arXiv:2601.03747v1 [math.OC] 7 Jan 2026

具有奇异终端条件的矩阵黎卡提倒向随机微分方程与带线性终端约束的随机线性二次控制

Julia Ackermann[1], Thomas Kruse[2],Petr Petrov[3],Alexandre Popier[4]

[1] 数学与信息学系，伍珀塔尔大学，
德国；电子邮箱：jackermann a○uni-wuppertal.de

[2] 数学与信息学系，伍珀塔尔大学，
德国；电子邮件：tkruse a○uni-wuppertal.de

[3] 数学与信息学系，伍珀塔尔大学，
德国；电子邮件：ppetrov a○uni-wuppertal.de

[4] 曼恩数学实验室，勒芒大学，
法国；电子邮件：alexandre.popier a○univ-lemans.fr

2026年1月8日

我们分析一类由多资产最优交易执行问题引出的、具有随机系数的多维线性二次随机控制问题。这类问题的受控状态动力学没有扩散项，并带有终端约束，要求终端状态属于预先指定的随机线性子空间。我们推导相应的黎卡提倒向随机微分方程（倒向随机微分方程），并为其奇异终端条件确定一种恰当的形式化表述。通过惩罚方法，我们证明了该黎卡提型倒向随机微分方程的最小上解存在，并利用它刻画值函数和最优控制。我们分析了该上解在终端时刻附近的渐近行为，并讨论了可以得到闭式解的特殊情形。

1. 引言

本文分析具有随机系数的多维线性二次型（LQ）随机最优控制问题。在这类问题中，受控状态过程不具有扩散行为，但要求其在终端时刻属于状态空间中预先指定的随机线性子空间。

为正式引入该问题，我们固定维数 $d \in \mathbb{N}$、时间范围 $T \in (0,\infty)$，以及一个支持一维布朗运动[1] W 的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$。令 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 为由 W 生成的完备滤过。设[2] $\eta\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d_{++}$，$\lambda\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d_{+}$，$\phi\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 和 $A\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 为渐进可测过程，并令 θ 为一个取值于 $\mathbb{S}^d_+$ 的 $\mathcal{F}_T$-可测随机变量。

为形式化终端状态约束，我们令 $v_1,\dots,v_d\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ 为 $\mathcal{F}_T$-可测随机向量，并记 $C(\omega) = \operatorname{span}(v_1(\omega)\dots,v_d(\omega))$，其中 $\omega\in\Omega$。我们不对向量 $v_1(\omega)\dots,v_d(\omega)$ 施加任何线性无关条件，因此，维数 $\dim(C)$ 本身是一个随机量。

对于所有 $t\in[0,T]$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$，我们考虑如下最小化问题

$$J(t,x,u) = E\left[\int_t^T \begin{pmatrix} X^u_s \\ u_s\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \lambda_s & \phi_s^\top \\ \phi_s & \eta_s\end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^u_s \\ u_s\end{pmatrix} ds + \langle X^u_T, \theta X^u_T\rangle \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \tag{1}$$

在所有满足 $u\in L^1([t,T])$ P-几乎处处成立的渐进可测过程 $u\colon [t,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^d$ 中进行最小化，这些过程诱导出具有如下动力学[3]的状态过程

$$X^u_s = x + \int_t^s (A_r X^u_r - u_r)\,dr, \quad s\in[t,T], \tag{2}$$

使得

$$X^u_T = \lim_{s\to T} X^u_s \in C, \quad P\text{-a.s.} \tag{3}$$

我们将所有此类 u 的集合记为 $\mathcal{A}_0(t,x)$。此外，对于所有 $t\in[0,T]$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$，我们定义

$$v(t,x) = \operatorname*{ess\,inf}_{u\in\mathcal{A}_0(t,x)} J(t,x,u). \tag{4}$$

由于对（1）的最小化与状态动力学（2）共同构成一个 LQ 随机最优控制问题，尽管它带有非标准的随机终端状态约束（3），因此自然会尝试通过黎卡提倒向随机微分方程的解（Y,Z）来刻画值函数和最优策略

[1]为简便起见，本文仅考虑一维布朗运动。推广到多维情形不会带来本质上的困难，可通过类似的论证处理。[2]在此处及下文中，我们分别用 $\mathbb{S}^d_{++}$、$\mathbb{S}^d_+$ 和 $\mathbb{S}^d$ 表示对称正定、对称半正定和对称（$d\times d$）矩阵的集合。[3]在适当的假设下，我们还可以考虑如下形式的更一般的状态动力学 $\dot{X}_s = B_s u_s + A_s X_s$，$s\in[t,T]$。详情请参见注 3.6。

（倒向随机微分方程）。在终端时刻 T 之前，（Y, Z）的动力学是标准的，可以从文献中推导得出（例如，参见 [26,27], [37, 式（55）], [40, 第 6]章）。

一个核心问题是如何将终端约束 (3) 纳入黎卡提方程的终端条件。理想情况下，对于每个 $t \in [0,T)$，随机矩阵Y_t 通过其对应的二次型刻画值函数 $v(t,\cdot)$，因此自然会预期，对于所有满足 $\lim_{t\to T}\psi_t \notin C$和 $\lim_{t\to T}\langle\psi_t$的路径 (ψ_t)，都有 $\lim_{t\to T}\langle\psi_t, Y_t\psi_t\rangle = \infty$；而对于所有满足 $\lim_{t\to T}\psi_t \in C$的路径 (ψ_t)，都有 $Y_t\psi_t\rangle = \langle\psi_T, \theta\psi_T\rangle$。结合 (1) 和 (2) 的特定结构，我们得到以下具有奇异终端条件的黎卡提方程的非正式候选形式

$$\begin{aligned} &dY_t = \big((Y_t-\phi_t^\top)\eta_t^{-1}(Y_t-\phi_t) - \lambda_t - Y_tA_t - A_t^\top Y_t\big)dt + Z_t dW_t, \quad t\in[0,T), \\ &Y_T = \infty \mathbb{1}_{C^c} + \theta\mathbb{1}_C. \end{aligned} \tag{5}$$

我们的分析表明，与一维情形（例如，参见 [28] 以及下文备注 1.2）一样，采用 (5) 的上解来求解随机控制问题 (4) 更为有利。本文的一项主要贡献是对 (5) 中的奇异终端条件 $Y_T = \infty\mathbb{1}_{C^c} + \theta\mathbb{1}_C$ 作出如下严格形式化表述。

定义 1.1。如果对于所有 $t \in [0,T)$ 都成立，则称一对渐进可测过程（Y， Z）：$[0,T)\times\Omega \to \mathbb{S}_+^d \times \mathbb{S}^d$ 为方程（5）的上解，即

$$E\left[\sup_{s\in[0,t]}\|Y_s\|^2 + \int_0^t \|Z_s\|^2 ds\right] < \infty$$

并且对所有 $t \in [0,T)$，$s \in [0,t]$ 均以 P-几乎处处成立，即

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \big((Y_r-\phi_r^\top)\eta_r^{-1}(Y_r-\phi_r) - \lambda_r - Y_rA_r - A_r^\top Y_r\big)dr + \int_s^t Z_r dW_r \tag{6}$$

此外，对于任意过程（ψ_t）$_{t\in[0,T]}$，若其在时刻 T具有 P-几乎处处的左连续路径，则有 P-几乎处处：当 $\psi_T \notin C$ 时，$\liminf_{t\to T}\langle\psi_t, Y_t\psi_t\rangle = \infty$；当$\psi_T \in C$ 时，$\liminf_{t\to T}\langle\psi_t, Y_t\psi_t\rangle \geq \langle\psi_T, \theta\psi_T\rangle$。

注 1.2。假设 $d = 1$。则对于每个 $\omega \in \Omega$，我们或者有 $C(\omega) = \{0\}$，或者有 $C(\omega) = \mathbb{R}$。因此，Y 满足定义 1.1 意义下的奇异终端条件，当且仅当：如果 $C(\omega) = \{0\}$，则 $\liminf_{t\to T} Y_t(\omega) = \infty$；并且如果 $C(\omega) = \mathbb{R}$，则 $\liminf_{t\to T} Y_t(\omega) \geq \theta(\omega)$。定义随机变量 ξ：当 $C(\omega) = \{0\}$ 时，$\xi(\omega) = \infty$；当 $C(\omega) = \mathbb{R}$ 时，$\xi(\omega) = \theta(\omega)$。于是，终端条件可以写为 $\liminf_{t\to T} Y_t \geq \xi$。由此我们证明，在情形 $d = 1$ 下，定义 1.1 与 [28, 定义 1] 中关于具有奇异终端条件的倒向随机微分方程上解的定义一致。

以下结果概述了本文的主要研究成果。

定理 1.3。假设 A 是一个有界过程，并且存在 $\delta \in (0,\infty)$，使得对所有满足以下条件的 $s \in [0,T]$，P- 几乎处处成立

$$\begin{pmatrix} \lambda_s & \phi_s^\top \\ \phi_s & \eta_s \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta\,\mathrm{Id} \end{pmatrix},$$

并且

$$E\left[\int_0^T \left(\|\lambda_r\|^3 + \|\phi_r\|^3 + \|\eta_r\|^3\right) dr\right] < \infty.$$

于是，根据定义 *1.1*，倒向随机微分方程（*5*）存在一个最小解 (Y, Z)。此外，对所有 $t \in [0,T)$， $x \in \mathbb{R}^d$ P-几乎处处成立 $v(t,x) = \langle x, Y_t x\rangle$。最后，对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T)$，最优状态过程 $(X_s^*)_{s\in[t,T]}$ 满足$E[\int_t^T \|\dot{X}_s^*\|^2 ds] < \infty$, $X_s^* = x + \int_t^s (-\eta_r^{-1}(Y_r - \phi_r)X_r^* + A_r X_r^*) dr$, $s \in [t,T]$, 以及条件 (3)。

解法 我们通过惩罚方法证明定理 1.3。为此，首先注意到存在一个 $\mathcal{F}_T$-可测的有界随机矩阵 $\xi\colon \Omega \to \mathbb{S}_+^d$ 使得

$$C = \ker(\xi) \quad P\text{-a.s.} \tag{7}$$

事实上，对每个 $\omega \in \Omega$，记 $C^\perp(\omega)$ 为 $C(\omega)$ 的正交补。选取一组 $\mathcal{F}_T$-可测的正交基 $u_1(\omega), \ldots, u_{k(\omega)}(\omega)$，作为 $C^\perp(\omega)$ 的基。然后令 $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k(\omega)} u_i(\omega) u_i^\top(\omega)$ 为到 $C^\perp(\omega)$ 上的正交投影。由此可知， ξ 是对称半正定矩阵，且 $C = \ker(\xi)$。此外，由于 ξ 是正交投影，因此它是有界的（在 ω 中）。

注意，满足 (7) 的 ξ 通常并不唯一。下文假设 C 由 (7) 给出，其中 $\mathcal{F}_T$ 是某个 $\mathcal{F}_T$-可测、对称半正定、有界的随机矩阵 ξ。我们将在下文证明，正如预期的那样，关于控制问题 (4) 的解以及 (5) 的解的所有结果都与 ξ 的选取无关（尤其参见推论 3.5）。

基于 ξ 的构造，我们考虑（1）的惩罚版本。更准确地说，对于所有 $n \in \mathbb{N}$、 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，令

$$J_n(t,x,u) = E\left[\int_t^T \begin{pmatrix} X_s^u \\ u_s \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \lambda_s & \phi_s^\top \\ \phi_s & \eta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_s^u \\ u_s \end{pmatrix} ds + \langle X_T^u, (\theta^n + n\xi) X_T^u\rangle \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \tag{8}$$

其中 $u\colon [t,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ 是渐进可测的，且 $u \in L^1([t,T])$ P-几乎必然成立，并且 $X_s^u = x + \int_t^s (A_r X_r^u - u_r)\, dr$、 $s \in [t,T]$。我们将所有这类 u 的集合记为 $\mathcal{A}(t,x)$。这里 θ^n、 $n \in \mathbb{N}$ 是一列有界随机矩阵，从下方收敛到 θ （详见引理 2.4 和第 3 节开头）。注意，我们不对 $u \in \mathcal{A}(t,x)$ 施加任何终端状态约束。相反，任何满足 $X_T^u \notin$ 核$(\xi) = C$ 的终端状态都会随着 n 趋于 ∞ 而受到越来越大的惩罚。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$、 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，我们定义

$$v_n(t,x) = \operatorname*{ess\,inf}_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J_n(t,x,u). \tag{9}$$

与 (8) 相关的 Riccati 型倒向随机微分方程为

$$\begin{aligned} dY_t^n &= \left((Y_t^n - \phi_t^\top)\eta_t^{-1}(Y_t^n - \phi_t) - \lambda_t - Y_t^n A_t - A_t^\top Y_t^n\right) dt + Z_t^n dW_t, \quad t \in [0,T], \\ Y_T^n &= n\xi + \theta^n. \end{aligned} \tag{10}$$

回顾一下，假设 ξ 有界。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ ，(10) 中的终端条件 $n\xi + \theta^n$ 都有界。为此，我们在第 2 节分析形式为 (10) 的 Riccati 型倒向随机微分方程，其中终端条件 ξ 为一般的 $\mathcal{F}_T$-可测、对称半正定[-]。

相关文献与应用自 Wonham [39] 于1968年开展的研究起步，并在20世纪70年代由 Bismut [6, 7] 和 Davis [11] 等人进一步发展，线性二次型随机最优控制问题已成为随机控制理论中研究最为广泛的主题之一。关于完整的论述，请参阅 [40] ；关于较新的参考文献和进展，请参阅 [37] 或 [38]。据我们所知，带终端状态约束的多维线性二次型随机最优控制问题，以及与之相关的具有奇异终端条件的 Riccati型倒向随机微分方程，迄今仅在 [23]中得到研究。

与 [23], 中一样，问题（4）受到数学金融领域最优交易执行应用的启发。为说明这种联系，我们简要介绍如何将多资产交易执行问题表述为问题（4）的特例。在这类问题中，通常规模庞大的机构投资者希望在交易期限 $[t, T]$内清算由 $d \in \mathbb{N}$种资产构成的持仓 $x \in \mathbb{R}^d$ 。投资者通过调整这 d 种资产的交易速度（u_s）$_{s\in[t,T]}$ ，来控制其持仓（X_s）$_{s\in[t,T]}$，使得 $dX_s = -u_s ds$、 $X_t = x$。这里， u_s 的正分量表示在时刻 $s \in [t, T]$卖出相应资产，而负分量则表示买入。不同于传统假设——即交易可按当时的市场价格执行——最优执行文献将价格冲击纳入考量，也就是投资者的交易对市场价格产生的不利影响。若假设价格冲击与交易速度呈线性关系，则其大小可用 $\eta_s u_s$建模，从而在时刻 $s \in [t, T]$产生瞬时交易成本 $\langle u_s、\ \eta_s u_s\rangle$。值得注意的是，非对角矩阵过程 η能够体现资产间的交叉影响，反映出交易一种资产可能影响其他资产价格这一现象。此外，通过允许 η 随时间随机演变，我们的模型考虑了随机流动性。形式为 $\langle X_s、\ \lambda_s X_s\rangle$ 的二次项可解释为在时刻 $s \in [t, T]$持有未平仓头寸 X_s所面临的风险惩罚。对瞬时交易成本和风险惩罚进行时间积分并取期望，可得到总体成本泛函，它是（1）的一个特例。最后，要求在时刻 T 完全清算投资组合，便得到终端状态约束 $X_T = 0$ （即 $C = \{0\}$）。不过，我们的框架也适用于更一般的终端投资组合配置：投资者希望实现资产间预先设定的余额关系，并以 $\xi X_T = 0$形式的线性约束表示。

近年来，金融数学、随机控制和随机分析领域对式（4）的一维（即单资产）变体及其带奇异终端条件的相关倒向随机微分方程（5）给予了广泛关注。这些研究大多超越了LQ框架，借助倒向随机微分方程方法、超过程理论或相关 Hamilton-Jacobi-Bellman方程的（黏性）解，分析更一般的齐次成本泛函，参见例如 [3, 4, 17, 18, 21, 24, 28, 35]。 [2]研究了非齐次情形。纳入价格趋势的LQ变体

或对随机目标头寸进行跟踪的情形见 $[4, 5]$。$[1, 8, 9, 10, 19, 30, 31, 32, 33, 34, 36]$探讨了带奇异终端条件的倒向随机微分方程的适定性和连续性性质。 $[16, 20]$ 纳入了随机韧性， $[12, 13, 14]$考察了博弈论方面。 $[25]$ 和 $[15]$, 分别研究了模型不确定性和制度切换动力学的影响。

除了一维情形下的这些研究成果外， $[23]$, 还提出了一种多维线性二次型表述，作者在其中除了考虑确定性的瞬时交叉价格冲击外，还纳入了持续性价格冲击和随机韧性。尽管本文未考虑持续性价格冲击和随机韧性，但在若干重要方面扩展了 $[23]$ ：本文允许存在随机瞬时交叉价格冲击 η，纳入了一般线性终端约束 $\xi X_T = 0$ ，并在动力学方程 (2) 和成本泛函 (1) 中引入了矩阵 A 和 ϕ 。这些扩展带来了新的分析挑战，包括确定 Riccati型倒向随机微分方程奇异终端条件（参见 (5)）的恰当形式化方式，以及推导适用于（惩罚型）倒向随机微分方程的先验界（命题 2.6 或命题 2.8）。与一维情形相比，最优状态轨迹缺乏单调性或有界性，因而带来了额外的技术挑战。

概述 在第 2 节中，我们研究控制问题（1）–（2）（不含约束（3），即 $C = \mathbb{R}^d$）以及与之相关的 Riccati型倒向随机微分方程（5），并假设满足凸性条件 **A1)**、关于 A 的有界性假设 **A2)** ，以及参数 λ 、 ϕ 和终端条件 θ 满足三阶矩条件 **A3)**和**A4)** 。这拓展了现有结果；在那些结果中，通常假设所有系数均有界。第 2 节的主要结果是命题 2.6。在第 2 节末尾，我们还建立了若干先验估计，这些估计对于带约束的情形很有用。

