOL 特有的性质。

我们的贡献是对 SOL 中测地流进行自成一体的几何阐述，基于求积方法，并着重讨论不变曲面（Grayson 圆柱）、作为完备不变量的模数，以及绕行／漂移机制。尽管我们的结果与 Grayson [10] 和 Coiculescu–Schwartz [7]的研究一致，且确实建立在他们大量工作的基础之上，但我们采用了不同的方法，并希望能为 SOL 中的测地流提供一种互补的视角。

论文结构。本文结构如下。第 2 节回顾 SOL 的基本事实并确立记号。第 3 节介绍测地线方程，并初步将其分为特殊情形和一般型情形。第 4 节阐述本文的核心内容：垂直周期性、格雷森圆柱的几何、模数作为完全不变量的作用，以及对绕行和漂移的描述，最终导出会合

定理。第 5 节将这些结果应用于割迹，包括大距离下的对数渐近。两个附录对正文内容加以补充：附录 A 汇集椭圆积分的基本事实及其与不变量 $T(k)$ 和 $H(k)$ 的关系，附录 B 则简要介绍海森堡几何 NIL 中的测地线。

致谢。作者感谢 M. P. Coiculescu、R. E. Schwartz 和 V. Matveev 对本章提出的意见。

2 SOL 背景

根据定义，李群 SOL 是赋予乘法 $\mathbb{R}^3$ 的空间

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = \big(x_1 + \mathrm{e}^{z_1} x_2,\ y_1 + \mathrm{e}^{-z_1} y_2,\ z_1 + z_2\big).$$

它是半直积 $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$。单位元是原点 $O = (0,\ 0,\ 0)$，忠实线性表示由映射给出

$$\mathrm{SOL} \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \qquad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{z} & 0 & x \\ 0 & \mathrm{e}^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOL 上的左不变向量场构成其李代数；一组标准基为

$$X = \mathrm{e}^{z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \mathrm{e}^{-z} \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.1}$$

李括号为

$$[Z, X] = X, \quad [Z, Y] = -Y, \quad [X, Y] = 0.$$

该李代数是可解但非幂零的，因此 SOL 是一个可解的非幂零李群。在该李代数上定义的线性映射 ((1,1)–张量) 为

$$X^{\dagger} = X, \quad Y^{\dagger} = Y, \quad Z^{\dagger} = -Z$$

称为**垂直翻转**。它是该李代数的反同态，即

$$[A, B]^{\dagger} = [B^{\dagger}, A^{\dagger}].$$

由下式定义的 SOL 上的黎曼度量

$$ds^2 = \mathrm{e}^{-2z} dx^2 + \mathrm{e}^{2z} dy^2 + dz^2 \tag{2.2}$$

是左不变量的。标架 $\{X, Y, Z\}$ 是正交归一的。赋予该度量后，SOL 是 Thurston 分类中的八种模型几何之一，参见 Peter Scott 的奠基性综述 [14]。左平移是 SOL 的等距变换。特别地，有

- 水平平移：

$$(x, y, z) \mapsto (x + w_1, y + w_2, z),$$

- 以及垂直提升：

$$(x, y, z) \mapsto \big(\mathrm{e}^{w} x, \mathrm{e}^{-w} y, z + w\big).$$

此外，等距变换群还包含一些固定原点的对称变换：

- 四种坐标符号变换

$$(x, y, z) \mapsto (\varepsilon_1\, x, \varepsilon_2\, y, z), \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\},$$

- 以及对合等距变换

$$(x, y, z) \mapsto (y, x, -z).$$

这些变换生成单位元处的各向同性群。该群是一个阶为 8 的有限群，与二面体群 D_4 同构。结合平移和垂直提升，它们生成 SOL 的完整等距变换群。

注 2.1. 区分 SOL 中的点与切向量非常重要，尽管人们可能会想把两者都认作 $\mathbb{R}^3$。特别是，切向量上的垂直翻转满足 $\|\xi^\dagger\| = \|\xi\|$，然而点上的映射 $(x,\ y,\ z) \mapsto (x,\ y,\ -z)$并非 SOL 的等距变换。算子 $\dagger$ 是一个 (1，1)–张量，它定义了切丛上的一个等距自同态，但该自同态并非任何 SOL 等距变换的微分。

SOL 是一个齐性但非各向同性的空间，不过某些特殊的子流形有助于深入了解其几何。特别是，垂直平面 $\mathcal{H}'_0 = \{y = 0\}$ 在等距变换 $(x,\ y,\ z) \mapsto (x,\ -y,\ z)$ 下逐点不变，因此是一个全测地子流形。它与双曲平面等距。[4] 事实上，引入坐标 $u = x, v = \mathrm{e}^z$ 后， $\mathcal{H}'_0$ 上的诱导度量为

$$\mathrm{e}^{-2z}dx^2 + dz^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2};$$

这将 $\mathcal{H}'_0$ 与庞加莱上半平面 $\mathbb{H}^2$对应起来。同样，子集

$$\mathcal{H}'_{y_0} = \{y = y_0\}, \qquad \mathcal{H}''_{x_0} = \{x = x_0\}$$

是 SOL 中的全测地子流形，与 $\mathbb{H}^2$ 等距，适用于任意 $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$。水平平面 $\Pi_{z_0} = \{z = z_0\}$ 也发挥着重要作用，尽管它们并非全测地。
在左不变标架 $\{X, Y, Z\}$中，莱维-奇维塔联络可由 [16]计算得出。唯一非零的协变导数为

$$\nabla_X X = Z, \qquad \nabla_X Z = -X,$$
$$\nabla_Y Y = -Z, \qquad \nabla_Y Z = Y.$$

前面定义的垂直翻转 $\dagger$满足关系

$$\nabla_{V^\dagger} V^\dagger = -\big(\nabla_V V\big)^\dagger.$$

回忆一下，黎曼曲率张量 R 定义为

$$R(U, V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U,V]} W.$$

利用上述公式（以及 $[X, Y] = 0$这一事实），我们计算截面曲率。首先，

$$R(X, Y)Y = \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y = -\nabla_X Z = -X,$$

因此

$$K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X\rangle = 1.$$

[4]坐标（x, z）中，度量的形式为 $ds^2 = \mathrm{e}^{-2z}dx^2 + dz^2$，通常称为双曲平面中的等高线坐标 。

同样，

$$K(X,Z) = K(Y,Z) = -1.$$

这些截面曲率与以下事实相符：竖直平面 $\mathcal{H}_0'$ 和 $\mathcal{H}_0''$ 是全测地的，并且等距于双曲平面。

注 2.2. 这里记录一些方便使用的术语和观察结果。
(1) 对于点 $p=(x,y,z)$，我们将第三个坐标 z称为其高度 （或海拔）。(2) SOL 的每个等距变换都保持两点之间的高度差： 若 $p_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $p_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$|z_1 - z_2|$$

它在整个等距变换群下是不变量。
(3) 给定两个位于同一海拔 z的点 $p_1=(x_1,y_1,z)$ 和 $p_2=(x_2,y_2,z)$，我们将它们的水平距离 定义为

$$\delta(p_1,p_2) = \sqrt{\mathrm{e}^{-2z}(x_2-x_1)^2 + \mathrm{e}^{2z}(y_2-y_1)^2}. \tag{2.3}$$

这与水平面 $\Pi_z = \{\, z = \text{const} \,\}$ 上按 (2.2) 诱导的度量所定义的欧几里得距离一致。一般而言，$\delta(p_1,p_2)$ 大于 p_1 与 p_2之间的黎曼距离，因为 Π_z 不是全测地子流形。

(4) SOL 的每个等距变换都会将每个水平面 Π_z 仿射映射到某个水平面，并保持欧几里得面积不变（注意，在水平面上，黎曼面积与欧几里得面积相同）。

(5) 特别是，如果 $p_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $p_2=(x_2,y_2,z_2)$，那么它们的乘积

$$|x_2-x_1|\cdot|y_2-y_1|$$

也在 SOL 的每个等距变换下保持不变。

3 揭开 SOL 测地线的面纱

3.1 初探SOL

设想李群 SOL 是一座大型多层建筑，而我们正位于地面层的大厅，坐落在原点 $O=(0,0,0)$，此刻想去酒吧喝一杯。酒吧位于点 $P=(p,p,0)$ $(p>0)$。当然，我们也可以直接沿着路径斜穿大厅，

$$\alpha(t) = (t,t,0), \quad 0 \le t \le p,$$

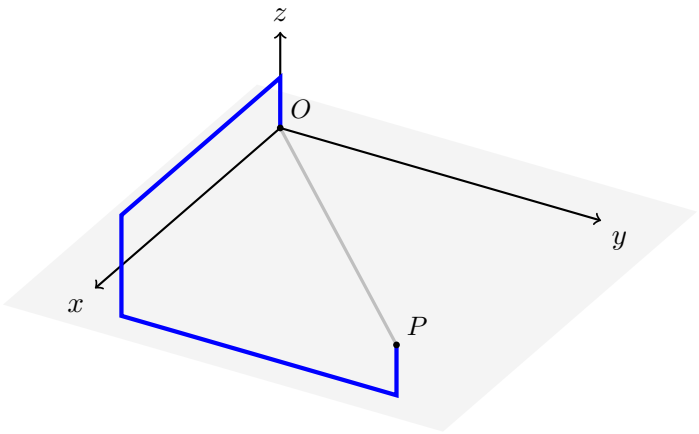
这确实是 SOL 中的一条测地线，长度为 $\sqrt{2}\,p$。但随着 p 增大，这条路径会变得过长。为了缩短距离，应利用度量（2.2）的特定结构，它给出了以下指引：

> 在上层时，沿东西方向前进；在地下室时，沿南北方向移动。

更准确地说，按照以下路线行进：

(i) 从位于 $O=(0,0,0)$ 的主厅乘电梯上到高度为 A 的上层，同时保持x– 和 y–坐标为零。(ii) 沿东西向走廊前往 $(p,0,A)$，同时保持 $y=0$ 和 $z=A$ 不变。

(iii) 乘电梯下到坐标为 $(p,\ 0,\ -A)$ 的地下层，同时保持 $x = p$ 和 $y = 0$ 不变。(iv) 沿南北走廊走到 $(p,\ p,\ -A)$，同时保持 $x = p$ 和 $z = -A$ 不变。(v) 最后，乘电梯回到地面层，到达 $P = (p,\ p,\ 0)$。



这条路径在度量 (2.2) 下的长度为

$$L = 4A + 2p\,\mathrm{e}^{-A}.$$

其最小值在 $A = \log\left(\frac{p}{2}\right)$ 处取得（以下我们假设 $p \geq 2$），于是得到

$$L(p) = 4\log\left(\tfrac{p}{2}\right) + 4 = 4\log(p) + 4(1 - \log(2)).$$

假设 p 足够大，例如 $p \geq 6$，则有 $L(p) < \sqrt{2}\,p$，因此

$$d(O, P) < L(p) = 4\log(p) + 1.23,$$

这比 $\sqrt{2}\ p$短得多。令人惊讶的是，对于较大的 p，这个粗略的构造给出了真实距离的正确渐近估计，参见定理 5.6。

3.2 测地线方程

如引言中所述，SOL 上的测地线方程构成一个完全可积系统，可以通过求积求解。回顾一下，SOL 中的光滑曲线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是测地线，当且仅当它是作用泛函的临界点，该作用泛函定义为积分

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt,$$

其中拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2z}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{2z}\dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

相应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}. \tag{3.1}$$

具体而言，这些方程给出

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{-2z}\dot{x}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{2z}\dot{y}\right) = 0, \quad \text{and} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mathrm{e}^{-2z}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{2z}\dot{y}^2. \tag{3.2}$$

