arXiv:2601.03739v1 [math.AP] 7 Jan 2026

关于一维标量守恒律及满足 $\gamma = 3$ 的等熵欧拉系统的拟熵解之熵耗散结构与正则性

FABIO ANCONA、ELIO MARCONI 和 LUCA TALAMINI

Abstract. 本文首先研究多维空间中标量守恒律的拟熵解。在此框架下，我们为这类解引入一种合适的拉格朗日表示。接下来，我们证明，在一维空间中，对于满足一般非退化条件的通量 f，拟熵解的熵耗散测度集中在一个 1-可求长集上。对于满足 $\gamma = 3$ 的等熵欧拉系统，我们也得到了相同的结果；此外，利用动理学测度的符号，我们还略微改进了已有的分数阶正则性结果。

1. Introduction

考虑如下标量守恒律

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x f(u) = 0, \qquad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

其中 $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ 是一个 C^2 函数。本文研究方程 (1.1) 的拟熵解。这些函数 $u\in \mathrm{L}^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ 满足：对于每个熵－熵通量对 $(\eta, \boldsymbol{q})$，分布 $\mu_\eta := \eta_t(u) + q_x(u)$ 都是局部有限测度；其中，熵－熵通量对是指一对满足 $\boldsymbol{q}' = f'\eta'$ 的 C^2 光滑函数。一般而言，若 u 是方程 (1.1) 的拟熵解，则它满足如下形式的平衡律

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x f(u) = m, \qquad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

其中 $m\in\mathscr{M}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$（源项）是一个局部有限测度。众所周知，(1.1) 的弱解并不唯一，只有将解限制在较小的熵解类中，才能恢复适定性。这些熵解是 (1.1) 的弱解，并且还满足耗散每一个凸熵的条件：

$$\mu_\eta \doteq \partial_t\eta(u) + \mathrm{div}_x \boldsymbol{q}(u) \le 0, \qquad \text{in } \mathscr{D}'. \tag{1.3}$$

其中这里 η （熵）是任意一个标量凸函数。由于 [19]已知，与 (1.1) 相关的柯西问题在熵解类中是适定的。

在这篇奠基性论文中 [23] 作者证明，(1.1) 的熵解满足动理学表述，其中编码熵产生的碰撞项 (1.3) 具有非负有限测度导数的形式：

$$\partial_t\chi + f'(v)\cdot\nabla_x\chi = \partial_v\mu, \qquad \chi(t,x,v) = \mathbf{1}_{0<v\le u(t,x)} - \mathbf{1}_{u(t,x)\le v<0}. \tag{1.4}$$

尽管熵解为（1.1）提供了令人满意的数学理论，文献中仍在研究更一般的解概念，尤其是有限熵解（或具有有限熵产生的解）这一类解，它们出现在许多物理模型中：这些拟熵解还满足 m =0 于（1.2）中。从动理学表述的角度看，有限熵解意味着允许右端出现有限测度 μ （不带符号）

（1.4）。对于拟熵解，必须增加一个额外的源项 $\mu_0 \in \mathscr{M}$（$[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$）：

$$\partial_t \chi + f'(v)\cdot\nabla_x \chi = \partial_v \mu_1 + \mu_0 \tag{1.5}$$

有限熵解（因此也包括满足条件（1.5）且$\mu_0 = 0$的拟熵解）例如出现在标量守恒律大偏差研究中 [6], [24] ，也出现在 ΓAviles-Giga 泛函的 [26] -收敛问题研究中，参见例如 [21] 及其中的参考文献。此外，有限熵解在守恒律扩散-色散近似理论中也有应用；更一般地说，只要存在非经典激波，就会涉及有限熵解，参见 [20] 及其中的参考文献。文献 μ_1 证明了具有一般通量函数的守恒律的扩散-色散近似收敛到有限熵解，其中 μ_1 是一般的局部有限测度。我们预计本文的结果将有助于研究这类解。更重要的是，就本文的目的而言，正如本文稍后命题 6.3 所示，欧拉系统的熵解的黎曼不变量在 $\gamma = 3$

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0,\\ &\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \rho^3/3) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

是 Burgers 方程的拟熵解

$$\partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \tag{1.7}$$

如果 ρ远离零。这解释了为何在 (μ_0 （1.5）中需要源项[17, 22, 34, 36]。文献中已有多位作者研究该系统，例见 [2] 。在 [4] 中，作者猜想守恒律系统可能具有与标量平衡律相同的一些正则性性质。沿着这一思路， 2×2 证明了守恒律系统的熵解满足一对带源项的动力学方程，并证明跳跃集之外的点具有消失平均振荡性质。此外，在 [33], 中，这些工具得到进一步运用，从而为熵解推导出强时间正则性和一个衰减结果。

在一维空间中，自 Oleˇınик 的工作以来 [30], ，多位作者研究了通量的非线性与熵条件（1.3）相互作用所产生的正则化效应。通常，通量的非线性会迫使特征线相交；结合熵条件，这便产生所需的正则化效应。例如，对于 Burgers 方程的熵解 u ，单侧利普希茨估计

$$\partial_x u(t,\cdot) \le \frac{1}{t}, \qquad \text{in } \mathscr{D}'$$

产生正则化效应 L^∞ 对于 BV。另请参见 [3, 5, 8, 10, 22, 23, 29] ，其中介绍了守恒律中非线性的正则化效应的各种结果。因此，由 BV 函数的 [37], Vol'pert 链式法则可知，测度μ_η集中在 u的 1-可求长度跳跃集上。长期以来，人们一直在研究：对于一维空间中的一般通量和熵解，这种集中性是否仍然成立。在一维空间中，首个结果 [14] 解决了具有 C^2 通量且满足$\{u|f''(u) = 0\}$ 局部有限的熵解的这一问题；而在最近的一项工作中 [8] ，作者证明了具有一般光滑通量的熵解也具有相同的集中性。 [8] 中的结果通过关键性地使用 拉格朗日表示来实现，该表示针对（1.1）的解，是非光滑情形下特征线法的推广。

在 [27] 中证明了，对于一维 Burgers 方程的有限熵解，集中性仍然成立。该结果同样通过拉格朗日表示得到，但所采用的表示不同：可以将其理解为在动理学表述（1.4）层面表示特征线，而不是在（1.1）层面表示。这类表示最早由 [7]针对（1.1）的熵解（多维）引入，并由 [25]用于有限熵解。

在多维情形下，借助几何测度论中的技巧，文献 [13] 证明了熵耗散的一个部分可整流性结果。具体而言，令 $\nu(t,x)$为测度 $|\mu|$关于(t,x)的边缘测度，其中 μ 如(1.4)所示，他们证明，正 $\mathscr{H}^d$ 密度的 ν点(t,x)构成的集合 $\mathrm{J} \subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$ 是 d-可整流的。然而， ν 是否集中在跳跃集 J 上这一问题仍未解决。

1.1. 本文的结果与结构安排。 本文结构安排如下。

In拟熵解与动理拟熵解与（1.5）之间的等价性。本节的结果相当标准，例如参见 [13]。

第3节讨论另一种等价性，即拟熵解与满足拉格朗日表示的解之间的等价性，其思路源自[7, 25]。主要定理——定理3.2——依赖于 Smirnov 的一个定理 [32]（见定理3.12），我们通过测度论重参数化论证证明了拉格朗日表示的存在性。由此，我们还可以证明拉格朗日表示的一些附加性质（定理3.14）。

在第 4 节中，我们研究一维空间中标量守恒律的耗散测度结构，这些守恒律的通量满足一般的非退化条件 f（定义 4.1）。在本节的主要定理——定理 4.5 中，我们证明熵耗散测度（即通过关于 t、x 变量的典范投影，将 $|\mu_1|$ 推前所得的测度（$p_{t,\,x}$）$_\sharp|\mu_1|$ ）集中于一个 1-可求长集上。相关论证受到文献 [27], [28] 的启发。

在第 5节中，定理 5.2证明了当 μ_1 （1.5）中的测度具有正号时，Burgers 方程的拟熵解具有正则性。该论证依赖于第 3节的拉格朗日表示，并利用了动理学测度 μ_1的符号，从而在 Besov 空间 [16] 意义下略微改进了文献中已有的分数阶正则性结果。

最后，在第6 节中，我们将证明上述所有结果均适用于远离真空的欧拉系统熵解，其中 $\gamma = 3$。

2. Kinetic Formulation of quasi-entropy solutions

我们首先给出拟熵解的定义。这里考虑一个C^2 通量函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ 和一个开集$\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$。大多数情况下，我们取$\Omega = (0,\ T) \times \mathbb{R}$，其中 $T > 0$。

定义2.1。我们称 $u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R})$为通量为 f的拟熵解，若对于每个熵-熵通量对$(\eta,\ \boldsymbol{q})$，其中 $\eta \in C^2(\mathbb{R})$，都存在一个局部有限测度 $\mu_\eta \in \mathscr{M}(\Omega)$，使得

$$\partial_t \eta(u) + \operatorname{div}_x \boldsymbol{q}(u) = \mu_\eta \qquad \text{in } \mathscr{D}'_{t,x}(\Omega). \tag{2.1}$$

由于特别地，由η_0，$\boldsymbol{q}_0$定义的对（ η_0（u） $= u$， $\boldsymbol{q}_0$（u） $= f$（u）是一个熵-熵通量对，若 u 是拟熵解，则可得 u 满足（1.2），其中$m = \mu_{\eta_0}$。

注记2.2。守恒律的较经典熵解概念 w

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x f(u) = 0$$

可通过额外要求 $\mu_{\eta_0} = 0$，并且对于每个凸熵 η，相应的熵测度 μ_η 非正来得到。

在 [23], Lions、Perthame 和 Tadmor 通过动理学表述刻画了熵解。这里我们采用一种略有不同的表述，它可直接由 [13], 得到，并且适用于拟熵解。为完整起见，我们给出其证明。

命题 2.3。 函数 $u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ 是定义 *2.1* 意义下的拟熵解，当且仅当存在局部有限测度 μ_0，$\mu_1 \in \mathscr{M}(\Omega\times\mathbb{R})$，满足 支集 $\mu_i \subset \Omega \times$ [下确界 u， 上确界 u]，使得

$$\partial_t \chi + f'(v)\cdot\nabla_x \chi = \partial_v \mu_1 + \mu_0 \qquad in\ \mathscr{D}'(\Omega\times\mathbb{R}) \tag{2.2}$$

其中

$$\chi(t,x,v) = \begin{cases} 1 & if\ v \le u(t,x), \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{2.3}$$

注 2.4。 显然，满足条件（2.2）的测度 μ_0， μ_1 并不唯一。可以选取测度 μ_1， μ_0 使得它们的支集包含于函数 u的下图集的拓扑边界中:

$$\operatorname{supp}\mu_i \subset \partial \operatorname{hyp} u \qquad i = 0, 1,$$

其中

$$\operatorname{hyp}(u) = \big\{(t,x,v) \in \Omega\times\mathbb{R} \,|\, v \le u(t,x)\big\}.$$

不过，之后我们需要对测度 μ_0， μ_1 作出更精细的选择，特别是该选择蕴含上述条件。

证明。 我们首先证明，若 u满足（2.2），则 u是一个拟熵解。设（η， $\boldsymbol{q}$）是任意一个熵-熵通量对。取 $U \Subset \Omega$（紧包含于 Ω 中），对于每个测试函数 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, 其支集 supp $\phi \subset U$，省略变量（t， x），我们可以计算得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi_t\,\eta(u) + \nabla_x\phi\cdot\boldsymbol{q}(u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \chi(v)\Big(\phi_t\eta'(v) + \nabla_x\phi\,\eta'(v)\ f'(v)\Big)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \phi\,\eta'\ \mathrm{d}\mu_0(t,x,v) + \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} \phi\,\eta''\ \mathrm{d}\mu_1(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

特别地，令 $C_U = \|\mu_0\|_{\mathscr{M}(U)} + \|\mu_1\|_{\mathscr{M}(U)}$ 并定义分布

$$T_\eta \doteq \partial_t\eta(u) + \nabla_x\boldsymbol{q}(u)$$

我们得到如下界

$$\langle T_\eta,\,\phi\rangle \le C_U\,\|\phi\|_{\mathcal{C}^0}\,\|\eta'\|_{\mathcal{C}^1} \qquad \forall\,\phi\in C_c^\infty(\Omega) \qquad \text{with supp}\,\phi\subset U. \tag{2.4}$$

根据 Riesz 定理， T_η 可以识别为一个局部有限测度。

反之，假设 u 是定义2.1中所述的拟熵解。定义分布 $T \in \mathscr{D}'(\Omega\times\mathbb{R})$如下:

$$\langle T, \phi\,\varrho\rangle \doteq \int_\Omega \phi_t\eta_\varrho(u) + \nabla_x\phi\cdot\boldsymbol{q}_\varrho(u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega),\quad \varrho\in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

其中，我们定义与 ϱ 相关联的熵－熵通量对

$$\eta_\varrho(v) \doteq \int_0^v\int_0^z \varrho(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z, \qquad \boldsymbol{q}_\varrho(v) \doteq \int_0^v f'(z)\eta_\varrho'(z)\,\mathrm{d}z.$$

这个定义已足够，因为有限和 $\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(t,x)\varrho_i(\xi)$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 中稠密（例如参见 [15, 第 4 节。3]）我们再次考虑任意 $U\Subset\Omega$，并对任意 $\phi\in\mathscr{D}(U)$ 定义一个线性泛函 $L_\phi: C(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 如下：

$$L_\phi(\varrho)\doteq\int_U \phi_t\eta_\varrho(u)+\nabla_x\phi\cdot\boldsymbol{q}_\varrho(u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

每个泛函 L_ϕ 都是有界的，因此也是连续的，因为有

$$|L_\phi(\varrho)|\le C_{U,\phi}\,\|\varrho\|_{\mathcal{C}^0}\qquad\forall\varrho\in C(\mathbb{R})$$

对某个常数 $C_{U,\,\phi}$ 该常数仅取决于集合 U 以及函数ϕ的 C^1 范数。由于 u是一个拟熵解，我们可以推得泛函族 L_ϕ逐点有界，因为

$$\sup_{\substack{\phi\in C_c^\infty(U)\\ |\phi|_0\le 1}}|L_\phi(\varrho)|\le\int_U \mathrm{d}|\mu_{\eta_\varrho}|.$$

因此，根据一致有界原理，族 L_ϕ 是一致（范数）有界的，即

$$\sup_{\substack{\phi\in C_c^\infty(U)\\ |\phi|_0\le 1,\,|\varrho|_0\le 1}}|L_\phi(\varrho)|=\sup_{\substack{\phi\in C_c^\infty(U)\\ |\phi|_0\le 1,\,|\varrho|_0\le 1}}|\langle T,\phi\varrho\rangle|\le C_U. \tag{2.5}$$

我们还注意到，根据 L_ϕ的定义，有

$$L_\phi(\varrho)=0\qquad\forall\varrho\in C(\mathbb{R})\quad\text{with supp}\,\varrho\subset\mathbb{R}\setminus[\inf u,\sup u]. \tag{2.6}$$

结合（2.5）、（2.6）以及Riesz表示定理，我们便得到一个局部有限测度 $\mu_1\in\mathscr{M}(\Omega\times\mathbb{R})$，其支集满足 supp $\mu_1\subset\Omega\times[\inf\ u,\ \sup\ u]$，使得

$$\langle T,\phi\varrho\rangle=L_\phi(\varrho)=\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\phi(t,x)\varrho(v)\,\mathrm{d}\mu_1(t,x,v)\qquad\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega),\quad\varrho\in C_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.7}$$

最后，我们计算任意的 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 和 $\eta'\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，

$$\begin{aligned}\Big\langle\partial_t\chi+f'(v)\nabla_x\chi,\,\phi\eta'\Big\rangle&=\Big\langle\partial_t\chi+f'(v)\nabla_x\chi,\,\phi(\eta'-\eta'(0))\Big\rangle\\&\quad+\Big\langle\partial_t\chi+f'(v)\nabla_x\chi,\,\phi\eta'(0)\Big\rangle\\&=\Big\langle\partial_t\chi+f'(v)\nabla_x\chi,\,\phi\int_0^v\eta''\Big\rangle\\&\quad+\Big\langle\partial_t\chi+f'(v)\nabla_x\chi,\,\phi\eta'(0)\Big\rangle\\&=-\Big\langle T,\phi\eta''\Big\rangle+\Big\langle\partial_t\chi+f'(v)\nabla_x\chi,\,\phi\eta'(0)\Big\rangle\\&=-\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\phi(t,x)\eta''(v)\,\mathrm{d}\mu_1+\eta'(0)\int_\Omega\phi(t,x)\,\mathrm{d}\mu_{\eta_0}\end{aligned}$$

其中我们回顾一下，$\eta_0(u)=u$ 是平凡熵，并且我们使用了 (2.7)，其中 $\varrho=\eta''$。令 $\mu_0=\mu_{\eta_0}\times\delta_0$，即可得到结果。□

3. Lagrangian Representation

本节将介绍拉格朗日表示这一概念，用于表示平衡律（1.1）的拟熵解。这是本章后续内容中将使用的主要工具。这种表示最初由 [7] 引入，用于标量守恒律的熵解：

$$\partial_t u+\operatorname{div}_x f(u)=0. \tag{3.1}$$

在 [7], 中，作者利用拉格朗日表示证明，守恒律（3.1）的连续解不会耗散任何熵。

在 [25]中，还为守恒律 (3.1) 的有限熵解引入了拉格朗日表示（即不存在源项，但μ_η 在 (1.3) 中的测度可以改变符号）；随后，在 [27], 中，该表示被用于证明：在一维情形下，对于 Burgers 方程 $f(u) = u^2/2$，熵耗散测度集中在一个 1-可求长集上。在这种情形下，拉格朗日表示的存在性是通过一种显式逼近过程证明的，该过程类似于输运-坍缩格式。在我们的研究框架中，受[9], 中将其用于连续性方程的方法启发，我们采用了一种不同的思路，基于 Smirnov 关于 1-流表示的定理。这种方法能够更精细地控制拉格朗日曲线的行为，这对后续分析至关重要。

3.1. **拉格朗日表示的定义**。 本小节中，我们定义平衡律（1.1）的拟熵解的拉格朗日表示。下文中，我们用 Γ 表示曲线空间

$$\Gamma \doteq \Big\{(I_\gamma, \gamma) \;\Big|\; \gamma = (\gamma^x, \gamma^v) : I_\gamma \to \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^+_v,\ \ \gamma^x \text{ is Lipschitz and } \gamma^v \text{ is in } BV(I_\gamma)\Big\}$$

其中， $I_\gamma = (t^1_\gamma, t^2_\gamma)$ 是曲线 γ 的定义域。在 Γ 上的局部有限测度是指满足以下条件的测度 $\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{M}(\Gamma)$：对于每个形如下式的集合 $K \subset \Gamma$ ，均有 $\boldsymbol{\omega}(K) < +\infty$

$$K = \Big\{\gamma \in \Gamma \;\Big|\; |\gamma^x(0)|, |\gamma^v(0)| \le M, \quad \mathrm{Lip}(\gamma^x) \le M, \quad \|\gamma^v\|_{BV} \le M\Big\}.$$

定义 3.1。 拟熵解 u （对应于（1.1）的）下图集的拉格朗日表示 是局部有限测度 $\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{M}^+(\Gamma)$ ，满足：