接下来，在第 3 节中，我们将约束（3）纳入状态过程 X 的终端值。我们证明，在满足条件 **A1)** 至**A3)**，且 η 满足可积性条件 **B1)** 时，具有奇异终端条件的倒向随机微分方程存在一个上解，且存在最优控制（见命题 3.3）。请注意，对终端值 θ 没有任何条件。粗略地说，所付出的代价是：解过程仅定义在 $[0, T)$ 上，而不是整个区间 $[0, T]$。

最后的第4节专门讨论 $C = \{0\}$ 的情形。在这种情形下，我们能够更精确地刻画 BSDE 解，进而分析两种场景下的最优控制： η 具有不相关乘法增量（第 4.1 节），或 η 是伊藤过程（第 4.2 节）。

记号 令 $d \in \mathbb{N}$ 和 $T \in (0, \infty)$。对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$，我们用 $\lambda_{\max}(A)$ 表示 A的最大特征值，用 $\lambda_{\min}(A)$ 表示 A的最小特征值，并用 $\|A\|_2$ 表示 A的谱范数。对于任意矩阵 A，我们将 $\|A\|$ 定义为 A的弗罗贝尼乌斯范数。此外，对于任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ，我们用 $\mathrm{tr}[A]$ 表示 A 的迹；注意，对所有 A、$B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ，均有 $\mathrm{tr}[AB] \le \|A\|\|B\|$。我们将对称正定

矩阵、对称半正定矩阵和对称 $(d \times d)$ 矩阵的集合分别记为 $\mathbb{S}^d_{++}$、 $\mathbb{S}^d_+$和 $\mathbb{S}^d$。对于矩阵 A、$B \in \mathbb{S}^d$，我们使用记号 $A \geq B$，表示矩阵 $(A-B)$ 为半正定。对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一列 $\mathbb{S}^d$值随机变量 $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$，若对每个 $n \in \mathbb{N}$，矩阵 $(Y^{n+1}-Y^n)$ 几乎必然关于 P为正（负）半定，则称该序列为非递减（非递增）。对于 $p \in [1,\infty)$，我们使用以下渐进可测[4]过程空间：

$$\mathcal{L}^p(\Omega, C([0,T],\mathbb{S}^d)) = \{f : \Omega \to C([0,T],\mathbb{S}^d) : E[\sup_{t\in[0,T]} \|f_t\|^p] < \infty\}.$$

2. 惩罚情形

本节考虑随机线性二次控制问题 (9) 及其对应的黎卡提方程 (10)。对于所有 $n \in \mathbb{N}$、$t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，该问题是最小化

$$\bar{J}(t,x,u) = E\left[\int_t^T \begin{pmatrix} X^u_s \\ u_s \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \lambda_s & \phi_s^\top \\ \phi_s & \eta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^u_s \\ u_s \end{pmatrix} ds + \langle X^u_T, \bar{\xi} X^u_T \rangle \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \tag{11}$$

其中，$\bar{\xi}$ 是一个取值于 $\mathbb{S}^d_+$ 的 $\mathcal{F}_T$-可测随机变量，控制 u: $[t,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ 是渐进可测的，并且满足 $u \in L^1([t,T])$ P-几乎处处；与 u 相关联的状态由 $X^u_s = x + \int_t^s (A_r X^u_r - u_r)\, dr$、$s \in [t,T]$ 给出。如上文所述，我们将所有这样的 u 构成的集合记为 $\mathcal{A}(t,x)$。此外，对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，定义

$$\bar{v}(t,x) = \operatorname*{ess\,inf}_{u\in\mathcal{A}(t,x)} \bar{J}(t,x,u). \tag{12}$$

与该问题对应的黎卡提方程具有如下形式

$$dY_t = \big((Y_t - \phi_t^\top)\eta_t^{-1}(Y_t - \phi_t) - \lambda_t - Y_t A_t - A_t^\top Y_t\big)dt + Z_t dW_t, \quad t \in [0,T], \quad Y_T = \bar{\xi}. \tag{13}$$

现在我们将该方程的解的概念形式化。

定义 2.1。若一对渐进可测过程 (Y,Z)：$[0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d_+ \times \mathbb{S}^d$ 满足 $E[\sup_{s\in[0,T]} \|Y_s\|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 ds] < \infty$，且对所有 $t \in [0,T]$，以下关系 P-几乎处处成立，则称其为方程 (13) 的一个解：

$$Y_t = \bar{\xi} - \int_t^T \big((Y_s - \phi_s^\top)\eta_s^{-1}(Y_s - \phi_s) - \lambda_s - Y_s A_s - A_s^\top Y_s\big)ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{14}$$

显然，在对系数作出适当的可积性或有界性假设（例如见下文 **A1)–A3)** ）时，解的分量 Y 具有连续路径。

接下来，我们给出关于成本矩阵的正性假设。

[4]关于由布朗运动 W生成的滤过。

A1) 存在 $\delta \in (0,\infty)$，使得对所有 $s \in [0,T]$， P-几乎必然成立：

$$\begin{pmatrix} \lambda_s & \phi_s^\top \\ \phi_s & \eta_s \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \,\mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

注 2.2. 请注意，在假设 **A1)** 下，成本泛函 J 是一致凸的，即对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $u \in \mathcal{A}(t,0)$，都有

$$\bar{J}(t,0,u) \geq \delta E\left[\int_t^T \|u_s\|^2 ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right].$$

后文将利用这一假设来应用 [37]中的结果。此外，这种一致凸性确保最优控制 u 具有唯一性（按勒贝格测度 $\otimes P$-几乎处处的意义）。

我们首先分析以下情形： η、 λ、 $\|\phi\|$、 ξ 和 $\|A\|$ 均有上界，且 η 有严格正下界。在此假设下，我们可以借助已有文献中的结果——尤其是 [37] 的研究——证明方程 (13) 的解存在且唯一，并刻画 (12) 中的值函数和最优控制。

命题 2.3. 设假设 ***A1)*** 成立，并假设存在 K 和 N属于 $(0,\infty)$，使得对所有满足 $\eta_t \leq N$恒等矩阵、$\|A_t\| \leq K$、 $\|\phi_t\| \leq N$、$\lambda_t \leq N$ 恒等矩阵以及 $0 \leq \xi \leq N$恒等矩阵的 $t \in [0,T]$，上述条件均以 P-几乎处处的意义成立。则：

(i) 按照定义 ***2.1***，方程 $(Y,\ Z)$ 是 (13) 的唯一解。此外，对所有 $t \in [0,T]$， P-几乎必然有

$$\|Y_t\| \leq e^{4KT} E\left[\|\bar{\xi}\| + \int_t^T \|\lambda_s\| ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right].$$

特别地，对所有 $t \in [0,T]$， P-几乎必然有

$$\|Y_t\| \leq e^{4KT}(1+T)N\sqrt{d}.$$

(ii) 对所有 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$， P-几乎必然有 $\bar{v}(t,\ x) = \langle x,\ Y_t x \rangle$。
(iii) 对所有 $t \in [0,T]$ $x \in \mathbb{R}^d$ X^* $E[\int_t^T \|\dot{X}_s^*\|^2 ds] < \infty$，最优状态过程满足，并且 $X_s^* = x + \int_t^s (-\eta_r^{-1}(Y_r - \phi_r)X_r^* + A_r X_r^*),\ dr$ $s \in [t,T]$。

证明。 倒向随机微分方程的解 (Y,Z) 的存在唯一性由 [37, 定理 6.1] 得出（另请参见注 2.2）。此外，由 [37] 可知，对所有 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，有

$$\langle x, Y_t x \rangle = \operatorname*{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}(t,x)} \bar{J}(t,x,u),$$

where $\mathcal{U}(t,x) = \mathcal{A}(t,x) \cap L^2(\Omega \times [t,T])$。注意， $\mathcal{U}(t,x) \subset \mathcal{A}(t,x)$，因此成立

$$\operatorname*{ess\,inf}_{u \in \mathcal{U}(t,x)} \bar{J}(t,x,u) \geq \operatorname*{ess\,inf}_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \bar{J}(t,x,u).$$

如果存在控制 $u \in \mathcal{A}(t,x)$，使得 $\bar{J}(t,x,u) \le \langle x, Y_t x\rangle$，那么由于 $Y_t \in L^2(\Omega)$，我们利用假设 **A1)** 以及 ξ 的半正定性可推得

$$\delta E\left[\int_t^T \langle u_r, u_r\rangle dr\right] \le E\big[\bar{J}(t,x,u)\big] \le E\big[\langle x, Y_t x\rangle\big] < \infty.$$

因此 $u \in \mathcal{U}(t,x)$。于是，我们得到 $\langle x, Y_t x\rangle = \bar{v}(t,x)$。这也意味着，对于所有 $t \in [0,T]$，都有 $Y_t \ge 0$。

为得到上界，令 $(U_t)_{t\in[0,T]}$ 由下式给出

$$dU_t = -U_t A_t dt, \quad t \in [0,T], \quad U_0 = \mathrm{Id}\,.$$

注意，对于所有 $t \in [0,T]$，P-几乎处处，矩阵 U_t 可逆，且其逆矩阵满足如下动力学方程

$$dU_t^{-1} = A_t U_t^{-1} dt, \quad t \in [0,T], \quad U_0^{-1} = \mathrm{Id}\,.$$

此外，令 $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ 由 $M_t = (U_t^{-1})^\top Y_t U_t^{-1}$, $t \in [0,T]$ 给出。通过分部积分，我们得到 M 满足

$$\begin{aligned} dM_t &= (U_t^\top)^{-1}\big((Y_t - \phi_t^\top)\eta_t^{-1}(Y_t - \phi_t) - \lambda_t\big)U_t^{-1}dt + (U_t^\top)^{-1} Z_t U_t^{-1} dW_t, \quad t \in [0,T], \\ M_T &= (U_T^\top)^{-1}\bar{\xi} U_T^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

注意，对于所有 $t \in [0,T]$，都有 $\|U_t\| \le e^{KT}$ 和 $\|U_t^{-1}\| \le e^{KT}$。此外，$(U^\top)^{-1}((Y - \phi^\top)\eta^{-1}(Y - \phi))U^{-1}$ 非负，因为 η^{-1} 非负。因此，由式 **(15)** 可得上界

$$\|M_t\| \le e^{2KT} E\left[\|\bar{\xi}\| + \int_t^T \|\lambda_s\| ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T].$$

由此，我们立即得到 Y 的上界

$$\|Y_t\| \le e^{4KT} E\left[\|\bar{\xi}\| + \int_t^T \|\lambda_s\| ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T].$$

此外，由 [37, 定理 6.1] 可知，对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，存在唯一的最优控制 u^*。此外，最优状态过程 $X^* = X^{u^*}$ 满足 $X_s^* = x + \int_t^s (-\eta_r^{-1}(Y_r - \phi_r)X_r^* + A_r X_r^*) dr$, $s \in [t,T]$，且最优控制由 $u_s^* = \eta_s^{-1}(Y_s - \phi_s)X_r^*$, $s \in [t,T]$ 给出。 □

下一个结果给出了一种构造取值于 $\mathbb{S}_+^d$ （或 $\mathbb{S}_{++}^d$）的渐进可测过程的单调截断的方法，使这些截断保持对称性、可测性以及正（半）定性。

引理 2.4。令 $f\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}_+^d$ 为一个 $(\mathcal{F}_t)$ 渐进可测过程。对于所有 $\omega \in \Omega$ 以及 $s \in [0,T]$，令 $f_s(\omega) = \max_{i,\ j\in\{1,\dots,d\}} |(f_{i,\ j})_s(\omega)|$。对于所有 $\omega \in \Omega$、$L \in \mathbb{N}$ 和 $s \in [0,T]$，我们定义

$$f_s^L(\omega) = \begin{cases} \big(1 \wedge L(\bar{f}_s(\omega))^{-1}\big)\, f_s(\omega), & \text{if } \bar{f}_s(\omega) \ne 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

则过程 $f^L\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d_+$ 是$(\mathcal{F}_t)$渐进可测的，并且对任意 $L\in\mathbb{N}$ 都一致有界。此外，对于所有 $\omega\in\Omega$ 和 $s\in[0,T]$，序列 $(f^L_s(\omega))_{L\in\mathbb{N}}$ 单调。

证明。所有性质都直接由构造得到。 □

¯我们接下来的目标是弱化命题 2.3 中关于 η、λ、$\|\phi\|$ 和 ξ 有上界的假设。与一维情形相比，单调性论证（参见例如 [3,第 3]节）在此处无法应用；因此，我们对参数施加可积性条件。

A2) 其 存在 $K\in(0,\infty)$，使得对所有满足 $\|A_t\|\le K$的 $t\in[0,T]$， P-几乎处处成立 .

A3) 过程 λ 和 ϕ 具有三阶矩，即

$$E\bigg[\int_0^T (\|\lambda_r\|^3+\|\phi_r\|^3)\,dr\bigg]<\infty.$$

A4) 终端条件 $\bar\xi$ 具有三阶矩，即 $E[\|\bar\xi\|^3]<\infty$。

引理 2.5。假设***A1)–A4)*** 成立，且倒向随机微分方程 (13) 存在一个满足定义 *2.1* 意义下的解(Y,Z)。令 $t\in[0,T]$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$。令$u=(u_s)^{s\in[t,T]}$由 $u_s=\eta_s^{-1}(Y_s-\phi_s)X_s$，$s\in[t,T]$给出，其中$(X_s)^{s\in[t,T]}$是以下随机系数微分方程的唯一解

$$dX_s=(-\eta_s^{-1}(Y_s-\phi_s)+A_s)X_s ds,\quad s\in[t,T],\quad X_t=x. \tag{16}$$

则有 $E[\int_t^T\|u_s\|^2ds]<\infty$ 和 $\langle x,Y_tx\rangle\ge\bar J(t,x,u)$。

证明。首先注意到，由于 A 和 η^{-1} 有界，且 Y 和 ϕ 属于 $L^1([0,T]\times\Omega)$，因此 (16) 确实存在唯一解（例如，参见 [29, 定理 3.1.1]）。几乎必然地，$(X_s)^{s\in[t,T]}$ 的路径连续，因而有界，并且 Z 属于 $L^2([0,T]\times\Omega)$。因此，$(\int_t^r\langle X_s,Z_sX_s\rangle dW_s)^{r\in[t,T]}$ 是一个局部鞅，并且存在一列递增的停时 $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其收敛于 T，且使得该局部鞅在时刻 τ_k 停止后对所有 $k\in\mathbb{N}$ 都是真鞅。由伊藤公式，对于所有 $k\in\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}
&\langle X_{\tau_k},Y_{\tau_k}X_{\tau_k}\rangle-\langle x,Y_tx\rangle\\
&=\int_t^{\tau_k}\big\langle Y_sX_s,\big(-\eta_s^{-1}(Y_s-\phi_s)+A_s\big)X_s\big\rangle ds+\int_t^{\tau_k}\langle X_s,Z_sX_s\rangle dW_s\\
&\quad+\int_t^{\tau_k}\big\langle X_s,\big((Y_s-\phi_s^\top)\eta_s^{-1}(Y_s-\phi_s)-\lambda_s-Y_sA_s-A_s^\top Y_s\big)X_s\big\rangle ds\\
&\quad+\int_t^{\tau_k}\big\langle X_s,\big(-(Y_s-\phi_s^\top)\eta_s^{-1}+A_s^\top\big)Y_sX_s\big\rangle ds\\
&=-\int_t^{\tau_k}\langle X_s,\lambda_sX_s\rangle ds+\int_t^{\tau_k}\langle u_s,\eta_su_s\rangle ds-2\int_t^{\tau_k}\langle Y_sX_s,u_s\rangle ds+\int_t^{\tau_k}\langle X_s,Z_sX_s\rangle dW_s\\
&=-\int_t^{\tau_k}\big(\langle X_s,\lambda_sX_s\rangle+\langle u_s,\eta_su_s\rangle+2\langle\phi_sX_s,u_s\rangle\big)ds+\int_t^{\tau_k}\langle X_s,Z_sX_s\rangle dW_s.
\end{aligned}$$

取条件期望，我们得到对于所有 $k \in \mathbb{N}$，有

$$E\bigg[\int_t^{\tau_k} \big(\langle u_s, \eta_s u_s\rangle + 2\langle \phi_s X_s, u_s\rangle + \langle X_s, \lambda_s X_s\rangle\big)ds + \langle X_{\tau_k}, Y_{\tau_k} X_{\tau_k}\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] = \langle x, Y_t x\rangle. \quad (17)$$

注意到，由 **A1)** 和单调收敛定理可得

$$\delta E\bigg[\int_t^T \|u_s\|^2 ds\bigg] \le E\Big[\langle x, Y_t x\rangle\Big] < \infty.$$

这表明 $E[\int_t^T \|u_s\|^2 ds] < \infty$。结合 **A1)**、单调收敛定理和法图引理以及 **(17)**，可得

$$\begin{aligned}
\langle x, Y_t x\rangle &= \liminf_{k\to\infty} E\bigg[\int_t^{\tau_k} \big(\langle u_s, \eta_s u_s\rangle + 2\langle \phi_s X_s, u_s\rangle + \langle X_s, \lambda_s X_s\rangle\big)ds + \langle X_{\tau_k}, Y_{\tau_k} X_{\tau_k}\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \\
&\ge E\bigg[\int_t^{T} \big(\langle u_s, \eta_s u_s\rangle + 2\langle \phi_s X_s, u_s\rangle + \langle X_s, \lambda_s X_s\rangle\big)ds + \liminf_{k\to\infty}\langle X_{\tau_k}, Y_{\tau_k} X_{\tau_k}\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \\
&= E\bigg[\int_t^{T} \big(\langle u_s, \eta_s u_s\rangle + 2\langle \phi_s X_s, u_s\rangle + \langle X_s, \lambda_s X_s\rangle\big)ds + \langle X_T, \bar{\xi} X_T\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \\
&= \bar{J}(t, x, u).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

命题 2.6. 假设 ***A1)–A4)*** 均成立。则：

(i) 存在一个满足定义 *2.1* 意义下的 (Y, Z)，它是 (13) 的一个解。此外，对所有 $t \in [0, T]$，P-几乎处处有

$$\|Y_t\| \le e^{4KT} E\bigg[\|\bar{\xi}\| + \int_t^T \|\lambda_r\| dr \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg]. \quad (18)$$

特别地，$Y \in L^3(\Omega \times [0, T])$。

(ii) 对所有 $t \in [0, T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，几乎必然有 $P\ \bar{v}(t, x) = \langle x, Y_t x\rangle$。