这个常微分方程组可分解为三个更简单的方程：

引理 3.1. 光滑曲线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是 SOL 中的测地线，当且仅当存在常数 $a, b \in \mathbb{R}$，使得：

$$\dot{x}(t) = a\,\mathrm{e}^{2z(t)}, \qquad \dot{y}(t) = b\,\mathrm{e}^{-2z(t)}. \tag{3.3}$$

and

$$\ddot{z}(t) = -a^2\mathrm{e}^{2z(t)} + b^2\mathrm{e}^{-2z(t)}. \tag{3.4}$$

我们称 a和 b为主运动常数；它们是测地流的第一积分。将 (3.4) 改写为以下形式会更方便：

$$\ddot{z}(t) = -\,U'_{a,b}\big(z(t)\big), \tag{3.5}$$

其中势函数 定义为

$$U_{a,b}(z) = \tfrac{1}{2}\big(a^2\mathrm{e}^{2z} + b^2\mathrm{e}^{-2z}\big), \tag{3.6}$$

且 $U'_{a,\ b}(z)$ 表示关于 z 的导数。

引理的证明。 由 (3.2) 中的前两个方程可知，存在常数$a,\ b \in \mathbb{R}$，使得

$$\dot{x}(t) = a\,\mathrm{e}^{2z(t)}, \quad \dot{y}(t) = b\,\mathrm{e}^{-2z(t)},$$

由此得到 (3.3)。将这些关系代入 (3.2) 中的第三个方程，即可得到方程 (3.4)：

$$\ddot{z}(t) = -\mathrm{e}^{-2z}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{2z}\dot{y}^2 = -a^2\mathrm{e}^{2z(t)} + b^2\mathrm{e}^{-2z(t)}.$$

□

由于 SOL 是一个齐性黎曼流形，因此它是完备的，所有测地线都可以延拓到任意时刻 $t \in \mathbb{R}$。在全文中，我们只考虑单位速度测地线，它们满足以下关系：

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \mathrm{e}^{-2z}\dot{x}^2 + \mathrm{e}^{2z}\dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1.$$

使用前一引理中 $\dot{x}$和 $\dot{y}$ 的表达式，这个单位元可化简为

$$2U_{a,b}(z) + \dot{z}^2 = a^2\mathrm{e}^{2z} + b^2\mathrm{e}^{-2z} + \dot{z}^2 = 1. \tag{3.7}$$

注意，这一归一化意味着 $2|ab| \le 1$；事实上，由 (3.7) 可得

$$2\,|ab| \le 2U_{a,b}(z) = a^2\mathrm{e}^{2z} + b^2\mathrm{e}^{-2z} \le 1. \tag{3.8}$$

下一个引理记录了关于 SOL 中测地线的另外两个基本事实。

引理 3.2. 设 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是 SOL 中的一条单位速测地线。那么：

(i) 函数

$$c := a\,x(t)\ -\ b\,y(t)\ +\ \dot{z}(t)$$

沿着 γ为常数。

(ii) 对于每个 t，我们有

$$\big(a\,x(t) - b\,y(t) - c\big)^2 + a^2\mathrm{e}^{2z(t)}\ +\ b^2\mathrm{e}^{-2z(t)} = 1.$$

证明。 由 (3.3) 和 (3.4)，我们有

$$\dot{c} = a\dot{x} - b\dot{y} + \ddot{z} \equiv 0,$$

哪些 第一个断言。第二个断言由第一个断言和单位元 (3.7) 得出 . □

定义 3.3。 非恒定测地线 γ 上的一点如果满足 $\dot{z}(t) = 0$，则称为临界点；如果满足 $\ddot{z}(t) = 0$，则称为拐点。

由 (3.1) 可知，只有当 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$ 时，拐点才存在。它们由以下条件刻画

$$U'_{a,b}(z) = a^2 \mathrm{e}^{2z} - b^2 \mathrm{e}^{-2z} = 0, \quad \text{equivalently} \quad z = h(a,b) := \frac{1}{2} \log \left| \tfrac{b}{a} \right|.$$

由引理 3.2 可知，临界点由以下条件刻画

$$2U_{a,b}(z) = a^2 \mathrm{e}^{2z} + b^2 \mathrm{e}^{-2z} = 1, \quad \text{equivalently} \quad c = ax - by.$$

3.3 测地线的分类

如果存在 SOL 的等距变换Φ，使得 γ_2 是 $\Phi \circ \gamma_1$的重新参数化，则称两条完备测地线 γ_1、 γ_2 在几何上等价。本节讨论常数 a 和 b 如何控制给定的非恒定测地线的形状。如果 $a = b = 0$，那么 x和 y 为常数，且该测地线是垂直直线。其他测地线分为以下三种类型：

- 若 $z(t)$为常数，则称该测地线为水平测地线。

- 若测地线包含于某个垂直叶状结构 $\mathcal{H}'$ 或 $\mathcal{H}''$的叶中，即 $x(t)$或 $y(t)$为常数，则称该测地线为双曲型测地线。

- 其他测地线称为一般型测地线。

在 [16], 中，这些测地线分别称为 A 型、B 型或 C 型。显然，当且仅当测地线没有临界点时，它才是垂直的；当且仅当测地线上的所有点都是临界点时，它才是水平的。双曲测地线恰有一个临界点，且没有拐点。一般测地线会周期性地经过拐点和临界点（极大点和极小点）。

以下概念将在我们从几何角度理解测地线时发挥关键作用：

定义 3.4。 *SOL* 中一条（非平凡）测地线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 的模数 是参数 $k \in [0,1]$，定义为

$$k := \sqrt{\frac{\|\dot{\gamma}\|^2 - 2|\dot{x}\dot{y}|}{\|\dot{\gamma}\|^2 + 2|\dot{x}\dot{y}|}}.$$

模数沿测地线保持不变，并且在重参数化下是不变量。如果测地线具有唯一速度，则利用 (3.3)，我们有：

$$k = \sqrt{\frac{1 - 2|\dot{x}\dot{y}|}{1 + 2|\dot{x}\dot{y}|}} = \sqrt{\frac{1 - 2|ab|}{1 + 2|ab|}},$$

其中 a 和 b是主运动常数。特别地，模数沿测地线保持不变。

我们的第一个结果指出，测地线的模数在 SOL 的等距变换下是不变量：

引理 3.5. 两条几何等价测地线具有相同的模数。

证明。 我们首先注意到，SOL 中属于原点各向同性群的任何等距变换显然不会改变测地线的模数。由群 SOL 的左作用得到的等距变换具有如下形式

$$\Phi_\lambda : (x, y, z) \mapsto (\mathrm{e}^\lambda x + x_0, \mathrm{e}^{-\lambda} y + y_0, z + \lambda),$$

对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$；简单计算可知，测地线 γ 和 $\Phi_\lambda(\gamma)$ 具有相同的模数。

□

我们将在命题 4.8 中证明，反过来也成立：两条一般测地线几何等价，当且仅当它们具有相同的模数。

测地线的类型可以用其模数来描述:

引理 3.6。 设 γ 是 SOL 中的一条模数为 $k \in [0, 1]$ 的单位速测地线。那么

$$\begin{aligned} \gamma \textit{ is vertical or hyperbolic} &\quad\Leftrightarrow\quad k = 1, \\ \gamma \textit{ is generic} &\quad\Leftrightarrow\quad 0 < k < 1, \\ \gamma \textit{ is horizontal} &\quad\Leftrightarrow\quad k = 0. \end{aligned}$$

在最后一种情形中，高度保持恒定，且等于

$$z(t) = h = \tfrac{1}{2} \log \left| \frac{b}{a} \right|.$$

证明。 垂直测地线和双曲测地线由条件 $\dot{x}\dot{y} \equiv 0$刻画，而这等价于 $k = 1$。为区分水平测地线和一般测地线，我们使用不等式

$$2|ab| \le a^2 \mathrm{e}^{2z} + b^2 \mathrm{e}^{-2z}.$$

结合 (3.7)，可得

$$\dot{z}^2 = 1 - \left(a^2 \mathrm{e}^{2z} + b^2 \mathrm{e}^{-2z}\right) \le 1 - 2|ab|.$$

由此可知，若 $k = 0$，则 $2|ab| = 1$，因此 $\dot{z} \equiv 0$ ，且该测地线为水平测地线。反之，
若 z 为常数且 $ab \neq 0$，则方程 (3.4) 得出

$$0 = \ddot{z} = -a^2 \mathrm{e}^{2z} + b^2 \mathrm{e}^{-2z} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{4z} = \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

由此得到

$$z = \tfrac{1}{2} \log \left| \frac{b}{a} \right|.$$

代入 (3.7) 后可得

$$1 = a^2 \mathrm{e}^{2z} + b^2 \mathrm{e}^{-2z} = 2|ab|,$$

因此 $2|ab| = 1$，也就是说， $k = 0$。引理的证明至此完成。 □

3.4 特殊测地线

本节将完整描述所有特殊测地线。

3.4.1 垂直测地线与水平测地线

当 $a = b = 0$ 时，会出现一个平凡情形。此时 $\dot{x} = \dot{y} = 0$ 和 $\ddot{z} = 0$，因此 x 和 y 为常数，而 z 是关于 t的仿射函数；这些就是垂直测地线。

另一种简单情形是，当 $ab \neq 0$ 并且对于某个 t_0，有

$$\dot{z}(t_0) = 0 \quad \text{and} \quad z(t_0) = h = \tfrac{1}{2} \log \left| \frac{b}{a} \right| .$$

此时势函数达到最小值，$U_{a,\,b}(h) = |ab|$。利用 (3.7)，可得 $2|ab| = 2U_{a,\,b}(h) = 1$，因此 $2|ab| = 1$，这意味着模数 $k = 0$。根据引理 3.6，该测地线位于高度 h处且为水平测地线。此外，

$$\dot{x} = a\,\mathrm{e}^{2h} = \operatorname{sgn}(a)\,|b| = \pm b, \qquad \dot{y} = b\,\mathrm{e}^{2h} = \operatorname{sgn}(b)\,|a| = \pm a,$$

因此，该曲线是一条形如

$$\gamma(t) = (x_0 \pm b\,t,\ y_0 \pm a\,t,\ h).$$

在动标架 (2.1) 中，我们有

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm X \ \pm Y \right),$$

因此，水平测地线 γ 与每个垂直叶状结构相交时的角为 $\pi/4$。

3.4.2 双曲测地线。

现在考虑 $b = 0$ 和 $a \neq 0$ 的情形，此时 $\dot{y} = b\mathrm{e}^{-2z} \equiv 0$。因此， $y(t)$ 为常数，可以忽略。不失一般性，假设 $a > 0$，并将速度归一化为$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$。

在这种情况下，描述测地线几乎是显而易见的。事实上，由引理 3.2 可知，$c = \dot{z} + ax$ 为常数，且

$$(ax - c)^2 + a^2\mathrm{e}^{2z} = 1.$$

这个关系完整地描述了所有可能的双曲测地线（其中 $b = 0$）。引入坐标 $u = x$ 和 $v = \mathrm{e}^z$，可将其改写为

$$(u - u_0)^2 + v^2 = \frac{1}{a^2},$$

其中 $u_0 = c/a$。这是一个以轴 $\{v = 0\}$为中心的欧几里得半圆方程。这与庞加莱上半平面中测地线的经典模型一致，正如预期。

到目前为止，我们已得到双曲测地线所满足的坐标 x 和 z 之间的关系。为将这些变量表示为时间 t 的函数，我们回顾一下，根据 (3.7) 有

$$\dot{z}^2 + a^2\mathrm{e}^{2z} = 1,$$

这意味着 $z(t) \leq -\log(a)$。直接计算可得，该方程在初值为 $z(0) = z_{\max} = -\log(a)$（因此 $\dot{z}(0) = 0$）时的解为

$$z(t) = -\log\left(a \cosh t\right).$$

现在利用 (3.3)，可得

$$\frac{dx}{dt} = a\,\mathrm{e}^{2z} = \frac{1}{a\cosh^2(t)},$$

因此

$$x(t) = x_0 + \int \frac{dt}{a\cosh^2 t} = x_0 + \frac{1}{a}\tanh(t),$$

其中 x_0 是积分常数。

唯　　一连接 SOL 中两点 (0，0，0) 和 (λ，0，0) 的测地线段是曲　　e

$$\beta : \left[-\operatorname{arccosh}\left(\tfrac{1}{a}\right),\ \operatorname{arccosh}\left(\tfrac{1}{a}\right)\right] \to \mathrm{SOL}$$