（1）有

$$\chi \cdot \mathscr{L}^{d+2} = \int_\Gamma (\mathrm{id}, \gamma)_\sharp \mathscr{L}^1 \llcorner I_\gamma \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) \tag{3.2}$$

其中 χ 定义同（2.3），右侧的测度定义在测试函数 $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^{d+2})$ 上，定义为

$$\int_{\mathbb{R}^{d+2}} \varphi \, \mathrm{d}\Big[\int_\Gamma (\mathrm{id}, \gamma)_\sharp \mathscr{L}^1 \llcorner I_\gamma \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma)\Big] := \int_\Gamma \Big(\int_{I_\gamma} \varphi(t, \gamma(t)) \, \mathrm{d}t\Big) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma).$$

（2） ω 集中在满足以下条件的曲线 $\gamma = (\gamma^x, \gamma^v) \in \Gamma$ 所构成的集合上

$$\dot\gamma^x = f'(\gamma^v(t)), \qquad \text{for } \mathscr{L}^1\text{-a.e. } t \in I_\gamma, \tag{3.3}$$

(3) 以下积分界成立：对于每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$ 和 $T > 0$，均有

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \mathrm{Tot.Var.}\big(\gamma^v,\, I_\gamma \cap [0,T]\big) \cdot \mathbf{1}_{\{\gamma^x(t^1_\gamma) \in K\}}(\gamma) \; \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) < C_{K,T} \\ &\sum_{i=1}^2 \boldsymbol{\omega}\Big(\big\{\gamma \in \Gamma \mid (t, \gamma^x(t^i_\gamma)) \in (0,T) \times K\big\}\Big) \le \widetilde{C}_{K,T} \end{aligned} \tag{3.4}$$

动力学解与拉格朗日表示这两个概念之间的联系由以下命题给出。

定理 3.2。 函数 $u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega \;\; \mathbb{R})$ 是 (1.1) 的拟熵解，当且仅当它具有拉格朗日表示。

我们证明，如果 u具有拉格朗日表示，那么 u 就是拟熵解。反向蕴含的证明更为深入：该证明依赖于 $\mathbb{R}^n$ 中一维正规流的结构，将在下一小节中给出（见定理 3.14 ）。实际上，对于反向蕴含，我们将证明一个更强的结果，即存在一个良好的拉格朗日表示（见定义 3.3）

证明。 假设 u 具有拉格朗日表示 $\boldsymbol{\omega}$。我们需要证明存在一对局部有限测度 μ_0, $\mu_1 \in \mathscr{M}(\Omega \times \mathbb{R})$，使得（2.2）成立。为此，我们考虑分布

$$S \doteq \partial_t \chi + f'(v) \cdot \nabla_x \chi$$

并对任意测试函数 $\eta' \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ 和 $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ 计算，

$$\begin{aligned} -\langle S, \eta' \phi \rangle &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}} \eta'(v) \chi(t,x,v) [\phi_t(t,x) + f'(v) \cdot \nabla_x \phi(t,x)] \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{by (3.2)}}{=} \int_\Gamma \int_{I_\gamma} \eta'(\gamma^v(t)) [\phi_t(t,\gamma^x(t)) + f'(\gamma^v(t)) \cdot \nabla_x \phi(t,\gamma^x(t))] \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) \\ &\overset{\text{by (3.3)}}{=} \int_\Gamma \int_{I_\gamma} \eta'(\gamma^v(t)) [\phi_t(t,\gamma^x(t)) + \dot{\gamma}^x(t) \cdot \nabla_x \phi(t,\gamma^x(t))] \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) \\ &= \int_\Gamma \int_{I_\gamma} \eta'(\gamma^v(t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi(t,\gamma^x(t)) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma). \end{aligned} \tag{3.5}$$

现在我们更明确地计算最后一行中的被积函数：特别地，由于$\eta'\phi$具有紧支撑，根据（3）可知，对于几乎处处的 γ ，函数$t \mapsto g_\gamma(t) \doteq \eta'(\gamma^v(t))\phi(t,\gamma^x(t))$ 属于 $BV(I_\gamma)$。令 J_γ 为 γ^v的跳跃集，其定义为

$$J_\gamma \doteq \big\{ t \in I_\gamma \mid \gamma^v(t+) \neq \gamma^v(t-) \big\}.$$

由 Volpert 链式法则可得， $Dg_\gamma \in \mathscr{M}(I_\gamma)$ 由下式给出

$$\begin{aligned} Dg_\gamma = \eta'(\gamma^v(t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi(t,\gamma^x(t)) \cdot \mathscr{L}^1 \; &+ \eta''(\gamma^v(t)) \phi(t,\gamma^x(t)) \cdot \widetilde{D}\gamma^v(t) \\ &+ \sum_{t \in J_\gamma} \big(\eta'(\gamma^v(t+)) - \eta'(\gamma^v(t-)) \big) \cdot \phi(t,\gamma^x(t)) \cdot \delta_t \end{aligned}$$

其中 $D\gamma^v$ 表示 γ^v的导数的弥散部分，见 [1, §3.9]。因此，在（3.5）中使用链式法则，可得

$$\begin{aligned} \int_{I_\gamma} \eta'(\gamma^v(t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi(t,\gamma^x(t)) \,\mathrm{d}t = &\int_{I_\gamma} \mathrm{d}Dg_\gamma(t) \\ &- \int_{I_\gamma} \eta''(\gamma^v(t)) \phi(t,\gamma^x(t)) \,\mathrm{d}\widetilde{D}\gamma^v(t) \\ &- \sum_{t \in J_\gamma} (\eta'(\gamma^v(t+)) - \eta'(\gamma^v(t-))) \cdot \phi(t,\gamma^x(t)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

对于每个 $\gamma \in \Gamma$，定义测度 $\mu_1^\gamma \in \mathscr{M}(\Omega \times \mathbb{R})$ 为

$$\begin{aligned} \mu_1^\gamma \doteq &-(\mathbb{I}, \gamma)_\sharp \tilde{D}\gamma^v \\ &- \mathscr{H}^1 \llcorner \{(t,x,v) \mid \gamma^v(t-) \le v \le \gamma^v(t+), \quad t \in J_\gamma\} \\ &+ \mathscr{H}^1 \llcorner \{(t,x,v) \mid \gamma^v(t+) \le v \le \gamma^v(t-), \quad t \in J_\gamma\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

以及测度 $\mu_0^\gamma \in \mathscr{M}(\Omega \times (0,\ 1))$

$$\mu_0^\gamma \doteq \delta_{(t_\gamma^1, \gamma(t_\gamma^1))} - \delta_{(t_\gamma^2, \gamma(t_\gamma^2))}. \tag{3.8}$$

利用

$$\int_{I_\gamma} \mathrm{d}Dg_\gamma(t) = \eta'(\gamma(t^2_\gamma))\phi(t,\gamma^x(t^2_\gamma)) - \eta'(\gamma(t^1_\gamma))\phi(t,\gamma^x(t^1_\gamma))$$

并将（3.6）代入（3.5）的最后一行，我们得到：

$$-\langle S, \eta'\phi\rangle \quad = \int_\Gamma \langle -\mu_0^\gamma,\ \eta'\phi\rangle \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) + \int_\Gamma \langle \mu_1^\gamma,\ \eta''\phi\rangle \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma). \tag{3.9}$$

这表明，令

$$\mu_1 := \int_\Gamma \mu_1^\gamma \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma), \qquad \mu_0 := \int_\Gamma \mu_0^\gamma \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) \tag{3.10}$$

成立

$$S = \partial_v \mu_1 + \mu_0, \qquad \text{in } \mathscr{D}'(\Omega\times\mathbb{R}) \tag{3.11}$$

这就证明了该断言。最后注意到， μ_1、 μ_0 根据定义3.1中的假设（3），是局部有限测度。因此 u 根据命题2.3是一个拟熵解。□

如果一对（μ_0、 μ_1）$\in \mathscr{M}$（$\Omega\times\mathbb{R}$）^{2}满足（3.10），且其中的 μ_1^γ、 μ_0^γ由（3.7）、（3.8）定义，则称该对由一个拉格朗日表示诱导。每个拉格朗日表示都会唯一诱导出一对（μ_0、μ_1）。我们给出如下定义。

定义 3.3。 如果一组拉格朗日表示 $\boldsymbol{\omega}$ 满足以下附加条件，则称其为良好拉格朗日表示：由 $\boldsymbol{\omega}$ 诱导的对（μ_0， μ_1）$\in \mathscr{M}(\Omega\times\mathbb{R})^2$ 满足

$$|\mu_1| = \int_\Gamma |\mu_1^\gamma| \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma), \qquad |\mu_0| = \int_\Gamma |\mu_0^\gamma| \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma). \tag{3.12}$$

条件（3.12）表示不存在抵消现象，例如，（3.12）中的第二个条件意味着，在某些曲线被抵消的同一点不会生成新的曲线；也就是说，除去一组可忽略的曲线，对于任意一对曲线 γ， σ 都有

$$(t^1_\gamma, \gamma(t^1_\gamma)) \neq (t^1_\sigma, \sigma(t^1_\sigma)).$$

对于 μ_1^γ，相应的条件意味着，除去一组可忽略的曲线，有

$$\{(t,x,v) \mid \gamma^x(t) = \sigma^x(t) = x, \quad \gamma^v(t+) < v < \gamma^v(t-), \quad \sigma^v(t+) > v > \sigma^v(t-)\} = \emptyset$$
$$\{(t,x,v) \mid \gamma^x(t) = \sigma^x(t) = x, \quad \gamma^v(t+) > v > \gamma^v(t-), \quad \sigma^v(t+) < v < \sigma^v(t-)\} = \emptyset$$

注 3.4。 并非每一对（μ_0， μ_1）$\in \mathscr{M}(\Omega\times\mathbb{R})^2$ 都由良好拉格朗日表示诱导。例如，每一对（μ_0， μ_1）$\neq 0$ 若对应于 u =常数，即 $\mu_0 + \partial_v\mu_1 = 0$，则不可能由任何良好拉格朗日表示诱导。

3.2. **（良好）拉格朗日表示的存在性**。 在本小节中，我们使用斯米尔诺夫定理 [32]，该定理关于将 1-流分解为如下形式的流 $[\![\gamma]\!]$，这些流与利普希茨曲线相关（参见例 3.11 ），从而为 所有 拟熵解导出良好的拉格朗日表示。作为推论，我们证明命题3.2中尚未证明的蕴含关系。

3.2.1. 流理论预备知识。 关于这一主题的入门介绍，可参见 [18]。空间 $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^d)$ 中的 k维流 是空间 $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^d)$ 的对偶；后者由所有在 $\mathbb{R}^d$ 中具有紧支撑的光滑 k-微分形式构成。

给定一个 k-流 $\mathsf{T} \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^d)$，其质量 $\mathbb{M}(\mathsf{T})$定义为

$$\mathbb{M}(\mathsf{T}) = \sup\{\langle \mathsf{T}, \omega\rangle \mid \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^d), \quad |\omega| \le 1\}$$

注3.5（有限质量1-流）。有限质量1-流的空间可以与 Radon向量测度 $\mathsf{T} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)^d$ 等同，我们通常会将有限质量1-流与其相应的向量测度等同起来。有限质量1-流 $\mathsf{T} = (\mathsf{T}_1, \dots, \mathsf{T}_d)$ 与向量场 $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^d) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ 之间的对偶性为

$$\langle \mathsf{T}\,,\ \Phi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^i \, \mathrm{d}\mathsf{T}_i.$$

类似地，有限质量的 0维流空间可与 $\mathbb{R}^d$ 上的 Radon测度空间等同。

例 3.6（可求 rectifiable k-流）。设给定一个由单位 k-向量 τ 定向的 k-可求 rectifiable 集 $M \subset \mathbb{R}^d$，以及一个可测的重数函数 θ。那么，我们将由下式定义的 k-流记作 $[\![M,\ \tau,\ \theta]\!]$

$$\langle [\![M,\ \tau,\ \theta]\!],\ \omega \rangle = \int_M \theta(x) \langle \tau(x),\ \omega(x) \rangle \, \mathrm{d}\mathscr{H}^k(x), \qquad \forall\, \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^d)$$

k-流 T 的边界 是一个 $k-1$-流 $\partial\mathsf{T} \in \mathscr{D}_{k-1}(\mathbb{R}^d)$，定义为

$$\langle \partial\mathsf{T}\,,\ \omega \rangle = \langle \mathsf{T}\,,\ d\omega \rangle, \qquad \forall\, \omega \in \mathscr{D}^{k-1}(\mathbb{R}^d)$$

其中 $d\colon \mathscr{D}^{k-1}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^d)$ 是德拉姆–嘉当微分。

定义 3.7（正规流）。若 k-流 $\mathsf{T} \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^d)$ 的 T 和 ∂T 均具有有限质量，则称其为法向量。

定义 3.8（A-无环流）。设 $\mathsf{T} \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^d)$ 是一个 k-流。我们称

(1) 若流 $\mathsf{C} \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^d)$ 是 T 的一个子流，记作 $\mathsf{C} \le \mathsf{T}$，当且仅当 $\mathbb{M}(\mathsf{T}) = \mathbb{M}(\mathsf{T} - \mathsf{C}) + \mathbb{M}(\mathsf{C})$。(2) 若流 $\mathsf{C} \le \mathsf{T}$ 满足 $\partial\mathsf{C} = 0$，则称其为 T 的一个圈。(3) 若 T 的唯一圈是 $\mathsf{C} = 0$，则称 T 为 a-无环。

注 3.9。一般而言，给定 T，$\mathsf{C} \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^d)$，根据流的质量定义，显然有 $\mathbb{M}(\mathsf{T}) \le \mathbb{M}(\mathsf{T} - \mathsf{C}) + \mathbb{M}(\mathsf{C})$。因此，C 是 T 的子流，当且仅当 $\mathbb{M}(\mathsf{T}) \ge \mathbb{M}(\mathsf{T} - \mathsf{C}) + \mathbb{M}(\mathsf{C})$。特别地，若 T 的质量有限，则 C 的质量也必有限。

例 3.10 (1-子流的结构)。设 $\mathsf{T} \in \mathscr{D}_1(\mathbb{R}^d)$ 是一个质量有限的 1-流，并令 $\|\mathsf{T}\| \in \mathscr{M}^+(\mathbb{R}^d)$ 为其全变差测度。根据向量值测度的极分解（参见 [1]），存在一个单位可测向量场 $\vec{S}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，其在 $\|\mathsf{T}\|$-几乎处处有定义，并满足 $\mathsf{T} = \vec{S} \cdot \|\mathsf{T}\|$。容易看出，T 的每个子流 $\mathsf{C} \in \mathscr{D}_1(\mathbb{R}^d)$ 都具有如下形式

$$\mathsf{C} = \vec{S} \cdot \|\mathsf{C}\|, \qquad \|\mathsf{C}\| \le \|\mathsf{T}\| \quad \text{as measures}$$

例 3.11（与利普希茨曲线相关的 1-流）。本节后续内容中最重要的例子是 1-可求长流的情形

$$[\![\gamma]\!] := [\![\gamma\big((0,1)\big),\ \tau(x),\ \mathscr{H}^0\big(\gamma^{-1}(\{x\})\big)]\!] \in \mathscr{D}_1(\mathbb{R}^d)$$

与一条 Lipschitz 曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 相关联，其中 $\tau(x)$ 是图像 $\gamma((0,1))$ 在点 $x \in \gamma((0,1))$ 处的切向量，在 $\mathscr{H}^1$-几乎处处的点$x \in \gamma((0,1))$ 上定义；而 $\mathscr{H}^0\big(\gamma^{-1}(\{x\})\big)$ 表示曲线 γ 经过点 x的次数。$[\![\gamma]\!]$ 对 1-形式（可视为向量场）的作用

$\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$) 可明确写为（参见 [1]）中的面积公式）

$$\begin{aligned}\langle [\![\gamma]\!],\, \Phi\rangle &= \int_{\gamma((0,1))} \mathscr{H}^0\big(\gamma^{-1}(\{x\})\big)\cdot\Big\langle \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|},\, \Phi\Big\rangle\cdot \mathrm{d}\mathscr{H}^1\\ &= \int_0^1 \langle \Phi(\gamma(\tau)),\, \dot\gamma(\tau)\rangle\,\mathrm{d}\tau, \qquad \forall\, \Phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)\end{aligned}$$

特别地， $[\![\gamma]\!]$ 具有有限质量，因为

$$\langle [\![\gamma]\!],\, \Phi\rangle \le \int_0^1 |\dot\gamma(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \le \mathrm{Lip}(\gamma), \qquad \forall\, \Phi\in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d),\quad |\Phi|\le 1.$$

1-流 $[\![\gamma]\!]\in \mathscr{D}_1(\mathbb{R}^d)$ 的边界满足

$$\langle \partial[\![\gamma]\!],\, \phi\rangle = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\phi(\gamma(\tau))\,\mathrm{d}\tau = \phi(\gamma(1))-\phi(\gamma(0)), \qquad \forall\, u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

因此 $\partial[\![\gamma]\!]=\delta_{\gamma(1)}-\delta_{\gamma(0)}\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$。故 $[\![\gamma]\!]$ 是正规1-流。此外，1-流 $[\![\gamma]\!]\in\mathscr{D}_1(\mathbb{R}^d)$ 是圈，当且仅当 $\gamma(1)=\gamma(0)$；否则它是无圈 1- 流。

3.2.2. 正规流的 *Smirnov* 定理。以下斯米尔诺夫定理给出了正规1-流分解为与利普希茨曲线相关联的流的叠加。

定理3.12 (Smirnov, [32])。设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 为一个开集。设$\mathsf{T}\in\mathscr{D}_1(U)$是 U中的一个法向量无圈*1*-流。那么存在一个正测度 $\boldsymbol{\eta}\in\mathscr{M}^+(\mathrm{Lip}((0,1);U))$ 使得

$$\langle \mathsf{T},\omega\rangle = \int_{\mathrm{Lip}((0,1);U)} \langle [\![\gamma]\!],\omega\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\gamma), \qquad \forall\,\omega\in\mathscr{D}^1(U) \tag{3.13}$$

此外，T 的质量分解为

$$\mathbb{M}(\mathsf{T}) = \int_{\mathrm{Lip}((0,1);U)} \mathbb{M}([\![\gamma]\!])\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\gamma) \tag{3.14}$$

且边界测度 ∂T 分解为

$$(\partial T)^+ = (e_1)_\sharp\boldsymbol{\eta}, \qquad (\partial T)^- = (e_0)_\sharp\boldsymbol{\eta} \tag{3.15}$$

其中

$$e_t : \mathrm{Lip}((0,1);U)\to\mathbb{R}^d, \qquad e_t(\gamma)=\gamma(t)$$

是点 $t\in(0,1)$ 处的求值映射，而$(\partial T)^\pm$表示测度 ∂T的正部/负部。

注 3.13。设 $\mathsf{T}=\vec S\cdot\|\mathsf{T}\|$ 为向量测度T的极分解。由质量分解公式可知，$\boldsymbol{\eta}$所集中的曲线满足 $\vec S(\gamma(\tau))$ 与 $\dot\gamma(\tau)$ 平行，对 $\mathscr{L}^1$几乎处处 τ成立。事实上，由于 T 的质量有限，我们可以在方程（3.13）中将 $\vec S$ 用作测试向量场（参见例如 [18]）。于是得到

$$\mathbb{M}(\mathsf{T}) = \langle \mathsf{T},\,\vec S\rangle = \int_{\mathrm{Lip}((0,1);U)} \langle [\![\gamma]\!],\vec S\rangle\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\gamma) = \int_{\mathrm{Lip}((0,1);U)}\int_0^1 \langle \dot\gamma(\tau),\,\vec S(\gamma(\tau))\rangle\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\gamma) \tag{3.16}$$