(iii) 对所有 $t \in [0, T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，最优状态过程 X^* 满足 $E[\int_t^T \|\dot{X}_s^*\|^2 ds] < \infty$ 和 $\dot{X}_s^* = -\eta_s^{-1}(Y_s - \phi_s)X_s^* + A_s X_s^*, \quad s \in [t, T].$

证明。 证明的思路是将后向随机微分方程的解构造为一列有界系数的后向随机微分方程解的极限。有界系数后向随机微分方程的解由命题 2.3 给出。按照引理 2.4 进行截断后，我们希望得到一组满足下界 **A1)** 的“单调”问题，因此引入辅助过程。对所有 $s \in [0, T]$，令 $\bar{\eta}_s = \eta_s - \delta$ 恒等矩阵，并

$$G_s = \begin{pmatrix} \lambda_s & \phi_s^\top \\ \phi_s & \bar{\eta}_s \end{pmatrix}.$$

注意，过程 $G = (G_s)_{s\in[0,T]}$ 满足引理 2.4 的条件（维数为 $2d$，而非 d）。对所有 $L \in \mathbb{N}$，令 $G^L = (G_s^L)_{s\in[0,T]}$ 为通过截断 $G =$ 得到的过程，截断方法见引理 2.4。

对所有 $L \in \mathbb{N}$，我们将 G^L 中对应于 λ、ϕ 和 $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_s)_{s\in[0,T]}$ 的块分别记为 λ^L、ϕ^L 和 $\bar{\eta}^L$。注意，对于任意 $L \in \mathbb{N}$，过程 λ^L、ϕ^L 和 $\bar{\eta}^L$ 均一致有界。此外，对于所有 $L \in \mathbb{N}$ 和 $s \in [0,T]$，我们定义 $\eta^L_s = \bar{\eta}^L_s + \delta \mathrm{Id}$。另外，我们将引理 2.4 的一个适用于 $\mathbb{S}^d_+$ 值随机变量的版本用于 $\bar{\xi}$，并将所得的截断随机变量序列记为 $(\bar{\xi}^L)_{L\in\mathbb{N}}$。

现在，命题 2.3 证明了，对于所有 $L \in \mathbb{N}$，倒向随机微分方程存在唯一解 (Y^L, Z^L)

$$dY^L_s = ((Y^L_s - (\phi^L_s)^\top)(\eta^L_s)^{-1}(Y^L_s - \phi^L_s) - \lambda^L_s - Y^L_s A_s - A_s^\top Y^L_s)ds + Z^L_s dW_s, \quad s \in [0,T],$$

其终端条件为 $Y^L_T = \bar{\xi}^L$。值函数表示（参见命题 2.3(ii)）蕴含，对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$、$t \in [0,T]$ 和 $L \in \mathbb{N}$，有

$$\langle x, Y^L_t x\rangle = \operatorname*{ess\,inf}_{u\in\mathcal{A}(t,x)} E\bigg[\int_t^T \begin{pmatrix} X^u_s \\ u_s \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \lambda^L_s & (\phi^L_s)^\top \\ \phi^L_s & \eta^L_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^u_s \\ u_s \end{pmatrix} ds + \langle X^u_T, \bar{\xi}^L X^u_T\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg]. \tag{19}$$

对于所有 $s \in [0,T]$，序列 $(G^L_s)_{L\in\mathbb{N}}$ 和 $(\bar{\xi}^L)_{L\in\mathbb{N}}$ 均为非递减序列，这一事实确保对于所有 $s \in [0,T]$，序列 $(Y^L_s)_{L\in\mathbb{N}}$ 也是非递减的。此外，对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $L \in \mathbb{N}$，P-几乎必然有

$$\|Y^L_t\| \le e^{4KT} E\bigg[\|\bar{\xi}^L\| + \int_t^T \|\lambda^L_s\| ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \le e^{4KT} E\bigg[\|\bar{\xi}\| + \int_t^T \|\lambda_s\| ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg].$$

利用引理 A.1，对于所有 $s \in [0,T]$，我们可以将 Y_s 定义为当 $L \to \infty$ 时 Y^L_s 的 P-几乎必然极限。根据此定义可立即得出，随机过程 $Y = (Y_s)_{s\in[0,T]}$ 是 P-几乎必然 $\mathbb{S}^d_+$-值的，并满足上界 (18)。此外，请注意，(18)、詹森不等式、**A3**) 和 **A4**) 确保 $Y \in L^3(\Omega \times [0,T])$。

接下来我们证明 $Y = (Y_s)_{s\in[0,T]}$ 满足倒向随机微分方程 (13)。对于所有 $M, L \in \mathbb{N}$，应用伊藤公式可得，对所有 $t \in [0,T]$，有

$$\begin{aligned}
&\|Y^M_t - Y^L_t\|^2 + \int_t^T \|Z^M_s - Z^L_s\|^2 ds \\
&= \|\bar{\xi}^M - \bar{\xi}^L\|^2 - 2\int_t^T \operatorname{tr}\left[(Y^M_s - Y^L_s)(Z^M_s - Z^L_s)\right] dW_s \\
&\quad + 2\int_t^T \operatorname{tr}\left[(Y^M_s - Y^L_s)(\lambda^M_s - \lambda^L_s)\right] ds \\
&\quad + 2\int_t^T \operatorname{tr}\left[(Y^M_s - Y^L_s)(Y^M_s A_s + A_s^\top Y^M_s - Y^L_s A_s - A_s^\top Y^L_s)\right] ds \\
&\quad + 2\int_t^T \operatorname{tr}\Big[(Y^M_s - Y^L_s)\Big(- (Y^M_s - (\phi^M_s)^\top)(\eta^M_s)^{-1}(Y^M_s - \phi^M_s) \\
&\qquad\qquad + (Y^L_s - (\phi^L_s)^\top)(\eta^L_s)^{-1}(Y^L_s - \phi^L_s)\Big)\Big] ds.
\end{aligned} \tag{20}$$

注意，对于所有 $L \in \mathbb{N}$，根据命题 2.3，存在一个常数 C_L，使得对于所有 $t \in [0,T]$，都有 $\|Y_t^L\| \le C_L$ 和 $E[\int_0^T \|Z_s^L\|^2 ds] < \infty$。综合这些事实可得，对于所有 $M, L \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,T]$，有

$$E\left[\int_t^T \operatorname{tr}\left[(Y_s^M - Y_s^L)(Z_s^M - Z_s^L)\right] dW_s\right] = 0. \tag{21}$$

注意，对所有 $L \in \mathbb{N}$和 $s \in [0,T]$， P-几乎处处有 $\|(\eta_s^L)^{-1}\| \le \sqrt{d}\delta^{-1}$。因此，对所有 M、 $L \in \mathbb{N}$和 $s \in [0,T]$，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\Big[(Y_s^M - Y_s^L)\big(- (Y_s^M - (\phi_s^M)^\top)(\eta_s^M)^{-1}(Y_s^M - \phi_s^M) + (Y_s^L - (\phi_s^L)^\top)(\eta_s^L)^{-1}(Y_s^L - \phi_s^L)\big)\Big] \\
&\le d^{\frac{1}{2}}\delta^{-1}\|Y_s^M - Y_s^L\|\big(\|Y_s^M\|^2 + \|Y_s^L\|^2 + 2(\|Y_s^M\|\|\phi_s^M\| + \|Y_s^L\|\|\phi_s^L\|) + \|\phi_s^M\|^2 + \|\phi_s^L\|^2\big) \\
&\le 2d^{\frac{1}{2}}\delta^{-1}\|Y_s^M - Y_s^L\|\left(\|Y_s\|^2 + 2\|Y_s\|\|\phi_s\| + \|\phi_s\|^2\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

此外，我们得到，对所有 M、 $L \in \mathbb{N}$和 $s \in [0,T]$，

$$\operatorname{tr}\left[(Y_s^M - Y_s^L)(\lambda_s^M - \lambda_s^L)\right] \le 2\|Y_s^M - Y_s^L\|\|\lambda_s\|. \tag{23}$$

此外，**A2)** 保证对所有 M、 $L \in \mathbb{N}$和 $s \in [0,T]$，

$$\operatorname{tr}\left[(Y_s^M - Y_s^L)(Y_s^M A_s + A_s^\top Y_s^M - Y_s^L A_s - A_s^\top Y_s^L)\right] \le 4K\|Y_s\|\|Y_s^M - Y_s^L\|. \tag{24}$$

对所有 $s \in [0,T]$，我们定义

$$R_s = \big(2d^{\frac{1}{2}}\delta^{-1}(\|Y_s\|^2 + 2\|Y_s\|\|\phi_s\| + \|\phi_s\|^2) + 2\|\lambda_s\| + 4K\|Y_s\|\big). \tag{25}$$

注意，对所有 L、 $M \in \mathbb{N}$和 $s \in [0,T]$，有 $R_s\|Y_s^M - Y_s^L\| \le 2R_s\|Y_s\|$。由霍尔德不等式、 $Y \in L^3(\Omega \times [0,T])$以及**A3)**，我们有 $E[\int_0^T R_s\|Y_s\|\, ds] < \infty$。因此，由控制收敛定理可得

$$\lim_{L,M\to\infty} E\left[\int_0^T R_s\|Y_s^M - Y_s^L\|\, ds\right] = 0. \tag{26}$$

此外，注意到

$$\lim_{L,M\to\infty} E\left[\|\bar{\xi}^M - \bar{\xi}^L\|^2\right] = 0 \tag{27}$$

由于**A4)** 以及控制收敛定理。注意，(20)–(25)表明对所有 $M, L \in \mathbb{N}$，均有

$$E\left[\int_0^T \|Z_s^M - Z_s^L\|^2 ds\right] \le E\left[\|\bar{\xi}^M - \bar{\xi}^L\|^2\right] + 2E\left[\int_0^T R_s\|Y_s^M - Y_s^L\|\, ds\right]. \tag{28}$$

结合 (26) 和 (27) 可知，$(Z^L)_{L\in\mathbb{N}}$ 是空间 $L^2(\Omega \times [0,T])$中的柯西序列，因此收敛于某个 $Z \in L^2(\Omega \times [0,T])$。接下来，由 (20) 和 (25) 可知，对所有 $M, L \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \|Y_t^M - Y_t^L\|^2 \le \|\bar{\xi}^M - \bar{\xi}^L\|^2 &+ 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T \operatorname{tr}\left[(Y_s^M - Y_s^L)(Z_s^M - Z_s^L)\right] dW_s\right| \\
&+ 2\int_0^T R_s\|Y_s^M - Y_s^L\|\, ds.
\end{aligned} \tag{29}$$

利用伯克霍尔德–戴维斯–冈迪不等式和杨氏不等式，我们可得存在一个常数 $c>0$，使得对所有 $M, L \in \mathbb{N}$，均有

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T \operatorname{tr}\left[(Y_s^M - Y_s^L)(Z_s^M - Z_s^L)\right] dW_s\right|\right] \\
&\leq cE\left[\left(\sup_{t\in[0,T]}\|Y_t^M - Y_t^L\|\right)\left(\int_0^T \|Z_s^M - Z_s^L\|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \frac{1}{4}E\left[\sup_{t\in[0,T]}\|Y_t^M - Y_t^L\|^2\right] + c^2 E\left[\int_0^T \|Z_s^M - Z_s^L\|^2\, ds\right].
\end{aligned}$$

因此，由 (29) 可知，对所有 $M, L \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}E\left[\sup_{t\in[0,T]}\|Y_t^M - Y_t^L\|^2\right] \leq E\left[\|\bar{\xi}^M - \bar{\xi}^L\|^2\right] + 2c^2 E\left[\int_0^T \|Z_s^M - Z_s^L\|^2\, ds\right] \\
+ 2E\left[\int_0^T R_s\|Y_s^M - Y_s^L\|\, ds\right].
\end{aligned}$$

因此，利用 (28)、(27) 和 (26)，我们得到 $(Y^L)_{L\in\mathbb{N}}$ 也是空间 $\mathcal{L}^2(\Omega\ C([0,T],\mathbb{S}^d))$ 中的柯西序列。此外，注意到利用控制收敛定理，我们可以证明对所有 $t\in[0,T]$，有

$$\lim_{L\to\infty} E\left[\left\|\int_t^T (Y_s^L - (\phi_s^L)^\top)(\eta_s^L)^{-1}(Y_s^L - \phi_s^L)ds - \int_t^T (Y_s - \phi_s^\top)(\eta_s)^{-1}(Y_s - \phi_s)ds\right\|\right] = 0.$$

最后，我们得到对所有 $t\in[0,T]$，有

$$\begin{aligned}
&E\left[\left\|Y_t - \left(\bar{\xi} - \int_t^T (Y_s - \phi_s^\top)(\eta_s)^{-1}(Y_s - \phi_s)ds + \int_t^T (\lambda_s + Y_s A_s + A_s^\top Y_s)ds\right.\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.\left. - \int_t^T Z_s dW_s\right)\right\|\right] \\
&\leq \lim_{L\to\infty}\left(E\left[\|Y_t - Y_t^L\|\right] + E\left[\left\|\int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T Z_s^L dW_s\right\|\right] + E\left[\|\bar{\xi} - \bar{\xi}^L\|\right]\right. \\
&\qquad + E\left[\left\|\int_t^T (Y_s^L - (\phi_s^L)^\top)(\eta_s^L)^{-1}(Y_s^L - \phi_s^L)ds\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left. - \int_t^T (Y_s - \phi_s^\top)(\eta_s)^{-1}(Y_s - \phi_s)ds\right\|\right] \\
&\qquad\left. + E\left[\left\|\int_t^T (\lambda_s + Y_s A_s + A_s^\top Y_s)ds - \int_t^T (\lambda_s^L + Y_s^L A_s + A_s^\top Y_s^L)ds\right\|\right]\right) = 0.
\end{aligned}$$

因此，对所有 $t\in[0,T]$， P-几乎必然成立。

$$Y_t = \bar{\xi} + \int_t^T \left(-(Y_s - \phi_s^\top)\eta_s^{-1}(Y_s - \phi_s) + \lambda_s + Y_s A_s + A_s^\top Y_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{30}$$

由此可知，(30) 左端的过程是右端过程的一个修正。接下来，我们证明对所有 $t \in [0,T]$，(30) 都以 P-几乎必然的方式成立，即这两个过程不可区分。由于对于任意 $L \in \mathbb{N}$，Y^L 都以 P- 几乎必然的方式连续，且有 $\lim_{L\to\infty} E[\sup_{t\in[0,T]} \|Y_t^L - Y_t\|^2] = 0$，因此过程 Y 以 P-几乎必然的方式连续。此外，注意到过程 $(\int_0^t (-(Y_s - \phi_s^\top)\eta_s^{-1}(Y_s - \phi_s) + \lambda_s + Y_s A_s + A_s^\top Y_s)ds)_{t\in[0,T]}$ 和 $(\int_0^t Z_s dW_s)_{t\in[0,T]}$ 都以 P-几乎必然的方式连续。这意味着对所有 $t \in [0,T]$，(30) 都以 P-几乎必然的方式成立，并且对 (Y, Z) 是满足定义 2.1 意义下倒向随机微分方程 (13) 的解。这就证明了 (i)。

为证明 (ii) 和 (iii)，固定 $t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。由对所有 $L \in \mathbb{N}$ 和 $s \in [0,T]$，均有 $G_s^L \le G_s$ 和 $\bar{\xi}^L \le \bar{\xi}$，再结合 (19)，可得对所有 $L \in \mathbb{N}$，均有 $\langle x, Y_t^L x\rangle \le \bar{v}(t,x)$。令 $L \to \infty$ 趋于极限，得到 $\langle x, Y_t x\rangle \le \bar{v}(t,x)$。结合 ¯ 这一结果和引理 2.5，可得 $\bar{v}(t,x) = \langle x, Y_t x\rangle = J(t,x,u)$，其中 u 的定义与引理 2.5 中相同。证明完毕。□

¯注意，若参数 η、λ、ϕ 和 ξ 有界，则由命题 2.3 可知，方程 (13) 的解 (Y, Z) 在定义 2.1 的意义下具有唯一性。作为引理 2.5 和命题 2.6 的直接推论，在条件 **A1)–A4)** 对参数成立时，命题 2.6 中构造的解是最小解。

推论 2.7。 假设 ***A1)–A4)*** 均成立。则命题 *2.6* 中构造的 *BSDE* (13) 的解 (Y, Z) 是最小的，即如果 (Y', Z') 是按照定义 *2.1* 意义下 *BSDE* (13) 的另一个解，则对所有 $t \in [0,T]$，几乎必然有 $Y_t' \ge Y_t$。

在下一个命题中，我们将在关于系数和终端条件的适当假设下，建立 BSDE (13) 的任意解的一个下界。特别地，这为命题 2.6 中构造的 (13) 的解给出了一个下界。

¯**命题 2.8**。 假设 ***A1)–A4)*** 均成立，ξ 是 P-***a.s.***可逆的，并且存在 $\delta_1 \in [0,\infty)$ 使得对所有 $t \in [0,T]$ P-***a.s.***均有 $\|\eta_t^{-1}\phi_t + A_t\| \le \delta_1$。令 (Y, Z)为按照定义 *2.1* 意义下 *BSDE* (13) 的一个解。则对所有 $t \in [0,T]$，几乎必然有 P，即

$$Y_t \ge e^{-4\delta_1 T} E\left[\left(\bar{\xi}^{-1} + \int_t^T \eta_s^{-1} ds\right)^{-1} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

证明。 我们可以将倒向随机微分方程 (13) 重写为

$$dY_t = \left(Y_t\eta_t^{-1}Y_t - \hat{\lambda}_t - \hat{A}_t^\top Y_t - Y_t\hat{A}_t\right)dt + Z_t dW_t, \quad t \in [0,T], \quad Y_T = \bar{\xi},$$

其中 ˆ $\lambda_t = \lambda_t - \phi_t^\top\eta_t^{-1}\phi_t$、ˆ$A_t = A_t + \eta_t^{-1}\phi_t$、$t \in [0,T]$。由 **A1)** 可知，ˆ$\lambda = (\hat{\lambda}_t)_{t\in[0,T]}$ 是 $\mathbb{S}_+^d$ 值的。此外，根据假设，对所有 $t \in [0,T]$，我们有 $\|\hat{A}_t\| \le \delta_1$。

