arXiv:2601.03735v1 [eess.SP] 7 Jan 2026

真时延系统中到达角估计的克拉美-罗下界

Carl Collmann、Ahmad Nimr、Gerhard FettweisVodafone 移动通信系统讲席，
德累斯顿工业大学¨德国德累斯顿{carl.collmann、ahmad.nimr、gerhard.fettweis}
@tu-dresden.de

摘要—在通信感知一体化（JC&S）背景下，如何获得准确的参数估计是一个值得关注的挑战。到达角（AoA）等参数估计可用于解决初始接入问题、抑制干扰、实现用户定位、监测环境，以及实现多输入多输出（MIMO）系统的同步。近年来，真时延（TTD）系统因其能够在初始接入期间实现快速波束训练并抑制波束斜视而受到关注。本文推导了典型真时延系统中角度估计的克拉美-罗界（CRB），并研究和数值评估了克拉美-罗界及费歇尔信息的性质。最后，采用最大似然（ML）等角度估计方法和已有估计器，利用均匀线性阵列解决角度估计问题。

索引词——**真时延、角度估计、克拉美-罗下界、均匀线性阵列**

I. 引言

在未来的6G系统中，通信感知一体化将发挥重要作用，通过将蜂窝基础设施转变为感知网络 [1]。在此背景下，基于感知获得的到达角（AoA）/离开角（AoD）等参数估计，是实现智能、具备情境感知能力的移动通信系统的关键。这些参数估计可用于多输入多输出（MIMO）系统中的波束选择、定位、目标跟踪，或日益大型天线阵列的同步与校准 [2]。

近年来，真时延（TTD）已受到关注，可用于补偿波束斜视现象 [3]，，该现象是相对带宽较大时的一项重要问题。真时延（TTD）阵列的频率相关响应也可用于快速波束训练 [4], [5] 和角度估计[6], [7]。利用真时延进行角度估计[7] 和波束训练 [8] 的可行性已通过实验验证。对于真时延系统中的角度估计，各种方法包括正交匹配追踪（OMP）、基于最大似然（ML）的估计 [6], 、线性最小均方误差
（线性最小均方误差） [9] 或相关性和基于模型的估计器 [7]。以往研究比较了简单的基于模型的估计器与常见角度估计方法的性能[10]。尽管 rootMUSIC 等超分辨率方法即使在存在损伤的情况下也能提供更高的角度估计精度，但简单的基于模型的估计器仍可取得不错的性能，平均绝对误差（MAE）为 $< 1^\circ$ [10]。为了公平比较，需要指出，常见角度估计方法受限于

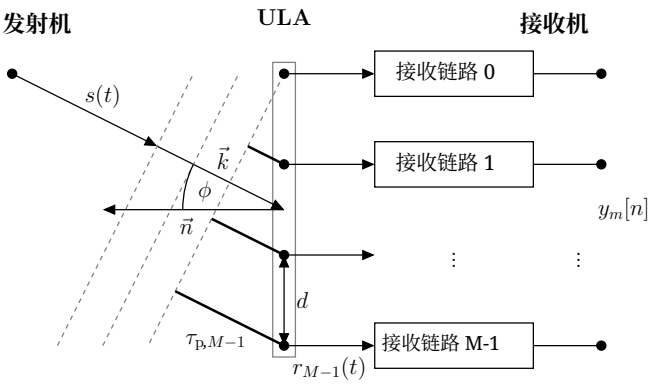


图 1. 单输入多输出系统模型 [10]，采用全向发射天线和由 M 个阵元组成的均匀线性阵列接收机，阵元间距为 d。¯向量 k 表示从发射机（TX）指向接收机（RX）的方向，而向量 $\vec{n}$ 表示阵列法线。

