arXiv:2601.03749v1 [math.LO] 7 Jan 2026

刚超过固定可数长度的长博弈

¨TAKEHIKO GAPPO 和 SANDRA MULLE R

Abstract. 我们引入一种关于自然数的新型博弈，其长度可变且为可数长度，可将其视为对所有固定可数长度自然数博弈的对角化。在 Trang 和 Woodin 先前工作的基础上，我们证明，该博弈的解析决定性等价于一个典范内模型的尖点存在性；该模型以 Woodin 基数的极限 λ 为特征，并且低于 λ的 Woodin 基数的序型为 λ。

Contents

1. 引言 1 2. 由鼠标推出的长博弈决定性 4 3. 由长博弈决定性推出 Solovay 型模型中的决定性 10 4. Solovay 型模型的结构理论 20 5. 由 Solovay 型模型中的决定性得到一个鼠标 25 参考文献 34

1. 引言

过去 40 年里，内模型理论的进展揭示了决定性原理与大基数之间的深刻联系。虽然决定性公理（AD）与选择公理相矛盾，但 ZFC 加上大基数存在这一条件，则蕴含可定义实数集的决定性。例如，Martin–Steel [MS89] 证明，所有 $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 实数集的决定性可由存在 n Woodin 基数以及其上方一个可测基数推出。Neeman [Nee95] 和 Woodin [MSW20] 通过确立 $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 决定性与具有 n Woodin 基数的典范内模型的尖存在之间的等价关系，强化了这一结果（见定义 1.1）。

为了进一步建立确定性与具有大基数的内模型尖点存在性之间的等价关系，长博弈（其长度超过 ω）显然发挥着至关重要的作用。长博弈按长度构成一个自然的层级，可分为三类：

(1) 固定可数长度的博弈。(2) 可变可数长度的博弈，其中对局过程的长度始终是可数的，但取决于玩家的行动。

Date:2026年1月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E60, 03E55, 03E45。
Key words and phrases. 长博弈、可变可数长度的博弈、广义 Solovay 模型。

(3) 长度为 ω_1 的博弈。
在 Martin–Steel 关于射影决定性的证明基础上，Neeman 于 20 世纪 90 年代末至 21 世纪初发展出了一般方法，用于从大基数假设证明长博弈的决定性。他的大量工作涵盖了上述三类中的各种长博弈，包括在相对于对局的第一个可容许序数处结束的博弈 [Nee06], 连续编码长度的博弈 [Nee04，第3], 章 [局部不可数序数处的博弈 7], Nee04，第 ω_1 [章07]以及开放长度的博弈。尽管这几乎囊括了迄今为止研究过的全部长博弈，但我们自然会期待，长博弈层级与大基数层级一样丰富。事实上，Neeman 的方法表明，长博弈中获胜策略的复杂性反映了带大基数的典范内模型的复杂性。

迄今为止，这一预期仅在固定可数长度的博弈中得到了验证：决定性与尖的存在之间存在逐层等价结果（见定义 1.4 和 1.5）。本文将介绍一种新的可变可数长度博弈，并给出首个例子，证明可变可数长度博弈的决定性与典范内模型的一个尖等价。我们的工作可视为迈出的第一步，旨在填补可变可数长度博弈层级中的重大空缺。下文将介绍陈述并阐释主要结果所需的定义和记号。

对于任意可数序数 $\alpha < \omega_1$ 和 $A \subseteq \omega^\alpha$，定义如下在 $\mathbb{N}$ 上进行、长度为 α、收益集为 A 的 Gale–Stewart 博弈 $G_\omega(A)$：两名玩家轮流选择自然数。如果由此产生的序列 $\langle n_i \mid i < \alpha \rangle$ 属于 A，则玩家 I 获胜；否则，玩家 II 获胜。若在博弈 $G_\alpha(A)$ 中有一名玩家拥有获胜策略，则称 $G_\alpha(A)$，或简称 A，是已确定的。决定性公理（AD）是指：对于所有 $A \subseteq \omega^\omega$，博弈 $G_\omega(A)$ 都是已确定的。

I	n_0		n_2		$\cdots$
II		n_1		n_3	$\cdots$

现在，我们精确陈述实数集的确定性与尖的存在性之间逐层对应的等价性结果。

定理 1.1（Harrington [Har78] 与 Martin [Mar70] 关于 $n = 0$；Neeman [Nee95] 与 Woodin [MSW20] 关于 $n \geq 1$）。设 $n < \omega$。则以下各项在ZFC中等价：

(1) 对于所有 $x \in \mathbb{R}$，都存在一个 ω_1-可迭代的活动 x-小鼠，其包含 n 个 *Woodin* 基数。(2) 所有 $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 实数集都是已确定的。

定理 1.2 (Martin–Steel [MS08a] 与 Woodin[1])。以下命题在ZFC上等价：

(1) 对于所有 $x \in \mathbb{R}$，都存在一个 ω_1-可迭代的活跃 x-小鼠，且具有 n 多个 *Woodin* 基数。(2) 决定公理 $^{L(\mathbb{R})}$ 成立，且 $\mathbb{R}^\sharp$ 存在。

[1]Woodin 本人没有发表他的证明，但可以在 Trang 的博士论文 [Tra15] 中找到该证明。我们也在第 5 节中使用了这一论证。

值得注意的是，长博弈决定性可以加入这两个定理。事实上，定义 1.1 的证明表明，定理中的决定性假设等价于 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 关于长度为 $\omega\cdot(n+1)$ 的 $\mathbb{N}$ 上博弈的确定性。此外，定义 1.2 的各条款等价于 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 关于长度为 $\omega\cdot\omega$ 的 $\mathbb{N}$ 上博弈的确定性。Neeman 将其关于固定可数长度博弈的定义 1.1 决定性证明加以改编，从而得到以下结果。

定理 1.3 (Neeman [Nee04，第 2]章)。设 $1\leq\alpha<\omega_1$，并假设存在一个具有 α 个 *Woodin* 基数的 ω_1-可迭代活动小鼠。那么，对于所有在编码中 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 的 $A\subseteq\omega^{\omega\cdot\alpha}$，博弈 $G_{\omega\cdot\alpha}(A)$ 都是已确定的[2]。

该定理的逆命题也成立：对于加法不可分解的 α，这是 Trang–Woodin [Tra13] 证明的。加法可分解的情形归功于 Aguilera–M¨uller [AM20] 和 Aguilera–Gappo [AG]。这里我们着重解释 Trang–Woodin 的工作，我们的主要结果在很大程度上依赖于该工作。

设 $\mathcal{F}$ 是 $\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})$ 上的闭无界集滤子。模型 $L(\mathbb{R},\mu):=L(\mathbb{R})[\mathcal{F}]$，其中 $\mu=\mathcal{F}\cap L(\mathbb{R})[\mathcal{F}]$，称为 Solovay 模型[3]，，它最早出现在 Solovay 关于确定性下 ω_1 的 $\mathbb{R}$-超紧性的工作中 [Sol21]。Trang 和 Woodin 基于对 Solovay 模型的 HOD 分析得到了以下等价性。

定理 1.4 (Neeman [Nee04] & Trang–Woodin [Tra13])。以下各项等价：

（1）存在一个具有 ω^2 个 *Woodin* 基数的 ω_1-可迭代活跃小鼠。（2）对于编码中所有 A 为 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 的情形，博弈 $G_{\omega^3}(A)$ 均已确定。（3） $L(\mathbb{R},\mu)\models$“决定公理 $+\mu$ 是一个超滤子”，并且存在一个关于 $L(\mathbb{R},\mu)$ 的尖点。

为了将定义 1.4 推广到所有 $\alpha<\omega_1$ 上长度为 ω^α 的博弈，Trang 和 Woodin 使用了 Woodin 引入的广义 *Solovay* 模型。利用 $[\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}$ 上的“闭无界集”滤子 $\mathcal{F}_\alpha$（见定义 3.1），我们记作

$$L(\mathbb{R},\mu_{<\alpha}):=L(\mathbb{R})[\mathcal{F}_{<\alpha}],$$

其中

$$\mathcal{F}_{<\alpha}=\{\langle\beta,Z\rangle\mid\beta<\alpha\wedge Z\in\mathcal{F}_\beta\}.$$

此外，对每个 $\beta<\alpha$，令 $\mu_\beta=\mathcal{F}_\beta\cap L(\mathbb{R},\mu_{<\alpha})$。注意，$L(\mathbb{R},\mu)=L(\mathbb{R},\mu_{<1})$。

定理 1.5 (Neeman [Nee04] & Trang–Woodin [Tra13])。对每个 $2\leq\alpha<\omega_1$，以下条件等价：