但另一方面，根据公式（3.14），同样有

$$\mathbb{M}(\mathsf{T}) = \int_{\mathrm{Lip}((0,1);U)} \mathbb{M}([\![\gamma]\!])\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\gamma) = \int_{\mathrm{Lip}((0,1);U)}\int_0^1 |\dot\gamma(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\gamma) \tag{3.17}$$

由于 S 是单位向量，因此有

$$\langle \dot\gamma(\tau),\ \vec S(\gamma(\tau))\rangle \le |\dot\gamma(\tau)|, \qquad \text{for } \mathscr{L}^1 \text{ a.e. } \tau\in(0,1)$$

因此，结合（3.16）、（3.17）可得，$\dot\gamma$（τ）必与 $\vec S$ 平行，对$\mathcal{L}^1$ 几乎处处的 $\tau\in$（0，1）以及对 $\boldsymbol{\eta}$ 几乎处处的 $\gamma\in\Gamma$均成立。

我们固定一些后续命题中需要用到的记号。令 Γ 如上所述，并且按照惯例，Γ 中的元素记为 $\gamma=(\gamma^x,\gamma^v)$。另一方面，我们记

$$\tilde\Gamma = \mathrm{Lip}((0,1),\ \Omega\times\mathbb{R}).$$

$\tilde\Gamma$ 中的元素记为

$$\Theta(\tau)\doteq\big(\Theta^t(\tau),\Theta^x(\tau),\Theta^v(\tau)\big)\in\Omega\times\mathbb{R},\quad \tau\in(0,1).$$

定理 3.14。设 u 是一个拟熵解，并设 $(\mu_0,\ \mu_1)\ \in\mathscr{M}$（$\Omega\times\mathbb{R}$）^{2}如命题 *2.3*中所述。则存在一个 $\boldsymbol{\omega}\in\mathscr{M}^+$（$\Gamma$）的良好拉格朗日表示 u。此外，令 $(\widetilde{\mu}_0,\ \widetilde{\mu}_1)$ 为由 $\boldsymbol{\omega}$ 按照定义 *3.3*所诱导的对，则有 $|\widetilde{\mu}_0|\le|\mu_0|$ 并且

$$\widetilde{\mu}_1^+\le\mu_1^+,\qquad \widetilde{\mu}_1^-\le\mu_1^-,\qquad \textit{as measures.} \tag{3.18}$$

证明。**1.** 定义**1**-流 $\mathsf{T}\in\mathscr{D}_1(\Omega\times\mathbb{R})$如下

$$\mathsf{T}=\Big(\chi\cdot\mathscr{L}^{d+2},\quad \chi\cdot f'(v)\llcorner\mathscr{L}^{d+2},\quad -\mu_1\Big)^T\in\mathscr{D}_1(\Omega\times\mathbb{R}). \tag{3.19}$$

在这一步中，我们证明 T 是正规、无环的流。用光滑向量场检验 T，可得

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{T}\ ,\ \Phi\rangle &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}}\chi\cdot[\Phi^t+\Phi^x\cdot f'(v)]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v-\int_{\Omega\times\mathbb{R}}\Phi^v\,\mathrm{d}\mu_1\\ &\le\sqrt{1+|f'(v)^2|}\cdot\int_{\Omega\times\mathbb{R}}\chi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v+\|\mu_1\|_{\mathscr{M}},\\ &\qquad\forall\ \Phi\in C_c^\infty(\Omega\times\mathbb{R},\mathbb{R}^{d+2}),\qquad |\Phi|\le 1.\end{aligned} \tag{3.20}$$

T 的边界T根据方程（2.2）为测度 μ_0，再加上 $t=0$ 和 $t=T$处的边界项。事实上有

$$\begin{aligned}\langle\partial\mathsf{T}\ ,\ \phi\rangle &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}}\chi\cdot[\partial_t\phi+\nabla\phi_x\cdot f'(v)]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v-\int_{\Omega\times\mathbb{R}}\partial_v\phi\,\mathrm{d}\mu_1\\ &=-\int_{\Omega\times\mathbb{R}}\phi\,\mathrm{d}\mu_0+\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\chi(T)\cdot\phi(T)-\chi(0)\cdot\phi(0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\ &=-\langle\phi,\mu_0\rangle+\Big\langle\delta_T\otimes\chi(t)\cdot\mathscr{L}^{d+1}-\delta_0\otimes\chi(0)\cdot\mathscr{L}^{d+1}\ ,\ \phi\Big\rangle,\\ &\qquad\forall\ \phi\in C_c^\infty(\Omega\times\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{3.21}$$

因此，T 是正规**1**-流。

最后，我们证明 T 是 a-无环的。令 $\mathsf{T}=\vec S\cdot\|\mathsf{T}\|$ 为流（向量测度）T 的极分解。此外，我们选取 $A\subset\Omega\times\mathbb{R}$ 可测，使得 $\mu_1=\mu_1^a+\mu_1^s=\mu_1\llcorner A+\mu_1\llcorner A^c$ 是 μ_1 关于勒贝格测度分解为绝对连续部分和奇异部分的分解。特别地，我们可以选取 A，使得 $\mathscr{L}^{d+2}(A^c)=0$。令 $\rho:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 μ_1^a的密度，即 $\mu_1^a=\rho\mathscr{L}^{d+2}$。那么单位向量 $\vec S$ 定义为

$$(\vec S^t,\vec S^x,\vec S^v)=\vec S=\begin{cases}\Big(\sqrt{1+|f'(v)|^2+\rho^2}\Big)^{-1}(1,f'(v),\rho(t,x,v))^T, & \text{in } A\\ (0,0,\sigma(t,x,v))^T, & \text{in } A^c\end{cases}$$

其中，对 $\mu_1^s = \sigma \|\mu_1^s\|$, $\sigma \in \{-1,1\}$ μ_1^s-几乎处处成立，是 μ_1^s的极分解。

作为预备步骤，我们证明：对于每个满足 $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$ with $0 \neq \mathbf{C}_1 \leq \mathbf{T} \llcorner A$ and $\mathbf{C}_2 \leq \mathbf{T} \llcorner A^c$ 的子流 $\mathbf{C} \leq \mathbf{T}$，必有 $\partial \mathbf{C} \neq 0$。设 $R > 0$ 满足 $\operatorname{supp} \mathbf{T} \subset [0,T] \times B_R(0) \subset \Omega \times \mathbb{R}$。取一个测试函数 $\phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$，使得

$$\begin{cases} \phi(t,x,v) = t, & \text{if } (t,x,v) \in [0,T] \times B_R(0), \\ \phi(t,x,v) = 0, & \text{if } (t,x,v) \in [0,T] \times B_{2R}(0)^c \end{cases}$$

于是有

$$\langle \mathbf{C} \, , \, \nabla \phi \rangle = \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \vec{S}^t \, \mathrm{d} \, \|\mathbf{C}_1\| > 0$$

因为 $\vec{S}^t(x) > 0$ 对于$\|\mathbf{C}_1\|$ 几乎处处的 $x \in \Omega \times \mathbb{R}$ 成立。为得出 $\mathbf{T}$ 是 a-无环的结论，我们需要证明，对于每个 $0 \neq \mathbf{C} \leq \mathbf{T} \llcorner A^c$，都有 $\partial \mathbf{C} \neq 0$。在这种情况下，有 $\mathbf{C} = (0, 0, -\hat{}\mu_1)$，其中 $\hat{}\mu_1 \leq \mu_1$（作为 0维流），且 $\partial \mathbf{C} = 0$ 对应于分布意义下的 $\partial_v \hat{}\mu_1 = 0$。但由于 $\hat{}\mu_1$ 在 v中是紧支撑的，这意味着 $\hat{}\mu_1 = 0$，因此 $\mathbf{C} = 0$，证毕。

2. 得益于步骤 1，我们可以应用斯米尔诺夫定理 3.12，从而得到一个测度$\tilde{}\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{M}^+(\Gamma)$，使得（3.13）成立。展开这个关系可知，对于每个向量场 $\Phi = (\Phi^t, \Phi^x, \Phi^v) \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times \mathbb{R}} \chi \cdot [\Phi^t + (f'(v) \cdot \Phi^x)] \, \mathrm{d}\mathcal{L}^{d+2} - \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \Phi^v \, \mathrm{d}\mu_1 \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}} \int_0^1 \dot{\Theta}(\tau) \cdot \Phi(\Theta(\tau)) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\Theta). \end{aligned} \tag{3.22}$$

~根据注释 3.13，由斯米尔诺夫定理给出的测度 $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{M}^+(\Gamma$集中在满足以下性质的曲线 $\Theta \in \tilde{\Gamma}$：对于几乎处处的 $\dot{\Theta}(\tau)$ 与 $\vec{S}(\Theta(\tau))$ 平行。 $\tau \in (0,1)$。特别地，这意味着 Θ 要么沿着 v竖直运动，要么其第一分量的速度为正。

~**3.** 给定步骤 2 中的测度 $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{M}^+(\Gamma)$，为了得到定义3.1意义下的拉格朗日表示，我们希望去除一组特定的~“坏”曲线。具体而言，定义 $\Delta \subset \Gamma$ 为满足以下条件的曲线集合： $\Theta^t((0,1))$ 是单点集。这些曲线的支集包含于某个超平面$\{t = s\}$中。新的测度定义如下：

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} \llcorner (\tilde{\Gamma} \setminus \Delta).$$

请注意，无论如何，根据向量场 $\vec{S}$ 的形状，对于几乎处处的 $\tau \in (0, 1)$ 及 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ 几乎所有的 Θ，曲线都满足 $\dot{\Theta}^t(\tau) \geq \tilde{}0$。对于 $\Gamma \setminus \Delta$ 中第一分量 Θ^t 非递减的曲线，可以良好定义一个重新参数化映射$\tilde{}\mathcal{R}$：$\Gamma \setminus \Delta \to \Gamma$，其定义如下：

$$\mathcal{R}(\Theta)(t) \doteq \big(\Theta^x(\tau(t)), \Theta^v(\tau(t))\big), \qquad \tau(t) \doteq \inf\{\tau \in (0,1) \, : \, t < \Theta^t(\tau)\}. \tag{3.23}$$

这里的 $\tau(t)$ 就是递增利普希茨函数 $\Theta^t(\tau)$ 的广义逆。曲线 $\mathcal{R}(\Theta)$ 的定义域将是 $\operatorname{int}[\Theta^t((0, 1))]$（内部）。

因此，现在我们可以考虑推前测度

$$\boldsymbol{\omega} \doteq \mathcal{R}_\sharp \tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathscr{M}^+(\Gamma)$$

它是一个很好的候选对象，可作为定义3.1意义下的拉格朗日表示。

4. 最后，我们证明 $\boldsymbol{\omega}$ 是一个拉格朗日表示。定义3.1 中的第二个条件显然成立。对于第一个条件，我们需要验证

$$\int_\Gamma \left[(\mathrm{id},\gamma)_\sharp \mathscr{L}^1 \llcorner I_\gamma\right] \mathrm{d}\mathcal{R}_\sharp\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(\gamma) = \chi\cdot\mathscr{L}^{d+2}. \tag{3.24}$$

因此，考虑任意测试函数 $\phi\in C_c^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$ 并计算

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \phi(t,x,v)\,\mathrm{d}\left[(\mathrm{id},\gamma)_\sharp\mathscr{L}^1\llcorner I_\gamma\right](t,x,v)\,\mathrm{d}\mathcal{R}_\sharp\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(\gamma) &= \int_\Gamma\int_{I_\gamma}\phi(t,\gamma(t))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathcal{R}_\sharp\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(\gamma)\\ &= \int_\Gamma\int_{I_\gamma}\phi(\Theta(\tau(t)))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(\Theta)\\ &= \int_\Gamma\int_0^1\phi(\Theta(\tau))(\Theta^t)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(\Theta)\\ &= \int_\Gamma\int_0^1\phi(\Theta(\tau))(\Theta^t)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\Theta),\end{aligned} \tag{3.25}$$

其中最后一个等式成立是因为

$$\int_\Delta\int_0^1(\Theta^t)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = \int_\Delta\int_0^1(\Theta^t)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\eta}} = 0$$

由于对每个 $\tau\in(0,1)$，若 $\Theta\in\Delta$，则 $(\Theta^t)'(\tau)=0$，因此我们可以将 $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}$ 替换为 $\boldsymbol{\eta}$。此外，对 $\boldsymbol{\eta}$-几乎处处的 $\Theta\in\Gamma$，根据步骤 2. 中的最后一个观察，有

$$(\Theta^t)'(\tau)\cdot\mathbf{1}_{A^c}(\Theta(\tau)) = 0, \qquad \text{for } \mathscr{L}^1\text{-a.e. } \tau\in(0,1)$$

因此我们得到

$$\int_\Gamma\int_0^1\phi(\Theta(\tau))(\Theta^t)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\Theta) = \int_\Gamma\int_0^1\phi(\Theta(\tau))(\Theta^t)'(\tau)\cdot\mathbf{1}_A(\Theta(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\Theta). \tag{3.26}$$

定义向量场

$$\Phi(t,x,v) = (\phi(t,x,v),0,0)\cdot\mathbf{1}_A(t,x,v)\in C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^{d+1}).$$

在步骤 2 的表示中取 Φ 作为测试函数，我们得到

$$\int_\Gamma\int_0^1\phi(\Theta(\tau))(\Theta^t)'(\tau)\cdot\mathbf{1}_A(\Theta(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\Theta) = \langle\mathsf{T},\Phi\rangle = \langle\chi\cdot\mathscr{L}^{d+2},\phi\rangle \tag{3.27}$$

正如所需。 □

3.3. 上图集与同时拉格朗日表示。 我们以证明拉格朗日表示的一些有用性质来结束本节。

3.3.1. 上图集的拉格朗日表示。 给定平衡律（1.1）的一个拟熵解，我们为函数χ（2.3）构造了一个拉格朗日表示，该函数是 u的下图集的特征函数。以完全类似的方式，我们可以给出上图集的拉格朗日表示的定义，针对 u

定义 3.15。 我们称 $\boldsymbol{\omega}_e$ 是 u 的上图集的拉格朗日表示，如果定义3.1 中的条件 (2)、(3) 成立，且条件 (1) 替换为：

$$\chi_e\cdot\mathscr{L}^{d+2} = \int_\Gamma(\mathrm{id},\gamma)_\sharp\mathscr{L}^1\llcorner I_\gamma\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_e(\gamma) \tag{3.28}$$

其中

$$\chi_e(t,x,v) \doteq \begin{cases} 1 & \text{if } u(t,x) \le v, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.29}$$

这种表示的存在性可由定理 3.14推出：事实上，定义

$$\tilde{u}(t,x) \doteq 1 - u(t,x), \qquad \boldsymbol{g}(u) \doteq -f(1-u).$$

那么，若 $\widetilde{\chi}(t,\ x,\ v) = \mathbf{1}_{\mathrm{hyp}\,\tilde{u}}(t,\ x,\ v)$，$\widetilde{\chi}$是动力学方程的一个解

$$\partial_t \widetilde{\chi} + \boldsymbol{g}'(v) \cdot \nabla_x \widetilde{\chi} = \partial_v \left[\alpha_\sharp \mu_1\right] - \alpha_\sharp \mu_0, \qquad \text{in } \mathscr{D}'_{t,x,v}$$

其中 $\alpha\colon\ \Omega\ \times (0,1)\ \mapsto \Omega\ \times (0,\ 1)$ 定义为 $\alpha(t,x,v)\ = \alpha(t,x,1-v)$。根据命题 2.3，$\widetilde{u}$是通量为 $\boldsymbol{g}$ 的拟熵解，因此定理 3.14 给出了 $\widetilde{u}$的拉格朗日表示，我们将其称为 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$。现在，令映射 $T\colon \Gamma \to \Gamma$定义为

$$T(\gamma)(t) = \alpha(\gamma(t)), \qquad t \in I_\gamma$$

容易看出，由于

$$\widetilde{\chi}(t,x,v) = \chi_e(t,x,1-v)$$

该测度

$$\boldsymbol{\omega}_e \doteq T_\sharp \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$$

是 u上图集的拉格朗日表示。

3.3.2. 同时拉格朗日表示。设 u是给定的拟熵解。为使记号尽可能清晰，当我们需要同时考虑下图集和上图集的拉格朗日表示时，分别将它们记作 $\boldsymbol{\omega}_h$ 和 $\boldsymbol{\omega}_e$。此外，我们令

$$\chi_h \doteq \mathbf{1}_{\mathrm{hyp}\,u}, \qquad \chi_e \doteq \mathbf{1}_{\mathrm{epi}\,u}.$$

显然，若 χ_h 满足（2.2）且 $\mu_0,\ \mu_1$，则 $\chi_e = 1 - \chi_h$ 满足（2.2），其中（$-\mu_0,\ -\mu_1$）。受此观察启发，我们给出以下定义。

定义 3.16。如果一对（$\mu_0,\ \mu_1$）分别由下图集和上图集的拉格朗日表示 $\boldsymbol{\omega}_h$、$\boldsymbol{\omega}_e$ 同时诱导，即（$\mu_0,\ \mu_1$）由 $\boldsymbol{\omega}_h$ 诱导，且（$-\mu_0,\ -\mu_1$）由 $\boldsymbol{\omega}_e$诱导，则称其为同时诱导的。

引入以下关系很有用，该关系定义在属于集合的对 $\preceq (\mu_0,\ \mu_1)$ 之间

$$\mathbf{P}_\chi := \left\{(\mu_0,\mu_1) \in \mathscr{M}(\Omega \times \mathbb{R}) \mid (2.2) \text{ holds}\right\}. \tag{3.30}$$

定义 3.17。给定，$\mu_0(\mu_1)$ 和，$\widehat{\mu}_0(\widehat{\mu}_1)$ 属于 $\mathbf{P}\chi$，记作

$$(\widehat{\mu}_0,\widehat{\mu}_1) \preceq (\mu_0,\mu_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \widehat{\mu}_1^+ \le \mu_1^+, & \widehat{\mu}_1^- \le \mu_1^- \quad \text{as measures} \\ |\widehat{\mu}_0| \le |\mu_0| \end{cases} \tag{3.31}$$

注意，$\preceq$ 这是应用定理3.14所保持的自然关系。这使我们能够证明以下命题，即同时诱导对的存在性。

命题 3.18。设 u 是一个拟熵解。相对于 $\preceq$ 为极小元的每一对 $(\widehat{\mu}_0、\ \widehat{\mu}_1)\ \in$ $\mathbf{P}\chi$，均同时由某些良好的拉格朗日表示 $\boldsymbol{\omega}_h、\ \boldsymbol{\omega}_e$ 诱导。

证明。 设 $(\widehat{\mu}_0, \widehat{\mu}_1)$ 是关于关系 $\preceq$ 的 $\mathbf{P}\chi$ 的极小元。容易看出至少存在一个极小元：考虑一个起始对 $(\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1)$，并考虑集合

$$\Sigma := \{(\mu_0, \mu_1) \,|(\mu_0, \mu_1) \preceq (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1)\}.$$