窄带准则适用这一假设，而基于真时延的估计则依赖于有意违反该准则[10]。其他研究广泛探讨了真时延系统中硬件损伤的影响，具体而言是时间误差和相位误差 [6]。在 [6] 中给出了克拉美-罗界（CRB），但该界的推导基于一些非平凡假设，涉及硬件损伤的线性化及其幅度的相对比例。

由于克拉美-罗界可用于评判估计方法的性能，因此推导真时延系统中角度估计的克拉美-罗界具有重要意义。本文推导了典型真时延系统中到达角的克拉美-罗界表达式，以揭示角度估计精度的局限性。本文将最大似然估计和基于模型的估计器等常见角度估计方法与推导出的克拉美-罗界进行比较。

本文结构如下：第二节介绍真时延单输入多输出系统的一般系统模型。第三节推导克拉美-罗界，并分析费歇尔信息（FI）各组成部分。第四节介绍用于角度估计的算法，并以均方误差（MSE）为指标比较其性能。第五节总结全文并给出主要结果。

II. 系统模型

所考虑的系统配置如图 1 所示。一个发射机代表一台用户设备（UE），它与

基站（BS）进行上行链路通信，并辐射一个信号

$$s(t) = \mathfrak{Re}\{x(t)e^{j2\pi f_c t}\} \tag{1}$$

全向辐射。基站配备了一个由 M 个阵元组成的均匀线性阵列，阵元间距为 $d = \lambda/2$，到达角 AoA 为 ϕ（相对于阵列法线）。具有信道增益 ρ、信道时延τ_{ch} 和传播时延τ_{p}的第 $m-$ 个天线单元接收到的信号，m 为

$$r_m(t) = \mathfrak{Re}\{\rho x(t - \tau_{\text{ch}} - \tau_{\text{p},m})e^{j2\pi f_c(t-\tau_{\text{ch}}-\tau_{\text{p},m})}\}. \tag{2}$$

下变频后，经过真实时延τ_{d}，m 延迟的基带信号表示为

$$y_m(t) = \rho x(t - \tau_{\text{ch}} - \tau_{\text{p},m} - \tau_{\text{d},m})e^{-j2\pi f_c(\tau_{\text{ch}}+\tau_{\text{p},m})}. \tag{3}$$

通过傅里叶变换，频域中的第 m 个信号为

$$\begin{aligned} Y_m(f) &= \rho X(f)e^{-j2\pi f(\tau_{\text{ch}}+\tau_{\text{p},m}+\tau_{\text{d},m})}e^{-j2\pi f_c(\tau_{\text{ch}}+\tau_{\text{p},m})} \\ &= \rho X(f)e^{-j2\pi(f_c+f)\tau_{\text{ch}}}e^{-jm\psi}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\psi(f,\ \phi) = 2\pi[(f_c + f)\frac{d}{c}$正弦 $\phi + f\tau_{\text{d}}]$。于是，系统函数 $H = Y/X$ 可表示为

$$H(f,\phi) = \rho' \sum_{m=0}^{M-1} e^{-jm\psi}, \tag{5}$$

其中 $\rho' = \rho e^{j\Psi}$和 $\Psi = -2\pi(f_c+f)\tau_{\text{ch}}$。利用几何级数的性质，可将该和改写为

$$H(f) = \rho' e^{-j\frac{M-1}{2}\psi}\frac{\sin M\psi/2}{\sin\psi/2}. \tag{6}$$

由于对于角度估计，施加于信号的公共相位偏移无关紧要，且接收信号的增益可以通过自动增益控制（AGC）进行控制，为简便起见，假定 ρ' 已知并已补偿，因此 $\rho' = 1$。

接收信号的无噪声观测为

$$Y(f,\phi) = X(f)\underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} e^{-jm2\pi[(f_c+f)\frac{d}{c}\sin\phi+f\tau_{\text{d}}]}}_{H(f,\phi)}, \tag{7}$$