(1)对于某个（任意）$x\in\mathbb{R}$ 编码 α，存在一个具有 ω^α 个 *Woodin* 基数的 ω_1-可迭代活跃 x-小鼠。(2) 对于所有在编码中 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 的 A，博弈 $G_{\omega^{1+\alpha}}(A)$ 都是已确定的。(3) $L(\mathbb{R},\mu_{<-1+\alpha})\models$“决定公理 $+\forall\beta<-1+\alpha\,(\mu_\beta$ 是 $[\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\beta}$ 上的超滤子)”成立，并且存在一个关于 $L(\mathbb{R},\mu_{<-1+\alpha})$ 的尖点。

超越 $L(\mathbb{R},\mu_{<\alpha})$ 的“下一个”广义 Solovay 模型，其中 $\alpha<\omega_1$，是 $L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})$。事实上，Trang–Woodin 甚至对这个模型也得到了以下等一致性结果。

[2]利用 ω 与 α 之间的双射，可以找到一个双射 $\pi\colon\omega^{\omega\cdot\alpha}\to\omega^\omega$。给定一个点类 $\mathbf{\Gamma}$，若 $\pi[A]$ 属于 $\mathbf{\Gamma}$，我们就称 $A\subseteq\omega^{\omega\cdot\alpha}$ 为 $\mathbf{\Gamma}$ *in the codes*。[3]注意，这个 Solovay 模型不同于 Solovay 著名的 ZF + DC 模型；在该模型中，所有实数集都具有完美集性质、贝尔性质，并且都是勒贝格可测的。

Th定理 1.6 (Trang–Woodin [Tra13])。 以下理论等一致：(1) ZFC +存在一个 *Woodin* 基数的极限 λ ，使得低于 λ 的 *Woodin* 基数的序型为 λ。(2) ZFC + $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models$ “决定公理 $+\forall \alpha < \omega_1 (\mu_\alpha$ 是 $[\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}$ 上的超滤子)。”

我们称为 对角博弈 的新型长博弈，与这一等一致性结果中的大基数假设相对应。为定义可变可数长度的博弈，我们称 $L \subseteq \omega^{<\omega_1}$ 为长度条件，如果对于任意 $\vec{x} \in \omega^{<\omega_1}$，存在 $\alpha > 0$ 使得 $\vec{x} \restriction \alpha \in L$。对于任意长度条件 L 和任意 $A \subseteq L$，将$G_L(A)$定义为在 $\mathbb{N}$ 上的博弈，其中玩家 I 和 II 轮流选择自然数 n_i，直到构造出一个序列 $\langle n_i \mid i < \alpha \rangle \in L$；当且仅当 $\langle n_i \mid i < \alpha \rangle \in A$时，玩家 I 获胜。对角博弈 $G_\Delta(A)$ 定义为带有长度条件的 $G_L(A)$

$$L = \{\langle n_i \mid i < \omega \cdot \alpha \rangle \mid \omega \cdot \alpha = \sup\{\omega \cdot (1 + \|x_\beta\|_{\mathrm{WO}}) \mid \beta < \alpha\}\},$$

其中，对于每个 $\beta < \alpha$， $x_\beta = \langle n_i \mid \omega \cdot \beta \leq i < \omega \cdot (\beta + 1) \rangle$，而 $\|x_\beta\|_{\mathrm{WO}}$ 是由 x_β 编码的良序的长度；如果 x_β 不编码良序，则为 0。对角博弈可以被视为对固定可数长度的博弈进行“对角化”。我们的主要定理如下。

定理 1.7。 以下各项在ZFC上等价：

(1) 存在一个 ω_1-可迭代的活跃小鼠，其 *Woodin* 基数的极限为 λ，且低于 λ 的 *Woodin* 基数的序型为 λ。(2) 对于任意在编码中属于 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 的 $A \subseteq \mathbb{R}^{<\omega_1}$，博弈 $G_\Delta(A)$ 均已确定。(3) $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models$ “决定公理 $+\forall \alpha < \omega_1 (\mu_\alpha$ 是 $[\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}$上的超滤子)”，且 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 的尖点存在。

对角博弈的定义提供了一种规范的方法，可以从给定的 ω_1长博弈序列定义一个新的长博弈。这个作用于长博弈的对角算子，似乎在推进可变可数长度博弈的层级方面发挥着重要作用，并有望带来更多逐层等价定理。

最后，我们指出，除固定可数长度的博弈外， [Nee04、Nee06、Nee07] 中上述 Neeman 确定性定理的逆命题仍未解决。我们认为，任何关于鼠与长博弈确定性之间等价性的证明，都必然会涉及自然的 AD 模型，它们充当给定鼠的“广义导出模型”。在我们的情形中， $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 就是这样一个模型。然而，对于 Neeman 研究的那些博弈，究竟哪些类型的 AD 模型能够发挥相同作用，我们仍不清楚。

致谢。 本研究全部由奥地利科学基金（FWF）资助，项目编号为 [10.55776/Y1498、10.55776/I6087、10.55776/ESP5842424]。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿版本适用 CC BY 公共版权许可。第一作者感谢 Andreas Lietz 就本文主题进行的有益讨论。

2. Long game determinacy from a mouse

我们需要采用若干约定和记号。首先， $\mathbb{R}$ 始终表示贝尔空间 ω^ω。我们将 $\omega^{\omega \cdot \alpha}$ 与 $\mathbb{R}^\alpha$ 混为一谈，因此也将一个序列

自然数 $\langle n_i \mid i < \omega \cdot \alpha\rangle$ 与一个实数序列 $\langle x_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$混为一谈，其中 $x_\beta = \langle n_i \mid \omega \cdot \beta \leq i < \omega \cdot(\beta + 1)\rangle$ 对每个 $\beta < \alpha$都成立。按照这一约定，我们常将实数序列 $\langle x_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 视为 G_Δ的一局对局过程，尽管 G_Δ 被定义为在 $\mathbb{N}$上的博弈。书写 G_Δ时，我们省略该博弈的收益集，因为它与接下来的一般论证无关。

对于任意序列 $\langle x_\beta \mid \beta < \alpha\rangle \in \mathbb{R}^{<\omega_1}$，其中 $\alpha > 0$，我们定义序数 $\eta^{\vec{x}}_k$关于 $k < \omega$ 如下：设 $\eta^{\vec{x}}_0 = 0$ 且 $\eta^{\vec{x}}_1 = 1$。对每个 $1 < k < \omega$，令

$$\eta^{\vec{x}}_{k+1} = \sup\{1 + \|x_\beta\|_{\mathrm{WO}} \mid \beta < \max\{\eta^{\vec{x}}_k, \alpha\}\}.$$

此外，对于 $k < \omega$，我们将 $\theta^{\vec{x}}_k$ 定义为满足 $\eta^{\vec{x}}_{k+1} = \eta^{\vec{x}}_k + \theta^{\vec{x}}_k$ 的唯一序数。注意，$\eta^{\vec{x}}_{k+1}$ 和 $\theta^{\vec{x}}_k$ 仅依赖于 $\vec{x} \restriction \eta^{\vec{x}}_k$。由定义可得以下引理。

引理 2.1。设 $\vec{x} = \langle x_\beta \mid \beta < \alpha\rangle \in \mathbb{R}^{<\omega_1}$ 是 G_Δ 的一个完整对局过程。[4] 那么

(1) 对于某些 $k < \omega$、$\eta^{\vec{x}}_k = \eta^{\vec{x}}_{k+1} = \alpha$，或者(2) 对于所有 $k < \omega$、$\eta^{\vec{x}}_k < \eta^{\vec{x}}_{k+1}$ 和 $\alpha =$上确界$\{\eta_k \mid k < \omega\}$。

这个引理说明，每个博弈 G_Δ 的完整对局过程 $\vec{x}$ 都可以按照规范方式划分为至多 ω 个区块 $\vec{x} \restriction [\eta^{\vec{x}}_k, \eta^{\vec{x}}_{k+1})$ 。因此，我们可以将 G_Δ 看作至多 ω 个固定可数长度子博弈的串接。这就是为什么G_Δ 可以被视为对 $\langle G_{\omega\cdot(1+\alpha)} \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 的对角化。关键在于，尽管博弈 G_Δ 的对局过程长度只有在博弈进行期间才会确定，但每个子博弈都会确定下一个子博弈的长度。这使我们能够使用 Neeman 的论证，从鼠证明 G_Δ 的确定性。