我们采用与命题 2.3 中上界证明类似的方法。令 $U =$ˆ $(U_t)_{t\in[0,T]}$ 由 $dU_t = -U_t A_t dt$，$t \in [0,T]$，$U_0 =$恒等矩阵给出，并注意，对所有 $t \in [0,T]$

均成立

$$\sqrt{\lambda_{\min}(U_t^\top U_t)} \geq e^{-\delta_1 T}, \quad \sqrt{\lambda_{\min}((U_t^{-1})^\top U_t^{-1})} \geq e^{-\delta_1 T}, \quad \|U_t\| \leq e^{\delta_1 T}, \quad \|U_t^{-1}\| \leq e^{\delta_1 T}. \tag{31}$$

定义 $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$，使其满足 $M_t = (U_t^{-1})^\top Y_t U_t^{-1}$, $t \in [0,T]$。于是我们得到 M 满足

$$dM_t = M_t\,(\widetilde{\eta}_t)^{-1}\,M_t dt - \widetilde{\lambda}_t dt + (U_t^{-1})^\top Z_t U_t^{-1} dW_t, \quad t \in [0,T], \quad M_T = \widetilde{\xi},$$

其中，对所有 $t \in [0,T]$，我们引入了

$$\widetilde{\eta}_t = (U_t^{-1})^\top \eta_t U_t^{-1}, \qquad \widetilde{\lambda}_t = (U_t^{-1})^\top \hat{\lambda}_t U_t^{-1}, \qquad \widetilde{\xi} = (U_T^{-1})^\top \bar{\xi} U_T^{-1}.$$

注意，$\widetilde{\eta} = (\widetilde{\eta}_t)_{t\in[0,T]}$, $\lambda = (\lambda_t)_{t\in[0,T]}$ 和 ξ 的可积性性质与 η、λ 和 $\bar{\xi}$ 相同，因为 U^{-1} 和 $\eta^{-1}\phi$ 有界。此外，$\widetilde{\eta}$ 远离零。

为了对所有 $t \in [0,T]$ 得到 M_t 的下界，我们希望对具有有界系数的矩阵黎卡提倒向随机微分方程（不含线性项）运用比较论证（例如，参见 [22, 定理 A.1]）。因此，我们首先采用与命题 2.6 的证明中相同的截断方法和记号 $\hat{}$ $\hat{}$ $\widetilde{}$（将 A 替换为 $A = (A_t)_{t\in[0,T]}$，将 λ 替换为 λ，将 η 替换为 $\widetilde{\eta}$，将 ϕ 替换为零，并将 $\bar{\xi}$ 替换为 $\widetilde{\xi}$）。回顾一下，对所有 $L \in \mathbb{N}$，我们用 (M^L, Z^L) 表示具有有界系数 $\widetilde{\eta}^L$ 和 λ^L 以及有界终端条件 ξ^L 的 Riccati型倒向随机微分方程的唯一解 $\widetilde{}$。由命题 2.6 的证明和推论 2.7 可知，对所有 $t \in [0,T]$, $M_t \geq M_t^L$。

接下来，我们对所有 $L \in \mathbb{N}$ 定义取值于 $\mathbb{S}_+^d$ 的过程 $R^L = (R_t^L)_{t\in[0,T]}$ 和 $V^L = (V_t^L)_{t\in[0,T]}$，如下

$$R_t^L = \left(\left(\widetilde{\xi}^L\right)^{-1} + \int_t^T \left(\widetilde{\eta}_s^L\right)^{-1} ds \right)^{-1}, \quad V_t^L = E\big[R_t^L \,\big|\, \mathcal{F}_t\big], \qquad t \in [0,T].$$

显然，对于所有 $L \in \mathbb{N}$，过程 R^L 是黎卡提方程的一个（非适应）解

$$R_t^L = \widetilde{\xi}^L - \int_t^T R_s^L \big(\widetilde{\eta}_s^L\big)^{-1} R_s^L ds, \quad t \in [0,T].$$

由此以及富比尼定理可得，对于所有 $L \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,T]$，

$$\begin{aligned} V_t^L = E\big[R_t^L \big| \mathcal{F}_t\big] &= E\left[\widetilde{\xi}^L - \int_t^T E\big[R_s^L \big(\widetilde{\eta}_s^L\big)^{-1} R_s^L \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\widetilde{\xi}^L - \int_t^T V_s^L \big(\widetilde{\eta}_s^L\big)^{-1} V_s^L ds + \int_t^T \Gamma_s^L ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \end{aligned}$$

其中 $\Gamma_s^L = E[R_s^L \,|\, \mathcal{F}_s](\widetilde{\eta}_s^L)^{-1} E[R_s^L \,|\, \mathcal{F}_s] - E[R_s^L (\widetilde{\eta}_s^L)^{-1} R_s^L \,|\, \mathcal{F}_s]$, $s \in [0,T]$。因此，利用鞅表示定理可知，对所有 $L \in \mathbb{N}$，存在一个取值于 $\mathbb{S}^d$、渐进可测且平方可积的过程 $Z^{V,\,L}$，使得 $(V^L, Z^{V,\,L})$ 满足倒向随机微分方程

$$dV_t^L = \big(V_t^L \big(\widetilde{\eta}_t^L\big)^{-1} V_t^L - \Gamma_t^L\big) dt + Z_t^{V,L} dW_t, \quad t \in [0,T], \quad V_T^L = \widetilde{\xi}^L.$$

注意，对所有 $t \in [0,T]$ 和 $L \in \mathbb{N}$， Γ_t^L 几乎处处为负半定矩阵。事实上，利用詹森不等式，对于任意 $L \in \mathbb{N}$、 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $s \in [0,T]$，我们有

$$\begin{aligned}\Big\langle x, E\big[R_s^L \,\big|\, \mathcal{F}_s\big]\big(\widetilde{\eta}_s^L\big)^{-1} E\big[R_s^L \,\big|\, \mathcal{F}_s\big]x\Big\rangle &= \Big\| E\big[\big(\widetilde{\eta}_s^L\big)^{-\frac{1}{2}} R_s^L x \,\big|\, \mathcal{F}_s\big]\Big\|^2 \\ \le E\Big[\big\|\big(\widetilde{\eta}_s^L\big)^{-\frac{1}{2}} R_s^L x\big\|^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_s\Big] &= \Big\langle x, E\big[R_s^L\big(\widetilde{\eta}_s^L\big)^{-1} R_s^L \,\big|\, \mathcal{F}_s\big]x\Big\rangle.\end{aligned}$$

由于对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $L \in \mathbb{N}$， Γ_t^L 几乎处处为负半定，且 λ_t^L 几乎处处为半正定，倒向随机微分方程比较论证表明，对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $L \in \mathbb{N}$， $M_t^L \ge V_t^L$。因此，对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $L \in \mathbb{N}$，有 $M_t \ge E[R_t^L \,|\, \mathcal{F}_t]$。由单调收敛可知，对于所有 $t \in [0,T]$，非递减序列 $(E[R_t^L \,|\, \mathcal{F}_t])_{L\in\mathbb{N}}$ 收敛到

$$E\left[\left(\widetilde{\xi}^{-1} + \int_t^T \widetilde{\eta}_s^{-1} ds\right)^{-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

因此，利用 (31)，对于所有 $t \in [0,T]$，我们得到

$$M_t \ge E\left[\left(\widetilde{\xi}^{-1} + \int_t^T \widetilde{\eta}_s^{-1} ds\right)^{-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \ge e^{-2\delta_1 T} E\left[\left(\bar{\xi}^{-1} + \int_t^T \eta_s^{-1} ds\right)^{-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Y的下界由此以及 (31) 和 $Y = U^\top M U$ 得出。 □

在下一个结果中，我们为命题 2.6 中得到的 (13) 的解建立一个上界。一般而言，该上界在 T 处发散，但与 ξ 无关。这个上界将在第 3 节中发挥重要作用。

引理 2.9. 假设满足 ***A1)–A4)*** 。令(Y,Z) 为命题 *2.6* 中构造的解。那么，对所有 $t \in [0,T)$，均有 P-几乎处处成立：

$$\begin{aligned}Y_t \le \frac{1}{(T-t)^2} E\bigg[\int_t^T \big((\mathrm{Id} - A_s(T-s))^\top \eta_s (\mathrm{Id} - A_s(T-s)) + \lambda_s (T-s)^2 \\ + 2\phi_s^\top (T-s)(\mathrm{Id} - A_s(T-s))\big)\, ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg].\end{aligned} \tag{32}$$

证明。 在整个证明过程中，固定 $t \in [0,T)$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。由命题 2.6 可得$\bar{v}(t,x) = \langle x, Y_t x\rangle$。令 $X_s = \frac{T-s}{T-t}x$, $s \in [t,T]$，并定义控制 $u \in \mathcal{A}(t,x)$ 为$u_s = \frac{1}{T-t}x + A_s X_s$, $s \in [t,T]$。于是有 $dX_s = (A_s X_s - u_s)ds$, $X_T = 0$,$-\langle x, Y_t x\rangle \le J(t,x,u)$，并且

$$\begin{aligned}\bar{J}(t,x,u) = \frac{1}{(T-t)^2}\Big\langle x, E\bigg[\int_t^T \big((\mathrm{Id} + A_s(T-s))^\top \eta_s (\mathrm{Id} + A_s(T-s)) + \lambda_s (T-s)^2 \\ + 2\phi_s^\top (T-s)(\mathrm{Id} + A_s(T-s))\big) ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] x\Big\rangle.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3. 奇异情形

现在回到第1节的情形，并引入一个附加假设；该假设与**A1)–A3)**一起，足以构造倒向随机微分方程（5）的上解。

B1) 过程 η 具有三阶矩，即

$$E\left[\int_0^T \|\eta_r\|^3\, dr\right] < \infty.$$

回顾一下，对于某个 $\mathcal{F}_T$-可测、取值于 $\mathbb{S}_+^d$ 且有界的随机矩阵 ξ，有 $C = \ker(\xi)$。对于矩阵 θ，我们再次使用引理 2.4 中的截断技术，定义一个由有界矩阵构成的非递减序列 $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$，使其收敛到 θ。下文中，我们在第 1 节的框架下，取 $\xi = n\xi + \theta^n, n \in \mathbb{N}$，使用第 2 节的结果。特别地，我们将命题 2.6 中构造的方程 (10) 的解记为 (Y^n, Z^n)。

命题 3.1. 假设 ***A1)–A3)*** 和 ***B1)*** 成立。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令(Y^n, Z^n) 为命题 *2.6* 中构造的、满足定义 *2.1* 意义下的方程(10) 的解。则存在满足定义 *1.1* 意义下的倒向随机微分方程(5) 的一个上解(Y, Z)，使得对于每个 $t \in [0, T)$，随机变量序列$(Y_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎必然收敛到 Y_t，并且$(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2([0,t]\times\Omega)$ 中收敛到 Z。此外，对于 Y，估计(32) 成立。

证明。 由命题 2.6 中的值函数表示可知，对每个$t \in [0, T]$，序列 $(Y_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调不减。此外，引理 2.9 以及关于 A、 η、 ϕ 和 λ 的可积性假设 **A2)**、**A3)** 和 **B1)** 保证，对于所有 $t \in [0, T)$ 以及 P-几乎处处的 $\omega \in \Omega$，存在 $c_t(\omega) \in (0, \infty)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $Y_t^n(\omega) \le c_t(\omega)$。因此，根据引理 A.1，对于任意 $t \in [0, T)$，序列 $(Y_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎必然收敛于 Y_t。注意， $Y = (Y_t)_{t\in[0,T)}$ 仍满足估计 (32)，且取值于$\mathbb{S}_+^d$。特别地，由此、**A2)**、**A3)**、**B1)**以及詹森不等式可知，对所有 $t \in [0, T)$， $Y_t \in L^3(\Omega)$ 和 $Y \in L^3(\Omega \times [0, t])$。

假设 $(\psi_t)_{t\in[0,T]}$ 是一个在时刻 T 左连续的过程。注意，对于所有 $n \in \mathbb{N}$， P-几乎必然地有

$$\liminf_{t\to T}\langle \psi_t, Y_t\psi_t\rangle \ge \liminf_{t\to T}\langle \psi_t, Y_t^n\psi_t\rangle = n\langle \psi_T, \xi\psi_T\rangle + \langle \psi_T, \theta^n\psi_T\rangle. \tag{33}$$

如果 $\psi_T \notin \ker(\xi)$，令 $n \to \infty$，我们得到 $\liminf_{t\to T}\langle \psi_t, Y_t\psi_t\rangle = +\infty$. 此外，(33) 表明，如果 $\psi_T \in \ker(\xi)$，则有 $\liminf_{t\to T}\langle \psi_t, Y_t\psi_t\rangle \ge \langle \psi_T, \theta\psi_T\rangle$。因此， Y 满足定义 1.1 意义下的奇异终端条件。

为了证明存在一个适当的过程 Z，使得 (Y, Z) 满足倒向随机微分方程 (5)，我们采用与命题 2.6 的证明类似的方法。对于所有 $n, m \in \mathbb{N}$ 以及

$s, t \in [0,T]$ 满足 $t > s$，由伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
&\|Y_s^n - Y_s^m\|^2 + \int_s^t \|Z_r^n - Z_r^m\|^2 dr \\
&= \|Y_t^n - Y_t^m\|^2 - 2\int_s^t \mathrm{tr}[(Y_r^n - Y_r^m)(Z_r^n - Z_r^m)]dW_r \\
&\quad + 2\int_s^t \mathrm{tr}\left[(Y_r^n - Y_r^m)(Y_r^n A_r + A_r^\top Y_r^n - Y_r^m A_r - A_r^\top Y_r^m)\right]dr \\
&\quad + 2\int_s^t \mathrm{tr}\left[(Y_r^n - Y_r^m)(-(Y_r^n - \phi_r^\top)\eta_r^{-1}(Y_r^n - \phi_r) + (Y_r^m - \phi_r^\top)\eta_r^{-1}(Y_r^m - \phi_r))\right]dr.
\end{aligned} \tag{34}$$

由于对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $Y^n \in \mathcal{L}^2(\Omega; C([0,T];\mathbb{S}^d))$ 和 $Z^n \in L^2([0,T]\times\Omega)$，因此对所有 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,T]$，有

$$E\left[\int_0^t \mathrm{tr}\left[(Y_r^n - Y_r^m)(Z_r^n - Z_r^m)\right]dW_r\right] = 0. \tag{35}$$

回顾一下，对所有 $r \in [0,T]$，都有 $\|\eta_r^{-1}\| \le \sqrt{d}\delta^{-1}$。因此，由詹森不等式可得，对所有 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 $r \in [0,T)$，有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left[(Y_r^n - Y_r^m)(-(Y_r^n - \phi_r^\top)\eta_r^{-1}(Y_r^n - \phi_r) + (Y_r^m - \phi_r^\top)\eta_r^{-1}(Y_r^m - \phi_r))\right] \\
&\le \|Y_r^n - Y_r^m\|(\|Y_r^n - \phi_r\|^2\|\eta_r^{-1}\| + \|Y_r^m - \phi_r\|^2\|\eta_r^{-1}\|) \\
&\le 8\sqrt{d}\delta^{-1}\|Y_r\|\left(\|Y_r\|^2 + \|\phi_r\|^2\right).
\end{aligned}$$

由于对所有 $t \in [0,T)$，都有 $Y \in L^3(\Omega \times [0,t])$，且 $\phi \in L^3(\Omega \times [0,T])$（参见 **A3)**），我们可以应用控制收敛定理，得到对所有 $t \in [0,T)$，有

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} E\Bigg[\int_0^t \mathrm{tr}\Big[(Y_r^n - Y_r^m)\big(&-(Y_r^n - \phi_r^\top)\eta_r^{-1}(Y_r^n - \phi_r) \\
&+ (Y_r^m - \phi_r^\top)\eta_r^{-1}(Y_r^m - \phi_r)\big)\Big]\,dr\Bigg] = 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

此外，由于 **A2)**，对所有 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 $r \in [0,T)$，有

$$\mathrm{tr}\left[(Y_r^n - Y_r^m)(Y_r^n A_r + A_r^\top Y_r^n - Y_r^m A_r - A_r^\top Y_r^m)\right] \le 4K\|Y_r^n - Y_r^m\|\|Y_r\| \le 8K\|Y_r\|^2.$$

由此可知，对于所有 $t \in [0,T)$，都有 $Y \in L^3(\Omega \times [0,t])$，而且根据控制收敛定理，对于所有 $t \in [0,T)$，有

$$\lim_{n,m\to\infty} E\left[\int_0^t \mathrm{tr}\left[(Y_r^n - Y_r^m)(Y_r^n A_r + A_r^\top Y_r^n - Y_r^m A_r - A_r^\top Y_r^m)\right]dr\right] = 0. \tag{37}$$

此外，由于对所有 $t \in [0,T)$ 都有 $Y_t \in L^3(\Omega)$，控制收敛定理表明，对于所有 $t \in [0,T)$，$\lim_{n,m\to\infty} E[\|Y_t^n - Y_t^m\|^2] = 0$。结合式 (34)–(37)，可得对于所有 $t \in [0,T)$，

$$\lim_{n,m\to\infty} E\left[\int_0^t \|Z_r^n - Z_r^m\|^2 dr\right] = 0.$$

因此，存在一个渐进可测过程 $Z\colon [0,T)\times\Omega\to\mathbb{S}^d$，使得对于所有 $t\in[0,T)$，序列 $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2([0,t]\times\Omega)$ 中收敛到 Z。现在，仿照命题 2.6 的证明，可得对于所有 $t\in[0,T)$，

$$\lim_{n,m\to\infty} E\Big[\sup_{s\in[0,t]}\|Y_s^n-Y_s^m\|^2\Big]=0.$$

我们还可以证明，(Y,Z) 满足 (6)。结合 (33)，这就证明所构造的过程 (Y,Z) 是按定义 1.1 的意义求解倒向随机微分方程 (5) 的解。 □

接下来，我们给出一个引理，说明按定义 1.1 的意义求解 (5) 的解所具有的性质，以及这些解与带终端状态约束 (3) 的控制问题 (1) 之间的联系。

引理 3.2。假设满足 ***A1)–A3)***，并设存在一个按定义 *1.1* 的意义求解倒向随机微分方程 (5) 的上解 (Y,Z)。设 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $t\in[0,T)$。令 $u=(u_s)^{s\in[t,T]}$ 满足 $u_s=\eta_s^{-1}(Y_s-\phi_s)X_s$，$s\in[t,T)$，其中 $(X_s)^{s\in[t,T)}$ 是以下随机系数微分方程的唯一解

$$dX_s=(-\eta_s^{-1}(Y_s-\phi_s)+A_s)X_s ds,\quad s\in[t,T),\quad X_t=x. \tag{38}$$