有噪声的观测为

$$Z(f) = X(f)H(f,\phi) + V(f), \tag{8}$$

其中高斯噪声 $v \sim \mathcal{CN}(0,\ \sigma_v^2)$。

III. 真时延系统中到达角估计的克拉美-罗下界

目标是根据先前建立的模型，从接收信号中估计角度 ϕ。由于克拉美 - 罗下界给出了任何无偏估计量能够达到的最小方差，因此对于评估真时延系统中的角度估计方法具有重要意义。在考虑频率为 n 的离散样本/频率分箱时，

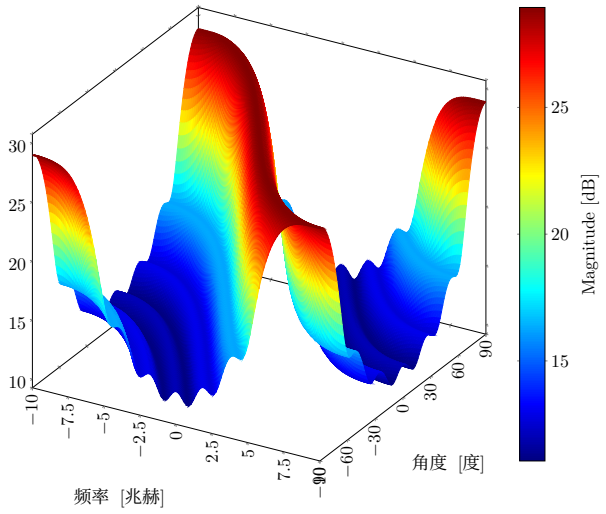


图2. 10 $\log_{10}(\kappa(f,\phi))$ 对于 $M = 8, f_c = 3.75$ GHz $B = 20$MHz $\tau_{\text{d}} = 1/B$

观测为 $f = f_n$，

$$Z[n] = Y[n,\phi] + V[n] = Z_n. \tag{9}$$

含噪接收信号观测向量 $\boldsymbol{Z}$ 的似然函数为

$$p(\boldsymbol{Z};\phi) = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi\sigma_v^2}e^{-\frac{|Z_n-Y_n|^2}{\sigma_v^2}}, \tag{10}$$

相应的对数似然函数为

$$\mathcal{L}(\phi) = \ln p(\boldsymbol{Z};\phi) = -\ln\pi\sigma_v^2 - \frac{1}{\sigma_v^2}\sum_{n=1}^{N}|Z_n - Y_n|^2. \tag{11}$$

对相位求一阶导数，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi} &= -\frac{1}{\sigma_v^2}\sum_{n=1}^{N}\left[-\frac{\partial Y_n}{\partial\phi}^*(Z_n - Y_n) - (Z_n - Y_n)^*\frac{\partial Y_n}{\partial\phi}\right] \\ &= \frac{2}{\sigma_v^2}\sum_{n=1}^{N}\mathfrak{Re}\left\{\frac{\partial Y_n}{\partial\phi}^*(Z_n - Y_n)\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

对相位求二阶导数为

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi^2} = \frac{2}{\sigma_v^2}\sum_{n=1}^{N}\mathfrak{Re}\left\{\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\phi^2}^*(Z_n - Y_n) - \frac{\partial Y_n}{\partial\phi}^*\frac{\partial Y_n}{\partial\phi}\right\}. \tag{13}$$

费舍尔信息定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\phi) &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\phi)}{\partial\phi^2}\right] = \frac{2}{\sigma_v^2}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\partial Y_n}{\partial\phi}\right|^2 \\ &= \frac{2}{\sigma_v^2}\sum_{n=1}^{N}\left|X_n\left(-j2\pi(f_n+f_c)\frac{d}{c}\cos\phi\right)\sum_{m=0}^{M-1}me^{-j\psi_n}\right|^2 \\ &\le \frac{2}{\sigma_v^2}\sum_{n=1}^{N}|X_n|^2\cdot\left|2\pi(f_n+f_c)\frac{d}{c}\cos\phi\right|^2\cdot\underbrace{\left|\sum_{m=0}^{M-1}me^{-j\psi_n}\right|^2}_{\kappa_n}. \end{aligned} \tag{14}$$