此外，定义 2.1 允许我们将 G_Δ 的一段对局过程编码为单个实数；每段对局过程 $\vec{x} = \langle x_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 都可以像上面那样划分为至多 ω 个区块 $\vec{x} \restriction [\eta^{\vec{x}}_0, \eta^{\vec{x}}_{k+1})$。每个区块都可以通过 ω 与 $\theta^{\vec{x}}_k$ 之间的一个双射编码为实数，因此，如果我们预先固定一个从 $\mathbb{R}^\omega$ 到 $\mathbb{R}$ 的递归单射，那么就可以将 $\vec{x}$ 编码为单个实数。我们将 $\vec{x}$ 的编码记为 $\lceil\vec{x}\rceil$。对于给定的点类 Γ，我们称 $A \subseteq \mathbb{N}^{<\omega_1} \simeq \mathbb{R}^{<\omega_1}$ 在编码中属于 Γ，如果存在 Γ 中的 $A^* \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\vec{x} \in A \iff \lceil\vec{x}\rceil \in A^*$。编码系统的精确定义与我们的论证无关，但我们要求其具有某种意义下的 Lipschitz 连续性，即 $\lceil\vec{x}\rceil \restriction k$ 只取决于 $\vec{x} \restriction \eta^{\vec{x}}_k$。本节的目标是证明以下定理：

定理 2.2。假设存在一个 *ZFC* 的类模型 M，以及 M 中的一个基数 λ，使得

- $M = L(V^M_\lambda)$,
- M 按照 [Nee04，附录 A], 的意义是弱可迭代的
- λ 是 M中低于 λ 的 *Woodin* 基数的序型，并且
- V^M_λ在 V中是可数的。

那么，对于编码中每个 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 的 $C \subseteq \mathbb{R}^{<\omega_1}$，博弈 $G_\Delta(C)$ 都是已确定的。

这个证明是对 Neeman 在 [Nee04, 第 2D 节] 中证明可数固定长度博弈具有确定性的证明所做的修改。我们仅概述他的论证，并说明如何将其调整到我们的情形中。

为进行证明，我们需要介绍几个辅助博弈：

[4]如果某个博弈的对局过程到达了该博弈的终止点，我们就称这个对局过程是完整的。

（1）泛型性迭代博弈 $G_{\mathrm{fixed}}(M,\ \delta,\ \theta,\ \dot{A})$ 及其镜像博弈。（2）对于编码中的给定 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合 $C \subseteq \mathbb{R}^{<\omega_1}$，Martin 在序数类上的开博弈 $\mathcal{C}[\vec{y}]$。（3）有限博弈 $G_k(\vec{x},\ P,\ \gamma)$ 及其镜像博弈。

第一个博弈与 Neeman 的著作中的一个博弈完全相同。泛性迭代博弈 $G_{\mathrm{fixed}}(M, \delta,\ \theta,\ A)$ 定义在传递模型 M 上；该模型是 ZFC（的一个足够大的片段）的模型，具有一个 Woodin 基数 δ、一个（在 V 中）可数的序数 θ，以及一个名称 $\dot{A}$，它是 $M^{\mathrm{Col}(\omega,\delta)}$ 中的 $\mathbb{R}^\theta$ 的子集的名称。此博弈由 $-1+\theta+1$ 个回合组成，编号从 1 到 θ，每个回合长度为 ω。在每一回合 ξ 中，两位玩家合作生成一个实数 y_ξ；与此同时，玩家 I 选择一棵长度为 ω 的良性迭代树 $\mathcal{T}_\xi$，玩家 II 则选择其共尾分支 b_ξ。如果沿 b_ξ 的最终模型不是良基的，玩家 I 立即获胜。否则，玩家 I 在下一回合继续，在沿 b_ξ 的最终模型上选择一棵树。然后，两位玩家得到一组良性迭代树及其分支的堆叠 $\langle \mathcal{T}_\xi,\ b_\xi \mid 1 \leq \xi \leq \theta \rangle$，以及它的直接极限模型 $M_{\theta+1}$。同样，如果 $M_{\theta+1}$ 不是良基的，玩家 I 获胜。如果 $M_{\theta+1}$ 是良基的，那么当且仅当令 $j\colon M \to M_{\theta+1}$ 为迭代嵌入时，玩家 I 获胜，

$$\langle y_\xi \mid \xi < \theta \rangle \in j(\dot{A})[h]$$

对于某个 $M_{\theta+1}$-泛型 $h \subseteq \mathrm{Col}(\omega,\ j(\delta))$。镜像版本 $H_{\mathrm{fixed}}(M,\ \delta,\ \theta,\ \dot{A})$ 的定义是交换玩家 I 和玩家 II 的角色。确切定义请参见 [Nee04, 第 2A 节]。我们使用其中的以下定理。

定理 2.3。假设 $\theta \geq 1$ 在 M 和 V 中是可数的，并且在 M 之下有 $-1+\theta$ 多个 *Woodin* 基数，且 δ 本身也是 M 的一个 *Woodin* 基数。此外，假设 $V^M_{\delta+1}$ 在 V 中是可数的，并且 $g \subseteq \mathrm{Col}(\omega,\delta)$ 是具有 $g \in V$ 的 M-泛型。设 $\dot{A}$ 和 $\dot{B}$ 是 $M^{\mathrm{Col}(\omega,\delta)}$ 中 $\mathbb{R}^\theta$ 的一个子集的名称。那么以下至少有一项成立：

(1) 玩家 *I* 在 $G_{\mathrm{fixed}}(M, \delta, \theta, \dot{A})$ 中有获胜策略。(2) 玩家 *II* 在 $G_{\mathrm{fixed}}(M, \delta, \theta, B)$ 中有获胜策略。(3) 在 $M[g]$ 中存在一个实数序列 $\vec{y} \in \mathbb{R}^\theta$，它既不属于 $\dot{A}[g]$，也不属于 $B[g]$。

此外，存在公式 ϕ_{I} 和 ϕ_{II}，使得若 $M \models \phi_{\mathrm{I}}[\delta, \theta, A]$，则 *(1)* 成立；若 $M \models \phi_{\mathrm{II}}[\delta, \theta, B]$，则 *(2)* 成立。

现在，对于每个 $\vec{y} \in \mathbb{R}^{<\omega_1}$，我们按照 [Nee04, Section 2D] 引入 Martin 博弈 $\mathcal{C}[\vec{y}]$。回顾一下，$C \subseteq \mathbb{R}^{<\omega_1}$ 是给定的收益集，它在编码中是 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$。存在一个序数 $0 < \alpha < \omega^2$ 以及一个由 $\mathbb{R}^{<\omega_1}$ 的子集构成的序列 $\langle C_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$，这些子集在编码中是 $\mathbf{\Pi}^1_1$，使得

$$\vec{y} \in C \iff \text{the least } \xi \text{ such that } \xi = \alpha \text{ or } \vec{y} \in C_\xi \text{ is of the same parity a } \alpha.$$

我们分别用 LO 和 WO 表示 ω 上的线性序集合和 ω 上的良序集合。对于每个 $\xi < \alpha$，存在一个 Lipschitz 连续映射 $R_\xi\colon \mathbb{R}^{<\omega_1} \to \mathrm{LO}$，使得对所有 $\vec{y} \in \mathbb{R}^{<\omega_1}$，

$$\vec{y} \in C_\xi \iff R_\xi[\vec{y}] \in \mathrm{WO}$$

这里，R_ξ 的 Lipschitz 连续性意味着，$R_\xi[\vec{y}] \restriction k+1$ 仅取决于 $\vec{y} \restriction \eta^y_k$。不失一般性，我们可以假设 0 是 $R_\xi[\vec{y}]$ 的极大元。

回想一下，我们假设 $M = L(V^M_\lambda)$。由于 V^M_λ 在 V 中是可数的，M 的尖点存在。设 m 满足 $\alpha \in (\omega \cdot m,\ \omega \cdot (m+1)]$，并设 $\langle u_i \mid i < m+1 \rangle$ 为

M的前 $m+1$ 个一致的 Silver 不可分辨子的递增枚举。另外，我们固定一个有效双射 $h\colon \omega \to \alpha \times \omega$，使得对于任意 $\xi < \alpha$，令$r_\xi = h^{-1}[\{\xi\} \times \omega]$,

(1) $\mathrm{pr}_1 \circ h$ 在 r_ξ上递增，其中对任意 $i < \omega$，$\mathrm{pr}_1(\langle \xi,\ i\rangle) = i$；(2) 若 ξ 为偶数（分别为奇数），则 r_ξ 由偶数（分别为奇数）自然数组成；(3) $\min(r_\xi) < \min(r_{\xi+1})$。

那么，博弈 $\mathcal{C}[\vec{y}]$ 是一个在序数上进行、长度为 ω 的开博弈，玩法如下：

I	ρ_0	ρ_2	$\cdots$
II	ρ_1	ρ_3	

博弈规则如下：对于任意 $\xi < \alpha$，令 $f_\xi\colon\ \omega \to$ Ord 定义为$f_\xi(i) = \rho_j$ 当且仅当 $h(j) = \langle \xi,\ i\rangle$,