定义为

$$\beta(t) = \left(\tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{1}{a}\cdot\tanh(t),\ 0,\ -\log\left(a\cosh(t)\right)\right),$$

其中 $a = \frac{2}{\sqrt{\lambda^2+4}}$。因此，端点之间的距离为

$$d = 2\operatorname{arccosh}\left(\tfrac{1}{a}\right) = 2\operatorname{arccosh}\left(\tfrac{\sqrt{\lambda^2+4}}{2}\right) = 2\operatorname{arsinh}\left(\tfrac{\lambda}{2}\right).$$

我们渐近地有

$$d = 2\log\lambda \ + \ O(1/\lambda^2).$$

当 $\lambda \to \infty$ 时。

若 $a = 0$ 且 $b > 0$，则 x 与 y 的作用互换。令 $c = \dot{z} - b\,y$（它是常数），可得

$$(by + c)^2 + b^2\mathrm{e}^{-2z} = 1.$$

假设 $\dot{z}(0) = 0$，可得 $c = -b\,y_0$，同样的分析得出

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{b}\tanh t, \qquad z(t) = \log\left(b\cosh t\right).$$

4 一般型测地线

对于 SOL 中的一般单位速测地线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$，其运动常数 a，b 均非零，我们将 γ 的平均高度 定义为

$$h = h(a,b) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{b}{a}\right|.$$

参数 a、b、h 和模数 k 满足以下恒等式

$$\boxed{\begin{array}{ll} k = \sqrt{\dfrac{1-2|ab|}{1+2|ab|}} & 2|ab| = \dfrac{1-k^2}{1+k^2} \\[2ex] h = \frac{1}{2}\log\left|\dfrac{b}{a}\right| & \mathrm{e}^{2h} = \left|\dfrac{b}{a}\right| \\[2ex] |a| = \mathrm{e}^{-h}\sqrt{\dfrac{1-k^2}{2(1+k^2)}} & |b| = \mathrm{e}^{h}\sqrt{\dfrac{1-k^2}{2(1+k^2)}} \end{array}} \tag{4.1}$$

注释 4.1. – a 和 b 的符号无法由 k 和 h确定。通过等距变换（反射）可以调整这些符号，因此在需要时可以假设 a、$b > 0$。

– 我们将经常采用以下约定：如果函数 f 依赖于 $|ab|$，我们就直接写作$f(k)$，而不总是将 $|ab|$ 替换为其取值 $_2\,\frac{1-k^2}{1+k^2}()$。

4.1 一般测地线的垂直周期性

用上述记号，势函数可以写成

$$U_{a,b}(z) = \tfrac{1}{2}\big(a^2\mathrm{e}^{2z} + b^2\mathrm{e}^{-2z}\big) = |ab|\,\cosh\big(2(z-h)\big). \tag{4.2}$$

特别地，(3.4) 可写为[5]

$$\frac{d^2}{dt^2}\big(z-h\big) = -\frac{d}{dz}U_{a,b}(z) = -\,2|ab|\,\sinh\big(2(z-h)\big). \tag{4.3}$$

为了在 SOL 中构造一般单位速测地线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$，我们首先求解关于 $z(t)$ 的标量常微分方程 (4.3)。然后通过直接积分可得水平坐标：

$$\dot{x} = a\,\mathrm{e}^{-2z}, \qquad \dot{y} = b\,\mathrm{e}^{2z}.$$

由于根据假设 $ab \neq 0$，势函数 $U_{a,b}$ 是光滑且严格凸的，并且能取到其唯一极小值

$$\min U_{a,b}(z) = |ab| \quad \text{at} \quad z = h = \tfrac{1}{2}\log\left|\tfrac{b}{a}\right|.$$

由 (3.7) 可得：

$$\dot{z}^2 + 2U_{ab}(z) = \dot{z}^2 + 2|ab|\cosh(2(z-h)) = 1. \tag{4.4}$$

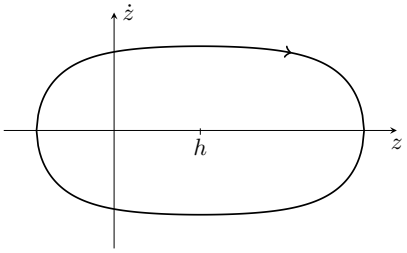
特别地，我们有 $|\dot{z}| \le \sqrt{1-2|ab|}$，并且

$$z_{\min} = h - A \ \le\ z(t)\ \le h + A = z_{\max},$$

其中振幅由 $A > 0$ 和 $2U_{a\text{定义}b}(h+A) = 1$，即

$$A = A(k) = \frac{1}{2}\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{1}{2|ab|}\right) = \mathrm{arctanh}(k). \tag{4.5}$$

方程 (4.4) 描述了平面（即相曲线）中的一条简单闭凸曲线 $\mathcal{C}_{a,\ b}$，其坐标为 $(z,\ \dot{z})$。方程 (4.3) 的任意解都给出了 $\mathcal{C}_{a,\ b}$ 的光滑参数化。这条曲线在对称变换 $\dot{z} \mapsto -\dot{z}$ 和 $z \mapsto 2h - z$ 下保持不变。



方程 (4.3) 的任意解 $z(t)$ 都是周期性的，其周期为

$$T = 2\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{1-2U_{a,b}(z)}} \tag{4.6}$$

为了解释这一点，我们将方程 (4.4) 写成

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| = \sqrt{1-2U_{a,b}(z)}.$$

[5]这是经典摆方程 $\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta$ 的类比形式，其中 sin 被 sinh 所替代。这些解具有相同的定性特征：每条轨迹都围绕一个稳定平衡点周期性地振荡。

当 $z(t)$ 从 $z_{\min}$ 到 $z_{\max}$ 完成一次半振荡时，我们有 $\frac{dz}{dt} \geq 0$，上述方程可以写成以下微分形式：

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{1 - 2U_{a,b}(z)}}.$$

对这一关系积分即可得到 (4.6)。更多详情请参见 [1, 2] 。

引理 4.2. 周期仅取决于模数 k。更确切地说，我们有

$$T = T(k) = 4\int_0^{A(k)} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)\cosh(2\zeta)}}. \tag{4.7}$$

证明. 引入记号 $\zeta = z - h$，我们有 $-A(k) \leq \zeta \leq A(k)$，并且

$$2U(z) = 2|ab|\cosh(2\zeta).$$

应用 (4.6) 可得

$$T = 4\int_0^{A(k)} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - 2U(h+\zeta)}} = 4\int_0^{A(k)} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - 2|ab|\,\cosh(\zeta)}}.$$

□

周期 $T(k)$ 的基本性质汇总于本文末尾的 A.2 节和 A.3 节，其中包括用第一类完全椭圆积分 $K(k)$ 表示周期。下文 4.5 节将讨论 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的积分。

4.2 Grayson 圆柱

对于 SOL 中的每条一般测地线 γ，我们都关联一个伴随曲面，以便编码测地线流的一些关键特征。

定义 4.3。给定一条在 SOL 中的单位速率一般测地线 $\gamma(t)$，其运动常数为 a，b，我们将其 *Grayson* 圆柱 定义为如下水平集

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{a,b,c} := \left\{(x, y, z) \in \mathrm{SOL} \;\middle|\; (ax - by - c)^2 + 2\,U_{a,b}(z) = 1\right\} \subset \mathrm{SOL},$$

其中 $c := a\,x(t) - b\,y(t) + \dot{z}(t)$ 是引理 3.2 (i) 中的常数。

$\mathcal{G}$ 的模数 按定义就是其底层测地线的模数：

$$k = \sqrt{\frac{1-2|ab|}{1+2|ab|}}.$$

特别是，k 仅取决于圆柱 $\mathcal{G}$（其中包含的所有测地线都具有相同的模数）.

这个曲面是光滑的，且与 $S^1 \times \mathbb{R}$ 微分同胚；其相关性体现在以下

命题 4.4. 一般型测地线 γ 完全包含在其对应的 *Grayson* 圆柱$\mathcal{G}_{a,\,b,\,c}$。

证明。 由引理 3.2 立即可得。 □

M. A. Grayson [10][6] 在其学位论文中首次提出并强调了这一观察及其对于理解 SOL 中测地线的重要性。我们借用了 [7] 中的术语。

下面的引理给出了包含 Grayson 圆柱的有用界：

引理 4.5. 格雷森圆柱$\mathcal{G}_{a,b,c}$ 包含在由下式定义的区域中

$$|ax - by - c| \le \sqrt{1 - 2|ab|} \quad \text{and} \quad |z - h| \le A(k),$$

其中 $A(k)$ 是 (4.5) 中定义的振幅。

证明。 由于 $U_{a,b}(z) \ge |ab|$，我们有

$$(ax - by - c)^2 = 1 - 2\,U_{a,b}(z) \le 1 - 2|ab|,$$

第一个不等式由 $\mathcal{G}_{a,b,c}$ 的定义显然可得。第二个不等式由等价关系得出

$$2U_{a,b}(z) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - h| \le A(k).$$

□

现在我们引入一些术语：

定义 4.6。(1) 由 $z = h = \frac{1}{2}\log\left|\frac{b}{a}\right|$ 定义的水平面称为 $\mathcal{G}$ 的赤道平面。

(2) 水平直线

$$z = h, \qquad ax - by = c,$$

是 $\mathcal{G}$ 的轴；它位于赤道平面内，且与 $\mathcal{G}$ 不相交。

(3) 赤道平面与 $\mathcal{G}$ 相交于两条水平直线

$$z = h, \qquad ax - by = c \pm \sqrt{1 - 2|ab|} = c \pm \sqrt{\tfrac{2k^2}{1+k^2}}$$

我们称它们为拐点线。它们由测地线的拐点组成（即 $\ddot{z} = 0$）。它们是 $|\dot{z}|$ 取得最大值的点。拐点线是水平测地线。

(4) 水平直线

$$ax - by = c, \qquad z - h = \pm A(k)$$

是临界线：它们由包含在 $\mathcal{G}$ （即 $\dot{z} = 0$）中的测地线的临界点构成。这些直线并非SOL 的测地线。

最后，我们总结两条简单的观察：

注 4.7. (i) $\mathcal{G}$ 包含原点 0，当且仅当 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$。

(ii) $\mathcal{G}$ 的轴经过 0，当且仅当 $c = 0$ 和 $a = b$ （因此 $h = 0$）。

(iii) 任何保持该轴的 SOL 等距变换也会使 $\mathcal{G}$ 保持不变。

[6]更一般地，这类不变圆柱的存在反映了测地流在刘维尔意义下的完全（超）可积性，参见 [2, §49, 50]。

4.3 一个应用：模数作为完全不变量

作为格雷森圆柱性质的第一个应用，我们证明以下结果，从而完成引理3.5：

命题 4.8。SOL中的两条一般测地线在几何上等价，当且仅当它们具有相同的模数；等价地说，它们具有相同的振幅 $A(k) = \operatorname{arctanh}(k)$。

回顾一下，如果两条完备测地线相差一个 SOL 的等距变换和/或重新参数化，则称它们在几何上等价。

证明。设 γ 是一条模数为 k 且具有 Grayson 圆柱 $\mathcal{G}$的一般测地线。我们利用等距变换和重新参数化进行如下标准化：

(i) 通过垂直平移移动 $\mathcal{G}$，使其赤道平面成为地平面 $\Pi_0 = \{z = 0\}$；等价地，$h = 0$，从而 $|a| = |b|$。