于是：*(i)* 有 $E[\int_t^T\|u_s\|^2ds]<\infty$ 成立。*(ii)* 对于由 $(X_s^u)^{s\in[t,T]}$ 和 (2) 定义的 $X^u=$，有 P- 几乎处处成立 $X_T^u\in\ker(\xi)$。*(iii)* 有 P- 几乎处处成立 $\langle x,\ Y_tx\rangle\geq J(t,\ x,\ u)$。

证明。首先注意到，由于 A 和 η^{-1} 有界，且对所有 $r\in[t,T)$ 都有 $E[\int_t^r\|Y_s-\phi_s\|ds]<\infty$，因此确实存在方程 (38) 的唯一解 $(X_s)^{s\in[t,T)}$。

接下来注意，对所有 $r\in[t,T)$ 以及所有取值于 $[t,r]$ 的停时 τ，伊藤公式表明

$$\begin{aligned}\langle X_\tau,Y_\tau X_\tau\rangle=\langle x,Y_tx\rangle&-\int_t^\tau\big(\langle X_s,\lambda_sX_s\rangle+\langle u_s,\eta_su_s\rangle ds+2\langle\phi_sX_s,u_s\rangle\big)ds\\&+\int_t^\tau\langle X_s,Z_sX_s\rangle dW_s.\end{aligned} \tag{39}$$

我们引入一个非增序列 $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$，使得 $\varepsilon_m\in(0,T-t)$、$m\in\mathbb{N}$，且 $\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m=0$。令 $T_m:=T-\epsilon_m$，$m\in\mathbb{N}$。注意，对每个 $m\in\mathbb{N}$，过程 $(\int_t^r\langle X_s,Z_sX_s\rangle dW_s)_{r\in[t,T_m]}$ 是一个局部鞅。对每个 $m\in\mathbb{N}$，令 $(\tau_{k,m})_{k\in\mathbb{N}}$ 为一个单调收敛至 T_m 的停时局部化序列。特别地，对所有 $m,k\in\mathbb{N}$，有

$$E\bigg[\int_t^{\tau_{k,m}}\langle X_s,Z_sX_s\rangle dW_s\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\bigg]=0.$$

因此，由（39）可知，对所有 m、$k\in\mathbb{N}$，

$$\langle x,Y_tx\rangle=E\bigg[\int_t^{\tau_{k,m}}\big(\langle u_r,\eta_ru_r\rangle+2\langle\phi_rX_r,u_r\rangle+\langle X_r,\lambda_rX_r\rangle\big)dr+\langle X_{\tau_{k,m}},Y_{\tau_{k,m}}X_{\tau_{k,m}}\rangle\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\bigg].$$

对于任意 $m \in \mathbb{N}$，令 $k \to \infty$ 趋于极限，结合 **A1)**、单调收敛定理和法图引理可得

$$\begin{aligned}\langle x, Y_t x\rangle &\geq E\bigg[\int_t^{T_m} \big(\langle u_r, \eta_r u_r\rangle + 2\langle \phi_r X_r, u_r\rangle + \langle X_r, \lambda_r X_r\rangle\big) dr + \langle X_{T_m}, Y_{T_m} X_{T_m}\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \\ &\geq E\bigg[\int_t^{T_m} \big(\langle u_r, \eta_r u_r\rangle + 2\langle \phi_r X_r, u_r\rangle + \langle X_r, \lambda_r X_r\rangle\big) dr \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg]. \end{aligned} \tag{40}$$

取极限 $m \to \infty$ 并再次应用单调收敛定理，我们得到

$$\langle x, Y_t x\rangle \geq E\bigg[\int_t^{T} \big(\langle u_r, \eta_r u_r\rangle + 2\langle \phi_r X_r, u_r\rangle + \langle X_r, \lambda_r X_r\rangle\big) dr \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg].$$

由此以及**A1)** 可得

$$\delta E\bigg[\int_t^T \|u_r\|^2 dr\bigg] \leq E\big[\langle x, Y_t x\rangle\big] \leq \|x\|^2 E[\sup_{0\leq s\leq t}\|Y_s\|] < \infty. \tag{41}$$

令 $X^u = (X_s^u)_{s\in[t,T]}$ 由（2）定义，并注意到对于所有 $s \in [t, T)$， P-几乎处处都有 $X_s^u = X_s$ 且 $\lim_{r\to T} X_r = X_T^u$。为证明 $X_T^u \in \ker(\xi)$，注意到（39）连同 **A1)** 和 $E[|\langle x, Y_t x\rangle|] < \infty$ 表明，$\langle X^u, YX^u\rangle$ 是$[t, T)$上的局部超鞅。由于 Y取值于 $\mathbb{S}_+^d$，因此 $\langle X^u, YX^u\rangle$ 是 $[t, T)$上的非负超鞅。由超鞅收敛定理，存在一个随机变量 $\overline{X} \in L^1(\Omega\ \mathbb{R})$，使得 $\lim_{s\to T}\langle X_s^u, Y_s X_s^u\rangle = \overline{X}$ P-几乎处处成立。再结合状态过程 X^u的连续性，以及 (Y, Z)是（5）在定义 1.1 意义下的上解这一事实，可知 $X_T^u \in \ker(\xi)$ 几乎处处成立。由 $X_T^u \in \ker(\xi)$ P-几乎处处成立以及（41），我们得到 $(u_s)_{s\in[t,T]} \in \mathcal{A}_0(t, x)$。此外，注意到根据定义 1.1 以及 X^u 的连续性，有 $\lim_{s\to T}\langle X_s^u, Y_s X_s^u\rangle \geq \langle X_T^u, \theta X_T^u\rangle$。因此，法图引理、单调收敛定理以及（40）意味着

$$\begin{aligned}&\langle x, Y_t x\rangle \\ &\geq E\bigg[\int_t^T \big(\langle u_r, \eta_r u_r\rangle + 2\langle \phi_r X_r^u, u_r\rangle + \langle X_r^u, \lambda_r X_r^u\rangle\big) dr + \liminf_{m\to\infty}\langle X_{T_m}^u, Y_{T_m} X_{T_m}^u\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \\ &\geq E\bigg[\int_t^T \big(\langle u_r, \eta_r u_r\rangle + 2\langle \phi_r X_r^u, u_r\rangle + \langle X_r^u, \lambda_r X_r^u\rangle\big) dr + \langle X_T^u, \theta X_T^u\rangle \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] = J(t, x, u).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

在下面的结果中，我们给出值函数 v 的所需表示，并根据命题 3.1 中构造的上解 Y 刻画最优策略。

命题 3.3。 假设满足***A1)–A3)*** 和***B1)*** 。令(Y, Z) 为命题 *3.1* 中构造的奇异倒向随机微分方程(5) 的上解。则对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $t \in [0, T)$ P-几乎处处，有 $v(t, x) = \langle x, Y_t x\rangle$，且最优状态过程$X^*$满足 $\dot{X}_s^* = -\eta_s^{-1}(Y_s - \phi_s)X_s^* + A_s X_s^*$, $s \in [t, T)$, $X_t = x$。

证明。对所有 $n \in \mathbb{N}$，令 (Y^n, Z^n) 为命题 2.6 中构造的倒向随机微分方程 (10) 的解。注意，对所有 $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T)$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，都有 P-几乎处处成立：

$$v(t,x) = \operatorname*{ess\,inf}_{u \in \mathcal{A}_0(t,x)} J(t,x,u) \geq \operatorname*{ess\,inf}_{u \in \mathcal{A}_0(t,x)} J_n(t,x,u) \geq \operatorname*{ess\,inf}_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J_n(t,x,u) = \langle x, Y_t^n x \rangle.$$

结合命题 3.1 可知，对所有 $t \in [0,T)$ 以及 $x \in \mathbb{R}^d$ P-几乎处处，有$v(t,x) \geq \langle x, Y_t x \rangle$。结合引理 3.2，我们得到，对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 和$t \in [0,T)$，P-几乎处处有 $v(t,x) = \langle x, Y_t x \rangle = J(t,x,u)$，其中 u 的定义同引理 3.2。根据 J 的一致凸性（另见注 2.2）以及引理 3.2，分别可得最优控制和最优状态的唯一性。 □

下一个结果证明了命题 3.1 中构造的上解的极小性。该结果是引理 3.2 和命题 3.3 的直接推论。

推论 3.4。假设 ***A1)–A3)*** 和***B1)*** 成立。设(Y,Z) 为命题 ***3.1*** 中按照定义 ***1.1*** 的意义构造的奇异倒向随机微分方程(5) 的上解。假设(Y',Z') 是(5) 按照定义 ***1.1*** 意义下的另一个上解。那么，对所有 $t \in [0,T)$，P-几乎处处有 $Y_t' \geq Y_t$。

请注意，满足 $\ker(\xi) = C$ 的随机变量 ξ 并不唯一。由于命题 3.1 中奇异倒向随机微分方程（5）的上解（Y， Z）的构造依赖于对这类 ξ的具体选择，因此乍看之下，（Y， Z）可能会依赖于这一选择。推论 3.4 直接表明，事实并非如此。

推论 3.5。假设***A1)–A3)***和***B1)*** 均成立。令 $\xi_1, \xi_2 \colon \Omega \to \mathbb{S}_+^d$为 $\mathcal{F}_T$-可测且有界，并假设$\ker(\xi_1) = \ker(\xi_2)$。令$(Y^1, Z^1)$ 和(Y^2, Z^2) 分别为命题 ***3.1*** 中以 ξ_1 和 ξ_2 作为逼近终端条件、按照定义 ***1.1*** 的意义构造的奇异倒向随机微分方程(5) 的上解。则 $Y^1 = Y^2$。

注 3.6。令 $B \colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$为一个渐进可测过程。将 (2) 推广后，可以考虑状态过程

$$\dot{X}_s = B_s u_s + A_s X_s, \quad s \in [t,T], \quad X_t = x.$$

这将得到稍作修改的后向随机微分方程

$$\begin{aligned} dY_t &= \big((Y_t B_t + \phi_t^\top)\eta_t^{-1}(B_t^\top Y_t + \phi_t) - \lambda_t - Y_t A_t - A_t^\top Y_t\big)dt + Z_t dW_t, \quad t \in [0,T], \\ Y_T &= \theta + \xi \quad (\text{or, in the singular case, } Y_T = \infty \mathbb{1}_{C^c} + \theta \mathbb{1}_C). \end{aligned}$$

最优状态过程的候选过程满足

$$\dot{X}_s = -B_s \eta_s^{-1}(B_s^\top Y_s + \phi_s)X_s + A_s X_s, \quad s \in [t,T), \quad X_t = x.$$

因此可以证明，在附加假设存在 $\overline{K} \in (0,\infty)$，使得对所有 $s \in [0,T]$ 均成立 $\|B_s\| \leq \overline{K}$ 的条件下，惩罚情形的结果仍然成立。

对于第 3 节的结果，引理 2.9 中构造的上界至关重要；因此，若要以相同方式继续推导，就需要满足一些可控性条件。在条件**A1)–A3)** 和**B1)** 以及附加假设：对所有 $s \in [0,T]$，随机矩阵 B_s 是 P-几乎必然可逆，并且存在 $\overline{K} \in (0,\infty)$，使得 ($\|B_s\| + \|B_s^{-1}\|$) $\leq \overline{K}$ 的条件下，可以得到奇异情形的结果。

注 3.7. 请注意，本节的结果也适用于第 2 节的情形。这样，我们便能得到第 2 节结果的变体，而无需施加条件 **A4)**。事实上，通过令 $\xi = 0$ （从而 $C = \mathbb{R}^d$），控制问题 **(1)** 不含终端状态约束，只有终端成本 $\langle X_T, \theta X_T \rangle$。因此，我们处于第 2 节的¯情形，其中 $\xi = \theta$。现在可以利用本节，在仅假设θ 几乎必然有限的条件下，通过 **(5)** 的终端条件为 $\xi = \theta$ 的超¯解 Y，刻画最优控制 u^* 及其对应的状态 X^* （无需像条件 **A4)** 那样要求三阶矩有限）。但请注意，过程 Y仅定义在 $[0,T)$ 上。

4. 情形 $C = \{0\}$

本节假设 ξ 的核仅包含零向量（即 ξ 可逆），并给出关于奇异倒向随机微分方程 **(5)** 的最小解 Y 及相应最优控制 u^* 的更多结果。我们考虑以下两种情形：

- 当 η 具有不相关乘法增量（见定义 4.2），且所有其他系数均为零时，我们证明 Y 有闭式表达式，且 u^* 是确定性的。因此，我们将 [3, 第 5] 节的结果推广到多维情形。请注意，在此框架下，为了保证最小解 Y 的存在，可以放宽对 η 的可积性条件（下文的假设 **C2)** ，而非 **A1)** 和 **B1)** ）。

- 当所有系数均有界且 η 是伊藤过程时， Y 在终端时刻 T 附近具有显式渐近展开。这里，我们将 [19, 第 4.1] 节的结果推广到多维情形。在维数为 1 时，这一展开也曾用于证明 [17, 18, 21] 中 HJB 方程解的存在性。

在继续之前，我们先陈述命题 2.8 的以下推论，该推论将在第 4.2 节中使用。

引理 4.1. 假设 ***A1)–A3)*** 成立， ξ 是 P-几乎处处可逆，并且存在 $\delta_1 \in [0,\infty)$ 使得 $\|\eta_t^{-1}\phi_t + A_t\| \leq \delta_1$ 对所有 $t \in [0,T]$ P-几乎处处成立。令(Y,Z) 为命题 ***3.1*** 中构造的奇异倒向随机微分方程 (5) 的上解。则对所有 $t \in [0,T)$，有 P几乎处处成立：

$$Y_t \geq e^{-4\delta_1 T} E\left[\left(\int_t^T \eta_s^{-1} ds\right)^{-1} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

证明. 对所有 $n \in \mathbb{N}$，取 $\xi^n = n\xi$ 和 $\theta = 0$，并令 (Y^n, Z^n) 为命题 2.6 中构造的、终端条件为 ξ^n 的倒向随机微分方程 (10) 的解。注意，对所有 $t \in [0,T)$，Y_t 是非递减序列 $(Y_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的 P-几乎处处极限。由此以及命题 2.8 可得，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,T)$：

$$Y_t \geq Y_t^n \geq e^{-4\delta_1 T} E\left[\left(\frac{1}{n}\xi^{-1} + \int_t^T \eta_s^{-1} ds\right)^{-1} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

应用法图引理即可得出结论。 □

4.1. 具有不相关乘法增量的过程

本节在以下设定下考虑奇异倒向随机微分方程（5）：

C1) 过程 λ、ϕ、A 均为零，且成立 $\xi =$ 恒等矩阵。

C2) 过程 η 满足：对所有 $0 \leq s \leq t \leq T$，均有 $E[\|\eta_t\|] < \infty$、$E[\|\eta_s^{-1}\eta_t\|] < \infty$，且

$$E\left[\|\eta_T\|^2 + \int_0^T \left(\|\eta_r\|^2 + \|\eta_r^{-1}\|\right) dr\right] < \infty.$$

定义 4.2. 在 **C2)** 条件下，若对所有 $0 \leq s \leq t \leq T$ 均成立，则称 η 具有不相关乘法增量

$$E\left[\eta_s^{-1}\eta_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = E\left[\eta_s^{-1}\eta_t\right]. \tag{42}$$

注意，为了在下文的命题 4.5 中得到倒向随机微分方程的一个解，我们施加与一维情形中假设的类似的可积性条件（见 [3, 第 5]节）。主要的技术区别在于，在当前的多维情形下，状态过程不一定单调，也不一定有界。

为了在下文的命题 4.6 中刻画值函数，除**C1)** 和**C2)** 外，我们还假设过程 η 一致地有正下界：我们施加**A1)**，在**C1)** 条件下，这等价于假设存在 $\delta \in (0,\infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$，P-几乎必然有 $\eta_t \geq \delta$ 恒等矩阵。

我们首先刻画 η 何时具有不相关乘法增量。

引理 4.3。 假设 *C2)* 成立。那么：

(i) 若 η 具有不相关乘法增量，则对所有 $0 \leq s \leq t \leq T$，都有 $E[\eta_s^{-1}\eta_t] = (E[\eta_s])^{-1}E[\eta_t]$。

(ii) 过程 η 具有不相关乘法增量，当且仅当过程 $(\eta_t\,(E[\eta_t])^{-1})_{t\in[0,T]}$ 是鞅。

证明。 如果 η 具有不相关乘法增量，那么对于所有 $0 \leq s \leq t \leq T$，我们有

$$E[\eta_t] = E[\eta_s E[\eta_s^{-1}\eta_t|\mathcal{F}_s]] = E[\eta_s]E[\eta_s^{-1}\eta_t]. \tag{43}$$

这证明了 (i)。令 $M_t = \eta_t(E[\eta_t])^{-1}$, $t \in [0,T]$。如果 η 具有不相关乘法增量，那么由 (42) 和 (43) 可得，对于所有 $0 \le s \le t \le T$，我们有

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = E[\eta_t|\mathcal{F}_s](E[\eta_t])^{-1} = \eta_s E[\eta_s^{-1}\eta_t|\mathcal{F}_s](E[\eta_t])^{-1} = \eta_s(E[\eta_s])^{-1} = M_s;$$

因此， M 是鞅。反过来，假设$(M_t)_{t\in[0,T]}$ 是鞅。那么对于所有 $0 \le s \le t \le T$，我们有

$$\eta_s E[\eta_s^{-1}\eta_t|\mathcal{F}_s] = E[M_t|\mathcal{F}_s]E[\eta_t] = M_s E[\eta_t] = \eta_s(E[\eta_s])^{-1}E[\eta_t].$$

因此，对于所有 $0 \le s \le t \le T$， $E[\eta_s^{-1}\eta_t|\mathcal{F}_s]$ 都是确定性的。这意味着对于所有 $0 \le s \le t \le T$， $E[\eta_s^{-1}\eta_t|\mathcal{F}_s] = E[\eta_s^{-1}\eta_t]$ ，从而完成证明。 □