(1) f_ξ 嵌入到序数中，即

$$\langle i, i'\rangle \in R_\xi[\vec{y}] \iff f_\xi(i) < f_\xi(i')$$

对于任意 $i,\ i' < \omega$，(2) $f_\xi(0) < f_{\xi+1}(0)$，以及(3) 若 $\xi \in [\omega \cdot n, \omega \cdot (n+1))$，则 $f_\xi(i) \in [u_n, u_{n+1})$。

第一个违反这些规则的玩家将输，而任何无限对局中玩家 II 都获胜。这个定义导出一个映射 $\vec{y} \mapsto \mathcal{C}[\vec{y}]$，将可数序列 $\vec{y} \in \mathbb{R}^{<\omega_1}$ 映射到其所属的博弈 $\mathcal{C}[\vec{y}]$，其中该博弈属于 M，我们将此映射记作 $\mathcal{C}$。注意，映射$\mathcal{C}$ 是利普希茨连续的，即只需知道 $\vec{y} \restriction \eta_k^y$，就足以确定 $\mathcal{C}[\vec{y}]$的前$k+1$ 回合。

我们称 $\mathcal{C}[\vec{y}]$ 中长度为奇数的局面 P 为良好（相对于 M），如果玩家 II 给出的序数是 M的 Silver 不可分辨子，而玩家 I 给出的序数可由 M 中玩家 II 给出的序数及 $V_\lambda^M \cup \{u_0, \ldots, u_m\}$中的额外参数定义。此外，如果 P'，且 P'中玩家 I 给出的每个序数都能以与 P相同的方式由 P' 中玩家 II 给出的序数定义，那么良好局面 P'称为良好局面 P的 M-平移。关于 $\mathcal{C}[\vec{y}]$ 的下列事实，在[Nee04]中列为事实 2D.10 和 2D.11。

引理 2.4。

(1) 设 P 是 $\mathcal{C}[\vec{y}]$ 中长度为奇数的一个良好局面。那么存在 P 的一个 M-移位 P'，以及一个关于 M 的 *Silver* 不可分辨子 ρ，使得 ρ 是在 $\mathcal{C}[\vec{y}]$ 中跟随 P' 之后 *II* 的一个合法着法。(2) 设 $\langle P_k \mid k < \omega\rangle$ 是 $\mathcal{C}[\vec{y}]$ 中良好局面的一个序列，并且对任意 $k < \omega$，P_{k+1} 都延伸了 P_k 的一个 M-移位。那么 $\vec{y} \in C$。

博弈 $G_k(\vec{x},\ P,\ \gamma)$ 的定义与 [Nee04] 中相应博弈的定义非常相似。唯一的区别在于 k-序列的定义。

对于 $\vec{x} \in \mathbb{R}^{<\omega_1}$ 和 $k < \omega$，令 $\delta_k^{\vec{x}}$ 为 M 中按递增顺序排列的第 $(\eta_k^{\vec{x}} + 1)$ 个 Woodin 基数。为简化说明，我们固定一个序列 $\langle g_k \mid k < \omega\rangle$，使得每个 g_k 都是 Col$(\omega,\ \delta_k^{\vec{x}})$-泛型的，且相对于 $M[g_0 * \cdots * g_{k-1}]$。我们还记 $g^k = g_0 * \cdots * g_{k-1}$。严格来说，我们应该使用强迫语言，而不是固定泛型。

定义 2.5。令 $k < \omega$。三元组 $\langle \vec{x}, P, \gamma\rangle \in M[g^k]$ 称为 k-序列，基于$M[g^k]$，如果

(1) γ 是一个序数，(2) $\vec{x} \in \mathbb{R}^{\eta_k^{\vec{x}}}$，并且(3)
P 是在 $\mathcal{C}[\vec{x}]$ 中经过 k 回合后的一个局面。

此外，若三元组 $\langle \vec{x}, P, \gamma \rangle \in M[g^k]$ 满足条件 *(1)*、*(2)* 以及扩展 k-序列 $M[g^k]$，则称其为扩展序列

(3') P 是 $\mathcal{C}[\vec{x}]$ 中经过 $k+1$ 回合后的一个局面

而非 *(3)*。

利用这一概念，对于任意 k-序列$\langle \vec{x}, P, \gamma \rangle$，我们在 $M[g^k]$ 中定义有限博弈 $G_k(\vec{x}, P, \gamma)$，并对于任意扩展的 k-序列 $\langle \vec{x}, P^*, \gamma^* \rangle$，定义实数集 $A_k(\vec{x}, P^*, \gamma^*)$。

定义 2.6。设 $k < \omega$，且令 $\langle \vec{x}, P, \gamma \rangle$ 为 $M[g^k]$ 上的一个 k-序列。博弈$G_k(\vec{x}, P, \gamma)$ 按如下方式进行：

I		ρ_{2k}
II	γ^*	ρ_{2k+1}

有两条规则：

- *II* 必须下一手序数 γ^*，且小于 γ。
- $P^* := P^\frown \langle \rho_{2k}, \rho_{2k+1} \rangle$ 必须是 $\mathcal{C}[\vec{x}]$ 中的合法局面。

则 *I* 获胜当且仅当

$$V^M_{\delta^{\vec{x}}_{k+1}}[g^k] \models \phi_{\mathrm{I}}[\delta^{\vec{x}}_k, \theta^{\vec{x}}_k, \dot{A}_k[g^k](\vec{x}, P^*, \gamma^*)].$$

这一定义诱导出一个映射 $\langle \vec{x}, P, \gamma \rangle \mapsto G_k(\vec{x}, P, \gamma)$，它属于 $M[g^k]$。令$G_k = \dot{G}_k[g^k]$ 为该映射。

定义 2.7. 设 $\langle \vec{x}, P^*, \gamma^* \rangle$ 是 $M[g^k]$ 上的一个扩展 k-序列。则集合$A_k(\vec{x}, P^*, \gamma^*)$ 是 $M[g^k][g_k]$ 中由以下方式定义的 $\mathbb{R}^{\theta^{\vec{x}}_k}$ 的一个子集

$$\vec{z} \in A_k(\vec{x}, P^*, \gamma^*) \iff M[g^k][g_k] \models \text{“}I \text{ wins } G_{k+1}(\vec{x}^\frown \vec{z}, P^*, \gamma^*)\text{”}$$

对任意 $\vec{z} \in \mathbb{R}^{\theta^{\vec{x}}_k} \cap M[g^k][g_k]$。令 $\dot{A}_k[g^k](\vec{x}, P^*, \gamma^*) \in M[g^k]$ 为该集合的规范名称。此定义诱导出一个映射 $\langle \vec{x}, P^*, \gamma^* \rangle \mapsto \dot{A}_k[g^k](\vec{x}, P^*, \gamma^*)$，它属于 $M[g^k]$。令 $A_k = \dot{A}_k[g^k]$ 为此映射。

注意，定义 2.6 和 2.7 应当关于 γ 和 γ^* 同时通过归纳法完成，而不是关于 k 进行归纳。$G_k(\vec{x}, P, \gamma)$ 的定义涉及集合 $\dot{A}_k[g^k](\vec{x}, P^*, \gamma^*)$，而后者又依赖于 $G_{k+1}(\vec{x}^\frown \vec{z}, P^*, \gamma^*)$（对于 $\gamma^* < \gamma$）。关于这些定义的更多解释，可参见 [Nee04，第 2B(1) 节]。

我们再次通过交换玩家 I 和 II 的角色来定义这些概念的镜像版本：对于任意镜像k-序列 $\langle \vec{x}, Q, \gamma \rangle$，在 $M[g^k]$ 中定义有限博弈 $H_k(\vec{x}, Q, \gamma)$；对于任意镜像扩展 k-序列 $\langle \vec{x}, Q^*, \gamma^* \rangle$，通过对镜像（扩展）$k$-序列的第三个坐标进行归纳，定义实数集 $B_k(\vec{x}, Q^*, \gamma^*)$。

最后，我们令 $\langle \gamma_L, \gamma_H \rangle$ 为相对于u_m的最小一对局部不可分辨子，其中 M，即

$$V^M_{\gamma_L+\omega} \models \phi[\gamma_L, c_0, \ldots, c_{k-1}] \iff V^M_{\gamma_H+\omega} \models \phi[\gamma_H, c_0, \ldots, c_{k-1}]$$

对于任意公式 ϕ 以及任意 $c_0, \ldots, c_{k-1} \in V^M_{u_m+\omega}$。我们的准备工作至此完成。

定义 2.2 可由以下三项推出：

(1) 如果玩家 I 在 $G_0(\emptyset, \emptyset, \gamma_L)$ 中有获胜策略，那么玩家 I 在 $G_\Delta(C)$ 中也有获胜策略。