(ii) 水平平移 $\mathcal{G}$，使其轴经过原点。于是有 $c = 0$。

(iii) 如有必要，可关于坐标平面作反射，以使 $a = b > 0$。

(iv) 对速度和初始相位进行归一化，使得 $\|\dot\gamma\| = 1$ 和 γ 从一个临界点出发：

$$z(0) = z_{\max} = A(k), \qquad \dot z(0) = 0.$$

(v) 如有必要，沿 $\mathcal{G}$ 的轴平移，使得 $x(0) = y(0) = 0$。

经过这些归一化后，我们有

$$\gamma(0) = (0, 0, A(k)), \qquad \dot\gamma(0) = \big(a\,\mathrm{e}^{2A(k)},\, a\,\mathrm{e}^{-2A(k)},\, 0\big),$$

其中 $a = b > 0$ 由下式唯一确定：

$$2a^2 = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

归一化模型测地线由其模数 k唯一确定，因此，模数相同的两条一般测地线在几何上等价。反向推论即为引理 3.5。

□

4.4 为 Grayson 圆柱构造标架

给定 a，b，$c \in \mathbb{R}$ 使得 $0 < 2|ab| < 1$，我们引入 SOL 上由下式定义的全局向量场 ξ和 η

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_{a,b,c} = a\mathrm{e}^{2z}\frac{\partial}{\partial x} + b\mathrm{e}^{-2z}\frac{\partial}{\partial y} + (c - ax + by)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= a\mathrm{e}^{z}X + b\mathrm{e}^{-z}Y + (c - ax + by)Z, \\
\eta &= \eta_{a,b} = b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} = b\mathrm{e}^{-z}X + a\mathrm{e}^{z}Y,
\end{aligned}$$

其中 $\{X, Y, Z\}$ 是（2.1）中定义的左不变正交标架。

我们汇总这些向量场的基本性质：

命题 4.9。*(i)* 对于格雷森圆柱 $\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}$ 上的每一点，向量 ξ 和 η 都与$\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}$相切。

(ii) $\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}$ 中任一点处的 ξ 积分曲线都是SOL的测地线。特别是，它整体包含于 $\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}$中。

(iii) η 的积分曲线是包含在 $\mathcal{G}_{a,b,c}$ 中的水平直线，且与圆柱轴平行。它们恰好仅沿两条拐点线为测地线。

(iv) 由 ξ 和 η 生成的流彼此可交换；二者都使 *Grayson* 圆柱保持不变。

(v) 在 *Grayson* 圆柱上的任意一点，我们都有

$$2|ab| \ \leq \ |\cos(\theta)| \ \leq \ \sqrt{2|ab|} \ < 1,$$

其中 θ 是 ξ 与 η之间的黎曼角。特别地， θ 与 0、 $\pi/2$和 π 的距离均一致地大于某个常数，该常数仅取决于 a、 b。

(vi) $\cos\theta$ 的符号与 ab的符号相同。其绝对值沿临界线 $ax - by = c$ 取得最小值，沿 $\mathcal{G}_{a,b,c}$的拐点线 $z = h$ 取得最大值。

(vii) 任何保持圆柱轴及其方向不变的 SOL 等距变换，都会保持 $\mathcal{G}$ 以及向量场 ξ、 η不变。

证明。 (i) $\mathcal{G}_{a,b,c}$ 在 (x, y, z) 处的切空间是以下 1-形式的核

$$\omega = (ax - by - c)\,(a\,dx - b\,dy) \ + \ \left(a^2\mathrm{e}^{2z} - b^2\mathrm{e}^{-2z}\right) dz$$

（这是 $\mathcal{G}_{a,b,c}$ 的定义函数的微分）。向量场 ξ, η 满足 $\omega(\xi) \ = \omega(\eta) \ = 0$。

(ii) 根据引理 3.1 和 3.2，运动常数为 a, b, c 的测地线方程与 ξ 的分量一致，因此 ξ 的每条积分曲线都是测地线。

(iii) 经过点 (x_0, y_0, z_0) 的 η 的积分曲线 $\in \mathcal{G}$ 是水平直线 $t \ \longmapsto (x_0 + bt,\ y_0 + at,\ z_0)$。显然，它包含于 $\mathcal{G}$ 中，且平行于轴。根据引理 3.6，这条直线是 SOL 的测地线当且仅当 $z = h$，也就是说， $a\mathrm{e}^{2z} = b\,\mathrm{e}^{-2z}$。这两条直线是拐点线

$$z = h, \qquad ax - by = c \pm \sqrt{1 - 2|ab|}.$$

对于每个一个其他的高度 $z_0 \neq h$，水平直线包含于 $\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}$ 但不是一条测地线 c.

(iv) ξ 和 η 的流彼此可交换，因为 $[\xi, \eta] = 0$。根据陈述 (ii) 和 (iii)，两个流都保持 Grayson 圆柱不变。

(v)–(vi) 在 $\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}$上，我们有黎曼范数 $\|\eta\| = \sqrt{1 - (ax - by - c)^2}$和 $\|\xi\| = 1$。于是， ξ 与 η 之间的角 θ 满足

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\|\|\eta\|} = \frac{2ab}{\sqrt{1 - (ax - by - c)^2}}.$$

这表明 $\cos\theta$ 的符号与 ab的符号相同。利用引理 4.5，我们检验不等式

$$\sqrt{2|ab|} \leq \|\eta\| \leq 1,$$

因此

$$0 < 2|ab| \leq |\cos(\theta)| \leq \sqrt{2|ab|}.$$

左侧等号在 $\|\eta\| = 1$ 时成立，即沿着临界线 $ax - by = c$。右侧等号在 $\|\eta\| = \sqrt{2|ab|}$ 时成立，即沿着拐点线 $z = h$。

最后一个结论 (vii) 可直接由 $\mathcal{G}_{a、\ b、\ c}$ 以及向量场 ξ、 η 的定义得出。 □

我们以关于时间反演对称性的一点说明结束本节：

注记 4.10。 (i) 给定一条一般测地线 γ，由 $\gamma^{-}(t) := \gamma(-t)$ 定义的对称测地线 γ^{-} 会生成同一个 Grayson 圆柱。事实上，$\gamma^{-}(t)$ 的运动常数 a, b, c 与 γ 的运动常数（至多相差符号）相同，而且显然

$$\mathcal{G}_{-a,-b,-c} = \mathcal{G}_{a,b,c}.$$

相应的向量场也至多相差一个符号：

$$\xi^{-} = -\xi, \qquad \eta^{-} = -\eta.$$

这些关系反映了测地线上的时间反演 $t \mapsto -t$。

4.5 绕轴绕行

我们继续讨论第 4.1 节中的测地线。本节将证明，一般测地线会以恒定的水平漂移绕其对应的 Grayson 圆柱运行，每经过一个周期便产生一次漂移。以下结果本质上归功于 Grayson，尽管他并未以这种形式表述（参见 [10] 第 68–75 页及第 84 页的插图）。

定理 4.11。 设 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是一条运动常数 a, b 均非零的一般单位速测地线。记其平均高度为 h，模数为 k，并定义

$$M(k) = 4 \int_{0}^{A(k)} \frac{\cosh(2\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{1 - 2|ab|\, \cosh(2\zeta)}}, \tag{4.8}$$

其中 $A(k)$ 是振幅。于是

(*A*) 对于每个 $t_0 \in \mathbb{R}$，都有 $z(t_0 + T(k)) = z(t_0)$，并且

$$\gamma(t_0 + T(k)) - \gamma(t_0) = \operatorname{sgn}(ab) M(k)\, (b,\, a,\, 0). \tag{4.9}$$

(*B*) 这些点之间的水平距离等于

$$\delta\big(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + T(k))\big) = M(k) \sqrt{2|ab|\, \cosh\big(2(z(t_0) - h)\big)}. \tag{4.10}$$

回顾一下，两个处于同一海拔的点之间的水平距离 定义见注 2.2。

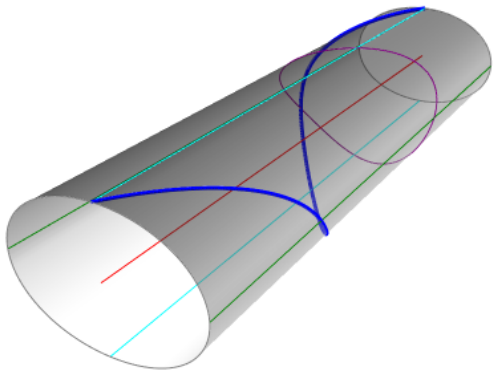
推论 4.12。 对于一般单位速测地线 γ，由下式定义的量 H

$$H := \sqrt{|x(t_0 + T(k)) - x(t_0)|\ |y(t_0 + T(k)) - y(t_0)|}, \tag{4.11}$$

与 t_0 无关。更确切地说，它只取决于测地线的模数，并且由下式给出

$$H = H(k) = \sqrt{|ab|}\, M(k). \tag{4.12}$$

我们将由 (4.12) 定义的 $H(k)$ 称为 γ 的水平漂移不变量。Coiculescu 和 Schwartz 在 [7, 第 2107] 页将其称为整体不变量，这里我们沿用这两位作者的记号 H。在 [10] 中它记作 D，在 [16] 中记作 $p(k)$。



一条一般测地线绕其 Grayson 圆柱一周

注释 4.13。 (1) 方程 (4.10) 也可以写成

$$\delta\big(\gamma(t_0),\gamma(t_0+T)\big) = M(k)\,\sqrt{a^2\mathrm{e}^{2z(t_0)} + b^2\mathrm{e}^{-2z(t_0)}}\,.$$

(2) 由于双曲余弦$\big(2(z-h)\big) \geq 1$，且等号成立当且仅当 $z=h$，因此我们得到

$$\delta\big(\gamma(t_0),\gamma(t_0+T)\big) \;\geq\; \sqrt{2|ab|}\,M(k),$$

等号恰在 $z(t_0)=h$时成立。

(3) 虽然 H和 M通过 $H(k) = \sqrt{|ab|}\,M(k)$紧密关联，但它们的作用不同，因此同时保留这两个函数很方便。特别是， $M(k)$表示一般测地线沿轴方向的水平漂移（见 (4.9)），而 $H(k)$则更像是一个标量不变量，用于表示 (4.11) 中坐标增量的几何平均值。

(4) 在 A.2 节中，我们将用完全椭圆积分推导出 $M(k)$和 $H(k)$的显式公式；在 A.3 节中，我们将介绍这些函数的一些重要性质。

证明该定理需要以下引理，我们稍后将给出证明。

引理 4.14. 对于任意 $t_0 \in \mathbb{R}$，我们有

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{2z(t)}\,dt = \Big|\frac{b}{a}\Big|\,M(k), \qquad \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{-2z(t)}\,dt = \Big|\frac{a}{b}\Big|\,M(k).$$

定理 4.11 的证明. 由于 $z(t)$ 是 (4.3) 的解，因此它是 T-周期性的。此外，

$$\dot{x} = a\,\mathrm{e}^{2z}, \qquad \dot{y} = b\,\mathrm{e}^{-2z},$$

是 T-周期性的，且一致地远离 0 和 ∞，其中

$$\Big|\tfrac{\dot{x}}{b}\Big|,\ \Big|\tfrac{\dot{y}}{a}\Big| \in \big[\mathrm{e}^{-2A(k)},\,\mathrm{e}^{2A(k)}\big] = \big[\tfrac{1-k}{1+k},\,\tfrac{1+k}{1-k}\big]. \tag{4.13}$$

因此，两个坐标 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都可分解为线性项与 T-周期函数之和。由此可知， γ 每经过一个周期便绕圆柱一周，同时以恒定速率水平漂移。对于任意 t_0，引理 4.14 给出

$$x(t_0+T) - x(t_0) = a\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{2z(t)}\,dt = a\Big|\frac{b}{a}\Big|\,M = \operatorname{sgn}(ab)\,b\,M,$$
$$y(t_0+T) - y(t_0) = b\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{-2z(t)}\,dt = b\Big|\frac{a}{b}\Big|\,M = \operatorname{sgn}(ab)\,a\,M,$$