注 4.4。 假设满足**C2)** ，且由 $M_t = \eta_t(E[\eta_t])^{-1}$, $t \in [0,T]$给出的 $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ 是鞅。那么应用Doob最大不等式可得 $E[\sup_{s\in[0,T]}\|M_s\|^2] \le 4E[\|M_T\|^2] \le 4E[\|\eta_T\|^2]\,\|(E[\eta_T])^{-1}\|^2 < \infty$。

在以下结果中，我们给出 BSDE（5）的显式解 Y ，以及在 η 具有不相关乘法增量的情况下最优控制的一个确定性候选。随后，我们将在命题 4.6 中证明该候选的最优性。

命题 4.5。 假设 *C1)* 和 *C2)* 成立，且过程 η 具有不相关乘法增量。令 $Y: [0,T) \times \Omega \to \mathbb{S}_+^d$ 定义为

$$Y_t = \left(\int_t^T \big(E[\eta_s|\mathcal{F}_t]\big)^{-1} ds\right)^{-1}, \quad t \in [0,T).$$

此外，记

$$h_t = \int_t^T \big(E[\eta_s]\big)^{-1} ds, \quad t \in [0,T].$$

则：

(*i*) 对所有 $t \in [0,T)$ </style}均成立：$(E[\eta_t])^{-1}h_t^{-1}$。

(*ii*) 存在一个过程 $Z: [0,T) \times \Omega \to \mathbb{S}^d$，使得 (Y, Z) 是 *BSDE* (5) 在定义 *1.1* 意义下的一个解。

(iii) 令 $t \in [0,T)$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。定义

$$X_s = h_s h_t^{-1} x, \quad s \in [t,T], \tag{44}$$
$$u_s = (E[\eta_s])^{-1} h_t^{-1} x, \quad s \in [t,T]. \tag{45}$$

于是有 $u = (u_s)_{s\in[t,T]} \in \mathcal{A}_0(t,x)$，且 $X = (X_s)^{s\in[t,T]}$ 是与 u 相关联的状态(2)。此外，有 $J(t,x,u) = \langle x, Y_t x\rangle$。

证明。令 $M_t = \eta_t (E[\eta_t])^{-1}, t \in [0,T]$，并注意到由 (42) 和引理 4.3 可知，对所有 $t \in [0,T)$，都有

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \left(\int_t^T \left(E[\eta_t \eta_t^{-1} \eta_s | \mathcal{F}_t] \right)^{-1} ds \right)^{-1} = \eta_t \left(\int_t^T \left(E[\eta_t^{-1} \eta_s | \mathcal{F}_t] \right)^{-1} ds \right)^{-1} \qquad (46) \\
&= \eta_t \left(\int_t^T \left(\left(E[\eta_t] \right)^{-1} E[\eta_s] \right)^{-1} ds \right)^{-1} = \eta_t \left(E[\eta_t] \right)^{-1} \left(\int_t^T \left(E[\eta_s] \right)^{-1} ds \right)^{-1} = M_t h_t^{-1}.
\end{aligned}
$$

这就证明了 (i)。回顾一下，根据引理 4.3，$M = (M_t)_{t \in [0,T]}$ 是一个鞅，并且由注 4.4 可知满足$E[\sup_{s \in [0,T]} \|M_s\|^2] < \infty$。鞅表示定理保证存在一个渐进可测过程 $\widetilde{Z}$: $[0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$，使得 $E[\int_0^T \|\widetilde{Z}_s\|^2 ds] < \infty$，且对所有 $t \in [0,T]$都有 $M_t = \int_0^t \widetilde{Z}_s dW_s$。对于所有 $t \in [0,T)$，我们定义$Z_t = \widetilde{Z}_t h_t^{-1}$。注意，对所有 $t \in [0,T)$，我们都有 $E[\int_0^t \|Z_s\|^2 ds] < \infty$。此外，由 (46) 和注 4.4 可知，对所有 $t \in [0,T)$，都有 $E[\sup_{s \in [0,t]} \|Y_s\|^2] < \infty$。分部积分和 (46) 表明，对所有 $t \in [0,T)$，

$$
dY_t = (dM_t) h_t^{-1} + M_t h_t^{-1} (E[\eta_t])^{-1} h_t^{-1} dt = Z_t dW_t + Y_t \eta_t^{-1} Y_t dt. \qquad (47)
$$

由于 Y 取值于 $\mathbb{S}_+^d$，这表明 $Z = (Z_t)_{t \in [0,T)}$ 取值于 $\mathbb{S}^d$。此外，对于过程 $(\psi_t)_{t \in [0,T]}$ 在 T 处左连续且满足 $\lim_{t \to T} \psi_t \neq 0$ 的任意路径，有

$$
\liminf_{t \to T} \langle \psi_t, Y_t \psi_t \rangle \geq \liminf_{t \to T} \left(\lambda_{\min}(Y_t) \|\psi_t\|^2 \right) = \infty.
$$

因此，对 (Y, Z) 是按定义 1.1 意义下的倒向随机微分方程 (5) 的解，这证明了 (ii)。为证明 (iii)，我们固定 $t \in [0,T)$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。由引理 A.2 和 C2)，有$u \in L^1([t,T])$。注意 $X_t = x$, $X_T = 0$，且对所有 $s \in [t,T]$，有

$$
\dot{X}_s = -(E[\eta_s])^{-1} h_t^{-1} x = -u_s.
$$

因此，分部积分、(47) 和 (46) 推出，对所有 $s \in [t,T)$，有

$$
\begin{aligned}
d\langle X_s, Y_s X_s \rangle &= -\langle u_s, Y_s X_s \rangle ds + \langle X_s, \widetilde{Z}_s h_s^{-1} X_s \rangle dW_s + \langle X_s, M_s h_s^{-1} (E[\eta_s])^{-1} h_s^{-1} X_s \rangle ds \\
&\quad - \langle X_s, Y_s u_s \rangle ds \\
&= -\langle u_s, \eta_s (E[\eta_s])^{-1} h_s^{-1} h_s h_t^{-1} x \rangle ds + \langle X_s, Z_s X_s \rangle dW_s \\
&\quad + \langle X_s, Y_s (E[\eta_s])^{-1} h_s^{-1} h_s h_t^{-1} x \rangle ds - \langle X_s, Y_s u_s \rangle ds \\
&= -\langle u_s, \eta_s u_s \rangle ds + \langle X_s, Z_s X_s \rangle dW_s.
\end{aligned}
$$

由于 X 是连续且确定性的，并且对所有 $s \in [0,T)$ 都有 $Z \in L^2(\Omega \times [0,s])$ 成立，因此对所有 $s \in [t,T)$，我们得到 $E[\int_t^s \langle X_r, Z_r X_r \rangle dW_r | \mathcal{F}_t] = 0$。由此可知，对所有 $s \in [t,T)$，有

$$
\langle x, Y_t x \rangle = E\left[\int_t^s \langle u_r, \eta_r u_r \rangle dr \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] + E\left[\langle X_s, Y_s X_s \rangle \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]. \qquad (48)
$$

注意到 (46)，以及 M 是鞅、 X 是确定性的这一事实，可推出对所有$s \in [t,T)$ 有

$$E\big[\langle X_s, Y_s X_s\rangle \,\big|\, \mathcal{F}_t\big] = E\big[\langle X_s, M_s h_s^{-1} h_s h_t^{-1} x\rangle \,\big|\, \mathcal{F}_t\big] = \langle X_s, M_t h_t^{-1} x\rangle.$$

由于 X 关于 $X_T = 0$连续，因此我们得到

$$\lim_{s\to T} E\big[\langle X_s, Y_s X_s\rangle \,\big|\, \mathcal{F}_t\big] = \langle X_T, M_t h_t^{-1} x\rangle = 0. \tag{49}$$

此外，注意到单调收敛定理表明

$$\lim_{s\to T} E\left[\int_t^s \langle u_r, \eta_r u_r\rangle dr \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = E\left[\int_t^T \langle u_r, \eta_r u_r\rangle dr \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]. \tag{50}$$

结合 (48)、(49) 和 (50)，我们得到 $\langle x、\ Y_t x\rangle = J(t,x,u)$，从而证明完毕。

□

命题 4.6。 假设 ***A1)***、***C1)*** 和***C2)*** 均成立，且 η 具有无关的乘法增量。令 (Y,Z) 表示命题 *4.5* 中构造的倒向随机微分方程 (5) 的解。

(i) 令 $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T)$，并令 $u = (u_s)_{s\in[t,T)}$ 由 (45)定义。则 u 是 (4) 的唯一最优控制，且有 $v(t,x) = \langle x, Y_t x\rangle$。

(ii) 解 (Y,Z) 是倒向随机微分方程 (5)的最小解。

证明。 为证明 (i)，令 $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T)$，令 $u = (u_s)_{s\in[t,T)}$ 由 (45) 定义，并再次记 $h_r = \int_r^T (E[\eta_s])^{-1} ds$, $r \in [0,T]$。令 $u' \in \mathcal{A}_0(t,x)$ 为任意控制。注意，若 $u' \notin L^2(\Omega \times [t,T])$，则 η 的下界意味着 u' 会产生无限成本。因此，只需考虑 $u' \in L^2(\Omega \times [t,T])$。令 $X = (X_s)_{s\in[t,T]}$和$X' = (X'_s)_{s\in[t,T]}$ 分别为与 u 和 u' 通过 (2) 相关联的状态过程。注意，对所有 $s \in [t,T]$，均有 $\langle u_s, \eta_s u_s\rangle + \langle u'_s, \eta_s u'_s\rangle \geq 2\langle \eta_s u_s, u'_s\rangle$.。由此以及 (45) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_t^T \big(\langle u'_s, \eta_s u'_s\rangle - \langle u_s, \eta_s u_s\rangle\big)\, ds \geq 2\int_t^T \langle \eta_s u_s, u'_s - u_s\rangle\, ds \\
&= 2\int_t^T (\eta_s u_s)^\top d(X'_s - X_s) = 2\int_t^T \big(\eta_s (E[\eta_s])^{-1} h_t^{-1} x\big)^\top d(X'_s - X_s).
\end{aligned} \tag{51}$$

回顾引理 4.3， $M = (M_s)_{s\in[0,T]}$ 由 $M_s = \eta_s (E[\eta_s])^{-1}$, $s \in [0,T]$ 定义，是一个鞅。由于 $X_t = x = X'_t$ 和 $X_T = 0 = X'_T$，根据分部积分可得

$$\int_t^T \big(M_s h_t^{-1} x\big)^\top d(X'_s - X_s) = -x^\top h_t^{-1} \int_t^T (dM_s^\top)(X'_s - X_s). \tag{52}$$

注意，$E[\int_t^T \|u'_s\|^2 ds] < \infty$ 意味着 $E[\sup_{t\leq s\leq T} \|X'_s\|^2] < \infty$。这一点、 X 是连续且确定性的这一事实，以及注 4.4 确保了

$$E\left[\int_t^T (dM_s^\top)(X'_s - X_s) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

因此，(51) 和 (52) 表明

$$E\left[\int_t^T \left(\langle u'_s, \eta_s u'_s\rangle - \langle u_s, \eta_s u_s\rangle\right) ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \geq 0.$$

结合命题 4.5 可得 $v(t,x) = \langle x, Y_t x\rangle = J(t,x,u)$。

为证明 (ii)，假设 (Y', Z') 是定义 1.1 意义下倒向随机微分方程 (5) 的一个解。于是，引理 3.2 表明，对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $t \in [0,T)$，均有 $\langle x, Y'_t x\rangle \geq v(t,x) = \langle x, Y_t x\rangle$，证毕。□

例 4.7。假设**C1)**。

(i) 设 $\eta = (\eta_t)_{t\in[0,T]}$ 是一个取值于 $\mathbb{S}^d_{++}$ 的鞅，满足可积性条件 **C2)**。则 η 具有不相关乘法增量，且命题 4.5 给出了定义 1.1 意义下倒向随机微分方程 (5) 的一个解。

(ii) 为构造同时满足 η 有下界这一条件的例子，可以采用停时方法：设 $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$ 是一个连续的、取值于 $\mathbb{S}^d$ 的鞅，且满足 $E[\|N_T\|^2] < \infty$。取 $\delta \in (0,\infty)$，并定义停时 $\tau = \inf\{t \geq 0 : N_t \leq \delta \text{恒等矩阵}\}$。设 $\eta = (\eta_t)_{t\in[0,T]}$ 由 $\eta_t := N_{t\wedge\tau}$, $t \in [0,T]$ 给出。于是，对所有 $t \in [0,T]$，都有 $\eta_t \geq \delta$ 恒等矩阵，并且满足 **C2)**。因此，命题 4.6 表明，命题 4.5 中构造的解是定义 1.1 意义下倒向随机微分方程 (5) 的最小解。此外，由于 η 是一个鞅，我们有最优策略为线性形式，给定为 $X_s = \frac{T-s}{T-t}x$, $s \in [t,T]$。

4.2. 当 η 是伊藤过程时

在本小节中，我们假设过程 η 是伊藤过程，且所有系数均有界。更确切地说：

D1) 存在渐进可测过程 $b^\eta\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$ 和 $\sigma^\eta\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$，使得 $d\eta_t = b^\eta_t dt + \sigma^\eta_t dW_t$、$t \in [0,T]$ 成立，并且存在 $K^\eta \in (0,\infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$，P-a.s. 均有 $\|b^\eta_t\| \leq K^\eta$ 和 $\|\sigma^\eta_t\| \leq K^\eta$。

D2) $\xi = \mathrm{Id}$ 成立，且存在 $K \in (0,\infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$，P-a.s. 均有 $\|\lambda_t\| \leq K$、$\|\phi_t\| \leq K$、$\|A_t\| \leq K$ 和 $\|\eta_t\| \leq K$。

注意，在**A1)**、**D1)**和**D2)**条件下，引理 4.1 的结论成立。本部分的主要结果是以下命题，我们将在 T 附近建立奇异倒向随机微分方程 (5) 的最小上解的渐近展开。

命题 4.8. 假设 ***A1)***、***D1)***和***D2)*** 均成立。则存在一个渐进可测过程 $H\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$，使得对所有 $t \in [0,T)$，几乎必然有 P，并且根据定义 ***1.1***，倒向随机微分方程 (5) 的最小上解 (Y,Z) 可表示为

$$Y_t = \frac{1}{T-t}\eta_t + \frac{1}{(T-t)^2}H_t, \tag{53}$$

并且存在一个常数 $c \in (0,\infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$，P-几乎必然有

$$\|H_t\| \leq c(T-t)^2.$$

如本节引言所述，该结果将 Y 的渐近展开推广到了多维情形。值得注意的是，该结果是在与一维情形相同的假设下得到的（参见 [10] 和 [19, 第 4 节1]）。

我们将命题 4.8 的证明分成两个引理。不过，首先我们在注 4.9 中将问题化简为 ϕ 和 A 均为零过程的情形。为此，我们引入以下辅助过程（在 **A1)** 、 **D1)** 和 **D2)** 条件下）：

Let $\hat{A} = (\hat{A}_t)_{t\in[0,T]}$ 定义为

$$\hat{A}_t = A_t + \eta_t^{-1}\phi_t, \quad t \in [0,T],$$

并注意到**A1)** 和**D2)** 保证存在 $\delta_1 \in (0,\infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$， P-几乎处处有 $\|A_t\| \le \delta_1$。令 $U = (U_t)_{t\in[0,T]}$ 为以下方程的唯一解：

$$dU_t = -U_t\hat{A}_t dt, \quad t \in [0,T], \quad U_0 = \mathrm{Id}\,.$$

注意，由于 $\hat{A}$ 有界，and U 也有界。此外，定义 $(\lambda_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $\widetilde{\eta} = (\widetilde{\eta}_t)_{t\in[0,T]}$ 如下：

$$\widetilde{\lambda}_t = (U_t^\top)^{-1}(\lambda_t - \phi_t^\top \eta_t^{-1}\phi_t)U_t^{-1}, \quad t \in [0,T],$$
$$\widetilde{\eta}_t = (U_t^\top)^{-1}\eta_t U_t^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

注意到**A1)** 意味着 λ 取值于 $\mathbb{S}^d_+$，而**A1)** 和**D2)** 保证存在 $K, \delta \in (0,\infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$， P-几乎处处有 $\|\lambda_t\| \le K$、 $\|\widetilde{\eta}_t\| \le K$和$\widetilde{\eta}_t \ge \delta$恒等矩阵。此外，定义 $b^{\widetilde{\eta}} = (b_t^{\widetilde{\eta}})_{t\in[0,T]}$ 和 $\sigma^{\widetilde{\eta}} = (\sigma_t^{\widetilde{\eta}})_{t\in[0,T]}$ 如下：

$$b_t^{\widetilde{\eta}} = (U_t^\top)^{-1}\big(b_t^\eta + \eta_t\hat{A}_t + \hat{A}_t^\top\eta_t\big)U_t^{-1}, \quad t \in [0,T],$$
$$\sigma_t^{\widetilde{\eta}} = (U_t^\top)^{-1}\sigma_t^\eta U_t^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

根据 **A1)**、**D1)** 和 **D2)**，存在 $K^{\widetilde{\eta}} \in (0,\infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$， P-几乎必然有 $\|b_t^{\widetilde{\eta}}\| \le K^{\widetilde{\eta}}$ 且 $\|\sigma_t^{\widetilde{\eta}}\| \le K^{\widetilde{\eta}}$。此外，由 **D1)** 可知， $b^{\widetilde{\eta}}$ 和 $\sigma^{\widetilde{\eta}}$ 是 $\mathbb{S}^d$-值的，并且对所有 $t \in [0,T]$，有 $d\widetilde{\eta}_t = b_t^\eta dt + \sigma_t^\eta dW_t$。

注 4.9. 设 **A1)**、**D1)** 和 **D2)** 成立。

(i) 我们注意到，若 (Y,Z) 是按定义 1.1 的意义下倒向随机微分方程 (5) 的一个解，则由 $\widetilde{Y} = (U^\top)^{-1}YU^{-1}$ 和 $\widetilde{Z} = (U^\top)^{-1}ZU^{-1}$ 给出的 $(\widetilde{Y},\widetilde{Z})$ 是倒向随机微分方程

$$d\widetilde{Y}_t = \widetilde{Y}_t\widetilde{\eta}_t^{-1}\widetilde{Y}_t dt - \widetilde{\lambda}_t dt + \widetilde{Z}_t dW_t, \quad t \in [0,T), \quad \widetilde{Y}_T = \infty\mathbb{1}_{C^c}. \tag{54}$$