(2) 如果存在一个序数 γ，使得玩家 II 在$H_0(\emptyset, \emptyset, \gamma)$ 中有获胜策略，那么玩家 II 在 $G_\Delta(C)$ 中也有获胜策略。(3) (1) 和 (2) 中的假设至少有一个成立。

这些条目的证明几乎与 [Nee04 第 2]节中的证明完全相同。因此，我们这里只详细证明 (1)，将 (2) 和 (3) 留给读者。下面证明这个引理：

引理 2.8。如果玩家 I 在 $G_0(\emptyset, \emptyset, \gamma_L)$中有获胜策略，那么玩家 I 在 $G_\Delta(C)$中也有获胜策略。

证明。固定玩家 II 的一个虚拟对手（在 $G_\Delta(C)$中），以及 M的一个弱迭代策略 Γ。我们通过构造 $G_\Delta(C)$的一个对局过程 $\vec{x} = \langle x_\xi \mid \xi < \theta \rangle$，来说明如何与这个虚拟对手对弈。在阶段 $k < \omega$开始时，我们有以下对象：

(a) 一个实数序列$\vec{x}_k = \langle x_\xi \mid \xi < \eta_k^{x_k} \rangle$；(b) $M = M_0$ 的一个 Γ-迭代 M_k 以及一个迭代嵌入 i_k：$M \to M_k$；(c) 一些 M_k-泛型的 $g^k = g_0 * \cdots * g_{k-1} \subseteq \mathrm{Col}(\omega, i_1(\delta_0)) * \cdots * \mathrm{Col}(\omega, i_k(\delta_{k-1}))$；以及 (d) 在 $i_k(\mathcal{C})[\vec{x}_k]$中经过 k 回合后的一个局面 P_k。

我们的归纳假设是：

(i) $\vec{x}_k \in M_k[g^k]$，(ii) $M_k[g^k] \models$“玩家 I 赢得 $i_k(\dot{G}_k)[g^k](\vec{x}_k, P_k, \gamma_L)$”，其中 $\langle \gamma_L, \gamma_H \rangle$ 与之前一样，是 M_k 的最小一对局部不可分辨子；以及 (iii) P_k 是 $i_k(\mathcal{C}_k)[\vec{x}_k]$ 中的一个局面，且它在 M_k上是好的。

让我们开始构造的第 k 阶段。根据定义 2.4(1)，我们可以取一个M_k-平移 P'_k 和 P_k 的一个 Silver 不可分辨子 ρ，使得 $P'_k{}^\frown\langle\rho\rangle$ 是玩家 I 在 $\mathcal{C}[\vec{x}]$ 中的一个合法着法。于是存在一个初等嵌入 τ：$M_k[g^k] \to M_k[g^k]$，它固定一致不可辨识子，并且 $\tau(P_k) = P'_k$。注意，$\tau(\gamma_L) = \gamma_L$，且 $\tau(\dot{G}_k) = \dot{G}_k$。由 τ 的初等性，玩家 I 赢得博弈 $i_k(\dot{G}_k)[g^k](\vec{x}_k, P'_k, \gamma_L)$。由 $\langle \gamma_L, \gamma_H \rangle$ 的局部不可辨识性，玩家 I 赢得博弈 $i_k(\dot{G}_k)[g^k](\vec{x}_k, P'_k, \gamma_H)$。令 $\sigma_k \in M_k[g^k]$ 为玩家 I 的一个获胜策略，以见证这一点。我们可以假设 σ_k 在 $M_k[g^k]$ 中是可定义的，其参数取自 $V_{i_k}^{M_k}(\lambda)[g^k] \cup \{u_0, \ldots, u_m, P'_k\}$。

在博弈 $i_k(\dot{G}_k)[g^k](\vec{x}_k, P'_k, \gamma_H)$中，让玩家 II 下出 γ_L。设 ρ_{2k}是玩家 I 在 σ_k下出的回应。接着将 Silver 不可分辨子 ρ 作为下一步，ρ_{2k+1}给 II。令 $P_{k+1} = P'_k{}^\frown\langle\rho_{2k}, \rho_{2k+1}\rangle$。由于 σ_k是 I 的获胜策略，因此我们有

$$V^{M_k}_{i_k(\delta^{\vec{x}_k}_{k+1})}[g^k] \models \phi_{\mathrm{I}}[i_k(\delta^{\vec{x}_k}_k), \theta^{\vec{x}_k}_k, i_k(\dot{A}_k)[g^k](\vec{x}_k, \overline{P}_{k+1}, \gamma_L)]$$

根据定义 2.3，玩家 I 赢得 $\hat{}\ G_{\mathrm{fixed}}(M_k[g^k], i_k(\delta^{\vec{x}_k}_k)\ \theta^{\vec{x}_k}_k, \gamma_L)$。这里 $V^{M_k}_{i_k\ (\delta^{\vec{x}_k}_{k+1})}[g^k]$ 与 $M_k[g^k]$ 之间的差异并不构成问题，因为所有相关对象的秩都低于 $i_k(\delta^{\vec{x}_k}_{k+1})$。固定一个作为此事见证的获胜策略 $\hat{}\ \Sigma_k$。

利用这个策略，我们可以得到泛型性迭代博弈 $\hat{}\ G_{\mathrm{fixed}}(M_k[g^k], i_k(\delta^{\vec{x}_k}_k)\ \theta^{\vec{x}_k}_k, \gamma_L)$ 的一个完整对局过程。这会产生一个实数序列 $\vec{y}_k := \langle x_\xi \mid \xi \in \vec{\ } \vec{\ } \lceil[\eta_k^{x_k}, \eta_{k+1}^{x_k}]\rangle$ 以及 M_k 的一个长度为 $-1 + \theta_k^{x_k} + 1$的弱迭代。注意，可以把 $M_k[g^k]$ 上的迭代树视为 M_k 上的迭代树。令 M_{k+1}为这次迭代的最终模型，并令 $i_{k,\ k+1}$：$M_k \to M_{k+1}$ 为迭代 $\hat{}$ 嵌入。令 $i_{k+1} = i_{k,\ k+1} \circ i_k$。由于 Σ_k 是玩家 I 的获胜策略，因此存在

某个 $M_{k+1}[g^k]$-泛型 $g_k \subseteq \mathrm{Col}(\omega, i_{k+1}(\delta_k^{\vec{x}_k}))$，使得

$$\vec{y}_k \in i_{k+1}(\dot{A}_k)[g^k][g_k](\vec{x}_k, i_{k,k+1}(\overline{P}_{k+1}), \gamma_L).$$

最后，令 $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k{}^\frown\vec{y}_k$，并令 $P_{k+1} = i_{k,\,k+1}(P_{k+1})_\infty$ 于是很容易验证归纳假设。

注意，该构造保证对于任意 $k < \omega$， P_{k+1} 都延伸了 $i_{k,\,k+1}(P_k)$ 的一个平移。接下来可以如下证明，终局 $\vec{x} = \langle x_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ 在 $G_\Delta(C)$ 中由玩家 I 获胜：令 M_∞ 为模型 M_k 的直接极限。由于 M 的弱可迭代性，该直接极限是良基的。令 $P_k^* = i_{k,\,\infty}(P_k)$，其中 $i_{k,\,\infty}\colon M_k \to M_\infty$ 是直接极限映射。于是每个 P_k^* 都在 M_∞ 上是良好的，并且对于任意 $k < \omega$， P_{k+1}^* 都延伸了 P_k^* 的一个平移。根据定义 2.4(2)，这意味着 $\vec{x} \in C$。□

如上所述，我们将 Neeman 的论证也能给出 (2) 和 (3) 留给读者验证，这就完成了定义 2.2 的证明概要。

3. Determinacy in the Solovay-type model from long game determinacy

本节中，我们引入 Solovay 型模型 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$，并由长博弈决定性证明该模型中的决定公理。特别地，我们在第 3.1 和 3.2 小节中证明，定义 1.7 中的 (2) 蕴含 (3)。我们还将在第 3.3 小节中简要讨论 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 中的决定公理$^+$ 和鼠标捕获。

定义 3.1 (Woodin [Woo]). 设 $1 \le \alpha < \omega_1$，且令 $Z \subseteq [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}$。收益集为 Z 的 α-*Solovay* 博弈 $G_\alpha^{\mathrm{Sol}}(Z)$ 是一个在 $\mathbb{R}$ 上进行、长度为 $\omega^{1+\alpha}$ 的博弈，其典型形式如下：