现在考虑函数 $\mathcal{F}$ 的一个极小化子：$(\mu_0, \mu_1) \mapsto \|\mu_1\|_{\mathscr{M}}$ in Σ，它显然存在，记作 (σ_0, σ_1)。我们声称这是 $\preceq$ 的一个极小元。事实上，假设 $(\sigma_0', \sigma_1') \preceq (\sigma_0, \sigma_1)$。那么特别地，$(\sigma_0', \sigma_1') \preceq (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1)$，因此 $(\sigma_0', \sigma_1') \in \Sigma$；此外，由 (3.31) 的第一个条件可得 $\sigma'_1{}^{\pm} \leq \sigma_1^{\pm}$；根据 $\mathcal{F}$ 的极小性，我们推出 $\sigma_1' = \sigma_1$，从而得到 $\sigma_0' = \sigma_0$。因此，(σ_0, σ_1) 是 $\preceq$ 的一个极小元。

现在先对 3.14 应用两次定理：首先对 u 使用极小对 $(\widehat{\mu}_0, \widehat{\mu}_1$，然后对 $\widetilde{u}$（使用反向通量 $\boldsymbol{g}(v) = -f(1-v)$）使用极小对 $(-\widehat{\mu}_0, -\widehat{\mu}_1$。由拉格朗日表示 $\boldsymbol{\omega}_h$ 和 $\boldsymbol{\omega}_e$ 所同时诱导的新的一对极小对（根据定理 是良好的，根据定理 3.14）必定与起始的一对相同，这是由关系 $\preceq$的极小性所致。□

注 3.19。 我们证明了，关系“$\preceq$”的任意极小对 (μ_0, μ_1) 都是同时诱导的。这证明了，如果一对足够有效，那么它就是同时诱导的。部分逆命题也成立：如果一对 (μ_0, μ_1) 由 $\boldsymbol{\omega}_h, \boldsymbol{\omega}_e$ 同时诱导，那么它在如下意义下是 “ 有效的 ”：

$$\operatorname{supp}\mu_0 \cup \operatorname{supp}\mu_1 \subset \partial\,(\operatorname{hyp} u).$$

3.3.3. 曲线的良好选取。 给定一个拉格朗日表示 $\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{M}^+(\Gamma)$，我们可以选取一组良好的曲线，使其集中于这些曲线上。为此，采用 [27], 中相同的证明，我们有以下引理。

引理 *3.20*。 *</style}*对于 ω_h-几乎处处的 $\gamma \in \Gamma$，对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，有

(1) $(t, \gamma^x(t))$ 是 u 的勒贝格点；*(2)* γ^v

$(t) < u(t, \gamma^x(t))$

我们用 Γ_h 表示满足上述两个性质的曲线 $\gamma \in \Gamma$ 的集合。类似地，对于 $\boldsymbol{\omega}_e$-几乎处处的 $\gamma \in \Gamma$，对于 $\mathscr{L}^1$-几乎处处的 $t \in [0,T]$，有

(1) $(t, \gamma^x(t))$ 是 u 的勒贝格点；*(2)* γ^v

$(t) > u(t, \gamma^x(t))$

并且我们用 Γ_e 表示满足上述两个性质的曲线集合 $\gamma \in \Gamma$ *d.*

4. Structure of the Kinetic Measures

4.1. J 的可求 rectifiability。 从现在起，我们假设 u 是一个有界拟熵解，其取值属于 $[0,1]$, $u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega, [0,1])$，通量为 f。这并不构成限制，因为我们无论如何都只考虑有界拟熵解。

在本节中，我们将采用以下关于通量 f 的非线性的结构假设。

定义 4.1。 我们称通量 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是弱真正非线性的 if

$$\mathscr{L}^1\Big(\big\{v \in (0,1) \;\big|\; \tau + \xi \cdot f'(v) = 0\big\}\Big) = 0, \qquad \forall\,(\xi,\tau) \in \mathbb{S}^{d+1} \tag{4.1}$$

在 [13], 一般维数下， μ_1 式（2.2）中动理学测度的结构已得到研究，条件是 $\mu_0 = 0$。这些结果也直接适用于存在源项 μ_0 的情形，不过在选择代表元时（ μ_0, μ_1） $\in \mathbf{P}\chi$需要格外谨慎。下面我们总结在当前设定下可由 [13], 直接得到的结果。我们先回顾一些定义。

定义 4.2. 对于一对 $(\mu_0, \mu_1) \in \mathbf{P}\chi$,

(1) 我们将 ν_0, ν_1 称为 μ_1, μ_0 的全变差的 (t,x) 边缘分布：

$$\nu_0 \doteq [p_{t,x}]_\sharp |\mu_0|, \qquad \nu_1 \doteq [p_{t,x}]_\sharp |\mu_1| \tag{4.2}$$

其中 $p_{t,\,x} : \Omega \times (0,\,1) \to \Omega$ 是关于 $(t,\,x)$ 变量的自然投影。我们还令

$$\nu \doteq \nu_0 + \nu_1.$$

(2) 我们用 $\mathbf{J} \subset \Omega$ 表示 ν 中具有正 $\mathscr{H}^d$ 密度的点 $(t,\,x)$ 的集合：

$$\mathbf{J} \doteq \left\{ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d \;\middle|\; \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu\left(\mathrm{B}_r(t,x)\right)}{r^d} > 0 \right\} \tag{4.3}$$

(3) 若 $u : \Omega \to (0,\,1)$ 在点 $(t,\,x)$ 处具有消失平均振荡，则称其为

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{-d-1} \int_{\mathrm{B}_r(t,x)} |u(s,y) - \overline{u}_r(t,x)| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y = 0 \tag{4.4}$$

其中 $\overline{u_r}(t,\,x)$ 是 u 在球 $\mathrm{B}_r(t,\,x)$ 上的平均值。

(4) 设 $J \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 是一个具有单位法向量 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 的 d-可求 rectifiable 集。若对于 $\mathscr{H}^d$-几乎处处的 $(s,\,y) \in J$，两个博雷尔函数 $u^-,\; u^+ : J \to \mathbb{R}$ 是 u 关于 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 在 J 上的左右迹，

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \left(\int_{B_r^-(s,y)} |\boldsymbol{u}(t,x) - u^-(s,y)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x + \int_{B_r^+(s,y)} |\boldsymbol{u}(t,x) - u^+(s,y)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \right) = 0,$$

$$\text{where } B_r^\pm(s,y) := \{(t,x) \in B_r(s,y) \mid \pm\big((t,x) - (s,y)\big) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}(s,y) > 0\}.$$

在我们的语境中，[13],给出

定理 4.3 ([13])。设 $d \in \mathbb{N}$ 和 f 均为弱真正非线性。设 u 是方程 (1.1)的一个拟熵解，且设 (μ_0, μ_1) 是 $\mathbf{P}_X$中的一个极小对。那么集合 $\mathbf{J}$ 在 (4.3) 是 d-可整流的，并且

(1) u 在每一点都具有消失平均振荡$(t,x) \in \mathbf{J}^c$，即 $\mathbf{J}$ 的补集；*(2)* u在 $\mathbf{J}$ 上具有左右迹。*(3)* $\mu_\eta \llcorner \mathbf{J} = ((\eta(u^+)\; q(u^+)) - (\eta(u^-)\; q(u^-))) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathscr{H}^d \llcorner \mathbf{J}$，其中 $u^\pm$ 表示在 J 上的迹，而 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 表示 $\mathbf{J}$ 的法向量。

对于 BV，解中条件 (1) 和 (3) 可加强为

(1') 每个 $(t,x) \notin \mathbf{J}$ 都是一个勒贝格点；(3') $\mu_\eta = ((\eta$

$(u^+)\; q(u^+)) - (\eta(u^-)\; q(u^-))) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \mathscr{H}^d \llcorner \mathbf{J}$。

注4.4。人们或许会想知道，在定理 μ_0, μ_1 的证明中，(4.3) 的极小性假设起什么作用：文献 [13] 的作者对拟熵解考虑了一种等价的动理学表述，其形式如下：

$$\chi_t + f'(v) \cdot \nabla_x \chi = \partial_v \widetilde{\mu} \tag{4.5}$$

其中 $\widetilde{\mu}$ 在 v 中可能不是紧支撑的，以便计入一个源项。它与我们的 μ_0, μ_1 （其在 v 中紧支撑）之间的联系是

$$\widetilde{\mu}(t,x,v) := \mu_1(t,x,v) + \int_{-\infty}^{v} \mathrm{d}\mu_0(t,x,v)$$

其中，右端的第二个测度表示测度 μ_0 关于变量 $\widetilde{v}$ 的原函数。在 [13], 可求 rectifiable 跳跃集（记作$\mathbf{J}$）定义为测度具有正 $\mathscr{H}^d$ 密度的点集

$$\widetilde{\nu} := (p_{t,x})_\sharp |\widetilde{\mu}| \llcorner (\mathbb{R}^{d+1} \times (-\infty, |u|_\infty)).$$

我们的 $\mathbf{J}$ 则是测度具有正 $\mathscr{H}^d$密度的点集 $\nu := (p_{t,\ x})\sharp(|\mu_1|+|\mu_0|)$。因此，要由4.3 中的结果得到定理 [13] ，我们只需证明

$$\mathbf{J} = \widetilde{\mathbf{J}} \qquad \text{up to an } \mathscr{H}^d\text{-negligible set.}$$

为证明这一点，只需证明 $\nu \ll \widetilde{\nu}$ （注意，另一个 $\widetilde{\nu} \ll \nu$ 是显然的）。反设存在一个 $A \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 正测度的可测集，使得

$$\nu(A) > 0, \qquad \widetilde{\nu}(A) = 0.$$

但这意味着

$$\Big(\mu_1 + \int_{-\infty}^{v} \mu_0(t,x,v)\,\mathrm{d}v\Big)\llcorner A = 0$$

这就意味着

$$\partial_v \mu_1 \llcorner A + \mu_0 \llcorner A = 0$$

因此，我们可以用另一个由下式定义的对 $(\mu_0',\ \mu_1') \in \mathbf{P}_\chi$ 替换这一对 $(\mu_0,\ \mu_1)$

$$\mu_1' = \mu_1 \llcorner A^c, \qquad \mu_0' = \mu_0 \llcorner A^c.$$

显然，$(\mu_0',\ \mu_1') \preceq (\mu_0,\ \mu_1)$，这与 $\mu_0,\ \mu_1$的极小性矛盾。

截至本文撰写时，对于一般的弱真非线性通量，证明 (1') 仍是一个未解决的问题；但在 [31]作者研究了满足幂型非线性假设的熵解情形，其中非线性条件为 f，并证明在此情形下，每一点 $(t,\ x) \notin J$ 都是连续点，从而对这一特定情形下的 (1') 给出了肯定答案。此外，在 [25] 作者证明，对于一般的有限熵解，非勒贝格点集合的豪斯多夫维数至多为d，这也为 (1) 提供了部分答案。对于一维空间中的熵解，(1') 和 (3') 也都有肯定答案：见 [8]。

在下一节中，我们证明性质 (3') 对一维空间中的拟熵解成立。

4.2. 一维情形。本节旨在将可求长性结果 [27] 推广到一维空间中的一般真非线性通量。具体而言，我们将证明以下定理。

定理 4.5。 设 $d = 1$和 f满足 (4.1)。令 $u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega;\ [0,1])$ 为 (1.1)的拟熵解，并令 $(\mu_0,\ \mu_1)$ 为 $\mathbf{P}_\chi$中的极小对。则除定理 *4.3*外，ν_1 在 (4.2) 中还集中于 $\mathbf{J}$，即

$$\nu_1 = \nu_1 \llcorner \mathbf{J} \tag{4.6}$$

我们实际上将证明 ν_1 集中于一个 1-可求长集上；根据定理 $\mathbf{J}$ ，结合定理 4.3'>式（3），可立即看出该集合与集合 4.3相同。

为方便起见，回顾一下 $\Omega = (0,T) \times \mathbb{R}$，下文将$X = \Omega \times (0,1)$记作。根据命题 3.18，如果 (μ_0,μ_1) 是一个极小对，那么它同时由某些 $\boldsymbol{\omega}_h, \boldsymbol{\omega}_e$ 良好拉格朗日表示诱导，分别对应于 u的下图集和上图集。完整测度 ν_1 集中于 J，将由测度 $[p_{t,x}]_\sharp\mu_1^+$ 和$[p_{t,x}]_\sharp\mu_1^-$都集中于 J 得出。因此我们先对$[p_{t,x}]_\sharp\mu_1^+$证明该结果，另一种情形则可由对称性推出。

证明分为五个步骤。

1. 我们引入测度 $\boldsymbol{\omega}_h \otimes \mu^{\gamma,}{}_1{}^{+}, \boldsymbol{\omega}_e \otimes \mu^{\gamma,}{}_1{}^{-} \in \mathscr{M}(\Gamma \times X)$，即定义如下的测度：对于博雷尔集 $G \in \mathcal{B}(\Gamma)$、 $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_h \otimes \mu_1^{\gamma,+}(G \times A) &:= \int_G \mu_1^{\gamma,+}(A)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_h(\gamma), \\ \boldsymbol{\omega}_e \otimes \mu_1^{\gamma,-}(G \times A) &:= \int_G \mu_1^{\gamma,-}(A)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_e(\gamma) \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $\mu_1^{\gamma\pm}$ 定义于式（3.7）。由于（μ_0， μ_1）由 $\boldsymbol{\omega}_h$ 和$\boldsymbol{\omega}_e$同时诱导，因此可以选取一个传输计划 $\pi^+ \in \mathscr{M}((\Gamma \times X)^2)$，将$\boldsymbol{\omega}_h \otimes \mu^{\gamma,}{}_1{}^{+}$传输至 $\boldsymbol{\omega}_e \otimes \mu^{\gamma,}{}_1{}^{-}$，且其集中于集合

$$\begin{aligned} \mathcal{G} := \Big\{ &(\gamma, t, x, v, \gamma', t, x, v) \in (\Gamma \times X)^2 \;\big|\; \\ &\gamma^x(t) = \gamma'^{,x}(t), \quad v \in [\gamma^v(t+), \gamma^v(t-)] \cap [\gamma'^{,v}(t-), \gamma'^{,v}(t+)] \Big\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

这是因为，注意到（μ_0， μ_1）由 $\boldsymbol{\omega}_h$ 和$\boldsymbol{\omega}_e$同时诱导，我们有

$$\int_\Gamma \mu_1^{\gamma,-}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_h(\gamma) = \mu_1^- = \int_\Gamma \mu_1^{\gamma,+}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_e(\gamma), \qquad \int_\Gamma \mu_1^{\gamma,+}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_h(\gamma) = \mu_1^+ = \int_\Gamma \mu_1^{\gamma,-}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_e(\gamma),$$

并应用以下引理。

引理 4.6 （[27], 引理 8）。 记 P_1, P_2：（$\Gamma \times X$）$^2 \to$ （$\Gamma \times X$）为标准投影。则存在一个计划 $\pi^+ \in \mathscr{M}$ （（$\Gamma \times X$）^{2}），其边缘分布为

$$\begin{aligned} [P_1]_\sharp \pi^+ &= \boldsymbol{\omega}_h \otimes \mu_1^{\gamma,+}, \\ [P_2]_\sharp \pi^+ &= \boldsymbol{\omega}_e \otimes \mu_1^{\gamma,-} \end{aligned} \tag{4.9}$$

集中于集合 $\mathcal{G}$ 定义于 （4.8）。

2. 在这一步中，我们将步骤 1 中构造的方案 π^+ 分解为分量的可数和。首先，考虑集合 $I = \{v\colon\ f''(v) = 0\}$及其补集 $(0,\ 1) \setminus I$。由于 $(0,\ 1) \setminus I$是一个开集，因此可以将其写成可数个互不相交的区间 A_l的并：

$$(0,1) \setminus I = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l, \qquad A_l \subset (0,1) \quad \text{disjoint intervals}$$

接下来，我们将把 π^+ 分解为

$$\pi^+ = \sum_{l \in \mathbb{N}} \pi_l^+ + \pi_J^+ \tag{4.10}$$

其中，粗略地说， π_l^+ 支集位于集合 $(\gamma,\ t,\ x,\ v,\ \gamma',\ t,\ x,\ v')$ 上；在点 $(t,\ x)$ 处，曲线 $\gamma,\ \gamma'$ 满足

$$\{\gamma^v(t+), \gamma^v(t-), \gamma'^{,v}(t+), \gamma'^{,v}(t-)\} \subset A_l;$$

而 π_J^+ 表示其余的曲线。在这一步的后续部分，我们将把这一讨论形式化。

根据定义，测度 $\boldsymbol{\omega}_h \otimes \mu^{+,}{}_1{}^{\gamma}$ (另请回顾 (3.7)) 集中在 se t

$$\mathcal{G}_h^+ := \Big\{ (\gamma, t, x, v) \in \Gamma \times X \;\Big|\; \gamma^x(t) = x,\ v \in [\gamma^v(t+), \gamma^v(t-)] \Big\}. \tag{4.11}$$

类似地，测度 $\boldsymbol{\omega}_e \otimes \mu^{-,}{}_1{}^{\gamma}$ 集中在集合

$$\mathcal{G}_e^- := \Big\{ (\gamma', t', x', v') \in \Gamma \times X \;\Big|\; \gamma^x(t') = x',\ v' \in [\gamma^v(t'-), \gamma^v(t'+)] \Big\}. \tag{4.12}$$

我们针对每个 $l \in \mathbb{N}$ 定义集合，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{h,l}^{+} &:= \Big\{(\gamma,t,x,v) \in \mathcal{G}_h^{+} \;\Big|\; \gamma^v(t-), \gamma^v(t+) \in A_l\Big\},\\ \mathcal{G}_{e,l}^{-} &:= \Big\{(\gamma',t',x',v') \in \mathcal{G}_e^{-} \;\Big|\; \gamma^v(t-), \gamma^v(t+) \in A_l\Big\}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

以及这些集合

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{h,J}^{+} &:= \Big\{(\gamma,t,x,v) \in \mathcal{G}_h^{+} \;\Big|\; \gamma^v(t-) > \gamma^v(t+)\Big\},\\ \mathcal{G}_{e,J}^{-} &:= \Big\{((\gamma',t',x',v') \in \mathcal{G}_e^{-} \;\Big|\; \gamma^v(t'-) < \gamma^v(t'+)\Big\}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

最后我们定义

$$\begin{aligned}\pi_l^{+} &:= \pi^{+} \llcorner (\mathcal{G}_{h,l}^{+} \times \mathcal{G}_{e,l}^{-}),\\ \pi_J^{+} &:= \pi^{+} \llcorner \left(\Big((\mathcal{G}_h^{+} \times \mathcal{G}_{e,J}^{-}) \cup (\mathcal{G}_{h,J}^{+} \times \mathcal{G}_e^{-}) \Big) \setminus \bigcup_{\ell} (\mathcal{G}_{h,l}^{+} \times \mathcal{G}_{e,l}^{-}) \right).\end{aligned} \tag{4.15}$$

由步骤 1 可知

$$\pi^{+} = \sum_{l \in \mathbb{N}} \pi_l^{+} + \pi_J^{+} + \pi_I^{+}$$

其中

$$\begin{aligned}\pi_I^{+} &:= \pi^{+} \llcorner (\mathcal{G}_{h,I}^{+} \times \mathcal{G}_{e,I}^{-}),\\ \mathcal{G}_{h,I}^{+} &:= \Big\{(\gamma,t,x,v) \in \mathcal{G}_h^{+} \Big| \gamma(t-) = \gamma(t+) \in I\Big\},\\ \mathcal{G}_{e,I}^{-} &:= \Big\{(\gamma',t',x',v') \in \mathcal{G}_h^{+} \Big| \gamma(t'-) = \gamma(t'+) \in I\Big\}.\end{aligned}$$