由此得到

$$\gamma(t_0+T)-\gamma(t_0)=\operatorname{sgn}(ab)\,M\,(b,a,0).$$

在公共水平 $z=z(t_0)$ 处计算水平距离，得到

$$\delta\big(\gamma(t_0),\gamma(t_0+T)\big)=M(k)\sqrt{a^2\mathrm{e}^{2z(t_0)}+b^2\mathrm{e}^{-2z(t_0)}}$$

并由 $a^2\mathrm{e}^{2z(t_0)}+b^2\mathrm{e}^{-2z(t_0)}=2|ab|$ 双曲余弦$\big(2(z(t_0)-h)\big)$得出结论。 □

推论 *4.12* 的证明。由 (4.9) 可得

$$|x(t_0+T(k))-x(t_0)|\,|y(t_0+T(k))-y(t_0)|=M(k)\,|b\,a|=H(k)^2.$$

□

现在证明引理 4.14：

引理 *4.14* 的证明。令 $\zeta=z-h$。那么

$$U_{a,b}(z)=|ab|\cosh(2(z-h))=|ab|\cosh(2\zeta),\quad\text{and}\quad \mathrm{e}^{2z}=\left|\frac{b}{a}\right|\mathrm{e}^{2\zeta}.$$

利用对称性 $\zeta(t+T/2)=-\zeta(t)$，可得

$$\int_{t_0}^{t_0+T/2}\mathrm{e}^{2\zeta(t+T/2)}dt=\int_{t_0}^{t_0+T/2}\mathrm{e}^{-2\zeta(t)}\,dt,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{e}^{2\zeta(t)}\,dt&=\int_{t_0}^{t_0+T/2}\big(\mathrm{e}^{2\zeta(t)}+\mathrm{e}^{-2\zeta(t)}\big)\,dt\\&=2\int_{t_0}^{t_0+T/2}\cosh(2\zeta(t))\,dt.\end{aligned}$$

现在选择 t_0，使得 $z(t_0)=z_{min}$，我们有 $\zeta(T_0)=-A$（振幅）。此外，在区间 $[0,T/2]$ 上，我们有$\zeta=\dot z\geq 0$，因此

$$dt=\frac{dz}{\sqrt{1-2U_{a,b}(z)}}=\frac{d\zeta}{\sqrt{1-2|ab|\cosh(2\zeta)}},$$

因此我们有

$$\int_{t_0}^{t_0+T/2}\cosh(2\zeta(t))\,dt=\int_{-A}^{A}\frac{\cosh(2\zeta)}{\sqrt{1-2|ab|\cosh(2\zeta)}}\,d\zeta.$$

因此

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{e}^{2\zeta(t)}\,dt=4\int_{0}^{A}\frac{\cosh(2\zeta)}{\sqrt{1-2|ab|\cosh(2\zeta)}}\,d\zeta=M,$$

最后

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{e}^{2\,z(t)}dt=\left|\frac{b}{a}\right|\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{e}^{2\zeta(t)}\,dt=\left|\frac{b}{a}\right|M.$$

类似的论证可以证明

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{e}^{-2\,z(t)}dt=\left|\frac{a}{a}\right|M.$$

□

函数 $M(k)$ 和 $H(k)$ 在 A.2 节中用椭圆积分表示。它们的基本性质将在 A.3节中介绍。

4.6 测地线的邂逅

本节证明，模数为 k 的一般测地线段若长度超过 $T(k)$，就不可能是极小的。对于这样的线段，其端点要么是共轭点，要么可以构造另一条长度相同、连接相同端点的测地线段。我们在下一个定理中对此作出表述，该定理由 Coiculescu–Schwartz 提出，见 [7, 定理 2.3 和推论 2.5]。Grayson 在 [10] 中证明了一个特例。

定理 4.15. 设 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是 *SOL* 中模数为$k \in (0,\ 1)$、周期为 $T = T(k)$的一般单位速测地线，并固定 $t_1 \in \mathbb{R}$。则：

(i) 若 $\dot{z}(\ t_1) = 0$，即 t_1 是 γ的临界点，则 $\gamma(t_1)$ 和 $\gamma(t_1 + T)$ 沿着 γ.

(ii) 若 $\dot{z}(t_1) \neq 0$，则存在两条从 $\gamma(t_1)$ 到 $\gamma(t_1 + T)$的不同测地线弧，它们的模数相同 k，长度也相同，均等于 T。

证明. 我们将证明分为五个步骤。设 γ 是 SOL 中一条任意测地线，其主运动常数为 a, b，并固定 $t_1 \in \mathbb{R}$。

步骤 *1* 定义一条新曲线 $\gamma^\star(t) := (x^*(t)\ y^*(t)\ z^*(t))$，其定义为

$$\begin{cases} x^*(t) = 2x(t_1) - x(2t_1 - t), \\ y^*(t) = 2y(t_1) - y(2t_1 - t), \\ z^*(t) = z(2t_1 - t). \end{cases} \tag{4.14}$$

我们证明 t hat $\gamma^\star$ 满足测地线方程（引理 3.1）：令 $u(t) := 2t_1 - t$，则 $\dot{u}(t) = -1$以及

$$\dot{x}^*(t) = -\frac{d}{dt}\left(x(u(t))\right) = +\dot{x}(u(t)) = a\,\mathrm{e}^{2z(u(t))} = a\,\mathrm{e}^{2z^*(t)},$$

类似地 $\dot{y}^*(t) = b\mathrm{e}^{-2z^*(t)}$。此外

$$\dot{z}^*(t) = \dot{z}(u(t)) \cdot \dot{u}(t) = -\dot{z}(u(t)),$$

因此

$$\ddot{z}^*(t) = -\ddot{z}(u(t)) \cdot \dot{u}(t) = \ddot{z}(u(t)) = -a^2\mathrm{e}^{2z^*(t)} + b^2\mathrm{e}^{-2z^*(t)}.$$

因此，$\gamma^\star$ 也是测地线；其主运动常数与 a 和 b相同。

步骤 *2*。在 $t = t_1$处，我们有

$$\gamma^\star(t_1) = \gamma(t_1) \quad \text{and} \quad \dot{\gamma}^\star(t_1) = (\dot{\gamma}(t_1)^\dagger = (\dot{x}(t_1), \dot{y}(t_1), -\dot{z}(t_1)) \tag{4.15}$$

（回想一下，$\dagger$会翻转切向量的 z 分量）。特别地，$\|\dot{\gamma}^\star(t_1)\| = \|\dot{\gamma}(t_1)\|$，又因为测地线的速度恒定，所以对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\|\dot{\gamma}^\star(t)\| = \|\dot{\gamma}(t)\|$。

从现在起，我们假设 γ 是一条单位速度的一般型 测地线；那么 $\gamma^\star$ 也是单位速度的一般型测地线。此外，γ 和 $\gamma^\star$ 具有相同的平均高度 h 和相同的模数 k。

步骤 *3*。应用定理 4.11，我们有

$$\gamma^\star(t_1 + T) = \gamma^\star(t_1) + \operatorname{sgn}(ab)\, M(k)\, (b, a, 0) = \gamma(t_1) + \operatorname{sgn}(ab)\, M(k)\, (b, a, 0) = \gamma(t_1 + T)$$

若 $\dot{z}(t_1) \neq 0$，则由 (4.15) 得 $\dot{\gamma}^\star(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_1)$；因此，弧 $\gamma|_{[t_1, t_1+T]}$ 和 $\gamma^\star|_{[t_1, t_1+T]}$ 是不同的测地线弧。(ii) 的证明至此完成。

步骤 *4.* 从现在开始，假设 $\dot{z}(t_1) = 0$，那么根据 (4.15)，γ 和 $\gamma^\star$ 满足相同的初始数据，因此对所有 t，都有 $\gamma(t) = \gamma^\star(t$。

为处理这种情况，我们将时间 t_1 稍微平移一个小量 s，并令 $s \to 0$。更明确地说：我们定义如下单参数测地线族

$$\psi(t,s) = \big(2x(t_1+s) - x(2(t_1+s)-t),\ 2y(t_1+s) - y(2(t_1+s)-t),\ z(2(t_1+s)-t)\big).$$

注意到，对于所有 t，$\psi(t,0) = \gamma^\star(t) = \gamma(t)$，因此

$$J(t) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \psi(t,s)$$

是沿着 γ的雅可比场。直接计算可得，对于所有 t,

$$J(t) = \big(2\dot{x}(t_1) - 2\dot{x}(2t_1-t),\ \ 2\dot{y}(t_1) - 2\dot{y}(2t_1-t),\ \ 2\dot{z}(2t_1-t)\big).$$

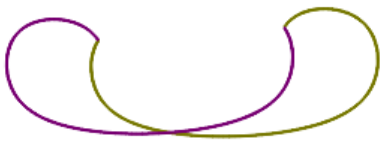
特别地，$J(t)$ 是一个非平凡的雅可比场，因为它的最后一个分量 $2\dot{z}(2t_1-t)$ 不是常数。

步骤 *5*。我们断言，雅可比场 J 在 $t=t_1$ 和 $t=t_1+T$ 处消失。事实上，在$t=t_1$处有

$$J(t_1) = (0,0,2\dot{z}(t_1)) = 0,$$

因为我们假设 $\dot{z}(t_1) = 0$。类似地，由周期性可得，$J(t+T) = 0$。我们构造出了一个沿着 γ 的非平凡雅可比场，它在 $\gamma(t_1)$ 和 $\gamma(t_1+T)$ 处消失，从而证明了 (i)。 □

定义 4.16。按照 [7], ，在上述证明中构造的测地线 $\gamma^\star$ （即通过 (4.14) 构造）称为 γ 的伴随测地线，时刻为 t_1。它既可以通过显式公式 (4.14) 定义，也可以等价地通过初始条件 (4.15) 定义。



一个一般测地线段及其伴随测地线在一个周期内的图像。

4.6.1 会合的非几何视角

伴随测地线 $\gamma^\star$ 可由 γ 通过显式公式 (4.14) 定义，或者等价地，在将初速度替换为其竖直反射后求解测地线方程来定义。因此，γ 与 $\gamma^\star$ 第二次相遇似乎相当偶然——尤其是在指定的时刻 $T(k)$。下面这个基于 Grayson 圆柱几何性质的几何论证，将解释这种重现现象。

Grayson 圆柱由三个参数 a、b 和 c 确定。然而，参数 c所起的几何作用与主要参数 a 和 b 截然不同。为明确起见，假设 $a>0$ 和 $b>0$。根据 (4.1)，数对 a,b 确定模数 $k\in(0,1)$ 和平均高度 h，反之亦然。

特别地，k 和 h 不依赖于 c，并且所有具有相同主参数 a，b 的 Grayson 圆柱共享同一个赤道平面 $\{z=h\}$ 和相同的振幅 $A(k)$。现在我们有以下

引理 4.17。 固定 $a>0$ 和 $b>0$，并令 $p=(x,\ y,\ z)\in \mathrm{SOL}$。则：

(i) 若 $|z-h|>A(k)$，则不存在主参数为 a,b 且经过 p 的 *Grayson* 圆柱。

(ii) 若 $|z-h|<A(k)$，则恰有两个不同的主参数为 a,b 且经过 p 的 *Grayson* 圆柱。

(iii) 若 $|z-h|=A(k)$，则经过 p 的此类圆柱恰有一个，且 p 是该圆柱上的一个临界点。

I在情形 (iii) 中，可以说两个 Grayson 圆柱在 处合并为一个 $p.$

证明。 由引理 4.5 可立即得到陈述 (i)。为证明 (ii)，注意到 $|z-h|<A(k)$ 当且仅当 $2U_{a,b}(z)<1$，因此

$$c=ax-by\pm\sqrt{1-2U_{a,b}(z)}.$$

这给出了 c 的两个不同取值，因此对应两个不同的圆柱。第三种情形类似；$|z-h|=A(k)$ 当且仅当 $2U_{a,b}(z)=1$，从而得到唯一的取值 $cax-by$。 □