I	x_0		x_2		$\cdots$
II		x_1		x_3	$\cdots$

令每个 $\sigma_\eta = \{x_\xi \mid \xi < \omega \cdot (1+\eta)\}$，玩家 *II* 获胜当且仅当

$$\langle \sigma_\eta \mid \eta < \omega^\alpha\rangle \in Z.$$

此外，令 $\mathcal{F}_\alpha$ 为所有满足以下条件的 $Z \subseteq [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}$ 的集合：玩家 *II* 在博弈 $G_\alpha^{\mathrm{Sol}}(Z)$ 中有获胜策略。不难看出， $\mathcal{F}_\alpha$ 是一个滤子，因此我们称它为 α-Solovay 滤子。

定义 3.2 (Woodin [Woo])。 我们将 Δ-*Solovay* 模型定义为

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) := L(\mathbb{R})[\mathcal{F}_{<\omega_1}],$$

其中

$$\mathcal{F}_{<\omega_1} = \{\langle \alpha, Z\rangle \mid \alpha < \omega_1 \wedge Z \in \mathcal{F}_\alpha\}.$$

对于每个 $\alpha < \omega_1$，记

$$\mu_\alpha = \mathcal{F}_\alpha \cap L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}).$$

本节的目标定理如下。

定理 3.3。 假设对于编码中任意已确定的 $C \subseteq \mathbb{R}^{<\omega_1}$，博弈 $G_\Delta(C)$ 都是已确定的。那么

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \mathsf{AD} + \mu_\alpha \text{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha} \text{ for each } \alpha < \omega_1.$$

为证明这一理论，我们引入以下定义，该定义已隐含地出现在 Trang 的博士论文 [Tra13] 中。

定义 3.4。 令 $g = \langle \sigma_\xi \mid \xi < \omega^\alpha \rangle \in [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{<\omega_1}$。我们定义一个由序数组成的序列$\langle \eta_k^g \mid k < \omega \rangle$ 如下：令 $\eta_0^g = 0$ 和 $\eta_1^g = 1$。对每个 $1 < k < \omega$，令

$$\eta_{k+1}^g = \sup\{1 + \|x_\xi\|_{\mathrm{WO}} \mid \xi < \max\{\eta_k^g, \omega^\alpha\}\}.$$

此外，令

$$\mathbb{R}_g = \bigcup_{\xi < \omega^\alpha} g(\xi).$$

对每个 $\beta < \alpha$，令 k_β 为满足 $\omega^\beta \leq \eta_{k_\beta+1}$的最小值。对于任意 $m < \omega$，我们定义 f_β^m： $\omega^\beta \to \omega^\alpha$ 如下：

$$f_\beta^m(\xi) = \eta_{k_\beta+m} + \xi$$

对所有 $\xi < \omega^\beta$均成立。然后，我们定义 $\mathcal{F}_\beta^g$ 为满足以下条件的所有 $Z \subseteq [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R}_g)]^{\omega^\beta}$ 的集合：对于除有限多个之外的所有 $m < \omega$，

$$\langle g(f_\beta^m(\xi)) \mid \xi < \omega^\beta \rangle \in Z.$$

不难看出，$\mathcal{F}_\beta^g$ 是一个滤子。最后，我们将 g-导出的 Δ-Solovay 模型 定义为

$$L(\mathbb{R}_g, \mu_{<\alpha}^g) = L(\mathbb{R}_g)[\mathcal{F}_{<\alpha}^g],$$

其中

$$\mathcal{F}_{<\alpha}^g = \{\langle \beta, Z \rangle \mid \beta < \alpha \wedge Z \in \mathcal{F}_\beta^g\}.$$

对于每个 $\beta < \alpha$，我们记

$$\mu_\beta^g = \mathcal{F}_\beta^g \cap L(\mathbb{R}_g)[\mathcal{F}_{<\alpha}^g].$$

3.1. **Solovay 型模型中的确定性**。 现在我们开始证明定义 3.3。为了定义证明中使用的博弈，我们需要做一些准备。这个博弈的定义受到 [MS08b、AM20]中类似博弈的启发。这类模型存在博弈可追溯到 Harvey Friedman [Fri71]。

考虑带有两个额外谓词 符号的集合论 $\mathcal{L} = \{\in, X, A\}$ 语言。我们固定一个 $\mathcal{L}$-公式 θ，使得若 $M = L_\alpha(X)[A]$ 对某个序数 α 成立，则

(1) 对任意 $x \in M$，存在 $\beta < \alpha$ 和 $r \in X$，使得 $M \models \theta[\beta, r, x]$；并且 (2) 对任意 $\beta < \alpha$ 和 $r \in X$，至多存在一个 $x \in M$，使得 $M \models \theta[\beta, r, x]$。

公式 θ 一致地定义了一个以 $\dot{X}^M$ 为参数的良序族，其值域的并集为 M。可以仿照在 L 中存在可定义良序的方式，找到这样的公式。

此外，令 $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{\dot{x}_i \mid i < \omega\}$ 为通过向 $\mathcal{L}$ 添加常元符号 $\dot{x}_i$（对每个 $i < \omega$ 各添加一个）而得到的语言。我们固定一个递归枚举 $\langle \phi_i \mid i < \omega \rangle$，枚举所有 $\mathcal{L}^+$ 句子，并要求当 $k \leq i$ 时，符号 $\dot{x}_i$ 不出现在 ϕ_k 中。此外，我们固定递归双射 m 和 n，将每个 $\mathcal{L}^+$ 公式 ϕ 映射到一个奇数 > 1，使得 m 和 n 的递归值域不相交；并且对每个 ϕ， $m(\phi)$ 和 $n(\phi)$ 都大于 $\phi\}$ 中出现的最大 $\{i \mid \dot{x}_i$ 。

令 A 为某个序数 α，我们称一个 $\mathcal{L}$-结构 N 为极小 ϕ 的证，如果 $\dot{X}^N$ 满足 ϕ，但 N 的任何真 L-初始段都不满足。

现在，对于一个固定的 $\mathcal{L}$-句子 ϕ 和一个 $\mathcal{L}$-公式 ψ（u，v_0，v_1，v_2），我们如下定义一个博弈 $G_{\phi,\ \psi}$。博弈的一种典型对局过程如下所示。

I	z_0, z_1, a_0		$\cdots$		v_0, x_0		$\cdots$		$v_1, x_{\omega\cdot\eta_0}$			$\cdots$
II		a_1	$\cdots$			x_1	$\cdots$				$x_{\omega\cdot\eta_0+1}$	$\cdots$

该博弈自然地分为至多 ω 回合。

- Round 0 长度为 ω。玩家 I 先出两个实数 z_0，z_1 然后两位玩家轮流出自然数 a_0，a_1，..... 以构造一个实数 $y = \langle a_n \mid n < \omega\rangle \in \mathbb{R}$。记 $\eta_0 = 1 + \|z_1\|_{\mathrm{WO}}$。

- Round 1 长度为 $\omega \cdot \eta_0$。玩家 I 出一个数字 $v_0 \in \{0, 1\}$，然后两位玩家轮流出实数 x_ξ，其中 $\xi < \omega \cdot \eta_0$。记

$$\eta_1 = \sup\{1 + \|x_\xi\|_{\mathrm{WO}} \mid \xi < \omega \cdot \eta_0\}.$$

  如果 $\eta_1 \leq \eta_0$，那么我们就停止博弈，玩家 I 获胜。否则，我们进入下一回合。

- 假设我们到达 Round $n + 1$，其中 $n > 0$。该回合的长度为$\omega \cdot \eta_n$，玩家 I 首先出一个数字 $v_n \in \{0, 1\}$。然后两位玩家轮流出实数 x_ξ，其中 $\omega \cdot \eta_{n-1} \leq \xi < \omega \cdot \eta_n$。记

$$\eta_{n+1} = \sup\{1 + \|x_\xi\|_{\mathrm{WO}} \mid \xi < \eta_n\}.$$

  如果 $\eta_{n+1} = \eta_n$，那么我们就停止博弈，玩家 I 获胜。否则，我们继续进行下一回合。

假设已经进行了 ω 个回合。那么我们就停止博弈，并按如下方式决定博弈的获胜者。令 $\lambda = \sup\{\eta_n \mid n < \omega\}$，并令 $g\colon \lambda \to \wp_{\omega_1}(\mathbb{R})$ 定义为

$$g(\eta) = \{x_\xi \mid \xi < \omega \cdot (1 + \eta)\}.$$

此外，令 T 为由满足 $v_i = 1$ 的句子 ϕ_i 构成的 $\mathcal{L}^+$-理论。那么，玩家 I 获胜，当且仅当

(1) T 包含句子“$\dot{x}_k \in \mathbb{R}$”和“$\dot{x}_k(m) = n$”，只要 $x_{c(k)}(m) = n$，其中 $c\colon \omega \to \lambda$ 是一个双射，它由对局过程按典范方式诱导而来，具体解释见定义 2.2 之前关于如何将一局博弈编码为单个实数的段落。