我们断言 $\pi_I^{+} = 0$ ，因此实际上

$$\pi^{+} = \sum_{l \in \mathbb{N}} \pi_l^{+} + \pi_J^{+}.$$

这可由以下关于有界变差函数的引理推出（例如参见[1]）。

引理4.7。设 $v : (a,b) \to (0,1)$ 是一个 BV 函数。则若 Dv 是测度 Dv 的弥散部分，对于任意零 $\mathscr{L}^1$ 测度集 $I \subset (0,1)$ ，有

$$\widetilde{D}v(v^{-1}(I)) = 0$$

3. 利用步骤 2 的构造，我们现在证明，对于每个 $l \in \mathbb{N}$，测度

$$\nu_{1,l}^{+} := [P_{t,x}]_\sharp \pi_l^{+} \tag{4.16}$$

集中在一个1-可求长集上，其中 $P_{t,x} : (\Gamma \times X)^2 \to (0,T) \times \mathbb{R}$ 是向前两个变量的投影（$\gamma, t, x, v, \gamma', t', x', v') \mapsto (t,x)$。

我们固定 $l \in \mathbb{N}$，并证明 $\nu_{1,l}^{+}$ 集中在一个1-可求长集上。不失一般性，我们可以假设 $A_l \subset (0,1)$ 满足对每个 $v \in A_l$， $f''(v) > 0$。另一种情形完全对称。我们从两个预备结果开始，它们将在 [27] 中证明。

第一个引理形式化了这样一个直观事实：在通量严格凸的区间 A_l 中，表示下图集的拉格朗日曲线通常不会从左侧穿过表示上图集的曲线。

引理 4.8。 令 Γ_h， Γ_e 如引理 *3.20*中所述。令 $(\bar\gamma,\ I_{\bar\gamma}) \in \Gamma_h$ 且令 $(a,\ b) \subset I_{\bar\gamma}$ 满足 $\bar\gamma^v((a,\ b)) \subset A_l$。此外，令 $G \subset \Gamma_e$ 为一组曲线 $(\gamma,\ I_\gamma)$，且存在 $a < s^1_\gamma < s^2_\gamma < b$ 使得

$$\gamma^x(s^1_\gamma) > \bar\gamma^x(s^1_\gamma), \qquad \gamma^x(s^2_\gamma) < \bar\gamma^x(s^2_\gamma), \qquad \gamma^v(s^1_\gamma, s^2_\gamma) \subset A_l. \tag{4.17}$$

Then

$$\boldsymbol{\omega}_e(G) = 0. \tag{4.18}$$

引理的证明可在 [27, 命题 6] 中找到，适用于 Burgers 方程的情形；但对于严格凸通量，证明过程相同，因此我们省略证明。

给定 $\bar t,\ \bar x$，令 $G^l_{\bar t,\ \bar x} \subset \Gamma_h$ 为满足 $\bar t \in I_\gamma$、 $\gamma^v(\bar t) \in A_l$ 且 $\gamma^x(\bar t) < \bar x$ 的曲线 $(\gamma,\ I_\gamma)$ 的集合。类似地，令 $G^r_{\bar t,\ \bar x} \subset \Gamma_e$ 为满足$\bar t \in I_\gamma$、 $\gamma^v(\bar t) \in A_l$ 且 $\gamma^x(\bar t) > \bar x$ 的曲线 $(\gamma,\ I_\gamma)$ 的集合。

现在我们构造承载ν^+_1 ，l 的候选利普希茨曲线，[27,推论 7]。

引理 4.9。 对每个 $(\gamma, I_\gamma) \in \Gamma_h$，关联时间 $t^l_\gamma \in (\bar t, t^2_\gamma]$ 定义为

$$t^l_\gamma := \sup\left\{t \in [\bar t, t^2_\gamma) \;\middle|\; \gamma^v(s) \in A_l \ \forall\, s \in (\bar t, t)\right\}$$

¯其中约定空集的上确界为 t。定义曲线

$$\tilde f^l_{\bar t,\bar x}(t) := \sup_{\{\gamma \in G^l_{\bar t,\bar x}\,:\, t \in (\bar t,\, t^l_\gamma)\}} \gamma^x(t), \qquad t \in [\bar t, T)$$

及其上 *Lipschitz* 包络 $f^l_{\bar t,\ \bar x}$： $[\bar t, T) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^l_{\bar t,\ \bar x}(t) :=& \text{下确界}\ \left\{g(t) \;\middle|\; g:\ [\bar t, T] \to \mathbb{R}\ \text{是}\ |f'|_\infty\text{-利普希茨的，并且}\right. \\ & \left. g \geq \tilde f^l_{\bar t,\ \bar x}\text{属于}\ [\bar t, T)\right\}.\text{于是，对每个}\ t \in [\bar t, T)\text{，均有} \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_h\Big(\left\{\gamma \in G^l_{\bar t,\bar x} \;\middle|\; \gamma^x(t) > f^l_{\bar t,\bar x}(t), \quad t \in [\bar t, t^l_\gamma)]\right\}\Big) = 0 \\ \boldsymbol{\omega}_e\Big(\left\{\gamma \in G^r_{\bar t,\bar x} \;\middle|\; \gamma^x(t) < f^l_{\bar t,\bar x}(t), \quad t \in [\bar t, t^l_\gamma)\right\}\Big) = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

下面的引理是关于有界变差函数的一般结果（见 [1]）。

引理 4.10. 设 $v : (a, b) \to \mathbb{R}$ 是一个函数，并用 $D^- v$ 表示测度 Dv的负˜部分。那么对于 $D^- v$-几乎处处的 $\bar x \in (a, b)$，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$v(x) > v(\bar x) \quad \forall\, x \in (\bar x - \delta, \bar x), \qquad v(x) < v(\bar x) \quad \forall\, x \in (\bar x, \bar x + \delta)$$

现在我们已经具备所有要素，接下来将步骤 3 的证明进一步分成若干子步骤。

3.1. 固定 $(\bar t, \bar x) \in (0, T) \times \mathbb{R}$。定义集合 $\mathcal{G}^{h,\ l}_{\bar t\ \bar x,}$, $\mathcal{G}^{e,\ l}_{\bar t\ ,\bar x} \subset \Gamma \times X$ 如下

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{h,l}_{\bar t,\bar x} &:= \left\{(\gamma, t, x, v) \in \Gamma_h \times X \ :\ t \in (\bar t, t^{l,\bar t}_\gamma), \quad \gamma^x(\bar t) < \bar x\right\} \\ \mathcal{G}^{e,l}_{\bar t,\bar x} &:= \left\{(\gamma, t, x, v) \in \Gamma_e \times X \ :\ t \in (\bar t, t^{l,\bar t}_\gamma), \quad \gamma^x(\bar t) > \bar x\right\}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

定义测度

$$\pi^+_{l,\bar t,\bar x} := \pi^+_l \llcorner (\mathcal{G}^{h,l}_{\bar t,\bar x} \times \mathcal{G}^{e,l}_{\bar t,\bar x})$$

这一步的主要贡献是证明，令

$$\mathscr{F}^l_{\bar t,\bar x} := \{(t, x) \mid x = f^l_{\bar t,\bar x}(t), \quad t \in (\bar t, T)\}$$

then

$$\text{the measure } (P_{t,x})_\sharp \pi^+_{l,\bar t,\bar x} \text{ is concentrated on } \mathscr{F}^l_{\bar t,\bar x}. \tag{4.22}$$

设 $\Omega^{l,\pm}_{\bar t,\bar x}$ 为 $(\bar t,T)\times\mathbb{R}\setminus\mathscr{F}^l_{\bar t,\bar x}$ 的两个连通分支，分别为左侧的 (–) 和右侧的 (+)。根据 $\mathcal{G}^{h,l}_{\bar t,\bar x}$ 和 $\mathscr{F}^l_{\bar t,\bar x}$ 的定义，以及由 (4.20)，有

$$\boldsymbol{\omega}_h\otimes\mu_1^{\gamma,+}\llcorner\mathcal{G}^{h,l}_{\bar t,\bar x}\big(\Gamma_h\times\Omega^{l,+}_{\bar t,\bar x}\times(0,1)\big)=0. \tag{4.23}$$

此外，有

$$\begin{aligned}[P_{t,x}]_\sharp\pi^+_{l,\bar t,\bar x}&\le[P_{t,x}]_\sharp\pi^+_l\llcorner\big(\mathcal{G}^{h,l}_{\bar t,\bar x}\times(\Gamma\times X)\big)\\&=[p_{t,x}]_\sharp\left(\int_{\Gamma_h}\mu_1^{\gamma,+}\llcorner\mathcal{G}^{h,l}_{\bar t,\bar x}d\boldsymbol{\omega}_h\right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

由（4.23）、（4.24）可得

$$[P_{t,x}]_\sharp\pi^+_{l,\bar t,\bar x}(\Omega^{l,+}_{\bar t,\bar x})=0. \tag{4.25}$$

以完全类似的方式，我们证明

$$[P_{t',x'}]_\sharp\pi^+_{l,\bar t,\bar x}(\Omega^{l,-}_{\bar t,\bar x})=0. \tag{4.26}$$

最后，有 $[P_{t',x'}]_\sharp\pi^+_{l\,\bar t\,、\,、\,\bar x}=[P_{t,x}]_\sharp\pi^+_{l\,\bar t\,、\,、\,\bar x}$，因为 π^+ 支集包含于 $\mathcal{G}$ 中，因此 π^+_l 的支集也包含于 $\mathcal{G}$中。因此我们得出

$$[P_{t,x}]_\sharp\pi^+_{l,\bar t,\bar x}((\Omega^{l,+}_{\bar t,\bar x}\cup\Omega^{l,-}_{\bar t,\bar x}))=0 \tag{4.27}$$

这意味着 $[P_{t,x}]_\sharp\pi^+_{l\,\bar t\,、\,、\,\bar x}$ 集中于 $\mathscr{F}^l_{\bar t、\,\bar x}$。

3.2. 我们证明，对于 π^+_l-几乎处处的点对 $(\gamma,t,x,v,\gamma',t',x',v')$，存在一个 $\delta>0$，使得

(1) 对每个 $s\in[t-\delta,t)$，都有 $\gamma^x(s)<\gamma'^x(s)$；(2) 对所有 $s\in(t-\delta,t]$，都有 $\gamma^v(s)\in A_l$；(3) 对所有 $s\in(t'-\delta,t']$，都有 $\gamma',^v(s)\in A_l$。

为证明这一点，我们按如下步骤进行。根据 π^+_l 的定义，有

$$\begin{aligned}&\text{for }\pi^+_l\text{-a.e. pair }(\gamma,t,x,v,\gamma',t',x',v')\text{ it holds:}\\&\begin{cases}\gamma^v(t-)\ge\gamma^v(t+)\text{ and }\gamma^v(t-),\gamma^v(t+)\in A_l\\ \gamma',^v(t-)\le\gamma',^v(t+)\text{ and }\gamma',^v(t-),\gamma',^v(t+)\in A_l\end{cases}\end{aligned} \tag{4.28}$$

因此，存在一个 $\delta_{2,3}>0$，使得 (2)、(3) 成立。为证明 (1)，我们先证明以下断言：

$$\text{对于 }\mu^-_\gamma\text{-几乎处处的 }(t,x,v),\text{ 存在一个 }\delta>0,\text{ 使得对于每个 }s\in(t-\delta,t,\text{ 都有 }\gamma^v(s)>v\quad) \tag{4.29}$$

˜应用引理 4.10 可得一个 $D^-\gamma$-可忽略子集 $N_\gamma\subset I_\gamma$，使得对每个 $t\in I_\gamma\setminus N_\gamma$，都存在一个 δ，满足对每个 $s\in(t-\delta,t)$，$\gamma^v(s)>\gamma^v(t+)$。此外，对每个 $t\in I_\gamma$，若其中的 γ^v 有负跳跃，则对每个$v\in[\gamma^v(t+)\ \gamma^v(t-))$，都存在一个 $\delta>0$，使得对每个 $s\in(t-\delta,t)$，都有$\gamma^v(s)>v$。令

$$E_\gamma=\{(t,x,v)\ :\ \gamma^v(t-)=v>\gamma^v(t+)\}$$

由于 E_γ 至多可数，且 $\mu^{\gamma,}{}_1{}^+$ 没有原子，因此 $\mu^{\gamma,}{}_1{}^+\big(E_\gamma\big)=0$。因此

$$\mu_1^{\gamma,+}\big(E_\gamma\cup(\mathbb{I},\gamma)(N_\gamma)\big)=0$$

且（4.29）得证。因此，同样利用（2），我们得到如下结论：对于 $\boldsymbol{\omega}_h \otimes \mu^{\gamma}{}_{,1}{}^{+}$-几乎处处的（$\gamma$，$t$，$x$，$v$），存在一个 $\delta_h > 0\,(\delta_h < \delta_2)$，使得

$$\text{for every } s \in (t-\delta_h, t) \text{ it holds } \gamma^v(s) > v, \text{ and hence } \gamma^x(s) < x - (t-s)f'(v) \tag{4.30}$$

这里用到了 f 在 A_l 中的严格凸性，以及 γ(3.3)的特征方程。用完全类似的方法，我们证明对称命题：对于$\boldsymbol{\omega}_e \otimes \mu^{-}_{\gamma}$-几乎处处（$\gamma$，$t$，$x$，$v$），存在一个 $\delta_e > 0\,(\delta_e < \delta_3)$，使得

$$\text{for every } s \in (t-\delta_h, t) \text{ it holds } \gamma^v(s) < v, \text{ and hence } \gamma^x(s) > x - (t-s)f'(v) \tag{4.31}$$

最后，只需注意到，由于 π^+ 集中在 $\mathcal{G}$上，因此对于 π_l^+-几乎处处的（γ，t，x，v，γ'，t'，x'，v'），(1)式在 $\delta = \min(\delta_h, \delta_e)$的取值下成立。

3.3. 由步骤 3.2可推出，对于 π_l^+-几乎处处的点对（γ，t，x，v，γ'，t'，x'，v'），存在一个有理数对（$\bar{t}$，$\bar{x}$）$\in ((0, T) \cap \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$，使得

$$(\gamma, t, x, v, \gamma', t', x', v') \in \mathcal{G}^{h,l}_{\bar{t},\bar{x}} \times \mathcal{G}^{e,l}_{\bar{t},\bar{x}}$$

这表明 π_l^+ 集中在

$$\bigcup_{\substack{\bar{t}\in(0,T)\cap\mathbb{Q}\\ \bar{x}\in\mathbb{Q}}} \mathcal{G}^{h,l}_{\bar{t},\bar{x}} \times \mathcal{G}^{e,l}_{\bar{t},\bar{x}}$$

由于成立

$$[P_{t,x}]_\sharp \pi_l^+ = \sum_{\substack{\bar{t}\in(0,T)\cap\mathbb{Q}\\ \bar{x}\in\mathbb{Q}}} [P_{t,x}]_\sharp \left(\pi_l^+ \llcorner \mathcal{G}^{h,l}_{\bar{t},\bar{x}} \times \mathcal{G}^{e,l}_{\bar{t},\bar{x}}\right) \tag{4.32}$$

根据步骤 3.1，可知$[P_{t,x}]_\sharp \pi_l^+ = \nu_1^+{}_{,l}$ 集中在 1-可求长集上

$$\bigcup_{\substack{\bar{t}\in(0,T)\cap\mathbb{Q}\\ \bar{x}\in\mathbb{Q}}} \mathscr{F}^l_{\bar{t},\bar{x}} \subset (0,T) \times \mathbb{R}.$$

4. 最后，我们证明剩余部分

$$\nu^+_{1,J} := [P_{t,x}]_\sharp \pi^+_J \tag{4.33}$$

集中在集合 **J** 定理 4.3的集合上，因此集中在一个 1-可求长集上。

对于 $\bar{v} \in (0, 1)$，我们引入以下函数，用于度量 f 在点 $\bar{v}$附近的非线性。对于 $\delta > 0$，定义

$$\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta) := \max\left\{h > 0 \;\middle|\; \mathscr{L}^1\big((\bar{v}-\delta, \bar{v}) \cap \{v \,:\, |f'(\bar{v}) - f'(v)| \geq 2h\}\big) \geq h\right\}$$

$$\mathfrak{h}^+(\bar{v}, \delta) := \max\left\{h > 0 \;\middle|\; \mathscr{L}^1\big((\bar{v}, \bar{v}+\delta) \cap \{v \,:\, |f'(\bar{v}) - f'(v)| \geq 2h\}\big) \geq h\right\}.$$

如果通量按照定义4.1的意义是弱真正非线性的，则有

$$0 < \mathfrak{h}^{\pm}(\bar{v}, \delta) < \delta, \qquad \delta > 0 \tag{4.34}$$

例如，若 $f(v) = v^2/2$，则对每个 $\bar{v} \in (0, 1)$，都有 $\mathfrak{h}^{\pm}(\bar{v}, \delta) = \delta/3$。

我们有如下引理，其证明采用与 [28, 引理 4.6 相同的技巧].