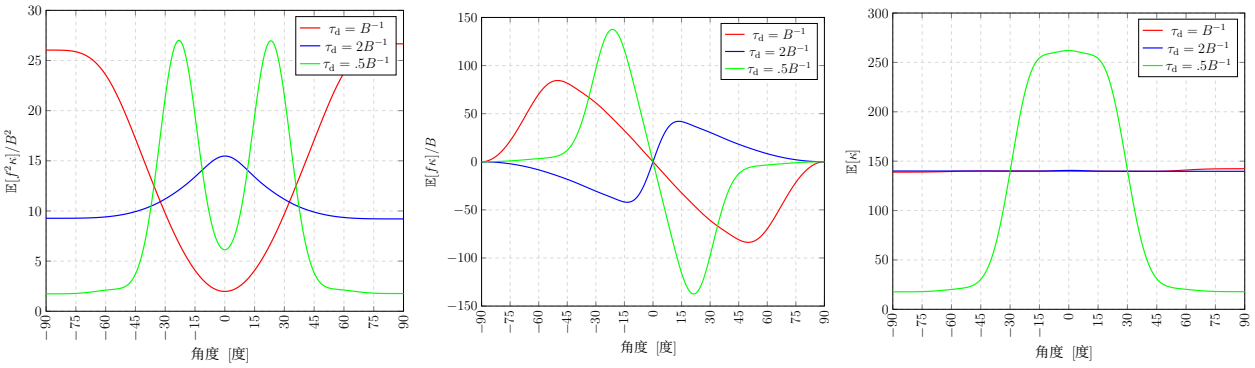


图3. 数值评估 κ_0 对于不同的 τ_d， κ_0 在关于 ϕ 方面是均匀的。图4. 数值评估 κ_1 对于不同的 τ_d， κ_1 在关于 ϕ 方面是不均匀的。图5. 数值评估 κ_2 对于不同的 τ_d， κ_2 在关于 ϕ方面近似均匀。

对天线单元求和 m 后，可以利用几何级数的性质并求其一阶导数来重写

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \frac{\left|e^{-j\psi_n} - Me^{-jM\psi_n} + (M-1)e^{-j(M+1)\psi_n}\right|^2}{16\sin^4(\psi_n/2)} \\ &= \frac{(1 - M\cos[(M-1)\psi_n] + (M-1)\cos[M\psi_n])^2}{16\sin^4(\psi_n/2)} \\ &+ \frac{(M\sin[(M-1)\psi_n] - (M-1)\sin[M\psi_n])^2}{16\sin^4(\psi_n/2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

为便于说明，图2绘出了变量 $\kappa(f,\ \phi)$。假设频率分箱 f_n 取自区间$[-B/2, B/2]$，间隔为 $\Delta f = B/N$。利用黎曼和重写费舍尔信息

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\phi) \le \frac{2}{\sigma_v^2}\left(2\pi\frac{d}{c}\cos\phi\right)^2 \\ \cdot \frac{1}{\Delta f}\int_{-B/2}^{B/2}|X(f)|^2(f+f_c)^2\kappa(f)df.\end{aligned} \quad (16)$$

假设信号能量可表示为

$$E_s = \int_{-B/2}^{B/2}|X(f)|^2 df, \quad (17)$$

并且 $X(f)$ 的频谱平坦且关于$f=0$对称，则费舍尔信息变为

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\phi) \le \frac{2E_sN}{\sigma_v^2}\left(2\pi\frac{d}{c}\cos\phi\right)^2\frac{1}{B}\left[\int_{-B/2}^{B/2}f^2\kappa(f)df\right. \\ \left. + 2f_c\int_{-B/2}^{B/2}f\kappa(f)df + f_c^2\int_{-B/2}^{B/2}\kappa(f)df\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