按照定义 1.1 的意义，反之亦然。

(ii) 令 (Y,Z) 为按照定义 1.1 意义下 BSDE (5) 的最小上解。令 (Y,Z) 为按照定义 1.1 意义下 BSDE (54) 的最小上解，并令 $\widetilde{H}\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$ 满足 $\widetilde{H}_t = (T-t)^2\widetilde{Y}_t - (T-t)\widetilde{\eta}_t$, $t \in [0,T)$。那么可以证明，由 $H\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$ 定义的 $H_t = U_t^\top H_t U_t$, $t \in [0,T]$ 满足 (53)。

鉴于注 4.9，在引理 4.12 和引理 4.13 中，我们考虑 A 和 ϕ 为零的情形。下文中，我们考虑倒向随机微分方程

$$\begin{aligned} d\widetilde{H}_t &= \left(\frac{1}{(T-t)^2}\widetilde{H}_t\widetilde{\eta}_t^{-1}\widetilde{H}_t - (T-t)^2\widetilde{\lambda}_t - (T-t)b_t^{\widetilde{\eta}}\right)dt + Z_t^{\widetilde{H}}dW_t, \quad t\in[0,T], \\ \widetilde{H}_T &= 0\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned} \tag{55}$$

注 4.10. 在命题 4.8 的设定下，令 A 和 ϕ 为零，则过程H对所有 $t\in[0,T)$均满足式 (55) 中的动力学，其中 $Z_t^H = -(T-t)\sigma_t^\eta + (T-t)^2 Z_t, t\in[0,T)$。

为证明命题 4.8，我们以倒向随机微分方程 (55) 为出发点。我们在引理 4.12 中通过压缩论证证明，按照以下意义，(55) 存在唯一解。

定义 4.11. 若一对渐进可测过程 (H, Z^H)：$[0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^d$ 是倒向随机微分方程 (55) 的解，当且仅当

$$\sup_{t\in[0,T)}\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\frac{\|H_t(\omega)\|}{(T-t)^2} + E\left[\int_0^T \|Z_t^H\|^2 dt\right] < \infty$$

并且对所有 $t\in[0,T]$，以下关系以 P-几乎处处成立

$$H_t = -\int_t^T \left(\frac{1}{(T-s)^2}H_s\widetilde{\eta}_s^{-1}H_s - (T-s)^2\widetilde{\lambda}_s - (T-s)b_s^{\widetilde{\eta}}\right)ds - \int_t^T Z_s^H dW_s. \tag{56}$$

特别要注意的是，这一解的概念包含了命题 4.8 中所需的性质：存在常数 $c\in(0,\infty)$，使得对所有 $t\in[0,T]$，P-几乎处处有 $\|H_t\|\le c(T-t)^2$。此外，我们指出，奇异性已从式 (5) 的终端条件转移到了式 (55) 的驱动项中。

在证明（55）的存在性和唯一性之后，我们利用倒向随机微分方程（55）的解分量 H，通过（53）定义 Y。我们将在引理 4.13 中证明，如此定义的 Y 等于奇异倒向随机微分方程（5）的最小解的第一分量，其中 A 和 ϕ 均为零。

引理 4.12。假设 ***A1)***、***D1)*** 和***D2)*** 均成立，且 A 和 ϕ 均为零。那么，存在一个倒向随机微分方程 (55) 的唯一解 (H, Z^H)，其意义见定义 ***4.11***。

证明。我们定义过程 $\gamma=(\gamma_t)_{t\in[0,T]}$如下：$\gamma_t=(T-t)\lambda_t+b_t^\eta, t\in[0,T]$。注意，**D1)** 和 **D2)** 保证过程 γ 取值于 $\mathbb{S}^d$，并且存在 $K^\gamma\in(0,\infty)$，使得对所有 $t\in[0,T]$，P-几乎必然有 $\|\gamma_t\|\le K^\gamma$。对于所有 $\tau\in(0,T)$，我们将 $\mathcal{H}_\tau$定义为所有适应有界过程 H：$[T-\tau,T]\times\Omega\to\mathbb{S}^d$ 的集合，其中存在 $c>0$ 使得对所有 $t\in[T-\tau,T]$ 都有 $\|H_t\|\le c(T-t)^2$。我们在 $\mathcal{H}_\tau$上赋予范数

$$\|H\|_{\mathcal{H}_\tau} = \sup_{t\in[T-\tau,T)}\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\frac{\|H_t(\omega)\|}{(T-t)^2}.$$

此外，对于所有 $\tau \in (0,T)$ 和 $R \in (0,\infty)$，我们将 $\mathcal{H}_{\tau,R}$ 定义为满足 $\|H\|_{\mathcal{H}_\tau} \le R$ 的所有过程 $H \in \mathcal{H}_\tau$ 的集合。在 $\mathcal{H}_\tau$ 上，我们如下定义算子 Γ：对于所有 $H \in \mathcal{H}_\tau$ 和 $t \in [T-\tau, T]$，令

$$\Gamma(H)_t = E\bigg[\int_t^T \bigg((T-s)\gamma_s - \frac{1}{(T-s)^2} H_s \eta_s^{-1} H_s\bigg) ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg].$$

注意到，对于所有 $t \in [T-\tau, T]$，均有

$$\|\Gamma(0)_t\| \le E\bigg[\int_t^T (T-s)\|\gamma_s\| ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \le \frac{K^\gamma}{2}(T-t)^2.$$

因此，

$$\|\Gamma(0)\|_{\mathcal{H}_\tau} \le \frac{K^\gamma}{2}. \tag{57}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于所有 H，$H \in \mathcal{H}_\tau$，令 $\Delta H = H - \widehat{H}$，并注意到对于所有 $t \in [T-\tau, T]$，均有

$$\begin{aligned}
&\Gamma(H)_t - \Gamma(\widehat{H})_t \\
&= -E\bigg[\int_t^T \frac{1}{(T-s)^2}\bigg(H_s\eta_s^{-1}H_s - \widehat{H}_s\eta_s^{-1}\widehat{H}_s\bigg) ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] \\
&= -E\bigg[\int_t^T \frac{1}{(T-s)^2}\bigg((\Delta H_s)\eta_s^{-1}\widehat{H}_s + \widehat{H}_s\eta_s^{-1}(\Delta H_s) + \Delta H_s\eta_s^{-1}\Delta H_s\bigg) ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg].
\end{aligned}$$

由于对于所有 $t \in [0,T]$，均有 P-a.s. $\|\eta_t^{-1}\| \le \sqrt{d}\delta^{-1}$，因此对于所有 H、$\widehat{H} \in \mathcal{H}_{\tau,\ R}$均有$P$-a.s. 对所有 $t \in [T-\tau, T]$，均有

$$\|\Gamma(H)_t - \Gamma(\widehat{H})_t\| \le (T-t)^3 \frac{4R\sqrt{d}}{3\delta}\|\Delta H\|_{\mathcal{H}_\tau}.$$

$\widehat{\ }$由此，对于所有 H、$H \in \mathcal{H}_{\tau,\ R}$，有

$$\|\Gamma(H) - \Gamma(\widehat{H})\|_{\mathcal{H}_\tau} \le \tau \frac{4R\sqrt{d}}{3\delta}\|\Delta H\|_{\mathcal{H}_\tau}. \tag{58}$$

结合式 (57)，对于所有 $H \in \mathcal{H}_{\tau,\ R}$，有

$$\|\Gamma(H)\|_{\mathcal{H}_\tau} \le \|\Gamma(H) - \Gamma(0)\|_{\mathcal{H}_\tau} + \|\Gamma(0)\|_{\mathcal{H}_\tau} \le \tau \frac{4R\sqrt{d}}{3\delta} R + \frac{K^\gamma}{2}. \tag{59}$$

选择 $R = K^\gamma$和 $\tau \in (0,T)$，使得 $\tau\frac{4K^\gamma\sqrt{d}}{3\delta} \le \frac{1}{2}$。由 (59) 和 (58)，对于所有 H，$\widehat{H} \in \mathcal{H}_{\tau,\ R}$，我们有 $\|\Gamma(H)\|_{\mathcal{H}_\tau} \le R$，且 $\|\Gamma(H) - \Gamma(\widehat{H})\|_{\mathcal{H}_\tau} \le \frac{1}{2}\|\Delta H\|_{\mathcal{H}_\tau}$。通过不动点论证，存在唯一的过程 $H' \in \mathcal{H}_{\tau,\ R}$，使得 $H' = \Gamma(H')$。此外，鞅表示定理保证存在一个渐进可测过程 $Z^{H'}$：$[T-\tau, T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$，使得 $E[\int_{T-\tau}^T \|Z_s^{H'}\|^2 ds] < \infty$，并且对于所有 $t \in [T-\tau, T]$，P-几乎必然成立：

$$E\bigg[\int_{T-\tau}^T \bigg((T-s)\gamma_s - \frac{1}{(T-s)^2} H'_s\eta_s^{-1}H'_s\bigg) ds \,\bigg|\, \mathcal{F}_t\bigg] = H'_{T-\tau} + \int_{T-\tau}^t Z_s^{H'} dW_s.$$

因此，$(H', Z^{H'})$ 是倒向随机微分方程 (55) 在 $[T-\tau, T]$ 上的一个解。

接下来，我们证明在整个区间 $[0,T]$ 上解的存在性。由于 $H' \in \mathcal{H}_{\tau,\ R}$，对于所有 $t \in [T-\tau, T)$，我们有P-a.s. $H'_t \geq -R(T-t)^2$ 恒等矩阵。由此以及 **A1)** 可知，存在 $t_0 \in [T-\tau, T)$ 使得

$$\frac{1}{T-t_0}\eta_{T-t_0} + \frac{1}{(T-t_0)^2}H'_{T-t_0} \geq \left(\frac{\delta}{T-t_0} - R\right)\mathrm{Id} \geq 0.$$

考虑 BSDE (13)，将其中的 T 替换为 $T-t_0$，并令 $A=0$, $\phi=0$, $\xi = \frac{1}{T-t_0}\eta_{T-t_0} + \frac{1}{T-t_0()^2}H'_{T-t_0}$。根据 [37, 定理 6.1]（另见命题 2.3），该倒向随机微分方程存在唯一解 (Y, Z)，其意义见定义 2.1，且 Y 有界。定义 $H\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$，使得 $H_t = H'_t, t \in [T-t_0, T]$，并且 $H_t = (T-t)^2 Y_t - (T-t)\eta_t, t \in [0, T-t_0)$。此外，定义 $Z^H\colon [0,T]\times\Omega \to \mathbb{S}^d$，使得 $Z^H_t = Z^{H'}_t, t \in [T-t_0, T]$，并且 $Z^H_t = -(T-t)\sigma^\eta_t + (T-t)^2 Z_t$, $t \in [0, T-t_0)$。于是，(H, Z^H) 是倒向随机微分方程 (55) 的一个解，其意义见定义 4.11。

为完成证明，我们来说明唯一性成立。假设 $(\widehat{H}, \widehat{Z}^H)$ 是倒向随机微分方程 (55) 在定义 4.11 意义下的另一个解，并回顾记号 $\Delta H = H - \widehat{H}$。注意，对所有 $t \in [0,T]$，均有

$$\begin{aligned} d(\Delta H_t) = &\left(\frac{1}{(T-t)^2}(\Delta H_t)\eta_t^{-1}(\Delta H_t) + \frac{1}{(T-t)^2}(\Delta H_t)\eta_t^{-1}\widehat{H}_t + \frac{1}{(T-t)^2}\widehat{H}_t\eta_t^{-1}(\Delta H_t)\right)dt \\ &+ (Z^H_t - Z^{\widehat{H}}_t)dW_t. \end{aligned}$$

令 $\Theta = (\Theta_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $\psi = (\psi_t)_{t\in[0,T]}$ 由 $\Theta_T = 0$, $\psi_T = 0$ 定义，并且

$$\Theta_t = \frac{1}{(T-t)^2}\Delta H_t \eta_t^{-1}\Delta H_t, \qquad \psi_t = \frac{1}{(T-t)^2}\eta_t^{-1}\widehat{H}_t, \quad t \in [0,T).$$

注意，Θ 取值于 $\mathbb{S}^d_+$。此外，注意到 ψ 有界，因为存在$\widehat{c} \in (0, \infty)$，使得对所有 $t \in [0,T]$，P-几乎处处有 $\|\widehat{H}_t\| \leq \widehat{c}(T-t)^2$。类似地，$\Theta$ 也有界。此外，对所有 $t \in [0,T]$，令 $(V_{t,\ s})_{s\in[t,T]}$ 为$V_{t,\ s} =$ 恒等矩阵 $- \int_t^s \psi_r V_{t,\ r} dr$, $s \in [t,T]$ 的唯一解，并注意 $E[\sup_{s\in[t,T]}\|V_{t,\ s}\|^4] < \infty$。分部积分表明，对所有 $t \in [0,T]$，均有

$$\Delta H_t = -\int_t^T V_{t,r}^\top \Theta_r V_{t,r} dr - \int_t^T V_{t,r}^\top (Z^H_r - Z^{\widehat{H}}_r) V_{t,r} dW_r. \tag{60}$$

由于 $E[\sup_{s\in[t,T]}\|V_{t,\ s}\|^4] < \infty$ 对所有 $t \in [0,T]$ 和 $Z^H, Z^H \in L^2(\Omega \times [0,T])$ 均成立，因此对所有 $t \in [0,T]$，都有 $E[\int_t^T V_{t,r}^\top (Z^H_r - Z^{\widehat{H}}_r) V_{t,\ r} dW_r \,|\, \mathcal{F}_t] = 0$。由此、式（60）以及 Θ 取值于 $\mathbb{S}^d_+$ 可知，对所有 $t \in [0,T]$，都有 $\Delta H_t \leq 0$。反过来，我们得到 $H = \widehat{H}$。此外，这还意味着 $Z^H = Z^H$。 □

引理 4.13. 假设满足***A1)***、***D1)***和***D2)***，且 A 和 ϕ 均为零。设(H, Z^H) 是按定义 ***4.11*** 意义下倒向随机微分方程(55) 的唯一解。设$Y = (Y_t)_{t\in[0,T)}$ 由(53) 定义，且(Y', Z') 是按定义 ***1.1*** 意义下奇异倒向随机微分方程(5) 的最小解。则有 $Y = Y'$。</output>

证明. 设 $Z=(Z_t)_{t\in[0,T)}$ 由下式定义

$$Z_t=\frac{1}{T-t}\sigma_t^\eta+\frac{1}{(T-t)^2}Z_t^H,\quad t\in[0,T).$$

于是我们可以证明，对 (Y,Z) 满足 (6)。此外，对所有 $t\in[0,t]$，都有 $Z\in L^2(\Omega\times[0,t])$。注意，存在 $c\in(0,\infty)$，使得对所有 $t\in[0,T]$，P-几乎必然成立

$$\|H_t\|\le c(T-t)^2. \tag{61}$$

由此以及 **D2)** 可知，对所有 $t\in[0,T)$，$(Y_s)_{s\in[0,t]}$ 有界。此外，根据 (61) 和 **A1)**，对所有 $x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ 以及 $t\in(\max\{0,T-\frac{\delta}{c}\},T)$，我们得到

$$\langle x,Y_tx\rangle\ge\Big(\frac{\delta}{T-t}-c\Big)\|x\|^2>0.$$

因此，存在 $\tau\in(0,T)$，使得对所有 $t\in[T-\tau,T)$，Y_t取值于 $\mathbb{S}^d_{++}$。由于 $Y_{T-\tau}$有界且取值于 $\mathbb{S}^d_{++}$，并且由 **A1)** 和 **D2)**可知，我们可以应用 [37, 定理 6.1]，根据相关代价泛函的非负性推得，对所有$t\in[0,T-\tau]$，Y_t 取值于 $\mathbb{S}^d_+$。注意，对于过程 $(\psi_t)_{t\in[0,T]}$ 的任意路径，若其在 T 处左连续且 $\lim_{t\to T}\psi_t\neq0$，则有

$$\liminf_{t\to T}\langle\psi_t,Y_t\psi_t\rangle\ge\liminf_{t\to T}\big(\lambda_{\min}(Y_t)\|\psi_t\|^2\big)=\infty.$$

我们得出，(Y,Z) 是定义 1.1 意义下奇异倒向随机微分方程 (5) 的一个解。因此，对所有 $t\in[0,T)$，P-a.s. 均有 $Y_t\ge Y_t'$。

接下来，我们将过程 $H'=(H_t')_{t\in[0,T]}$ 定义为 $H_T'=0$，并且

$$H_t'=(T-t)^2Y_t'-(T-t)\eta_t,\quad t\in[0,T).$$

此外，令 $Z^{H'}=(Z_t^{H'})_{t\in[0,T]}$ 由 $Z_T^{H'}=0$ 定义，并且

$$Z_t^{H'}=-(T-t)\sigma_t^\eta+(T-t)^2Z_t',\quad t\in[0,T). \tag{62}$$

注意，若 $H=H'$，则 $Y=Y'$。因此，在本证明余下部分中，我们证明 $(H',Z^{H'})$ 是定义 4.11 意义下倒向随机微分方程 (55) 的一个解。注意，根据 **D2)**，对所有 $t\in[0,T]$，P-a.s. 均有 $H_t'\ge-K(T-t)$ 恒等矩阵。此结论、$Y\ge Y'$这一事实以及 (61) 蕴含，对所有 $t\in[0,T]$，P-a.s. 均有

$$-K(T-t)\,\mathrm{Id}\le H_t'\le H_t\le c(T-t)^2\,\mathrm{Id}\,. \tag{63}$$

由引理 4.1 和引理 A.2 可知，对于所有 $t\in[0,T)$，有

$$Y_t'\ge\left(E\left[\int_t^T\eta_s^{-1}ds\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\right)^{-1}. \tag{64}$$

分部积分表明，对所有 $0\le t\le s\le T$，

$$\eta_s^{-1}=\eta_t^{-1}+\int_t^s\eta_r^{-1}\big(\sigma_r^\eta\eta_r^{-1}\sigma_r^\eta-b_r^\eta\big)\eta_r^{-1}dr-\int_t^s\eta_r^{-1}\sigma_r^\eta\eta_r^{-1}dW_r.$$