现在选取一点 $p=(x,\ y,\ z)$，满足 $|z-h|\le A(k)$，并用 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^\star$ 表示经过 p、参数为 $a,\ b$ 的两个 Grayson 圆柱。具体而言，$\mathcal{G}=\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}$ 和 $\mathcal{G}^\star=\mathcal{G}_{a,\ b,\ c^\star}$，其中

$$c=ax-by+\sqrt{1-2U_{a,b}(z)},\quad c^*=ax-by-\sqrt{1-2U_{a,b}(z)}.$$

我们断言，在点 $p=(x,\ y,\ z)\in\mathcal{G}_{a,\ b,\ c}\cap\mathcal{G}_{a,\ b,\ c^\star}$ 处，有

$$\eta_p^\star=\eta_p\qquad\text{and}\qquad\xi_p^\star=\xi_p^\dagger.$$

利用下式可知，对于向量场 η 和向量场 ξ，这显然成立：

$$(c^\star-ax+by)=-(c-ax+by).$$

我们有

$$\begin{aligned}\xi_p^\star&=a\mathrm{e}^{2z}\frac{\partial}{\partial x}+b\mathrm{e}^{-2z}\frac{\partial}{\partial y}+(c^\star-ax+by)\frac{\partial}{\partial z}\\&=a\mathrm{e}^{2z}\frac{\partial}{\partial x}+b\mathrm{e}^{-2z}\frac{\partial}{\partial y}-(c-ax+by)\frac{\partial}{\partial z}\\&=\xi_p^\dagger.\end{aligned}$$

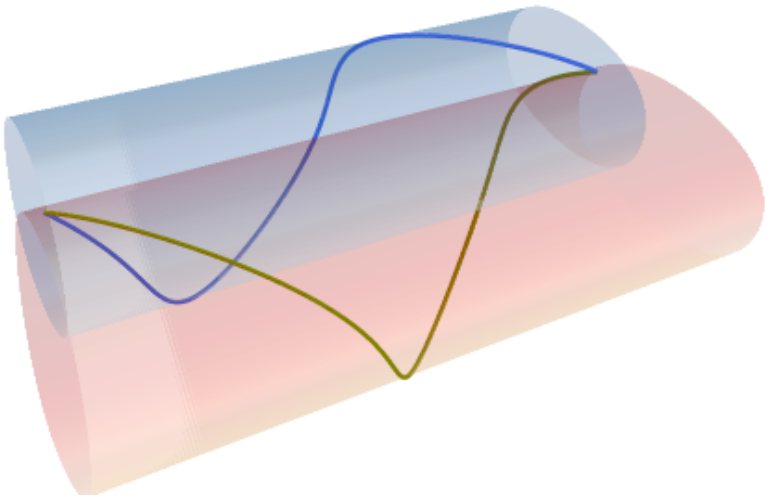
现在用 γ 表示从 p 出发的 ξ 的流线，用 $\gamma^\star$ 表示经过 p 的 $\xi^\star$ 的流线。它们分别是各自 Grayson 圆柱上从 p 出发的唯一测地线。让这两个向量场沿流前进（或者说，沿两条测地线前进）一个周期 $T(k)$ 后，我们会再次到达同一条交线，并具有相同的漂移。具体而言，由定理 4.11 可得

$$\gamma(t_0+T)-\gamma(t_0)=\gamma^\star(t_0+T)-\gamma^\star(t_0)=abM(k)\,(b,\,a,\,0).$$

特别地，我们有

$$\gamma(t_0)=\gamma^\star(t_0)\in\mathcal{G}\cap\mathcal{G}^\star\quad\Rightarrow\quad\gamma(t_0+T)=\gamma^\star(t_0+T).$$

如果 p 是一个临界点，那么 $c^\star=c$，因此 $\mathcal{G}^\star=\mathcal{G}$ 和 $\xi^\star=\xi$；两条测地线重合。从一般型点趋近这一情形，在极限下会沿着这条共同测地线得到一个非平凡的雅可比场。



两条伴随测地线段及其各自的 Grayson 圆柱。

5 关于 SOL 中的割迹

回想一下，如果 γ 是完备黎曼流形中的一条单位速测地线，并且 $t \in \mathbb{R}$，则沿着 γ 的割长定义为

$$\mathrm{cut}_\gamma(t) = \sup\{\, s \geq 0 \;\big|\; d\big(\gamma(t), \gamma(t+s)\big) = s \,\} \in (0, \infty].$$

若 $\mathrm{cut}_\gamma(t) < \infty$，则称点 $q = \gamma(t+s)$ 是相对于基点 $p = \gamma(s)$ 的割点。最后，点 p 的割迹是 SOL 中相对于基点 p 的所有割点组成的集合。我们将其记为

$$\mathrm{Cut}(p) = \{\gamma(s) \mid \gamma \text{ is a geodesic such that } \gamma(0) = p \text{ and } s = \mathrm{cut}_\gamma(0)\ \}.$$

以下结果是黎曼几何中的经典结论（参见例如 [5, 引理 5.2]）：

引理 5.1. 若 $s{:=}\text{割}\gamma(t) < \infty$，则 s 是满足下列条件的最小正数

(i) $\gamma(t)$ 与 $\gamma(t+s)$ 沿 $\gamma|_{[t,\,t+s]}$ 共轭；或 *(ii)* 存在一条长度为 s、不同于 $\gamma|_{[t,\,t+s]}$ 的测地线弧，将 $\gamma(t)$ 与 $\gamma(t+s)$连接起来。

将这一经典结果与定理 4.15 结合，立即得到：

推论 5.2. 设 γ 是一条一般单位速测地线，其模数为 $k \in (0,\ 1)$，周期为 $T = T(k)$。若 $t_2 - t_1 > T$，则

$$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) \;<\; t_2 - t_1,$$

也就是说，线段 $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ 不是极小的。

□

这一推论的逆命题也成立。这是 Coiculescu 和 Schwartz 在 [7], 中的主定理，尽管那篇论文还包含其他几项深刻的结果。证明相当繁复，我们在此重述，但不予证明。

定理 5.3。 一条一般测地线段在其端点之间是极小的，当且仅当其长度不超过 $T(k)$，其中 k 是该测地线的模数。

推论 5.4。（A.）对于 SOL 中的任意单位速测地线 γ 以及任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{cut}_\gamma(t) = \begin{cases} \infty, & \text{if } \gamma \text{ is vertical or hyperbolic,} \\ T(k), & \text{if } \gamma \text{ is generic with modulus } k, \\ \sqrt{2}\,\pi, & \text{if } \gamma \text{ is horizontal.} \end{cases}$$

(B.) 此外，任意点 p 的割迹都包含在经过 p的水平面内。特别地，$\mathrm{Cut}(0) \subset \Pi_0$。

请注意，这一结果特别表明，SOL 的全局单射半径为 $\sqrt{2}\,\pi$，也就是说，长度为 $\leq \sqrt{2}\,\pi$ 的每条测地线段都是极小的；而超过这一界限后，有些测地线便不再是极小的。

证明。(A.) 一条竖直测地线和一条双曲测地线分别位于全测地平面 $\mathcal{H}'_{y_0}$ 或 $\mathcal{H}''_{x_0}$内，这些平面与双曲平面等距。在 H^2中，任意两个不同点之间恰有一条测地线，因此割长为 ∞。

对于一般测地线，推论 5.2 给出 $\mathrm{cut}\gamma(t) \leq T(k)$。反向不等式（即在 $T(k)$之前的极小性）正是定理 5.3。因此 $\mathrm{cut}\gamma(t) = T(k)$。
水平测地线在几何上等价于单位速率直线 $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t,\ t,\ 0)$。沿着$\alpha$，向量场

$$J = \big(1 - \cos(\sqrt{2}\,t)\big)(X - Y) + \sin(\sqrt{2}\,t)\,Z$$

是一个雅可比场（简短证明：利用列维-奇维塔联络，可以验证 $\nabla_{\alpha'}(X-Y) = Z$和 $\nabla_{\alpha'} Z = Y - X$，因此沿测地线$\alpha$（即 $\nabla_{\alpha'}\nabla_{\alpha'} J + R(J,\ \alpha')\alpha' = 0$）的雅可比方程 $J(t) = p(t)(X - Y) + q(t)Z$ 化简为方程组 $p'' - 2q' = 0$ 和 $q'' + 2p' - 2q = 0$，而当 $p(t) = 1 - \cos(\sqrt{2}\,t)$且 $q(t) = \sin(\sqrt{2}\,t)$ 时，该方程组成立）。

此外，J在 $t = 0$ 和 $t = \sqrt{2}\pi$处为零；因此，点 $P = (\sqrt{2}\pi,\ \sqrt{2}\pi,\ 0)$ 沿着α与 $\bar{0}$ 共轭，因此 $\mathrm{cut}\gamma(t) \leq \sqrt{2}\pi$。
为证明等式成立，假设存在一条更短的测地线，例如 β，连接原点 0 与点$P = (\sqrt{2}\pi,\ \sqrt{2}\pi,\ 0)$。那么 $\beta(0) = 0$且 $\beta(s) = P$，其中某个 $s < \sqrt{2}\pi$ 满足条件。于是 β 必须是一条一般测地线（因为显然 α 是从 0 到 P 的唯一竖直测地线），因此由推论 5.2 可知，我们必须有 $s = T(k)$，其中 $k \in (0,\ 1)$ 是 β 的模数。利用附录 A.3 中证明的下界 $T(k) > \sqrt{2}\,\pi$，我们得到

$$s = T(k) > \sqrt{2}\,\pi > s,$$

这是不可能的。因此，割$\alpha(t) = \sqrt{2}\,\pi$。

（B.）对于水平测地线，最后一个结论显然成立。对于竖直测地线和双曲测地线，无需证明，因为这两种情况下都不存在割点。对于一般测地线，定理 4.11 表明，$\gamma(t)$ 和 $\gamma(t + T(k))$ 的高度相同，

□

关于割迹几何的更详细描述，请参阅 [7] 。

注 5.5. 在 [6], 中，M. Coiculescu 将定理 5.3 推广到了所谓的*VI* 型 *Bianchi* 群，并在其上赋予左不变黎曼度量，该度量与 $\mathbb{R}^3$ 等距，其度量张量为

$$ds^2 = \mathrm{e}^{-2z}\,dx^2 + \mathrm{e}^{2\alpha z}\,dy^2 + dz^2,$$

（情形 $\alpha = 1$ 对应于 SOL）。他证明了定理 5.3 对 $\alpha = 1/2$仍然成立；一般情形下的主要困难在于周期 $T(k)$ 的表达式较为复杂。

5.1 地平面上的渐近距离

最后，我们给出水平距离较大时的渐近估计。

定理 5.6. 固定 $\theta \in (0, \pi/2)$，并令 $P_\lambda = \lambda(\cos\theta, \sin\theta, 0)$，其中 $\lambda > 0$。则

$$d(0, P_\lambda) = 4\log\lambda + O(1) \quad as\ \lambda \to \infty,$$

其中误差项关于 λ 一致有界，界仅依赖于 θ .