当将频率视为均匀分布的随机变量 $f \sim \mathcal{U}(-B/2, B/2)$ 时，这些积分可视为

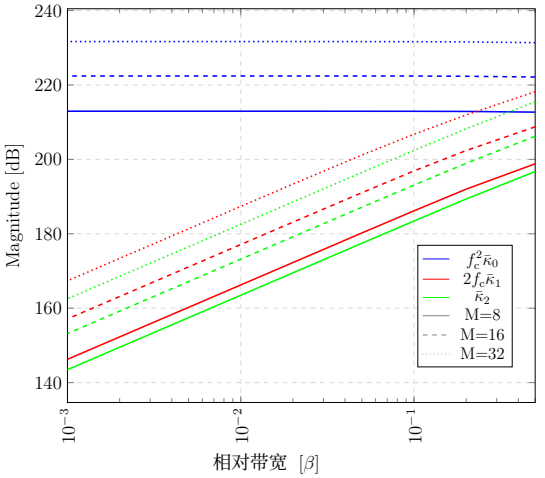


图6. 不同天线数量 $M \in \{8, 16, 32\}$ 下，相对带宽 β 的平均 $\bar{\kappa}_i$ 幅度（分贝）

对其取期望，其中

$$\mathbb{E}[\kappa] = \frac{1}{B}\int_{-B/2}^{B/2}\kappa(f)df = \kappa_0, \quad (19)$$

$$\mathbb{E}[f\kappa] = \frac{1}{B}\int_{-B/2}^{B/2}f\kappa(f)df = \kappa_1, \quad (20)$$

$$\mathbb{E}[f^2\kappa] = \frac{1}{B}\int_{-B/2}^{B/2}f^2\kappa(f)df = \kappa_2. \quad (21)$$

期望值绘于图3、图4和图5中，其参数与图2相同。代入费舍尔信息

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(\phi) \le \\ &\frac{2E_sN}{\sigma_v^2}\left(2\pi\frac{d}{c}\cos\phi\right)^2\left[\mathbb{E}[f^2\kappa] + 2f_c\mathbb{E}[f\kappa] + f_c^2\mathbb{E}[\kappa]\right].\end{aligned} \quad (22)$$

可以看出，对于 f_c^2 占主导地位的 $B = 20$兆赫窄带情况。图6显示了不同天线数量下相对带宽 $\beta = B/f_c$ 范围内的平均$\bar{\kappa}_i$ 。相较于 κ_0，在相对带宽较高时， κ_1，κ_2 的影响更为显著。在

表 I 系统参数。

参数	符号	值
载波频率	f_c	3.75 GHz
带宽	B	20 兆赫
均匀线性阵列（ULA）阵元	M	$[8, 16, 32]$
均匀线性阵列（ULA）阵元间距	d	4 cm
信号长度	N	512 个采样点
真时延	τ_d	$\sim B^{-1}$
波束指向角	ϕ	$[-60° \ldots, 60°]$
SNR	SNR	$[-20, \ldots, 10]$ 分贝

假设 $f_c^2 \gg B^2$ 的条件下，该表达式可进一步简化

$$\mathcal{I}(\phi) \leq \frac{2E_s N \kappa_0}{\sigma_v^2} \left(2\pi f_c \frac{d}{c} \cos\phi\right)^2. \tag{23}$$

那么， ϕ 的克拉美-罗下界（CRLB）可表示为

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{\phi}) &\geq \frac{1}{\mathcal{I}(\phi)} \\ &\geq \frac{\sigma_v^2}{2E_s N \kappa_0 \left(2\pi f_c \frac{d}{c} \cos\phi\right)^2}. \end{aligned}$$