引理 4.11. 设 $(\gamma, I_\gamma) \in \Gamma_h$，令 $\bar{t} \in \bar{I}_\gamma$，并设 $\bar{x} = \gamma^x(\bar{t})$。设

$$\bar{v} = \max\left[\gamma^v(\bar{t}\pm)\right],$$

其中

$$[\gamma^v(\bar t\pm)] = \begin{cases} \{\gamma^v(\bar t+),\, \gamma^v(\bar t-)\} & \text{if} \quad \bar t \in I_\gamma, \\ \{\gamma^v(\bar t+)\} & \text{if} \quad \bar t = \inf I_\gamma, \\ \{\gamma^v(\bar t-)\} & \text{if} \quad \bar t = \sup I_\gamma. \end{cases}$$

于是存在一个仅依赖于 $\|f''\|_\infty$ 的常数 c，以及一个依赖于 γ的 δ_1，使得对于所有 $\delta < \delta_1$，以下至少有一项成立。

$$\begin{aligned} &\liminf_{r\downarrow 0} \frac{\mathscr{L}^2\big\{(t,x) \in B_{2r}(\bar t,\bar x) \;\big|\; u(t,x) > \bar v - \delta\big\}}{r^2} > c\cdot \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta) \\ &\limsup_{r\downarrow 0} \frac{\nu_0(B_{2r}(\bar t,\bar x))}{r} > c\cdot \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)^2 \\ &\limsup_{r\downarrow 0} \frac{\nu_1(B_{2r}(\bar t,\bar x))}{r} > c\cdot \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)^3. \end{aligned} \tag{4.35}$$

证明。不失一般性，我们假设 $\bar v = \bar\gamma^v(\bar t-)$，并且存在$\delta$，使得$(\bar t-\delta,\bar t) \subset I_\gamma$。我们令 $\delta>0$ 满足：对于每个 $t\in(\bar t-\delta,\bar t)$，均有

$$|f'(\bar\gamma^v(t)) - f'(\bar v)| < \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)/2, \qquad \bar\gamma^v(t) > \bar v - \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)/2$$

此外，由于 $\exists \lim_{t\to\bar t-}\bar\gamma_x'(t) = f'(\bar v)$，因此当 $\bar r$足够小时，对于每个 $r<\bar r$，曲线$(t^1_{\bar\gamma},$ $\bar t) \ni t\mapsto (t,\bar\gamma^x(t))$与 $\partial B_r((\bar t,\bar x))$有唯一交点，我们将该点记为 t_r。

我们首先注意到，长度为 $\sim \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)$ 的区间 $J\subset(\bar v-\delta,\bar v-\mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)/4)$ 中，f'与 f' $(\bar v)$ 的距离至少为 $\mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)$:

$$\begin{aligned} &|f'(\bar v) - f'(v)| > \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta), \qquad \forall v\in J \\ &|J| \geq \frac{1}{\|f''\|_\infty}\mathfrak{h}^-(\bar v,\delta). \end{aligned} \tag{4.36}$$

事实上，任取一点 $\tilde v\in(\bar v-\delta,v)$，使得 $f'(v) \geq 2h$。令 J为集合 $\{v \mid |f'(v)$ $- f'(\bar v)| > \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)\}$中包含 $\tilde v$的连通分支。那么，J 的长度至少为

$$|J| \geq \frac{1}{\|f''\|_\infty}\mathfrak{h}^-(\bar v,\delta).$$

由于对于 $t\in(t_1-\delta,t_1)$，$\bar\gamma\in\Gamma_h$ 和 $\bar\gamma^v(t) > \bar v - \mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)/4$，因此存在某个 $\varepsilon>0$（可能依赖于 r），使得

$$\mathscr{L}^2\left\{(t,x)\in S^\gamma_{\varepsilon,r} \;\middle|\; u(t,x) > \bar v - \frac{\mathfrak{h}^-(\bar v,\delta)}{4}\right\} \geq \varepsilon r, \quad \text{where } S^\gamma_{\varepsilon,r} := (\mathrm{id},\gamma^x)((t_r,\bar t)) + B_\varepsilon(0). \tag{4.37}$$

对于每个 $(\gamma,I_\gamma)\in\Gamma$，考虑与之相交的 $(t^{\gamma,}{}_j{}^-, t^{\gamma,}{}_j{}^+)_{j=1}^{N_\gamma}$ 的 $(\gamma^v)^{-1}(J)$ 连通分支的非平凡内部

$$(\mathrm{id}_t,\gamma)^{-1}\big(S^\gamma_{\varepsilon,r}\times\bar J\big) \subset I_\gamma$$

其中 J 是 J 的长度为 $|J|/3$ 的中心区间。注意，我们有以下估 te

$$N_\gamma \leq 1 + \frac{3}{|J|}\mathrm{Tot.Var.}\gamma^v \tag{4.38}$$

对于每个 $j\in\mathbb{N}$，考虑集合

$$\Gamma_j := \{(\gamma,I_\gamma) \;:\; N_\gamma \geq j\}$$

并考虑可测限制映射

$$R_j : \Gamma_j \to \Gamma, \quad (\gamma,I_\gamma)\mapsto(\gamma,(t_j^{\gamma,-},t_j^{\gamma,+}))$$

定义测度

$$\tilde{\omega}_h := \sum_{j=1}^{\infty} (R_j)_\sharp(\omega_h \llcorner \Gamma_j)$$

由于我们对某个常数 $K > 0$有估计（4.38），因此它是有限的

$$\|\tilde{\omega}_h\| \le \int_\Gamma N_\gamma \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) \le \int_\Gamma \mathbf{1}_{\{|\gamma^x(\bar{t})-x|\le K\}}(\gamma) \left(1 + \frac{3}{|J|}\right) \mathrm{Tot.Var.}\gamma^v \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\gamma) < \infty$$

最后一个不等式是（3.4）的结果。通过初等的横截性 ty
论证，对于 $\tilde{\omega}_h$-几乎处处的曲线 $(\gamma', I_{\gamma'})$，有

$$|\dot{\gamma}'^{,x}(t) - f'(\bar{v})| > \mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta) \quad \text{for a.e. } t \in (t_j^{\gamma,-}, t_j^{\gamma,+})$$

that

$$\mathscr{L}^1\Big\{t \in I_{\gamma'} \;\Big|\; \gamma'(t) \in S_{\varepsilon,r} \times \bar{J}\Big\} \le \frac{2\varepsilon}{\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta)}. \tag{4.39}$$

根据构造，有

$$\int_\Gamma (\mathrm{id}_t, \gamma)_\sharp \mathscr{L}^1 \llcorner I_\gamma \, \mathrm{d}\tilde{\omega}_h \ge \mathscr{L}^3 \llcorner \Big\{(t,x,v) \in S^\gamma_{\varepsilon,r} \times \bar{J} \;\Big|\; u(t,x) > v\Big\}. \tag{4.40}$$

¯（4.40）右侧集合的测度至少为 $r\varepsilon|J|$，因此结合（4.39）、（4.40），我们得到

$$\tilde{\omega}_h(\Gamma) \ge \frac{1}{2} r|\bar{J}|\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta). \tag{4.41}$$

令 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$，其中

$$\Gamma_1 = \big\{(\gamma, I_\gamma) \;\big|\; |I_\gamma| \ge r\big\},$$

$$\Gamma_2 = \big\{(\gamma, I_\gamma) \;\big|\; |I_\gamma| < r, \quad \gamma^v(\partial I_\gamma) \cap \partial J \ne 0\big\},$$

$$\Gamma_3 = \big\{(\gamma, I_\gamma) \;\big|\; |I_\gamma| < r, \quad \gamma^v(\partial I_\gamma) \cap \partial J = 0\big\}.$$

对于 $\tilde{\omega}_h$-几乎处处的（γ，I_γ），有 $\in \Gamma_1$

$$\mathscr{L}^1\big\{t \in I_\gamma \;\big|\; (t, \gamma(t)) \in B_{2r}(\bar{t}, \bar{x}) \times J\big\} \ge r$$

对于 $\tilde{\omega}_h$-几乎处处的（γ，I_γ），有 $\in \Gamma_2$

$$\gamma(I_\gamma) \subset B_{2r}(\bar{t}, \bar{x}) \times J, \qquad \mathrm{Tot.Var.}\gamma^v > |J|/3$$

对于 $\tilde{\omega}_h$-几乎处处的（γ，I_γ），有 $\in \Gamma_3$

$$(t^1_\gamma, \gamma(t^1_\gamma)), \quad (t^2_\gamma, \gamma(t^2_\gamma)) \in B_{2r}(\bar{t}, \bar{x}) \times J$$

于是可得以下条件之一成立：

$$\tilde{\omega}_h(\Gamma_1) \ge \frac{r|\bar{J}|\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta)}{3}, \quad \tilde{\omega}_h(\Gamma_2) \ge \frac{r|\bar{J}|\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta)}{3}, \quad \tilde{\omega}_h(\Gamma_3) \ge \frac{r|\bar{J}|\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta)}{3}. \tag{4.42}$$

若第一个条件成立，则根据 $(e_t)_\sharp\tilde{\omega}_h \le (e_t)_\sharp\omega_h = \chi(t, \cdot, \cdot)$，利用 Fubini 定理，对每个 $t > 0$，可得

$$\mathscr{L}^2\Big(\big\{(t,x) \in B_{2r}(\bar{t}, \bar{x}) \;\big|\; u(t,x) > \bar{v} - \delta\big\}\Big) \ge \frac{1}{3} r^2 \mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta).$$

若第二个条件成立，则利用（3.10）中的第一个方程，我们可推得

$$|\mu_1|(B_{2r}(\bar{t}, \bar{x}) \times J) \ge \int_{\Gamma_2} \frac{|J|}{3} \, \mathrm{d}\tilde{\omega}_h(\gamma) \ge \frac{r|\bar{J}|\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta)}{3} \frac{|J|}{3} \ge \frac{1}{27\|f''\|^2_\infty} r\mathfrak{h}^-(\bar{v}, \delta)^3.$$

若第三个条件成立，则以类似方式，利用（3.10）中的第二个方程，我们可推得

$$|\mu_0|(B_{2r}(\bar{t},\bar{x})\times J) > \frac{1}{9\|f''\|} r\mathfrak{h}^-(\bar{v},\delta)^2.$$

这就证明了该结果。 □

上图集也有相应的对称结论：证明过程完全相同，因此略去。

引理 4.12. 令 $(\gamma, I_\gamma) \in \Gamma_e$，令

$$\bar{v} = \min\,[\gamma^v(\bar{t}\pm)],$$

其中

$$[\gamma^v(\bar{t}\pm)] = \begin{cases} \{\gamma^v(\bar{t}+),\, \gamma^v(\bar{t}-)\} & \text{if} \quad \bar{t}\in I_\gamma, \\ \{\gamma^v(\bar{t}+)\} & \text{if} \quad \bar{t} = \inf I_\gamma, \\ \{\gamma^v(\bar{t}-)\} & \text{if} \quad \bar{t} = \sup I_\gamma. \end{cases}$$

并令 $\bar{x} = \gamma^x(\bar{t})$。设

$$\bar{v} = \liminf_{t\to\bar{t},\, t\in I_\gamma} \gamma^v(t).$$

那么，存在一个仅依赖于 $\|f''\|_\infty$ 的绝对常数 c，使得对于每个 $\delta\in(0,1)$，以下至少有一项成立。

$$\begin{aligned} &\liminf_{r\downarrow 0} \frac{\mathscr{L}^2\big\{(t,x)\in B_R(\bar{t},\bar{x}) \;\big|\; u(t,x) < \bar{v}-\delta\big\}}{r^2} > c\cdot\mathfrak{h}^+(\bar{v},\delta) \\ &\limsup_{r\downarrow 0} \frac{\nu_0(B_R(\bar{t},\bar{x}))}{r} > c\cdot\mathfrak{h}^+(\bar{v},\delta)^2 \\ &\limsup_{r\downarrow 0} \frac{\nu_1(B_R(\bar{t},\bar{x}))}{r} > c\cdot\mathfrak{h}^+(\bar{v},\delta)^3. \end{aligned} \tag{4.43}$$

下面的命题完成了步骤 4 的证明。

命题 4.13。 对于 $\nu_1^+{}_{,J}$-几乎处处的 $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$，有

$$\limsup_{r\downarrow 0} \frac{\nu(B_r(t,x))}{r} > 0. \tag{4.44}$$

特别地，测度 $\nu_1^+{}_{,J}$ 集中在定理 **J** 的 *1*-可求长集*4.3*上。

证明。 对于 $\nu_1^+{}_{,J}$，几乎处处的 (t,x)，以下情形之一成立：

(1) 存在 $(\gamma,t,x,v)\in\mathcal{G}_h^+{}_{,J}$ 和 $(\gamma',t',x',v')\in\mathcal{G}_e^-$，使得

$$(t,x) = (t',x') \quad \text{and} \quad \gamma^v(t-) > v = v' \geq \gamma'^{,v}(t-);$$

(2) 存在 $(\gamma,t,x,v)\in\mathcal{G}_h^-$ 和 $(\gamma',t',x',v')\in\mathcal{G}_e^-{}_{,J}$，使得

$$(t,x) = (t',x') \quad \text{and} \quad \gamma'^{,v}(t-) < v = v' \leq \gamma^v(t-).$$

由于证明具有对称性，不妨假设第一个条件成立。我们将引理4.11应用于曲线 γ，并将引理4.12 应用于曲线 γ'，其满足

$$\delta = \frac{1}{3}\{|\gamma^v(t-) - v|\}.$$

于是，4.11 和4.12这两个引理中至少有一个满足第二个或第三个条件，或者两个引理都满足第一个条件。但在这种情况下，(t,x) 不可能是消失平均振荡点。因此，根据定理4.3，必有 $(t,x)\in\mathbf{J}$成立。 □

5. 根据前面的步骤，我们得出 ν_1^+集中在一个1-可求长集上。事实上，有

$$\nu_1^+ = (p_{t,x})_\sharp \int_{\Gamma_h} \mu_1^{\gamma,+}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_h(\gamma) \le (P_{t,x})_\sharp \pi^+ = \nu_{1,J}^+ + \sum_{l\in\mathbb{N}} \nu_{1,l}^+ . \tag{4.45}$$

由步骤 3 和步骤 4 可推得 ν_1^+集中在一个 1-可求长集上。对 ν_1^-也有同样的论证，因此定理 4.5 的证明即告完成。

本节最后给出一个关于跳跃集 $\mathbf{J}$ 之外源项 μ_0结构的结果。该结果本身也颇具意义，且对于之后研究具有 $\gamma = 3$的等熵系统将会有所助益。

命题 4.14。 在上述设定下，存在一个可测函数 $e(t,x)$，使得此外还有

$$\mu_0 \llcorner \mathbf{J}^c = e(t,x)(p_{t,x})_\sharp |\mu_0| \otimes \delta_{\bar u(t,x)}, \qquad e(t,x) \in \{1,-1\}. \tag{4.46}$$

证明。 由于 μ_1, μ_0 是一个极小对，因此它由一个 良好 的拉格朗日表示 ω_h (定义3.3)诱导；特别地，

$$\mu_0 = \int_\Gamma \mu_0^\gamma \, \mathrm{d}\omega_h(\gamma)$$

由于 (μ_0, μ_1) 和 $(-\mu_0, -\mu_1)$ 是由 ω_h, ω_e 同时诱导的，因此有

$$-\mu_0 = \int_\Gamma \mu_0^\gamma \, \mathrm{d}\omega_e(\gamma)$$

这意味着，对于几乎处处的点 $(t,\ x,\ v)$，存在一条曲线 $\gamma_h \in \Gamma_h$和一条曲线 γ_e，它们属于 Γ_e，使得 $\gamma_h(t) = (x,\ v)$ $\gamma_e(t) = (x,\ v)$，并且

$$t = t^1_{\gamma_h}, \quad t = t^2_{\gamma_e}$$

or

$$t = t^2_{\gamma_h}, \quad t = t^1_{\gamma_e}.$$

现在假设 μ_0 不具有形式 (4.46)。那么存在一点 $(t,\ x) \in \mathbf{J}^c$，两个值 $v_- < v_+$和两条曲线 $\gamma_h \in \Gamma_h$，$\gamma_e \in \Gamma_e$使得 $\gamma_h^x(t) = \gamma_e^x(t) = x$并且

$$\limsup_{s\to t,\ s\in I_{\gamma_h}} \gamma_h^v(s) = v_+, \qquad \limsup_{s\to t,\ s\in I_{\gamma_e}} = v_-$$

由于 $(t,\ x) \in \mathbf{J}^c$，引理 4.11 和引理 4.12 的第一种情况必定成立。但是，采用命题 4.13 的相同论证可知，这将导致矛盾，因为 $(t,\ x)$ 是消失平均振荡的。 □

5. Regularity of Burgers' Equation

本节首次应用拉格朗日表示，为 Burgers 方程的拟熵解推导正则性结果。我们首先回顾 Besov 空间 $B^{\alpha,\infty}_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 的定义。

定义 5.1. 设 $\alpha \in (0,1)$，$p \in [1,+\infty)$。若函数 $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 属于$B^{\alpha,\infty}_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，则

$$\|u\|^p_{B^{\alpha,p}_\infty(K)} := \sup_{h>0} \int_K \left| \frac{u(x+h)-u(x)}{h^\alpha} \right|^p \mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall\, K \subset \mathbb{R} \quad \text{co紧。} \tag{5.1}$$

那么，我们可以用 Besov 空间表述如下正则性结果。

定理 5.2。 设 u 是 *Burgers* 方程的拟熵解，且满足： μ_1 由命题 *2.3* 给出的量是一个符号测度。那么，对任意 $T>0$，$K\subset\mathbb{R}$ 紧且 $\delta>0$ 存在一个常数 $C\equiv C(K,\ T,\ \mu_0)$ 使得

$$\int_{\delta}^{T}\|u(t)\|_{B_{\infty}^{1/2,1}(K)}\,\mathrm{d}t<\frac{C}{\min\{\delta,1\}}. \tag{5.2}$$

证明。 在 v的对称性下，不妨设 μ_1 是一个正测度。

此外，对于 $\preceq$，通过选取一个小于(μ_0,μ_1)的不同数对 $(\hat{}\mu_0,\hat{}\mu_1)$，不妨设 $\boldsymbol{\omega}_h$ 是 u 下图集的拉格朗日表示（定义 3.1），并按定义 3.3 诱导出(μ_0,μ_1)。根据命题 3.18，我们还可以假设(μ_0,μ_1)由$\boldsymbol{\omega}_h$ 和$\boldsymbol{\omega}_e$同时诱导（定义 3.16），其中 $\boldsymbol{\omega}_e$ 是 u 上图集的拉格朗日表示（定义 3.15）。第二步并非必需，但能使证明更简单。一个关键点是，根据关系 $\preceq$的定义，这些操作保持 μ_1的符号不变。最后，我们用 Γ_h,Γ_e 表示由引理 3.20 选出的曲线集。

1. 固定 $\Delta t>0$，并对 $t\geq\Delta t$ 考虑曲线集合

$$\Gamma_h^{t,\Delta t}:=\Big\{\gamma_h\in\Gamma_h\quad\Big|\quad t_{\gamma_h}^{-}\leq t-\Delta t,\quad t_{\gamma}^{+}\geq t\Big\}$$

$$\Gamma_e^{t,\Delta t}:=\Big\{\gamma_e\in\Gamma_e\quad\Big|\quad t_{\gamma_e}^{-}\leq t-\Delta t,\quad t_{\gamma}^{+}\geq t\Big\}$$

定义测度

$$\begin{aligned}\chi_{a^{\Delta t}}^{t}&:=e_{t\sharp}\left(\boldsymbol{\omega}_h\llcorner\Gamma_h^{t,\Delta t}\right)\leq\chi_h(t,\cdot,\cdot)\mathscr{L}^2\llcorner(\mathbb{R}\times(0,1))\quad\text{in }\mathscr{M}(\mathbb{R}\times(0,1)),\\ \chi_{b^{\Delta t}}^{t}&:=e_{t\sharp}\left(\boldsymbol{\omega}_e\llcorner\Gamma_e^{t,\Delta t}\right)\leq\chi_e(t,\cdot,\cdot)\mathscr{L}^2\llcorner(\mathbb{R}\times(0,1))\quad\text{in }\mathscr{M}(\mathbb{R}\times(0,1)).\end{aligned} \tag{5.3}$$

最后，定义函数

$$\begin{aligned}a^{\Delta t}(t,x)&:=\sup\Big\{v\in(0,1)\,\Big|\,(v,x)\in\operatorname{supp}\chi_{a^{\Delta t}}^{t}\Big\},\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}\\ b^{\Delta t}(t,x)&:=\inf\Big\{v\in(0,1)\,\Big|\,(v,x)\in\operatorname{supp}\chi_{b^{\Delta t}}^{t}\Big\},\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

注意， L^1 距离 $a^{\Delta t}(t,\ \cdot)$ 与 $u(t,\ \cdot)$ 之间的距离可以用源项 μ_0来估计。事实上，根据 $a^{\Delta t}$的定义，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M}|a^{\Delta t}(t,x)-u(t,x)|\,\mathrm{d}x&=\boldsymbol{\omega}_h\Big(\Big\{\gamma_h\in\Gamma_h\quad\Big|\quad t\in I_{\gamma_h},\quad t_{\gamma_h}^{-}\in(t-\Delta t,t)\Big\}\Big)\\&\leq\mu_0^{+}(S_t^{M,\Delta t})\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中

$$S_t^{M,\Delta t}:=(t-\Delta t,t)\times(-M-\Delta t,M+\Delta t)\times(0,1).$$

这意味着，在 $(0,T)$ 上积分并应用 Fubini 定理:

$$\int_{\Delta t}^{T}\int_{-M}^{M}|a^{\Delta t}(t,x)-u(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leq\Delta t\cdot|\mu_0^{+}|\big([0,T]\times(-M-\Delta t,M+\Delta t)\times(0,1)\big). \tag{5.6}$$