(2) T 满足见证性质，即对于每个有一个自由变量的 $\mathcal{L}^+$-公式 φ，T 都包含以下 $\mathcal{L}^+$-句子：

$$\exists x\, \varphi(x) \to \exists x\, \exists \alpha\, (\varphi(x) \wedge \theta(\alpha, \dot{x}_{m(\phi)}, x)),$$
$$\exists x\, (\varphi(x) \wedge x \in \dot{X}) \to \varphi(\dot{x}_{n(\varphi)}).$$

(3) T 是一个完备且相容的理论，对于 T的每个可数模型 M以及在 M中由 $\{x_\eta \mid \eta < \omega \cdot \alpha\}$生成的每个可定义闭包模型 N^*，N^*都是良基的；令 N为模型 N^*的传递坍缩，

(a) N 是 g导出的 Solovay 模型的一个 L-初始段；(b) N 是一个极小的 ϕ-见证；(c) $N \models \psi[\langle x_\xi \mid \xi < \omega \cdot \eta_0\rangle, y, z_0, z_1]$。

注意，$\mathbf{\Pi}^1_1$-确定性意味着，对于任意 ϕ 和 ψ，G_Δ 的确定性，$_{\phi\ \psi}$。

定理 3.5. 假设对于编码中任意 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 的 $C \subseteq \mathbb{R}^{<\omega_1}$，博弈 $G_\Delta(C)$ 均已确定。那么

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \mathsf{AD} \wedge \forall \alpha < \omega_1 \, (\mu_\alpha \textit{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}).$$

证明。 反设存在一个序数 γ，使得

$$L_{\gamma+1}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \not\models \mathsf{AD} \wedge \forall \alpha < \omega_1 \, (\mu_\alpha \text{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}).$$

并令 γ^* 为最小的此类 γ。

命题 3.5.1。 $L_{\gamma^*+1}(\mathbb{R}, \ \mu_{<\omega_1}) \models$ 决定公理。

证明。 令 ϕ 为句子“$X = \mathbb{R} \wedge \neg$决定公理”，并令 $\psi(y, \ z_0, \ z_1)$ 为如下断言的公式：存在一个可由 z_0 定义的非确定实数集；并令Z 为由 θ给出的良序下最小的此类集合， $y \in Z$。根据我们的决定性假设，博弈 $G_{\phi, \ \psi}$ 已确定。

情形 1：玩家 I 有一个获胜策略 τ，在 $G_{\phi, \ \psi}$。 取一个连续的 $\in$-链$\langle H_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$，由 V_χ的可数初等子模型组成，其中 χ 是足够大的正则基数，使得 $\tau \in H_0$。对每个 $\xi < \omega_1$，令

$$\mathbb{R}_\xi = \mathbb{R} \cap H_\xi,$$

令 M_ξ 为 H_ξ的传递坍缩，并令 π_ξ: $M_\xi \to V_\chi$ 为反塌缩映射。令 α 为满足以下条件的最小序数

$$\alpha = \omega_1 \cap H_\alpha.$$

现在考虑 $G_{\phi, \ \psi}$ 的一次对局过程，其中玩家 I 遵循她的获胜策略 τ，而玩家 II 出牌为实数，使得 $\mathbb{R}_\xi = \{x_{\omega \cdot \xi + 2i+1} \mid i < \omega\}$。由于 $\tau \in M_\xi$，玩家 I 的出牌 $x_{\omega \cdot \xi + 2i}$ 全都属于 M_ξ。博弈将在长度恰为 α 时停止，并且我们有

$$g = \langle \mathbb{R}_\xi \mid \xi < \alpha \rangle.$$

接下来，我们考虑定义 3.4 中介绍的由 g导出的 Δ-Solovay 模型，并得到如下结论。

子断言 3.5.1.1. $\pi_\alpha^{-1}(L_{\gamma^*+1}(\mathbb{R}, \ \mu_{<\omega_1})) = L_{\pi_\alpha^{-1}(\gamma^*+1)}(\mathbb{R}_g, \ \mu^g_{<\alpha})$。

证明。 将 M_α 中的 Δ-Solovay 模型记为 $L(\mathbb{R}_\alpha, \ \mu_{<\alpha})$,¯并对每个 $\beta < \alpha$令 $\mathcal{F}_\beta = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\beta)$。通过对 $\xi \leq \pi_\alpha^{-1}(\gamma^*)$作归纳法，我们将证明

$$L_\xi(\mathbb{R}_\alpha, \overline{\mu}_{<\alpha}) = L_\xi(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}).$$

这对 $\xi = 0$ 和极限序数 ξ显然成立。考虑 $\xi = \xi' + 1$的情形。于是只需证明，对于任意 $\beta < \alpha$,

$$\overline{\mathcal{F}}_\beta \cap L_{\xi'}(\mathbb{R}_\alpha, \overline{\mu}_{<\alpha}) = \mathcal{F}^g_\beta \cap L_{\xi'}(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}). \tag{3.1}$$

首先，我们证明 (3.1) 的 $\subseteq$ 方向。设 $Z \in \mathcal{F}_\beta \cap L_{\xi'}(\mathbb{R}_\alpha, \ \mu_{<\alpha})$ 由玩家 II 的策略 F 见证：对于 M_α 中的 $G^{\mathrm{Sol}}_\beta(Z)$, $\mathbb{R}_\alpha^{<\omega^\beta} \to \mathbb{R}_\alpha$。注意， $F = \pi_\alpha(F) \in H_\alpha$。取 $m < \omega$ 使得 $\eta_m > \omega^\beta$ 且 $F \in H_{\eta_m}$。那么对于任意 $\eta \geq \eta_m$, $F = \pi_\eta^{-1}(F) \in M_\eta$, 因此 M_η在 F下封闭，即

$$F[\mathbb{R}_\eta^{<\omega^\beta}] \subseteq \mathbb{R}_\eta. \tag{3.2}$$

现在固定任意一个 $n \geq m$，并考虑在 M_α 中进行的一场 $G^{\mathrm{Sol}}_\beta(Z)$ 对局过程，其中玩家 I 的策略满足

$$\mathbb{R}_{f^n_\beta(\xi)} = \{x_\eta \mid \eta < \omega \cdot (1+\xi) \wedge \eta \text{ is even}\}$$

对所有 $\xi < \omega^\beta$ 都成立，而玩家 II 按照 F 行动。由 (3.2) 可知，令 $\langle \sigma_\xi \mid \xi < \omega^\beta \rangle \in [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R}_\alpha)]^{\omega^\beta}$ 为该对局过程所产生的序列，

$$\mathbb{R}_{f^n_\beta(\xi)} = \sigma_\xi,$$

对所有 $\xi < \omega^\beta$。因为 F 是 M_α 中针对 $G^{\mathrm{Sol}}_\beta(Z)$ 的玩家 II 的获胜策略，

$$\langle g(f^n_\beta(\xi)) \mid \xi < \omega^\beta \rangle = \langle \sigma_\xi \mid \xi < \omega^\beta \rangle \in Z.$$

由此可得 $Z \in \mathcal{F}^g_\beta$。

现在我们证明 (3.1) 的 $\supseteq$ 方向。令 $Z \in L_{\xi'}(\underline{\mathbb{R}_\alpha}, \mu_{<\alpha}) \setminus \mathcal{F}_\beta$。由于 $\overline{\gamma^*}$ 的极小性以及 π_α 的初等性，$\mathcal{F}_\beta$ 是一个定义在

$$L_{\xi'}(\mathbb{R}_\alpha, \overline{\mu}_{<\alpha}) = L_{\xi'}(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}).$$

这里，等式就是关于 ξ' 的归纳假设。由此可知，Z 的补集属于 $\mathcal{F}_\beta \cap L_{\xi'}(\mathbb{R}_\alpha, \mu_{<\alpha})$。上一段中的论证表明，$\overline{Z}$ 的补集属于 $\mathcal{F}^g_\beta$，因而 $Z \notin \mathcal{F}^g_\beta$。□