证明。步骤 *1*。由于 $H : (0,1)$ 上的 $\to (\pi, \infty)$ 严格递增且满射，当 λ 足够大时，存在唯一的 $k \in (0,1)$，使得

$$H(k) = \lambda\sqrt{\sin\theta\,\cos\theta}. \tag{5.1}$$

步骤 *2*。定义 $a > 0$ 和 $b > 0$ 为

$$a^2 = \tan(\theta)\frac{1-k^2}{2(1+k^2)}, \qquad b^2 = \cot(\theta)\frac{1-k^2}{2(1+k^2)}.$$

Then

$$\frac{a}{b} = \tan\theta, \qquad 2ab = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

and

$$a^2 + b^2 = \frac{1-k^2}{2(1+k^2)}\,\frac{1}{\sin\theta\,\cos\theta}.$$

如果 λ 足够大，我们有 $a^2 + b^2 \le 1$，并且可以定义单位向量

$$\xi = (a, b, c), \quad \text{where} \quad c = \sqrt{1-a^2-b^2}.$$

步骤 *3.* 利用 (5.1) 和 $H(k) = M(k)\sqrt{ab}$，可验证

$$M(k)\,b = \lambda\cos\theta, \qquad M(k)\,a = \lambda\sin\theta.$$

事实上，

$$\begin{aligned}(M(k)\,b)^2 &= M(k)^2\,ab\,\cot\theta = H(k)^2\cot\theta,\\ &= \lambda^2\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = (\lambda\cos\theta)^2,\end{aligned}$$

$M(k)\ a$也同理。

步骤 *4.* 令 γ 为初始条件为 $\gamma(0) = 0$、$\dot\gamma(0) = \xi$ 的单位速测地线。应用定理 4.11，可得

$$\gamma\big(T(k)\big) = M(k)\,(b,\,a,\,0) = \lambda(\cos\theta, \sin\theta, 0) = P_\lambda.$$

根据 Coiculescu–Schwartz 定理（定理 5.3），线段 $\gamma|_{[0,T(k)]}$ 是极小的；因此我们有

$$d(0, P_\lambda) = T(k).$$

步骤 *5.* 命题 A.6 给出

$$T(k) = 2\log\left(\frac{1}{1-k^2}\right) + O(1), \quad \text{and} \quad H(k) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}(1 + o(1)).$$

现在利用 (5.1)，我们得到

$$T(k) = 2\log\left(\frac{H(k)^2}{16}\right) + O(1) = 2\log\left(\frac{\lambda^2 \sin\theta\,\cos\theta}{16} + o(1)\right) + O(1)$$
$$= 4\log\lambda + O(1),$$

由此得出

$$d(0, P_\lambda) = T(k) = 4\log\lambda + O(1).$$

□

注记 5.7。 (1) 阈值 $\lambda \geq \pi/\sqrt{\sin\theta\,\cos\theta}$ 确保 (5.1) 有解，但附加条件 $a^2 + b^2 \leq 1$ 给出了更精确的下界

$$\lambda_*(\theta) := \frac{H(k_\theta)}{\sqrt{\sin\theta\,\cos\theta}}, \qquad k_\theta = \sqrt{\frac{1 - 2\sin\theta\cos\theta}{1 + 2\sin\theta\cos\theta}}.$$

(2) 在 $\lambda = \lambda_*(\theta)$ 处，有 $a^2 + b^2 = 1$，因此 $c = 0$，这对应于 Grayson 圆柱的临界线。在这种情况下，点$P_{\lambda_*(\theta)}$ 沿着 γ 与 0 共轭。

(3) 对于 $\theta = \pi/4$，我们得到 $\lambda_* = \sqrt{2}\pi = T(0)$。

(4) 当 $\theta \to 0$ 或 $\theta \to \pi/2$ 时，有 $\lambda_*(\theta) \to \infty$。在极限轴向方向 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi/2$ 上，我们离开一般型区域，从原点到 P_λ 的唯一测地线是双曲直线。

A 一些重要积分。

在这一技术性章节中，我们将讨论周期和水平漂移作为模数的函数时所具有的关键性质。首先简要回顾椭圆积分，它们在此处发挥着基础作用。

A.1 勒让德椭圆积分

第一类和第二类的勒让德完全椭圆积分对 $0 \leq k < 1$定义如下：

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\, d\theta. \tag{A.1}$$

或者，利用代换 $u = \sin\theta$，也可以将它们写成：

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\, du. \tag{A.2}$$

基本性质

(i) 对所有 $k \in (0,1)$，椭圆积分满足

$$E(k) < \frac{\pi}{2} < K(k).$$

(ii) $K(k)$ 严格递增，而 $E(k)$ 严格递减。

(iii) 它们满足以下显然的极限：

$$K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{k\to 1} K(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to 1} E(k) = 1.$$

(iv) 更准确地说，当 $k \to 1$ 时，我们有更精细的渐近展开

$$K(k) = \frac{1}{2}|\log(1-k^2)| + O(1),$$

参见 [12, 式 (3.8.26)，第 75页]。

(v) 关于 k 的导数为

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}, \qquad \frac{dE}{dk} = \frac{1}{k}\left(E(k) - K(k)\right),$$

参见 [12, §3.10]。

我们还需要以下不等式：

引理 A.1. 对于 $0 < k < 1$，有 $E(k) > (1-k^2)\,K(k)$。

证明。 这由上述导数公式 $K'(k)$ 得出，因为 $K(k)$ 严格递增。不过，直接证明也很简单。由定义 (A.1)，我们有

$$\begin{aligned} E(k) - (1-k^2)K(k) &= \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1-k^2\sin(\theta)^2} - \frac{1-k^2}{\sqrt{1-k^2\sin(\theta)^2}} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-k^2\sin(\theta)^2) - (1-k^2)}{\sqrt{1-k^2\sin(\theta)^2}}\, d\theta. \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{k^2\cos(\theta)^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\, d\theta > 0. \end{aligned}$$

□

以及以下恒等式：

引理 A.2。 对于任意 $0 \le k < 1$，我们有

$$\int_0^1 \frac{1+k^2u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-k^2u^2)^{3/2}}\, du = \frac{2E(k)}{1-k^2} - K(k).$$

证明。 利用勒贝格控制收敛定理，我们可以通过在积分号下求导来计算 K 的导数：

$$K'(k) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \right) du = \int_0^1 \frac{k\,u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-k^2u^2)^{3/2}}\, du.$$

现在利用单位元 $1 + k^2u^2 = (1-k^2u^2) + 2k^2u^2$，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1+k^2u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-k^2u^2)^{3/2}}\, du &= \int_0^1 \frac{(1-k^2u^2) + 2k^2u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-k^2u^2)^{3/2}}\, du \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + 2k^2 \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-k^2u^2)^{3/2}}\, du \\ &= K(k) + 2k\,K'(k) \\ &= K(k) + 2k\Big(\frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}\Big) \\ &= \frac{2E(k)}{1-k^2} - K(k), \end{aligned}$$

□

A.2 通过椭圆积分表示 $T(k)$、$M(k)$ 和 $H(k)$

在第 4.1 节和第 4.5 节中，我们得到了具有主运动常数 a，b 的一般测地线 γ 的周期和水平漂移的以下积分表达式：

$$T(k) = 4\int_0^{A(k)} \frac{dz}{\sqrt{1-2|ab|\,\cosh(2z)}},$$

and

$$H(k) := \sqrt{|ab|}\,M(k), \quad \text{with} \quad M(k) = 4\int_0^{A(k)} \frac{\cosh(2z)\,dz}{\sqrt{1-2|ab|\,\cosh(2z)}},$$

其中，$A(k) = \operatorname{arctanh}(k)$ 是振幅。直接处理这些积分颇为棘手，因为积分区间取决于 k，并且当 $k \to 0$ 时会缩小为一个点。特别是，若不先对变量进行缩放，就无法直接从定义得出极限 $\lim_{k\to 0^+} T(k)$。为解决这个问题，我们首先将这些积分改写为椭圆积分：

命题 **A.3 命题**。令 K、E 分别为第一类和第二类完全椭圆积分，则有 *ve*

$$T(k) = \sqrt{8(1+k^2)}\,K(k), \qquad M(k) = \frac{\sqrt{8(1+k^2)}}{1-k^2}\Big(2E(k) - (1-k^2)K(k)\Big), \tag{A.3}$$

and

$$H(k) = \frac{4E(k) - 2(1-k^2)K(k)}{\sqrt{1-k^2}}. \tag{A.4}$$

证明。计算这些积分时，我们使用以下代换：

$$z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+ku}{1-ku}\right), \qquad dz = \frac{k\,du}{1-k^2u^2},$$

因此，当 z 从 0 变化到 $A(k)$ 时，u 从 0 变化到 1。于是有以下关系：

$$\mathrm{e}^{2z} = \frac{1+ku}{1-ku}, \qquad \mathrm{e}^{-2z} = \frac{1-ku}{1+ku}, \tag{A.5}$$

and

$$\cosh(2z) = \frac{1+k^2u^2}{1-k^2u^2}, \qquad (1-2|ab|\,\cosh(2z)) = \frac{2k^2}{1+k^2}\cdot\frac{1-u^2}{1-k^2u^2}. \tag{A.6}$$

因此我们有

$$T(k) = 4\int_0^{A(k)} \frac{dz}{\sqrt{1-2|ab|\cosh(2z)}} = 4k\int_0^1 \frac{kdu}{(1-k^2u^2)\sqrt{\dfrac{2k^2}{1+k^2}\cdot\dfrac{1-u^2}{1-k^2u^2}}},$$

结合 (A.2)，我们可知

$$T = \sqrt{8(1+k^2)}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \sqrt{8(1+k^2)}\,K.$$

类似的计算可得

$$M(k) = 4\int_0^{A(k)} \frac{\cosh(2z)\,dz}{\sqrt{1-2|ab|\,\cosh(2z)}} = \sqrt{8(1+k^2)}\int_0^1 \frac{1+k^2u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-k^2u^2)^{3/2}}\,du,$$

应用引理 A.2，我们得到

$$\int_0^1 \frac{1+k^2u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-k^2u^2)^{3/2}}\,du = \frac{2E}{1-k^2} - K.$$

$H(k)$的结果可直接由 $H = \sqrt{|ab|}\,M$和 $|ab| = \frac{1-k^2}{2}\frac{}{1+k^2}()$得出。 ——— □

计算得出：

推论 A.4。 函数 $T(k)$、 $H(k)$ 和 $M(k)$ 的导数为：

$$T'(k) = \sqrt{\frac{8}{1+k^2}}\,\frac{(1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)},$$

$$H'(k) = \frac{2\big((1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)\big)}{k(1-k^2)^{3/2}},$$

$$M'(k) = \sqrt{8(1+k^2)}\left[\frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)} + \frac{k(3+k^2)\big(2E(k) - (1-k^2)K(k)\big)}{(1+k^2)(1-k^2)^2}\right].$$

最后一个导数可方便地写成

$$M'(k) = \frac{M(k) - T(k)}{2k} + \frac{k(3+k^2)}{(1-k^2)(1+k^2)}\,M(k).$$

A.3 函数 $T(k)$ $M(k)$、和 $H(k)$ 的基本性质。

现在，我们根据函数 T、 M、 H 用椭圆函数表示的形式，推导出它们的一些基本性质。

命题 A.5。 $k \to 0$ 的极限值如下：

$$\lim_{k\to 0} T(k) \;=\; \lim_{k\to 0} M(k) = \sqrt{2}\,\pi, \qquad \lim_{k\to 0} H(k) = \pi.$$

证明。 命题 A.3 中关于 $T(k)$ $M(k)$ 和 $H(k)$ 的公式可连续延拓到 $k = 0$。由于 $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$，我们有

$$\lim_{k\to 0} T(k) = \sqrt{8}\,K(0) = \pi\sqrt{2}, \qquad \lim_{k\to 0} M(k) = \sqrt{8}\,[\,2E(0) - K(0)\,] = \pi\sqrt{2}$$

and

$$\lim_{k\to 0} H(k) = \frac{4E(0) - 2K(0)}{\sqrt{1-0^2}} = \pi.$$

□

当 $k \to 1$ 时的行为由下一个结果描述：

命题 A.6。

$$\lim_{k\to 1} \sqrt{1-k^2}\,H(k) = \lim_{k\to 1} \frac{1}{2}(1-k^2)\,M(k) = \lim_{k\to 1} \frac{2T(k)}{|\log(1-k^2)|} = 4.$$