IV. Evaluation

A. 数字信号处理

观测信号向量 $\boldsymbol{Z}$ 根据已建立的系统模型 (8) 生成。信号参数见表 I；在本次评估中，考虑窄带情况$B = 20$兆赫，因此可以使用 (24) 给出的简化克拉美-罗界。其他参数（例如载波频率）按照德累斯顿工业大学的 5G校园网络 [11]进行设置。波束指向角的评估范围限制在区间 $[-60°\ldots\ldots, 60°]$,，因为超出此范围后，均匀线性阵列无法有效辐射。

为获得到达角的最大似然估计，使用以下估计器

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\mathrm{ML}} &= \underset{\phi}{\mathrm{argmax}}\ \mathcal{L}(\phi) \\ &= \underset{\phi}{\mathrm{argmax}} \left[\sum_{n=1}^{N} |Z_n - Y_n|^2\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

请注意，无噪声系统响应 $\boldsymbol{Y}$ 是针对离散且有限数量的角度构建的，这对该角度估计方法的分辨率施加了实际限制。对于峰值法，首先对观测向量进行预处理：与大小为b的矩形窗 $\boldsymbol{w}$ 进行循环卷积

$$\hat{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z} \circledast \boldsymbol{w}. \tag{25}$$

此预处理旨在提高可靠性

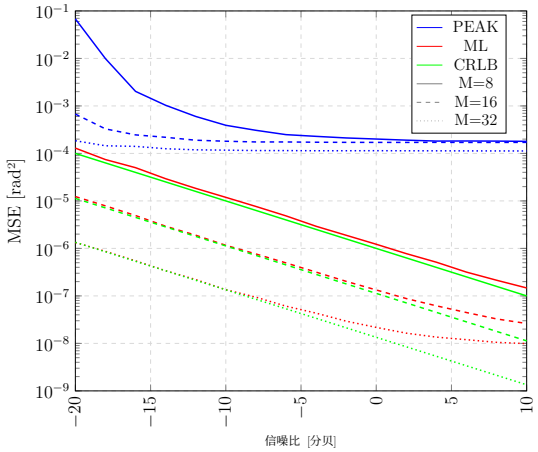


图 7. 不同信噪比 (SNR) 下的均方误差

以便找到功率最大的频率分量

$$\hat{f} = \underset{f}{\mathrm{argmax}}\ \hat{\boldsymbol{Z}}. \tag{26}$$

角度估计由以下函数给出 [7]

$$\hat{\phi}_{\mathrm{TTD}}(f = \hat{f}) = \arcsin\left(-\frac{f\tau_d}{f + f_c}\frac{c}{d}\right). \tag{27}$$

B. 结果

图 7 绘出了不同天线数量下，最大似然估计器和峰值估计器的均方误差，以及所推导的克拉美-罗界 (24) 随信噪比的变化。通常，角度估计的克拉美-罗界取决于天线数量 [12] [13]。请注意，在 (24) 中，克拉美-罗界对 M 的依赖包含在参数 κ_0中。正如预期的那样，随着天线数量增加，两种估计器的克拉美-罗界和估计性能均得到改善。峰值法的估计性能受到分辨率的限制。这是因为可用的频率分箱数量有限，且其间距 N/B 限制了可达到的均方误差。最大似然估计器非常接近克拉美-罗界，但在较高信噪比下无法达到克拉美-罗界。尽管这看似有悖直觉，但这是因为最大似然估计仅使用有限数量的角度来构造 $\boldsymbol{Y}(\phi)$。因此，通过使用更多离散角度模拟 $\boldsymbol{Y}(\phi)$，可以解析出较高信噪比下最大似然估计器与克拉美-罗界之间的差异。

V. 结论

本文推导了真时延系统中到达角估计的克拉美-罗界。此外，以均方误差为指标，将最大似然角度估计方法和基于峰值的方法与克拉美-罗界进行了比较。最大似然方法可以达到克拉美-罗界，而基于峰值的方法在任何信噪比下都无法达到该界限。峰值法的这一局限源于其在到达角估计中仅考虑具有最大功率的频率箱。频率箱之间的间隔限制了该方法可实现的角度估计性能。一种可能的解决方案是