由于 η^{-1} 和 σ^{η} 有界，由此以及富比尼定理可推出，对所有 $t\in[0,T]$，　　t

$$\begin{aligned} E\bigg[\int_t^T \eta_s^{-1}ds\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\bigg] &= (T-t)\eta_t^{-1} + E\bigg[\int_t^T\int_t^s \eta_r^{-1}\big(\sigma_r^{\eta}\eta_r^{-1}\sigma_r^{\eta}-b_r^{\eta}\big)\eta_r^{-1}\,dr\,ds\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\bigg] \\ &= (T-t)\eta_t^{-1} + E\bigg[\int_t^T (T-r)\eta_r^{-1}\big(\sigma_r^{\eta}\eta_r^{-1}\sigma_r^{\eta}-b_r^{\eta}\big)\eta_r^{-1}\,dr\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\bigg]. \end{aligned} \tag{65}$$

对所有 $t\in[0,T)$ 定义

$$B_t = \frac{1}{T-t}E\bigg[\int_t^T (T-r)\eta_r^{-1}\big(\sigma_r^{\eta}\eta_r^{-1}\sigma_r^{\eta}-b_r^{\eta}\big)\eta_r^{-1}\,dr\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\bigg]\eta_t.$$

由（64）和（65）可知，对所有 $t\in[0,T)$，有

$$Y_t' \geq ((T-t)\eta_t^{-1} + (T-t)B_t\eta_t^{-1})^{-1}.$$

根据 **A1)**、**D1)** 和 **D2)**，存在 $b\in(0,\infty)$，使得对所有 $t\in[0,T)$，　P-几乎处处有 $\|B_t\|\leq\frac{b}{2}(T-t)$ 成立。因此，存在 $\tau'\in(0,T)$，使得对于任意 $t\in[T-\tau',T)$，　P-几乎处处有 $\mathrm{Id}+B_t$ 可逆，且

$$(\mathrm{Id}+B_t)^{-1}-\mathrm{Id} = B_t\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k B_t^{k-1}.$$

因此，存在 $b'\in(0,\infty)$，使得对所有 $t\in[T-\tau',T)$，　P-几乎处处成立

$$\frac{1}{(T-t)^2}H_t' \geq \frac{1}{T-t}\eta_t[(\mathrm{Id}+B_t)^{-1}-\mathrm{Id}] \geq -b'\,\mathrm{Id}\,.$$

将其与（63）结合可知，存在 $c'\in(0,\infty)$，使得对所有$t\in[0,T]$，　P-几乎处处有 $\|H_t'\|^2\leq c'(T-t)^2$ 成立。此外，注意到 H' 和 $Z^{H'}$ 均为 $\mathbb{S}^d$-值过程。由伊藤公式可知，对所有 $r\in(0,T)$，有

$$\begin{aligned} (T-r)^4\|Y_r'\|^2 = \|Y_0'\|^2 &- 4\int_0^r (T-s)^3\|Y_s'\|^2ds + \int_0^r (T-s)^4\|Z_s'\|^2ds \\ &+ 2\int_0^r (T-s)^4\,\mathrm{tr}(Y_s'Z_s')dW_s - 2\int_0^r (T-s)^4\,\mathrm{tr}(Y_s'\lambda_s)ds \\ &+ 2\int_0^r (T-s)^4\,\mathrm{tr}(Y_s'Y_s'\eta_s^{-1}Y_s')ds. \end{aligned} \tag{66}$$

此外，注意到（63）和**D2)** 意味着，对于所有 $t\in[0,T)$，　P-几乎处处有

$$0\leq Y_t' \leq \frac{1}{T-t}K\,\mathrm{Id}+c\,\mathrm{Id}\,.$$

这一点、**A1)**、**D2)**、对于任意 $t\in[0,T)$ 都有 $Z'\in L^2(\Omega\times[0,t])$ 这一事实，以及 (66) 确保存在 $a'\in(0,\infty)$，使得对于所有 $r\in(0,T)$，都有

$$E\bigg[\int_0^r (T-s)^4\|Z_s'\|^2ds\bigg]\leq a'.$$

法图引理蕴含 $E[\int_0^T (T-s)^4 \|Z'_s\|^2 ds] \le a'$。这一点、**D1)** 和 **(62)** 证明了 $Z^{H'} \in L^2(\Omega \times [0,T])$。此外，我们可以证明对 $(H', Z^{H'})$ 满足 **(56)**。现在，引理 **4.12** 完成了证明。

□

命题 *4.8* 的证明。 由于注 **4.9**，只需考虑 A 和 ϕ 为零的情形。根据引理 **4.13**，结论立即成立；其中，根据引理 **4.12**，按照定义 **4.11** 的意义，倒向随机微分方程 **(55)** 存在唯一解。□

注4.14。 假设满足 **A1)**、**D1)** 和 **D2)** 。在第**4.1**节的框架下（即，我们还额外假设 **C1)** 和 **C2)**），倒向随机微分方程 **(55)** 变为

$$dH_t = \left(\frac{1}{(T-t)^2} H_t \eta_t^{-1} H_t - (T-t) b_t^\eta \right) dt + Z_t^H dW_t, \quad t \in [0,T], \quad H_T = 0. \tag{67}$$

(i) 如果 η 是一个 $\mathbb{S}^d_{++}$-值连续鞅（$b^\eta = 0$），则 **(67)** 的解由 $(H, Z^H) = (0, 0)$ 给出。因此我们得到 $Y_t = \eta_t/(T-t), \quad t \in [0,T)$（见命题 **4.5**）。

(ii) 更一般地，假设 η 具有不相关乘法增量。则对于所有 $t \in [0,T]$，漂移 b_t^η 等于 $\eta_t g(t)$，其中 g 是一个确定性矩阵值函数（见 [10, 引理 11]，作直接修改即可）。令 $H_T = 0$ 和 $H_t = （T-t）\eta_t h（t）， t \in [0,T）$，其中

$$h(t) = -\operatorname{Id} + (T-t) \left(\int_t^T G(s)^{-1} G(t) ds \right)^{-1}, \quad t \in [0,T),$$

且 $dG(t) = G(t)g(t)dt$, $t \in [0,T]$, $G(0) =$恒等矩阵。于是， $H = (H_t)_{t \in [0,T]}$ 是方程 **(67)** 的解的第一个分量，参见 [10, 引理 13]，只需作简单修改即可。由 **(53)** 可知，对所有 $t \in [0,T)$,

$$Y_t = \frac{\eta_t}{T-t} + \frac{H_t}{(T-t)^2} = \eta_t \left(\int_t^T G(s)^{-1} G(t) ds \right)^{-1}.$$

由于 $E[\eta_s | \mathcal{F}_t] = \eta_t G(t)^{-1} G(s)$, $0 \le t \le s \le T$，我们再次得到命题 **4.5** 的结论。

注4.15。 假设满足**A1)**、**D1)**和**D2)** 。固定 $t \in [0,T)$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。根据命题 **3.3** 和命题 **4.8**，方程 **(4)** 的最优状态过程满足

$$\dot{X}_s = -\eta_s^{-1} \left(\frac{\eta_s}{(T-s)} + \frac{H_s}{(T-s)^2} - \phi_s \right) X_s + A_s X_s, \quad s \in [t,T), \quad X_t = x.$$

因此，对于所有 $s \in [t,T)$，我们有

$$\begin{aligned} d\|X_s\|^2 = \Big\langle X_s, \Big(&- \frac{2}{(T-s)} - \frac{1}{(T-s)^2} (\eta_s^{-1} H_s + (\eta_s^{-1} H_s)^\top) \\ &+ (A^\top + A + \eta_s^{-1} \phi_s + \phi_s^\top \eta_s^{-1}) \Big) X_s \Big\rangle ds. \end{aligned}$$

根据命题 4.8，存在常数 $c_1 \in (0,\infty)$，使得对于所有 $s \in [0,T]$，均有$\|H_s\| \le c_1(T-s)^2$。此外，注意到对于所有 $s \in [0,T]$，均有 $\eta_s \ge \delta$恒等矩阵， $\|A_s\| \le K$且 $\|\phi_s\| \le K$。令 $c_2 = 2(\delta^{-1}\sqrt{d}c_1 + K + \delta^{-1}\sqrt{d}K)$。于是，对于所有 $s \in [t,T)$，我们有

$$\|X_s\|^2 \le \|x\|^2 + \int_t^s \Big(-\frac{2}{T-r} + c_2 \Big)\|X_r\|^2 dr.$$

由 Gronwall 引理可得，对所有 $s \in [t,T)$，

$$\|X_s\|^2 \le \|x\|^2 \exp\left(\int_t^s \Big(-\frac{2}{T-r} + c_2 \Big) dr \right) \le \|x\|^2 \frac{(T-s)^2}{(T-t)^2} e^{C_2 T}.$$

由此可得，当 $s \to T$ 时， $\|X_s\| = O(T-s)$。此外，我们还推得 $\lim_{s\to T}\langle X_s, Y_s X_s\rangle = 0$；并由控制收敛可得 $\lim_{s\to T} E[\langle X_s, Y_s X_s\rangle] = 0$。因此，当所有系数均有界时，最优状态的渐近行为与一维情形相似。

A. 两个初等引理

本附录给出两个初等引理，我们将在证明中用到它们。第一个引理有助于建立矩阵收敛。

引理 A.1. 设 ξ^n, $n \in \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{S}^d$ 中单调且有界的矩阵序列。那么极限 $\lim_{n\to\infty}\xi^n = \xi$ 存在。

证明. 为证明这一结论，我们使用极化性质：对所有 $i,j \in \{1,\dots,d\}$和 $n \in \mathbb{N}$，均有

$$\langle e_i, \xi^n e_j\rangle = \tfrac{1}{4}(\langle e_i + e_j, \xi^n(e_i+e_j)\rangle - \langle e_i - e_j, \xi^n(e_i - e_j)\rangle).$$

右端两项的极限存在，这是由单调性和有界性得出的。

□

第二个引理给出了随机变量 X 取值于对称正定矩阵集合时的基本不等式 $E[X^{-1}] \ge (E[X])^{-1}$。我们给出一个初等且自成一体的证明，避免使用求逆算子的凸性或算子 Jensen 不等式。

引理 A.2. 设 X 是一个取值于 $\mathbb{S}^d_{++}$ 的随机变量，满足 $E[\|X\|] < \infty$ 和 $E[\|X^{-1}\|] < \infty$。则有 $E[X^{-1}] \ge (E[X])^{-1}$。

证明。 令 $v \in \mathbb{R}^d$，并设 $u = (E[X])^{-1}v$。则有

$$\begin{aligned}
&\left\langle v, \left(E[X^{-1}] - (E[X])^{-1}\right) v \right\rangle \\
&= \langle v, E[X^{-1}]v\rangle - 2\langle v, (E[X])^{-1}v\rangle + \langle (E[X])^{-1}v, E[X](E[X])^{-1}v\rangle \\
&= E\left[\langle v, X^{-1}v\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle u, Xu\rangle\right] = E\left[\left\|X^{-\frac{1}{2}}v - X^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\right] \ge 0.
\end{aligned}$$

证明至此完成。

□

致谢

所有作者均感谢德国学术交流中心（DAAD，德国学术交流服务中心）通过“与法国开展项目相关人员交流计划”资助项目（项目编号：57702378），以及法国校园 PHC（于贝尔·居里项目）Procope 项目（编号：50835ZC）提供的资助。Julia Ackermann 和 Thomas Kruse 感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）提供的资助——项目 ID：531152215——CRC 1701。

参考文献

[1] M. Ahmadi、A. Popier 和 A. D. Sezer. 一般驱动项和滤过下具有非马尔可夫奇异终端条件的后向随机微分方程。《电子概率杂志》，26，2021。[2] S. Ankirchner、A. Fromm、T. Kruse 和 A. Popier. 通过解耦场实现最优头寸定位。《应用概率年刊》，30(2):644–672，2020。[3] S. Ankirchner、M. Jeanblanc 和 T. Kruse. 具有奇异终端条件的后向随机微分方程及带约束的控制问题。*SIAM*控制与优化杂志，52(2):893–913，2014。[4] S. Ankirchner 和 T. Kruse. 具有随机线性二次成本的最优头寸定位。《巴拿赫中心出版物》，104(1):9–24，2015。[5] P. Bank 和 M. Voß. 具有随机终端约束的线性二次随机控制问题。*SIAM*控制与优化杂志，56(2):672–699，2018。[6] J.-M. Bismut. 随机系数下的线性二次最优随机控制。*SIAM*控制与优化杂志，14(3):419–444，1976。[7]J.-M. Bismut. 线性二次系统的控制：随机积分的应用。载于《概率研讨会 *XII*：斯特拉斯堡大学 *1976/77*》，第 180–264 页。Springer，1978。[8] D. Cacitti-Holland、L. Denis 和 A. Popier. 具有奇异终端条件的后向随机微分方程与积分偏微分方程的连续性问题。《数学分析与应用杂志》，543(1):128845，2025。[9] D. Cacitti-Holland、L. Denis 和 A. Popier. 后向随机微分方程生成元的增长条件：确保具有奇异终端值时连续至终端时刻。《随机过程及其应用》，183:104588，2025。

[10] D. Cacitti-Holland、L. Denis 和 A. Popier。最优清算中的 Malliavin 导数与敏感性。预印本，hal-05072816 或 arXiv:2505.14287，2025年5月。

[11] M. H. Davis 和 M. Davis。线性估计与随机控制，第162卷。Chapman and Hall London，1977年。[12] G. Fu、P. Graewe、U. Horst 和 A. Popier。最优投资组合清算的均值场博弈。运筹学数学，46(4):1250–1281，2021年。[13] G. Fu、P. P. Hager 和 U. Horst。市场进入的均值场博弈：带交易约束的投资组合清算。*arXiv:2403.10441*，2024年。[14] G. Fu 和 U. Horst。带终端状态约束的均值场领导者-跟随者博弈。*SIAM*控制与优化杂志，58(4):2078–2113，2020年。[15] G. Fu、X. Shi 和 Z. Q. Xu。最优清算中因制度转换而产生的奇异终端值 BSDE 系统。*SIAM*控制与优化杂志，63(5):3091–3111，2025年。[16] P. Graewe 和 U. Horst。具有瞬时价格冲击和随机韧性的最优交易执行。*SIAM*控制与优化杂志，55(6):3707–3725，2017年。[17] P. Graewe、U. Horst 和 J. Qiu。非马尔可夫型清算问题及带奇异终端条件的后向 SPDE。*SIAM*控制与优化杂志，53(2):690–711，2015年。[18] P. Graewe、U. Horst 和 E. Séré。价格敏感型市场冲击下投资组合清算问题的光滑解。《随机过程及其应用》，128(3):979–1006，2018年。[19] P. Graewe 和 A. Popier。求解带奇异终端条件的后向随机微分方程的渐近方法。《随机过程及其应用》，133:247–277，2021年。[20] U. Horst 和 E. Kivman。小市场冲击下的最优交易执行与采用半鞅策略的投资组合清算。金融与随机，28(3):759–812，2024年。[21] U. Horst、J. Qiu 和 Q. Zhang。系数退化的约束控制问题及带奇异终端条件的退化后向随机偏微分方程。*SIAM*控制与优化杂志，54(2):946–963，2016年。[22] U. Horst 和 X. Xia。随机韧性下的多维最优交易执行。预印本，*arXiv:1804.03896*，2018 年。[23] U. Horst 和 X. Xia。随机韧性下的多维最优交易执行。金融与随机，23(4):889–923，2019年。[24] U. Horst 和 X. Xia。带奇异终端状态约束的线性二次随机控制问题的连续黏性解。应用数学与优化，84(1):1159–1184，2021年。

[25] U. Horst、X. Xia 和 C. Zhou. 因子不确定性下的投资组合清算。《应用概率年刊》，32(1):80–123，2022年。[26] M. Kohlmann 和 S. Tang. 后向随机黎卡提方程的新进展及其应用。载于 M. Kohlmann 和 S. Tang（编），数理金融，第 194–214 页，巴塞尔，2001年。Birkhäuser Basel。[27] M. Kohlmann 和 S. Tang. 多维后向随机黎卡提方程及其应用。*SIAM*控制与优化杂志，41(6):1696–1721，2003年。[28] T. Kruse 和 A. Popier. 奇异终端条件下后向随机微分方程的最小上解及其在最优头寸定位中的应用。《随机过程及其应用》，126(9):2554–2592，2016。[29] W. Liu 和 M. Röckner. 随机偏微分方程：导论。Universitext丛书。Springer，沙姆，2015。[30] D. Marushkevych 和 A. Popier. 非马尔可夫情形下奇异终端条件后向随机微分方程最小解的极限行为。《概率、不确定性与定量风险》，5(1):1，2020年。[31] A. Popier. 带奇异终端条件的后向随机微分方程。《随机过程及其应用》，116(12):2014–2056，2006年。[32] A. Popier. 带随机停止时刻和奇异终值条件的后向随机微分方程。《概率年刊》，第 1071–1117 页，2007年。[33] A. Popier. 带跳且具有奇异终端条件的后向随机微分方程的极限行为。《*ESAIM*：概率与统计》，20:480–509，2016。[34] A. Popier. 带奇异终端条件的积分-偏微分方程。《非线性分析》，155:72–96，2017。[35] A. Schied. 带燃料约束和 Dawson-Watanabe 超过程的控制问题。《应用概率年刊》，23(6):2472–2499，2013年。[36]A. D. Sezer、T. Kruse 和 A. Popier. 带非马尔可夫奇异终端值的后向随机微分方程。《随机性与动力学》，19(02):1950006，2019。[37] J. Sun、J. Xiong 和 J. Yong. 随机系数不定随机线性二次最优控制问题：开环最优控制的闭环表示。《应用概率年刊》，31(1):460–499，2021。[38] J. Sun 和 J. Yong. 随机线性二次最优控制问题——近期进展。《控制年度评论》，56:100899，2023。

[39] W.M. Wonham. 随机控制中的矩阵黎卡提方程。*SIAM* 控制学报，6(4):681–697，1968年。

[40] J. Yong 和 X. Y. Zhou。《随机控制：哈密顿系统与 *HJB* 方程》，第 43 卷。Springer Science & Business Media，1999年。