特别是

$$\lim_{k\to 1} T(k) = \lim_{k\to 1} M(k) = \lim_{k\to 1} H(k) = \infty.$$

证明。我们使用

$$K(k) = \frac{1}{2}|\log(1-k^2)| + O(1) \quad \text{as } k \to 1.$$

这意味着 $\lim_{k\to 1}(1-k^2)K(k) = 0$，并且由于 $E(1) = 1$，我们有

$$\lim_{k\to 1} \sqrt{1-k^2}\,H(k) = \lim_{k\to 1}\; 4E(k) - 2(1-k^2)K(k) = 4.$$

我们还有

$$\lim_{k\to 1}\left(1-k^2\right)\,M(k)=\lim_{k\to 1}\,\sqrt{8(1+k^2)}\left(2E(k)-(1-k^2)K(k)\right)=8,$$

and

$$\frac{2\,T(k)}{|\log(1-k^2)|}=\frac{2\sqrt{8(1+k^2)}\,K(k)}{|\log(1-k^2)|}\to\,4.$$

□

利用前面的两个结果，我们可以写出

$$T(0)=M(0)=\sqrt{2}\pi,\quad H(0)=\pi,\quad T(1)=M(1)=H(1)=\infty.$$

命题 A.7. *(*单调性*)* 对于 $k\in(0,\,1)$，函数 $T(k)\;M(k)\;H(K)$ 是实解析且严格递增的。

Proof. 实解析性显然。导数已在推论 A.4 中给出，我们有 ave

1) 函数 $k\mapsto T(k)=\sqrt{8(1+k^2)}\;K(k)$ 显然严格递增，因为它是两个严格递增函数的乘积。

2)

$$H'(k)=\frac{2}{k(1-k^2)^{3/2}}\Big((1+k^2)E-(1-k^2)K\Big)>0,$$

因为根据引理 A.1，$E(k)>(1-k^2)K(k)$。

3) 又因为 $M\geq T$，我们有

$$M'(k)=\frac{M(k)-T(k)}{2k}+\frac{k(3+k^2)}{(1-k^2)(1+k^2)}\,M(k)>0.$$

□

结合前面的结果，我们得到：

推论 A.8. 函数 $k\mapsto T(k)$ 和 $k\mapsto M(k)$ 定义了从 $[0,1)$ 到 $[\sqrt{2}\pi,\infty)$ 的实解析微分同胚，而 $k\mapsto H(k)$ 定义了从 $[0,1)$ 到 $[\pi,\infty)$ 的实解析微分同胚。

最后，我们有以下不等式：

命题 A.9. 对于 $0<k<1$ 有

$$M(k)\;>\;\sqrt{2}\,H(k)\;>\;T(k)\;>\;4\,A(k).$$

此外，$M(0)=\sqrt{2}\,\bar{H}(0)=T(0)=\sqrt{2}\,\bar{\pi}$ 和 $A(0)=0$。

证明. 由于 $H(k)=\sqrt{|ab|}\,\overline{M}(k)$ 且 $2|ab|\in(0,1)$，我们有 $M(k)>\sqrt{2}\,H(k)$，其中 $0<k<1$（等号仅在 $k=0$ 时成立）。令 $f(k):=\sqrt{2}\,H(k)-T(k)$，则不等式

$$\frac{H'(k)}{T'(k)}=\sqrt{\frac{1+k^2}{2(1-k^2)}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

意味着

$$f'(k)=T'(k)\left(\sqrt{2}\,\frac{H'}{T'}-1\right)>0$$

对于任意 $k \in (0,\ 1)$。由于 $f(0) = 0$，因此对于 $k > \bar{0}$，有 $\sqrt{2}\,H(k) > T(k)$。最后，对于 $z \in [0, A(k)],$，我们有 $1 - 2|ab|$双曲余弦$(2z) \le 1$，因此

$$T(k) = 4\int_0^{A(k)} \frac{dz}{\sqrt{1 - 2|ab|\cosh(2z)}} > 4A(k).$$

结合这三个不等式即可证明该命题。 □

注记 A.1 **0.** 利用完全椭圆积分与算术-几何平均数之间的高斯关系（AGM），[7] 该关系表明

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\big(1, \sqrt{1-k^2}\big)}$$

（见 [12, 式 (3.9.39)，第 81] 页），结合关系式 $k^2 = \frac{1-2|ab|}{1+2|ab|}$，以及 AGM 的齐次性，经过简单计算可得

$$T(k) = \sqrt{8(1+k^2)}\,K(k) = \frac{\pi}{\mathrm{AGM}\big(\sqrt{|ab|},\ \frac{1}{2}\sqrt{1+2|ab|}\big)}.$$

这种对周期的表示正是 [7]所采用的观点。

B 海森堡（NIL）几何中的测地线

在最后这一节中，我们求解三维海森堡群上标准左不变黎曼度量对应的测地线方程；这种几何称为瑟斯顿分类中的 NIL 几何。尽管这些测地线早已广为人知（例如，参见 [9]第 88 页的习题 2.90 bis，以及第 280–290 页的解答），我们仍在此简要给出一种自成一体的求积解法，正如处理 SOL 的情形时所做的那样。具体而言，我们利用度量张量的特殊形式找出两个基本的运动常数，继而逐步积分测地线方程。

回忆一下，海森堡群定义为

$$\mathrm{Nil} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

赋予左不变度量

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - x\,dy)^2.$$

因此，测地线是作用量 $\int \mathcal{L}\,dt$ 的临界曲线，其拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big(\dot{x}^{\,2} + \dot{y}^{\,2} + (\dot{z} - x\,\dot{y})^2\big).$$

应用欧拉-拉格朗日方程 (3.1)，我们可以看到

$$c := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \dot{z} - x\dot{y} \qquad \text{and} \qquad b := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (1+x^2)\dot{y} - x\dot{z},$$

是运动常数。由此得到以下方程。

$$\dot{y} = b + c\,x, \qquad \dot{z} = c + x\,\dot{y} = c + b\,x + c\,x^2.$$

[7]对于 $x, y > 0$，算术-几何平均数 AGM(x, y) 是迭代 $(x, y) \mapsto (\sqrt{xy}, \frac{1}{2}(x+y))$ 的共同极限。

剩余的欧拉–拉格朗日方程是以下两者相等：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -(\dot{z} - x\dot{y})\,\dot{y} = -c\,\dot{y} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x},$$

因此

$$\ddot{x} = -c\,\dot{y} = -c^2\,x - bc.$$

最后，如果测地线具有单位速度，则 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - x\dot{y})^2 = 1$；因此

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + c^2 = 1.$$

我们将目前为止的结果总结如下

引理 B.1。 在 NIL 中，光滑曲线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是单位速度测地线，当且仅当存在两个常数 b、 c，使得

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{y} = b + c\,x & \dot{z} = c + b\,x + c\,x^2 \\ \ddot{x} = -c^2\,x - bc & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + c^2 = 1 \end{array}}$$

这个常微分方程组很容易积分：当 $c \neq 0$ 时，可得到绕竖直圆柱面绕行的螺旋运动（可用三角函数显式参数化）；而在退化情形 $c = 0$ 下，则得到位于垂直平面内的抛物线（当 $ab = 0$ 时为直线）。下面进行这些计算。

我们首先假设 $c \neq 0$。第三个方程 $\ddot{x} = -c^2x - bc$ 的通解可写为

$$x(t) = A\cos\big(ct - \phi\big) - \frac{b}{c},$$

对于某个振幅 $A \geq 0$ 和相位 ϕ。然后通过积分得到 $y(t)$

$$\dot{y} = b + cx = cA\cos\big(ct - \phi\big),$$

从而得到

$$y(t) = A\sin\big(ct - \phi\big) + y_0.$$

并且由竖直导数

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= c + x(t)\dot{y}(t) = c + cx(t)A\cos\big(ct - \phi\big), \\ &= c + \frac{cA^2}{2}\Big(1 + \cos\big(2(ct - \phi)\big)\Big) - bA\cos(ct - \phi), \end{aligned}$$

通过积分可得稍复杂一些的表达式：

$$z(t) = z_0 + \Big(c + \frac{cA^2}{2}\Big)\cdot t + \frac{A^2}{4}\,\sin\big(2(ct - \phi)\big) - \frac{bA}{c}\,\sin\big(ct - \phi\big).$$

由此我们证明，对于 $c \neq 0$，测地线 γ 可参数化为

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + A\cos\big(ct - \phi\big), \\ y(t) = y_0 + A\sin\big(ct - \phi\big), \\ z(t) = z_0 + \Big(c + \frac{cA^2}{2}\Big)t + \frac{A^2}{4}\sin\big(2(ct - \phi)\big) - \frac{bA}{c}\sin\big(ct - \phi\big), \end{cases}$$

其中 $x_0 = -b/c$ 和 y_0， z_0 均为任意值。我们观察到以下三点：

(i) 坐标 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是周期性的，而 $z(t)$ 是一个线性函数与一个周期函数之和。

(ii) 对所有 t，我们有

$$\left(x(t)+\frac{b}{c}\right)^2+\big(y(t)-y_0\big)^2=A^2,$$

in 特别地，测地线 γ 绕着半径为 A 的竖直圆柱面 .

(iii) 振幅为

$$A=\frac{\sqrt{1-c^2}}{|c|},$$

这可由下式推出

$$1=\dot{x}^2+\dot{y}^2+c^2=(Ac)^2\sin\big(ct-\phi\big)^2+(Ac)^2\cos\big(ct-\phi\big)^2+c^2.$$

现在考虑退化情形 $c=0$。在这种情况下，前一个引理中的方程化简为

$$\boxed{\begin{array}{ll}\dot{y}=b & \dot{z}=bx\\ \ddot{x}=0 & \dot{x}^2+\dot{y}^2=1\end{array}}$$

因此 $a=\dot{x}$ 为常数，且我们有 $a^2+b^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$。上述常微分方程的解为

$$x(t)=at+x_0,\qquad y(t)=bt+y_0,\qquad z(t)=\frac{ab}{2}\,t^2+bx_0\,t+z_0.$$

如果 $ab\neq 0$，那么测地线就是包含在垂直平面 $bx-ay=\text{const}$中的抛物线。如果 $ab=0$，则抛物线退化为一条直线。

参考文献

[1] V. I. Arnold，常微分方程，Springer，Universitext，1992。

[2] V. I. Arnold，《经典力学的数学方法》，Graduate Texts in Mathematics，第60卷，Springer，第2版，1989年。[3] A. V. Bolsinov 和 A. T. Fomenko，《可积哈密顿系统：几何、拓扑学、分类》，Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2004年。[4] F. Bonahon，三维流形上的几何结构。载于：《几何拓扑手册》，第93–164页，North-Holland，阿姆斯特丹，2002年。[5] J. Cheeger 和 D. G. Ebin，《黎曼几何比较定理》，AMS Chelsea Publishing，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[6] M. P. Coiculescu，从 Sol 到双曲空间的插值。《实验数学》*31*（2022年），第4期，1150–1176。[7] M. P. Coiculescu 和 R. E. Schwartz，Sol球面。《几何与拓扑》**26**（2022年），第5期，2103–2134。doi:10.2140/gt.2022.26.2103[8] R. H. Cushman 和 L. M. Bates，《经典可积系统的整体方面》，第2版，Birkhäuser，巴塞尔，2015年。[9] S. Gallot、D. Hulin 和 J. Lafontaine，《黎曼几何》，第3版，Springer，Universitext，2004年。

[10] M. A. Grayson, 《三维几何与增长》，博士学位论文，普林斯顿大学，1983年。可访问：www.proquest.com/docview/303279021。[11] Y. Kosmann-Schwarzbach, 《诺特定理：不变性与守恒定律》，Springer，纽约，2011年。[12] D. F. Lawden, 《椭圆函数及其应用》，Springer，1989年。[13] P. Nabonnand，对19世纪测地线理论史的贡献。《数学史评论》**1**（1995年），159–200。[14] P. Scott，三维流形的几何。《伦敦数学学会会报》**15**（1983年），401–487。[15] A. Torrielli，经典可积性。《物理学杂志 A》**49**（2016年），第32期，323001。[16] M. Troyanov，SOL 的视界。《数学展望》**16**（1998年），第5期，441–479。