对观测信号向量进行 sinc 插值上采样，以提高频率分辨率。对于给定参数，使用峰值法可以获得均方根误差（RMSE）$< 1^\circ$，这对于解决初始波束捕获问题而言可能已经足够。

未来的研究还应考虑最大似然法和峰值法在计算复杂度与角度估计性能之间的权衡。

致谢

本研究由德国联邦教育与研究部通过 KOMSENS-6G 项目（16KISK124）资助。

参考文献

[1] F. Liu、Y. Cui、C. Masouros、J. Xu、T. X. Han、Y. C. Eldar 和 S. Buzzi，《感知与通信一体化：迈向面向6G及未来的双功能无线网络》，*IEEE*通信领域精选期刊，第40卷，第6期，第1728–1767页，2022年。[2] R. Rogalin、O. Y. Bursalioglu、H. Papadopoulos、G. Caire、A. F. Molisch、A. Michaloliakos、V. Balan 和 K. Psounis，《分布式多用户MIMO的可扩展同步与互易性校准》，*IEEE*无线通信汇刊，第13卷，2014年，第1815–1831页，第4期。[3] T. Mewes、W. Rave 和 G. Fettweis，《通过将相控阵与数字基带时延相结合来补偿波束斜视》，载于第*28*届智能天线国际研讨会（*WSA*），德国埃朗根，2025年9月。[4] A. Wadaskar、V. Boljanovic、H. Yan 和 D. Cabric，《面向宽带毫米波系统、采用真时延阵列进行快速波束训练的三维彩虹波束设计》，载于*2021*年第*55*届阿西洛马会议：信号、系统与计算机，2021年，第85–92页。[5] C. Jans、W. Rave 和 G. Fettweis，《利用固定长度与可变长度检验，通过真时延频率相关波束成形实现快速波束对准》，载于*2022*年*IEEE*相控阵系统与技术国际研讨会（*PAST*），2022年，第1–7页。[6] V. Boljanovic 和 D. Cabric，《硬件损伤条件下利用模拟真时延阵列进行毫米波宽带信道估计》，信号处理系统期刊，第94卷，第10期，第1015–1030页，2022年10月。[7] C. Collmann、A. Martinez、A. Nimr 和 G. Fettweis，《利用软件定义无线电进行真时延天线阵列的到达角估计算法》，载于*JC&S 2024*，比利时鲁汶，2024年3月。[8] M. A. Mokri、Y.-C. Wang、R. Li、A. Wadaskar、S. Gupta、D. Heo 和 D. Cabric，《用于快速基于真时延的彩虹波束训练的定制空口可扩展毫米波测试平台》，载于*ICC 2024 - IEEE*国际通信会议，2024年，第1903–1908页。[9] C. Jans、X. Song、W. Rave 和 G. Fettweis，《利用频率扫描阵列实现同时波束扫描与功率谱估计，从而快速对准波束》，载于*WSA 2020*：第*24*届*ITG*智能天线国际研讨会，2020年，第1–6页。[10] C. Collmann、A. Nimr 和 G. Fettweis，《相位损伤条件下rootMUSIC、最小方差无失真响应和真时延角度估计的比较分析》，载于第*28*届智能天线国际研讨会（*WSA*），德国埃朗根，2025年9月。[11] 德累斯顿工业大学、硅萨克森，《整个校园已建成专用5G网络》，2024年。 [在线]。可访问：https://silicon-saxony.de/en/tu-dresden-private-5g-network-set-up-across-the-entire-campus/ [12] S. M. Kay，统计信号处理基础：估计理论。美国：Prentice-Hall公司，1993年。[13] 参数估计*I*：最大似然。约翰·威立父子有限公司，2002年，第8章，第917–1138页。 [在线]。可访问：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/0471221104.ch8