对于 u 与 $b^{\Delta t}$ 之间的距离，也有完全对称的结论：

$$\int_{-M}^{M} |a^{\Delta t}(t,x) - u(t,x)|\,\mathrm{d}x \le \mu_0^-(S_t^{M,\Delta t}),$$
$$\int_{\Delta t}^{T}\int_{-M}^{M} |b^{\Delta t}(t,x) - u(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \Delta t\cdot|\mu_0^-|\big([0,T]\times(-M-\Delta t, M+\Delta t)\times(0,1)\big). \tag{5.7}$$

根据三角不等式，差值 $a^{\Delta t}(t,\ x)\ - b^{\Delta t}(t,\ x)$ 也属于 L^1，并且

$$\int_{-M}^{M} |a^{\Delta t}(t,x) - b^{\Delta t}(t,x)|\,\mathrm{d}x \le |\mu_0|(S_t^{M,\Delta t}),$$
$$\int_{\Delta t}^{T}\int_{-M}^{M} |a^{\Delta t}(t,x) - b^{\Delta t}(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \Delta t|\mu_0|\big([0,T]\times(-M-\Delta t, M+\Delta t)\times(0,1)\big). \tag{5.8}$$

2. 现在固定较小的 $x<y$ 和 $\varepsilon>0$。取一条曲线 $\bar\gamma_h \in \Gamma^t_{,h^{\Delta t}}$，使得 $|\bar\gamma_h(t) - (y, a^{\Delta t}(t,y))| \le \varepsilon$。由于 μ_1 为正，且 $(y, a^{\Delta t}(t,y)) \in \operatorname{supp}\chi^t_{a^{\Delta t}}$，根据 (3.7)，我们可以假设 $t\mapsto\bar\gamma_h^v(t)$，$t\in I_{\bar\gamma_h}$ 是递减的。根据 $b^{\Delta t}$ 的定义，存在由曲线 $G\subset\Gamma^t_{,e^{\Delta t}}$ 组成的正测度集，使得

$$|\gamma_e(t) - (x, b^{\Delta t}(t,x))| \le \varepsilon.$$

根据引理4.8，有

$$\omega_e\Big(\Big\{\gamma_e\in G \ \Big|\ \gamma_e(t-\Delta t) > \bar\gamma_h(t-\Delta t) \quad\text{and}\quad \gamma_e(t) < \bar\gamma_h(t)\Big\}\Big) = 0 \tag{5.9}$$

此外，由于 $\mu_1\ge 0$ 且再次根据 (3.7)，$I_{\gamma_e}\ni t\mapsto\gamma_e^v(t)$ 对于 ω_e-几乎处处的$\gamma_e\in G$都是递增的。因此，由特征方程 (3.3)，有

$$\begin{aligned}&\bar\gamma_h^x(t-\Delta t) < y - \Delta t\cdot a^{\Delta t}(t,y) + 2\varepsilon\\ &\gamma_e^x(t-\Delta t) > x - \Delta t\cdot b^{\Delta t}(t,x) - 2\varepsilon, \quad \text{for } \omega_e\text{-a.e. } \gamma_e\in G.\end{aligned} \tag{5.10}$$

然后，将（5.9）与（5.10）结合，并令 $\varepsilon\to 0$ 我们得到

$$a^{\Delta t}(t,y) - b^{\Delta t}(t,x) \le \frac{y-x}{\Delta t}, \qquad \text{for every } x<y \tag{5.11}$$

令 $h=y-x$，并在区间 $[-M,M]$ 上积分，其中 $M>0$，we 得到

$$\int_{-M}^{M} (a^{\Delta t}(t,x+h) - b^{\Delta t}(t,x))^+\,\mathrm{d}x \le 2Mh\Delta t^{-1}. \tag{5.12}$$

此外，将上述不等式与 L^∞ 对 $a^{\Delta t}$ 的界，$b^{\Delta t}$以及步骤 1 的不等式（5.8）结合，我们得到

$$\begin{aligned}-\int_{-M}^{M} (a^{\Delta t}(t,x+h) - b^{\Delta t}(t,x))^-\,\mathrm{d}x &= -\int_{-M}^{M} (a^{\Delta t}(t,x+h) - b^{\Delta t}(t,x))^+\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_{-M}^{M} (a^{\Delta t}(t,x+h) - b^{\Delta t}(t,x))\,\mathrm{d}x\\ &\ge -2Mh\Delta t^{-1} - 2h - |\mu_0|(S_t^{M,\Delta t})\end{aligned} \tag{5.13}$$

进而得到如下界

$$\begin{aligned}&\int_{-M}^{M} |a^{\Delta t}(t,x+h) - b^{\Delta t}(t,x)|\,\mathrm{d}x\\ &\qquad\le C\Big(h\Delta t^{-1} + |\mu_0|(S_t^{M,\Delta t})\Big),\end{aligned} \tag{5.14}$$

对所有的 $t>0$ 和 $\Delta t<t$，均成立，其中 C 仅依赖于 M。

步骤 3. 固定 $\delta>0$ 和 $h^{1/2}<\delta$。那么，对于每个 $\Delta t<\delta$，我们估计差值 $u(t,x)-u(t,x+h)$ 的 L^1范数，得到

$$\begin{aligned}\int_\delta^T\int_{-M}^M|u(t,x)-u(t,x+h)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le&\int_\delta^T\int_{-M}^M|u(t,x)-b^{\Delta t}(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\\&+\int_\delta^T\int_{-M}^M|b^{\Delta t}(t,x)-a^{\Delta t}(t,x+h)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\\&+\int_\delta^T\int_{-M}^M|a^{\Delta t}(t,x+h)-u(t,x+h)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&\le 2\Delta t\cdot|\mu_0|((0,T)\times(-M-\delta,M+\delta)\times(0,1))\\&+\int_\delta^T\int_{-M}^M|a^{\Delta t}(t,x+h)-b^{\Delta t}(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{5.15}$$

最后一行中的不等式由 (5.6)、(5.7) 得出。由 (5.14)，由于对于$t\in(\delta,T)$ 有 $\Delta t<\delta<t$，我们得到

$$\int_\delta^T\int_{\mathbb{R}}|a^{\Delta t}(t,x+h)-b^{\Delta t}(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le C(h\Delta t^{-1}+\Delta t)$$

因此，总之，对于另一个依赖于 M,T 和 $|\mu_0|$的常数 C，我们得到

$$\int_\delta^T\int_{-M}^M|u(t,x)-u(t,x+h)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le C(h\Delta t^{-1}+\Delta t),\qquad\forall\,\Delta t<\delta\tag{5.16}$$

取 $\Delta t=h^{1/2}$（这是可行的，因为根据假设 $h^{1/2}<\delta$），我们得到

$$\int_\delta^T\int_{-M}^M\frac{|u(t,x)-u(t,x+h)|}{h^{1/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t<2C,\qquad\forall h\quad\text{such that } h^{1/2}<\delta\tag{5.17}$$

相反，若 $h^{1/2}\ge\delta$，则显然有

$$\int_\delta^T\int_{-M}^M\frac{|u(t,x)-u(t,x+h)|}{h^{1/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le\frac{2MT}{\delta}.\tag{5.18}$$

这就证明了

$$\sup_{h>0}\int_\delta^T\int_K\frac{|u(t,x)-u(t,x+h)|}{h^{1/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le\frac{C}{\delta},\qquad\forall\quad K\subset\mathbb{R}\text{ compact}.\tag{5.19}$$

□

6. Applications to the Euler system with $\gamma=3$

本节将本文的结果应用于等熵气体动力学系统，其中 $\gamma=3$，描述等熵气体的密度 ρ 和动量 $m=\rho u$的演化：

$$\begin{aligned}&\partial_t\rho+\partial_x m=0,\\&\partial_t m+\partial_x(m^2/\rho+\rho^3/3)=0\end{aligned}\tag{6.1}$$

该系统的黎曼不变量为

$$w=\frac{m}{\rho}-\rho,\qquad z=\frac{m}{\rho}+\rho\tag{6.2}$$

及其对应的特征值

$$\lambda_1(w,z)=w,\qquad\lambda_2(w,z)=z.$$

我们考虑取值于紧集中的解

$$\mathcal{K} := \left\{ (\rho, m) \;\middle|\; |(\rho, m)| \le M, \quad \rho \ge c \right\}$$

其中 c， M 从现在起均为固定常数。

定义 6.1 ($\mathcal{K}$中的熵解）。若函数 $\boldsymbol{u} = (\rho, m) \in \mathbf{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R};\, \mathcal{K})$ 是 $\mathcal{K}$ 中方程 (6.1) 的弱解，且耗散每一个凸熵 $\eta : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$:，则称其为熵解。

$$\partial_t \eta(\boldsymbol{u}) + \partial_x q(\boldsymbol{u}) \le 0 \quad \text{in } \mathscr{D}'$$

其中 q 是相应的熵通量 $\nabla q = \nabla \eta Df$，并且

$$f = \begin{pmatrix} m \\ \frac{\rho^3}{3} + \frac{m^2}{\rho} \end{pmatrix}.$$

注记 6.2。下面依次给出一些说明。首先，回顾一下，凸性必须针对守恒变量（ρ, m）进行检验。其次，有一个更微妙的问题：在 $\mathcal{K}$ 中熵解的定义里，我们要求所有凸熵 η： $\mathcal{K} \to \mathbb{R}$ 都具有耗散性。然而，这类熵可能无法作为凸函数延拓到整个集合 $\{(\rho,\ m)\ \in\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \mid \rho \neq 0\}$。符合我们定义的一类解的例子是采用单位黏性矩阵的消失黏性解，满足 $\operatorname{Im} \boldsymbol{u}^\varepsilon \subset \mathcal{K}$对所有 $\varepsilon > 0$均成立，其中 $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ 是满足下式的黏性近似解

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon_t + f(\boldsymbol{u}^\varepsilon)_x = \varepsilon \boldsymbol{u}^\varepsilon_{xx}.$$

我们回顾一下，函数 $\eta \in C^2$ 是该系统的熵，当且仅当它在黎曼坐标 $(w,\ z)$ 下满足

$$\eta_{wz}(w,z) = \frac{-\lambda_{1z}}{\lambda_1 - \lambda_2}\eta_w(w,z) + \frac{\lambda_{2w}}{\lambda_1 - \lambda_2}\eta_z(w,z) = 0. \tag{6.3}$$

众所周知，系统（6.1）具有一个严格凸熵，即能量：

$$\eta_E(\rho, m) = \frac{1}{2} m^2/\rho + \frac{1}{6}\rho^3.$$

在下面的命题中，我们利用能量证明：若熵解 $(\rho,\ m)$ 在 $[0,T]\times\mathbb{R}$ 中满足 $\rho \ge c > 0$，则其黎曼不变量是 Burgers 方程的拟熵解。

命题 6.3。设 $\boldsymbol{u} = (\rho,\ m) \in \mathbf{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R},\ \mathcal{K})$ 是 $\mathcal{K}$ 中（6.1）的熵解。那么 $w = u - \rho$ 和 $z = u + \rho$ 是 *Burgers* 方程的拟熵解，即它们满足定义 *2.1*，其中 $f(u) = u^2/2$。

证明。我们证明 w 是 Burgers 方程的拟熵解；对 z 的证明完全相同。根据拟熵解的定义，我们需要证明对任意 η： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$， $\eta \in C^2$，都有

$$\mu_\eta = \partial_t \eta(w) + \partial_x q(w) \in \mathscr{M}([0,T]\times\mathbb{R})$$

其中 q 是 η的熵通量， $q'(w) = w\eta'(w)$。从 η出发，我们通过在黎曼不变量中设定以下形式，构造等熵系统 (6.1) 的熵-熵通量对：

$$\bar\eta(w,z) := \eta(w), \qquad \bar q(w,z) := q(w) \qquad \forall\ w < z.$$

显然可以验证，如果 η， q 是 Burgers 方程的熵—熵通量对，那么 $\bar\eta$， $\bar q$ 就是等熵系统（6.1）的熵—熵通量对。现在我们证明，当将 $\eta(\rho,\ m)$ 视为原变量 C^2 的函数时，它位于区域 $\rho > 0$ 内。这相当简单，因为我们有 ρ， m而且坐标变换（ $\eta \in C^2$6.2）在 中是 $\rho > 0$。这表明 $\bar\eta \in C^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\setminus\{\rho =$

0}）。显然，由于能量 η_E 严格凸， $\bar{\eta}$ 是 C^2 ，且 $\mathcal{K}$ 是一个紧集，因此存在一个足够大的常数 $C>0$ ，使得熵 $S:=\bar{\eta}+C\eta_E$ 在 $\mathcal{K}$上为凸函数。因此，由假设可知， $\boldsymbol{u}$ 是（6.1）在 中的一个熵解（定义 6.1），于是我们有

$$0 \geq \mu_S := \partial_t S(\boldsymbol{u}) + \partial_x Q(\boldsymbol{u}) \in \mathscr{M}([0,T]\times\mathbb{R}) \tag{6.4}$$

其中 Q 是 S的熵通量，因此 μ_S 是一个非正测度。但现在根据算子 $\eta \mapsto \mu_\eta$ 的线性性，我们可以写成

$$\mu_\eta = \mu_{\bar{\eta}} = \mu_S - C\mu_{\eta_E} \in \mathscr{M}([0,T]\times\mathbb{R})$$

这就证明了该断言。 □

以下定理由 Lions、Perthame 和 Tadmor 在 [22] 中给出。这里我们直接考虑指数为 $\gamma=3$ 的情形。

定理 6.4。 设 $\boldsymbol{u}$ 是方程 (6.1)的熵解。那么，对于某个非正测度 $m\in\mathscr{M}([0,T]\times\mathbb{R})$，有

$$\partial_t g(t,x,v) + v\partial_x g(t,x,v) = \partial_{vv} m \tag{6.5}$$

其中

$$g(t,x,v) := \begin{cases} 1 & if\ w(t,x) \leq v \leq z(t,x) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中 $w(t,x)$ $z(t,x)$ 是 $\boldsymbol{u}(t,x)$的黎曼坐标。

在下述定理中，我们利用定理 4.5 和命题 6.3 推得测度 $(p_{t,x})_\sharp m$ 集中在一个 1-可求长集 $\mathbf{S}\subset[0,T]\times\mathbb{R}$上。

定理 6.5. 设 $\boldsymbol{u}=(\rho,m)\in\mathbf{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R};\mathcal{K})$ 是 (6.1)的熵解。那么， $(p_{t,x})_\sharp m$ 集中在一个 1-可求长集 $\mathbf{S}\subset[0,T]\times\mathbb{R}$上。

证明。 **1.** 由命题 6.3 我们推得 w,z 是 Burgers 方程的拟熵解。根据命题2.3 这等价于

$$\partial_t\chi + v\partial_x\chi = \mu_0 + \partial_v\mu_1, \qquad \chi(t,x,v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v\leq z(t,x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\partial_t\psi + v\partial_x\psi = \sigma_0 + \partial_v\sigma_1, \qquad \psi(t,x,v) := \begin{cases} 1 & \text{if } v\leq w(t,x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.7}$$

对于某些局部有限测度 μ_0,σ_i。

回顾式 (3.30) 中给出的集合 $\mathrm{P}\chi$, $\mathrm{P}\psi$ 的定义，它们分别是由所有满足 (6.6) 和 (6.7) 的局部有限测度对 (μ_0,μ_1) 和 (σ_0,σ_1) 构成的集合。通过适当替换测度 μ_i,σ_i，我们可以假设测度对 (μ_0,μ_1) 和 (σ_0,σ_1) 关于定义 3.17 中引入的关系 $\preceq$ 是极小的。因此，由定理 4.3、4.5 可立即推得 $\nu_1 := (p_{t,x})_\sharp|\mu_1|$ 和 $\xi_1 := (p_{t,x})_\sharp|\sigma_1|$ 集中在 1-可求长集 S $\subset[0,T]\times\mathbb{R}$ 上，其中 S 定义为

$$\mathbf{S} := \left\{ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{r\downarrow 0} \frac{(p_{t,x})_\sharp\big(|\mu_1|+|\sigma_1|+|\mu_0|+|\sigma_0|\big)(B_r(t,x))}{r} > 0 \right\} \tag{6.8}$$

2. 考虑当 $i=0,1$ 时的析解，

$$\mu_i = \mu_i^{(t,x)}\otimes\nu_i, \qquad \sigma_i = \sigma_i^{(t,x)}\otimes\xi_i$$
$$\nu_i := (p_{t,x})_\sharp|\mu_i|, \quad \xi_i := (p_{t,x})_\sharp|\sigma_i|$$

根据命题 4.14，我们推得存在某些可测函数 $\bar{w}(t,\ x)$ 和 $\bar{z}(t,\ x)$

$$\begin{aligned}\mu_0^{(t,x)} &= e(t,x)\delta_{\bar{z}(t,x)}, \qquad \text{for } \nu_0\text{-a.e. } (t,x)\in \mathbf{S}^c\\ \sigma_0^{(t,x)} &= \widetilde{e}(t,x)\delta_{\bar{w}(t,x)}, \qquad \text{for } \xi_0\text{-a.e. } (t,x)\in \mathbf{S}^c\end{aligned} \tag{6.9}$$

其中 $e,\ \widetilde{e}$ 是一些取值仅属于 $\{-1,1\}$ 的可测函数。注意，

$$\rho(t,x)=z(t,x)-w(t,x)=\int_{\mathbb{R}}\chi(t,x,v)-\psi(t,x,v)\,\mathrm{d}v,$$

$$m(t,x)=\int_{w(t,x)}^{z(t,x)} v\,\mathrm{d}v=\int_{\mathbb{R}} v(\chi(t,x,v)-\psi(t,x,v))\,\mathrm{d}v$$

因此，将 (6.7从 (6.6中减去，并在 v 上积分，我们得到质量守恒方程

$$0=\partial_t\rho+\partial_x m=(p_{t,x})_\sharp(\mu_0-\sigma_0) \qquad \text{in } \mathscr{D}'_{t,x}. \tag{6.10}$$

利用 (6.9)，因此可推得

$$e(t,x)\nu_0\llcorner\mathbf{S}^c=(p_{t,x})_\sharp\mu_0\llcorner\mathbf{S}^c=(p_{t,x})_\sharp\sigma_0\llcorner\mathbf{S}^c=\widetilde{e}(t,x)\xi_0\llcorner\mathbf{S}^c$$

并且由于 $\nu_0,\ \xi_0$ 是正测度，且 $e,\ \widetilde{e}\in\{-1,1\}$，我们得出

$$\xi_0\llcorner\mathbf{S}^c=\nu_0\llcorner\mathbf{S}^c \quad \text{and} \quad e(t,x)=\widetilde{e}(t,x) \qquad \text{for } \nu_0\text{-a.e. and } \xi_0\text{-a.e.} \tag{6.11}$$

我们推得，将 $\mu_0,\ \sigma_0$ 限制在 $\mathbf{S}^c$ 上，可写成如下形式

$$\mu_0\llcorner\mathbf{S}^c=e(t,x)\delta_{\bar{z}(t,x)}\otimes\mathbf{j}, \qquad \sigma_0\llcorner\mathbf{S}^c=e(t,x)\delta_{\bar{w}(t,x)}\otimes\mathbf{j} \tag{6.12}$$

其中$\mathbf{j}:=\nu_0\llcorner\mathbf{S}^c=\xi_0\llcorner\mathbf{S}^c$。再利用初等恒等式

$$\frac{m(t,x)^2}{\rho(t,x)}+\frac{\rho(t,x)^3}{12}=\int_{w(t,x)}^{z(t,x)} v^2\,\mathrm{d}v=\int_{\mathbb{R}} v^2(\chi(t,x,v)-\psi(t,x,v))\,\mathrm{d}v$$

我们将（6.6）、（6.7）分别乘以 v，并用（6.7）减去（6.6），即可推出

$$0=\partial_t m+\partial_x\Big(\frac{m^2}{\rho}+\frac{\rho^3}{3}\Big)=(p_{t,x})_\sharp(\sigma_1-\mu_1)+\int v\,\mathrm{d}(\mu_0-\sigma_0)(\cdot,\cdot,v) \tag{6.13}$$

其中，我们用 $\int v\,\mathrm{d}(\mu_0-\sigma_0)(\cdot,\cdot,v)$ 表示定义在 (t,x) 上的测度，其定义为

$$\iint\varphi(t,x)\,\mathrm{d}\Big[\int v\,\mathrm{d}(\mu_0-\sigma_0)(\cdot,\cdot,v)\Big](t,x):=\iiint\varphi(t,x)v\,\mathrm{d}\mu_0-\iiint\varphi(t,x)v\,\mathrm{d}\sigma_0$$

对所有 $\varphi:\ [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续且具有紧支撑。由于 $\sigma_1\llcorner\mathbf{S}^c=0=\mu_1\llcorner\mathbf{S}^c$，由（6.13）可推出

$$0=\int v\,\mathrm{d}(\mu_0-\sigma_0)(\cdot,\cdot,v)\llcorner\mathbf{S}^c \tag{6.14}$$

利用表达式（6.12），这意味着

$$\bar{z}(t,x)\mathbf{j}=\bar{w}(t,x)\mathbf{j} \qquad \text{for } \mathbf{j}\text{-a.e. } (t,x). \tag{6.15}$$

但这恰好意味着，对于$\mathbf{j}$-几乎处处的 (t,x)，$\bar{w}(t,x)=\bar{z}(t,x)$。因此

$$\partial_{vv}m\llcorner\mathbf{S}^c=\partial_v(\mu_1-\sigma_1)\llcorner\mathbf{S}^c+(\mu_0-\sigma_0)\llcorner\mathbf{S}^c=0.$$

由于 m 在 v中紧支撑，因此这意味着 $m=0$ 属于 $\mathbf{S}^c$，至此证明完毕。□

现在我们分析激波结构，以获得有关耗散测度的更多信息。

定义 6.6. 一对状态 $\boldsymbol{u}^-,\ \boldsymbol{u}^+\in\mathcal{K}$ 是一个可容许激波，当且仅当

- Rankine-Hugoniot 条件成立：

$$\begin{aligned}\frac{z_+^2}{2}-\frac{z_-^2}{2}-\sigma(z_+-z_-)&=\frac{w_+^2}{2}-\frac{w_-^2}{2}-\sigma(w_+-w_-)\\ \frac{z_+^3}{3}-\frac{z_-^3}{3}-\sigma\Big(\frac{z_+^2}{2}-\frac{z_-^2}{2}\Big)&=\frac{w_+^3}{3}-\frac{w_-^3}{3}-\sigma\Big(\frac{w_+^2}{2}-\frac{w_-^2}{2}\Big)\end{aligned}\tag{6.16}$$

- 能量耗散满足：

$$d_E:=\frac{z_+^4}{4}-\frac{z_-^4}{4}-\sigma\Big(\frac{z_+^3}{3}-\frac{z_-^3}{3}\Big)-\frac{w_+^4}{4}-\frac{w_-^4}{4}-\sigma\Big(\frac{w_+^3}{3}-\frac{w_-^3}{3}\Big)\le 0\tag{6.17}$$

根据 [13] 的相同论证，我们可推得 $\mathscr{H}^1$几乎处处的点（t， x） $\in\mathbf{S}$ 是一个可容许激波，其中 $\boldsymbol{u}^-$， $\boldsymbol{u}^+$ 是 $\mathbf{S}$上的左右迹。

以下引理的证明是经典的，是稀疏波曲线与激波曲线二阶接触这一情形的特例，同时也利用了这样一个事实：对于真正非线性系统，熵耗散关于激波强度呈三次关系；关于这一众所周知事实的证明，请参见 [12,第 5] 章。

引理 6.7。 若 $\boldsymbol{u}^-,\boldsymbol{u}^+$ 是一个可容许激波，则存在一个正常数$C>0$ ，使得以下情形之一成立：

（*a*）第一族激波： $w_+<w_-$，并且

$$|z_+-z_-|\le C\cdot(w_+-w_-)^3,\qquad\left|\sigma-\frac{w_++w_-}{2}\right|\le C\cdot(w_+-w_-)^3$$

$$d_E(w^+,w^-,z^+,z^-)\le -C\cdot|w_+-w_-|^3$$

(b) 第二族的激波： $z_+<z_-$，以及

$$|w_+-w_-|\le C\cdot(z_--z_+)^3,\qquad\left|\sigma-\frac{z_++z_-}{2}\right|\le C\cdot(z_--z_+)^3$$

$$d_E(w^+,w^-,z^+,z^-)\le -C\cdot|z_+-z_-|^3$$

接下来，我们利用激波的结构推导出，可以选取（ μ_1， σ_1 ）中（6.6）、（6.7）里的测度，使其具有确定的符号。

引理 6.8。 设 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R},\ \mathcal{K})$ 是（(6.1)）的一个熵解。那么，黎曼不变量满足

$$\partial_t\chi+v\partial_x\chi=\mu_0+\partial_v\mu_1,\qquad\chi(t,x,v):=\begin{cases}1 & if\ v\le z(t,x)\\ 0 & otherwise\end{cases}\tag{6.18}$$

$$\partial_t\psi+v\partial_x\psi=\sigma_0+\partial_v\sigma_1,\qquad\psi(t,x,v):=\begin{cases}1 & if\ v\le w(t,x)\\ 0 & otherwise\end{cases}\tag{6.19}$$

其中 μ_1、 σ_1 是有符号测度。

证明。 对于几乎每个点（t， x） $\in\mathbf{S}$， （6.16）和（6.17）均成立，其中 z_+， z_- 以及 w_+， w_- 是 $\mathbf{S}$上的左右迹，根据定理 4.3、6.3，它们存在。由定理 4.3的（3），我们可以刻画（6.6）、（6.7）右端的分布。

$$\langle\mu_0\llcorner\mathbf{J}_w+\partial_v\mu_1\llcorner\mathbf{J}_w,\eta'\varphi\rangle=\int_{[0,T]\times\mathbb{R}}\int_{w_-}^{w_+}\eta'(v)(v-\sigma)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1\llcorner\mathbf{J}_w,\tag{6.20}$$

$$\langle\sigma_0\llcorner\mathbf{J}_z+\partial_v\sigma_1\llcorner\mathbf{J}_z,\eta'\varphi\rangle=\int_{[0,T]\times\mathbb{R}}\int_{z_-}^{z_+}\eta'(v)(v-\sigma)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1\llcorner\mathbf{J}_z.\tag{6.21}$$

此处与定理 6.5 μ_i的证明中一样，σ_i 取为关于关系 $\preceq$ 最小的，而 $\mathbf{J}_w$，$\mathbf{J}_z$ 是相应的跳跃集（4.3）。我们声称，除去一个 $\mathscr{H}^1$可忽略集后，有

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}_w = \mathbf{J}_z. \tag{6.22}$$

事实上，根据 $\mathbf{S}$ 的定义，我们有 $\mathbf{J}_w \cup \mathbf{J}_z = \mathbf{S}$。由于 w、z 在 $\mathbf{S}$ 上均存在左、右强迹（见 [35]），我们推得，在 $\mathscr{H}^1$意义下，$\mathbf{S}$ 几乎处处满足 Rankine-Hugoniot 条件（6.16）。特别地，有如下结论：

$$w^-(x) \neq w^+(x) \quad \Leftrightarrow \quad z^-(x) \neq z^+(x) \quad \text{for } \mathscr{H}^1\text{-a.e. } x \in \mathbf{S}. \tag{6.23}$$

由定理 4.3 的表示公式 (3)，我们推得 $w^- \neq w^+$ 对 $\mathscr{H}^1$-几乎处处的 J_w成立；由此结合 (6.23) 可得 $z^- \neq z^+$ 对 $\mathscr{H}^1$-几乎处处的 J_w成立。然而，$\mathscr{H}^1$-几乎处处的点 $x \in \mathrm{J}_w$ 不可能是 z的消失平均振荡点，因此根据定理 4.3，它们除去 $\mathscr{H}^1$-零测子集后均包含于 J_z 中：这表明 $\mathrm{J}_w \subset \mathrm{J}_z$。反向包含关系可用对称方法证明，由此最终证明了结论 (6.22)。

我们将 $\mathbf{S}$相应地划分为引理 $\mathbf{S}^1$ 中的 1-激波$\mathbf{S}^2$ 和 2-激波，依据引理 6.7。特别地，以 1-激波为例，有

$$\begin{aligned}\mu_0 \llcorner \mathbf{S}^1 + \partial_v \mu_1 \llcorner \mathbf{S}^1 &= \mathbf{1}_{(w^+,w^-)}(v)(v-\sigma)\mathscr{H}^1 \llcorner \mathbf{S}^1 \\ &= \mathbf{1}_{(w^+,w^-)}(v)(v-\bar{\sigma})\mathscr{H}^1 \llcorner \mathbf{S}^1 + \mathbf{1}_{(w^+,w^-)}(v)(\bar{\sigma}-\sigma)\mathscr{H}^1 \llcorner \mathbf{S}^1 \\ &=: \partial_v \widetilde{\mu}_1 + \widetilde{\mu}_0\end{aligned}$$

其中 $\bar{\sigma} = (w^+ + w^-)/2$，并且

$$\widetilde{\mu}_1 = \mathbf{1}_{(w^+,w^-)}(v)(f(v) - f(w^+) - \bar{\sigma}(v - w^+))\mathscr{H}^1 \llcorner \mathbf{S}^1$$

其中 $f(v) = v^2/2$。此外

$$\sigma_0 \llcorner \mathbf{S}^1 + \partial_v \sigma_1 \llcorner \mathbf{S}^1 = \mathbf{1}_{(z^-,z^+)}(v)(v-\sigma)\mathscr{H}^1 \llcorner \mathbf{S}^1 =: \widetilde{\sigma}_0$$

引理 6.7 立即推出 $\widetilde{\mu}_1$ 为正号，且 $\widetilde{\mu}_0$，$\widetilde{\sigma}_0$ 是局部有限测度，因为它们满足对某个常数 $C > 0$，

$$|\widetilde{\mu}_0|, |\widetilde{\sigma}_0| \leq C|\mu_{\eta_E}| \qquad \text{as measures}$$

其中 η_E 是能量耗散。因此，在 1-激波上有

$$\mu_0 \llcorner \mathbf{S}^1 + \partial_v \mu_1 \llcorner \mathbf{S}^1 = \partial_v \widetilde{\mu}_1 + \widetilde{\mu}_0, \qquad \sigma_0 \llcorner \mathbf{S}^1 + \partial_v \sigma_1 \llcorner \mathbf{S}^1 = \widetilde{\sigma}_0$$

其中 $\widetilde{\mu}_1$ 是正测度，而 $\widetilde{\mu}_0$，$\widetilde{\sigma}_0$ 是局部有限测度。对 2-激波也有完全对称的分解，证明至此完成。□

推论 6.9. 设 $\boldsymbol{u} = (\rho, m) \in \mathbf{L}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}; \mathcal{K})$ 是 (6.1) 的熵解。那么 $(\rho, m) \in B^{1/2}$, $\infty \overset{1}{loc}$,.

证明. 证明由定理 5.2 和引理 6. 8.

□

致谢。F. Ancona、E. Marconi 和 L. Talamini 均为“F. Severi国家高等数学研究所”旗下 GNAMPA 的成员。F. Ancona 和 E. Marconi 获得 PRIN项目 20204NT8W4“非线性演化偏微分方程、流体动力学与输运方程：理论基础与应用”以及 PRIN 2022 PNRR项目P2022XJ9SX“道路上的异质性——建模、分析与控制”的部分资助。E. Marconi 还获得 H2020-MSCA-IF 项目“A Lagrangian approach: from conservation laws to line-energy Ginzburg-Landau models”的部分资助。Luca Talamini 获得 GNAMPA - Indam 2025项目“守恒律系统与动力学方程的拉格朗日表示”的部分资助。

利益声明。作者声明不存在需要披露的利益冲突。

References

[1] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。《有界变差函数与自由不连续问题》。 *Oxford Science Publications. Clarendon Press*，2000 年。[2] F. Ancona、S. Bianchini、A. Bressan、R. M. Colombo 和 K. T. Nguyen，《平衡律解正则性的例子与猜想》， *Quarterly Appl. Math.* **81**（2023），433–454[3] F. Ancona、A. Bressan、E. Marconi 和 L. Talamini，《标量守恒律的中间区域》， *Journal of Differential Equations*，422，2025 年。doi:10.1016/j.jde.2024.12.006。[4] F. Ancona、E. Marconi 和 L. Talamini，《守恒律系统的刘维尔型定理与动理学表述》，arXiv: 。https://arxiv.org/abs/ 。。[5] F. Ancona 和 L. Talamini，《具有空间不连续通量的守恒律可达集的向后—向前刻画》， *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*，205 2026 10 1016 2025 103814，，doi: . / j.matpur. . 。[6] G. Bellettini、L. Bertini、M. Mariani 和 M. Novaga。《标量守恒律的 Γ-熵代价》。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*，195:261–309，2010 年。[7] S. Bianchini、P. Bonicatto 和 E. Marconi。《多维守恒律的拉格朗日方法》。 *preprint SISSA 36/MATE*，2017 年。[8] S. Bianchini 和 E. Marconi。《一维空间中标量守恒律熵解的结构》 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*，2017 年 6 月。[9] P. Bonicatto，《非光滑向量场轨迹的解缠及 Bressan 紧性猜想》， *PhD thesis*，SISSA，2017 年。[10] C. Bourdarias、M. Gisclon 和 S. Junca，《分数阶 BV 空间及其在标量守恒律中的应用》， *J. Hyperbolic Differ. Equ.*，11(4):655–677，2014 年。[11] Brenier, Y.《标量守恒律的平均多值解》。 *SIAM Journal on Numerical Analysis* **21** 6 1013 37 ,1984 ( ) – 。

[12] A. Bressan，《双曲守恒律系统：一维柯西问题》。*Oxford University Press*，牛津，2000 年。[13] C. De Lellis、F. Otto 和 M. Westdickenberg。《多维标量守恒律熵解的结构》。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*，170 (2)，2003 年。[14] De Lellis C., Riviere T. 《一维空间中熵测度的可整流性》 *Journal des Mathematiques Pures et Appliquees* 82 10 1343 1367, 2003 ，( )，- Friedlander, F. [15] G., and Joshi, M.，《分布理论导论》，第 2 版，*Cambridge University Press*，1999 年。[16] F. Golse 和 B. Perthame，《标量守恒律的最优正则化效应》， *Rev. Mat. Iberoam.* **29** 2013 4, 1477 1504 10 4171 765 ( ), 第 – 期。DOI: . /RMI/ 。[17] Golding, W.，《等熵欧拉方程的无条件正则性与迹结果》，其中 $\gamma = 3$ *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 55, 5, 5751 5781, 2023 ，， [18] *Birkhäuser Boston* 2008 第 卷，第 期，第 – 页。S. Krantz 和 H. Parks。《几何积分理论》。，。[19] S. Kruzhkov，《含多个空间变量的一阶拟线性方程》， *Mat. Sb.* **123** (1970)，228–255。英文译文见 *Math. USSR Sb.* **10** (1970)，217–273。[20] S. Hwang、A. Tzavaras，《守恒律近似解的动力学分解：在弛豫与扩散—弥散近似中的应用》， *Communications in Partial Differential Equations* 27 5 1229 1254, 2002 ，( ): – 。[21] P. G. LeFloch，《双曲守恒律系统：经典与非经典激波理论》， *Birkhäuser*，2002 年。[22] P.-L. Lions、B. Perthame 和 E. Tadmor。《等熵气体动力学与 p 系统的动理学表述》。 *Communications in Mathematical Physics*，163(2)，1994 年。[23] P.-L. Lions、B. Perthame 和 E. Tadmor。《多维标量守恒律及相关方程的动理学表述》。 *J. Amer. Math. Soc.*，7(1):169–191，1994 年。[24] M. Mariani。《随机标量守恒律的大偏差原理》。 *Probab. Theory Related Fields* 147 3 4 607 648, 2010 ，(-): – 。[25] E. Marconi。《有限熵产生的标量守恒律弱解的结构》。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*，61(1)，2019 年。

[26] E. Marconi。《特殊区域中 Aviles–Giga 泛函极小化子的刻画》。
Archive for Rational Mechanics and Analysis，242(2):1289–1316，2021 年。[27] E. Marconi。《Burgers 方程熵缺陷测度的可整流性》。 *Journal of Functional Analysis* 283 6 ，( )。[28] E. Marconi，《微磁学模型中熵缺陷测度的可整流性》，
Adv. Calc. ( )，第 – 期。
Var. **16** 2023 1, 233 257 10 1515 2021 0012 https://doi.org/ . /acv- - 。[29] E. Marconi，《一维空间标量守恒律的正则性估计》。
J. ( )，– 。[30] O. A. Oleinik。《非线性微分方程的不连续解》。
Hyperbolic Differ. Equat. **15** 2018 623 691
Amer. Math. Soc.，：– 。[31] L. Silvestre《标量守恒律的振荡性质》 *Comm. Pure. Appl. Math*，72 6 2018( )，。[32] S.K. Smirnov《将无散向量场分解为基本无散场及一维正规流的结构》。 *St. Petersburg Math Journal*，5(4)，1994 年。[33] L. Talamini，《守恒律系统 L^∞ 解的强时间正则性与衰减》， *arXiv preprint* arXiv:2507.18427，2025 年。doi:10.48550/arXiv.2507.18427。[34] A. Vasseur《等熵气体动力学系统半离散动力学格式的收敛性，其中 $\gamma = 3$。*Transl. (2)* 26 95 172, 1963
Indiana University Mathematics Journal，48(1)，1999 年。[35] Vasseur, Alexis，《多维标量守恒律解的强迹》。*Arch. Ration. Mech. Anal.* **160** (3) (2001)，181–193。[36] Vasseur, A.，《含有 $\gamma = 3$ *Commu-* 的等熵气体动力学系统的时间正则性》，，第 卷，第 期，– 。[37] A.I. Vol'pert《BV 空间与拟线性方程》。 *Mat. Sb. (N.S.)*，73 (115):255–302，1967 年。
nications in Partial Differential Equations 24, 11 12, 1999

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi Civita", Università di Padova
Email address: ancona@math.unipd.it（FABIO ANCONA）

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi Civita", Università di Padova
Email address: elio.marconi@unipd.it（ELIO MARCONI）

Mathematics Area, SISSA, Trieste*Email address*:
ltalamin@sissa.it (LUCA TALAMINI)