反设命题 3.5.1 不成立。根据子断言 3.5.1.1，玩家 I 所走的极小 ϕ-见证 N 总是 $\pi^{-1}_\alpha(L_{\gamma^*+1}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}))$。由于 τ 是针对 $G_{\phi,\psi}$ 的获胜策略，令 z_0 为玩家 τ 的第一步，则存在一个由 z_0 在 N 中可定义的非已确定实数集。令 Z 为由 θ 给出的良序中最小的此类集合。通过改变玩家 II 的对局 $\langle a_{2n+1} \mid n < \omega \rangle$，我们可以定义玩家 I 在长度为 ω 的、以 $\mathbb{N}$ 为底集的 Gale–Stewart 博弈中的策略 $\tau^* \in M_\alpha$。如果玩家 I 在 $G_{\phi,\psi}$ 中遵循 Round 0 里的 τ^*，那么玩家们最终会在 Round0 中产生 $y \in Z$。这证明了 Z 在 N 中已确定，造成矛盾。

情形 2：玩家 II 有一个获胜策略 τ 在 $G_{\phi\text{中},\ \psi}$。 这一论证与第一种情形几乎对称，但为方便读者，我们仍将其略作说明。再次地，我们取一个连续的 $\in$-链 $\langle H_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$，其中的模型都是 V_χ的可数初等子模型；这里 χ 是一个足够大的正则基数，并且满足 $\tau \in H_0$。我们沿用之前的记号，并令 α 为满足 $\alpha = \omega_1 \cap H_\alpha$的最小序数。考虑 $G_{\phi,\ \psi}$ 的一局对局过程，其中玩家 II 遵循 τ，而玩家 I 在 Rounds 1 中出实数，使得 ω满足 $\mathbb{R}_\xi = \{x_{\omega\cdot\xi+2i+1} \mid i < \omega\}$。和之前一样，博弈恰好在长度为 α 时停止，并且有 $g = \langle \mathbb{R}_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$。再次地，我们有

$$N := \pi^{-1}_\alpha(L_{\gamma^*}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})) = L_{\pi^{-1}_\alpha(\gamma^*)}(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}).$$

反设命题 3.5.1不成立。那么 N中存在一个非确定集。因此，玩家 I 可以选取一个实数 z_0，使得存在一个可由 z_0定义的非确定实数集。令 Z 为由 θ给出的良序中的最小此类集合。玩家 I 还出示 N的理论。通过改变玩家 I 的对局过程 $\langle a_{2n} \mid n < \omega \rangle$，我们可以在 $\mathbb{N}$ 上定义 Gale–Stewart 博弈中的玩家 II 的策略 $\tau^* \in M_\alpha$（博弈长度为 ω）。如果玩家 II 在 Round 0 中遵循 τ^*，并在 $G_{\phi,\ \psi}$中进行对局，双方最终将产生 $y \notin Z$ 于 Round 0中。这证明了 Z 在 N中是已确定的，从而产生矛盾。□

命题 3.5.2。 $L_{\gamma^*+1}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \forall \alpha < \omega_1$（$\mu_\alpha$ 是 $[\wp_{\omega_1}$ 上的超滤子$]^{\omega^\alpha}$）。

证明。令 ϕ 为句子

$$\dot{X} = \mathbb{R} \wedge \exists \alpha < \omega_1 \, (\mu_\alpha \text{ is not an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})])$$

并令 ψ 为断言存在一个由 z_0 可定义的非可测集的公式，其中可定义性由 $(A)_{\|z_1\|_{\mathrm{WO}}}$ 给出；再令 Z 为由 θ 给出的良序中最小的此类集合，

$\langle x_\xi \mid \xi < \omega \cdot \|z_1\|_{\mathrm{WO}} \rangle \in Z$。根据我们的决定性假设，博弈 $G_{\phi,\ \psi}$ 已确定。

情形 1：玩家 I 在 τ 中$G_{\phi,\ \psi}$拥有获胜策略。和之前一样，我们取一个连续的 $\in$-链 $\langle H_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$，其中的元素是 V_θ 的可数初等子模型，θ 是一个足够大的正则基数，并且满足 $\tau \in H_{0}$。对于每个 $\xi < \omega_1$，像之前一样，令 $\mathbb{R}_\xi$，M_ξ，π_ξ。此外，令 α 为满足 $\alpha = \omega_1 \cap H_\alpha$ 的最小对象。

现在考虑 $G_{\phi,\ \psi}$ 的一个对局过程，其中玩家 I 按照 τ 行动，玩家 II 则选择实数，使得 $\mathbb{R}_\xi = \{x_{\omega\cdot\xi+2i+1} \mid i < \omega\}$。由于 $\tau \in M_\xi$，玩家 I 的行动 $x_{\omega\cdot\xi+2i}$ 都属于 M_ξ。博弈将在长度恰为 α 时停止，并且我们有

$$g = \langle \mathbb{R}_\xi \mid \xi < \alpha \rangle.$$

如同在子断言 3.5.1.1 的证明中一样，我们有

$$\pi_\alpha^{-1}(L_{\gamma^*+1}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})) = L_{\pi_\alpha^{-1}(\gamma^*)+1}(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}).$$

现在我们需要另一个观察。对于 $n < \omega$，我们定义 $g^{(n)}\colon\ \alpha \to \wp_{\omega_1}(\mathbb{R}_\alpha)$ 如下：

$$g(\eta_m + \xi) = g(\eta_{m+n} + \xi),$$

其中 $m < \omega$ 和 $\xi \geq 0$ 满足 $\eta_m + \xi < \eta_{m+1}$。注意，对于任意 $\beta < \omega$ 和 $m,\ n < \omega$，

$$\langle g^{(n)}(f^m_\beta(\xi)) \mid \xi < \omega^\beta \rangle = \langle g(f^{m+n}_\beta(\xi)) \mid \xi < \omega^\beta \rangle,$$

因为 $k_{f^m_\beta(\xi)} = k_\beta + m$ 成立。回想一下，k_β 定义为满足 $\beta \leq \eta_{k+1}$）的最小 $k < \omega$。因此，我们有

$$\mathcal{F}^{g^{(n)}}_\beta = \mathcal{F}^g_\beta$$

and

$$L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}) = L(\mathbb{R}_{g^{(n)}}, \mu^g_{<\alpha}).$$

现在假设命题 3.5.2 不成立。我们知道，玩家 I 所下的最小 ϕ-见证 N 总是 $\pi_\alpha^{-1}(L_{\gamma^*+1}(\mathbb{R},\ \mu_{<\omega_1}))$. 因为 τ 是 $G_{\phi,\ \psi}$ 的获胜策略，令 z_0，z_1 为 τ 的前两步棋，则存在一个由 z_0 在 N 中可定义的非可测集 $\mu_{\|z_1\|_{\mathrm{WO}}}$。令 Z 为由 θ 给出的良序中最小的此类集合。通过改变玩家 II 的对局，可以证明

$$\langle g^{(n)}(f^0_\beta(\xi)) \mid \xi < \omega^\beta \rangle \in Z$$

对所有 $n < \omega$ 都成立。由此可得 $Z \in \mathcal{F}^{g^{(n)}}_\beta = \mathcal{F}^g_\beta$。这是一个矛盾。

情形 2：玩家 II 有一个获胜策略 τ 在 $G_{\phi,\ \psi}$。论证在某种意义上几乎是对称的，这一点我们已在命题 3.5.1 的证明中说明，因此将细节留给读者。□

命题 3.5.1 和 3.5.2 与 γ^*的定义相矛盾，由此完成定义 3.5 的证明。□

3.2. **Solovay 型模型的尖点**。在本小节中，我们证明模型 $L(\mathbb{R},\ \mu_{<\omega_1})$ 存在尖点，这一结论来自 G_Δ 的 $<\omega^2$-$\mathbf{\Pi}^1_1$ 确定性。

定义 3.6。我们称 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 存在尖点，如果存在一个非平凡的初等嵌入

$$j\colon (L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}), \in, \mu_{<\omega_1}) \to (L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}), \in, \mu_{<\omega_1})$$

使得 临界点$(j)\ > \Theta^{L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})}$。

可以用各种标准方式刻画 $L(\mathbb{R},\ \mu_{<\omega_1})$ 的尖点。因此， $L(\mathbb{R},\ \mu_{<\omega_1})$ 的尖点具有泛型绝对性；也就是说，如果在某个泛型扩张中（通过集合大小的强迫）存在 $L(\mathbb{R},\ \mu_{<\omega_1})$ 的尖点，那么它在基模型中也存在。

为证明下述定理，我们使用与 [Tra13 第2.3小节中相同的论证。2], 该论证最初由 Woodin 提出。证明的一个有趣之处在于使用了 Jensen 模型存在定理。我们建议参阅 [Jen14]或 [Cha17] 的第2章。[5] 第一作者感谢 Andreas Lietz 帮助理解 [Tra13] 中的论证。

定理3.7。 假设对于任意属于 $C \subseteq \mathbb{R}^{<\omega_1}$编码中的 $G_\Delta(C)$ 博弈，这些博弈都是已确定的。那么， Δ-*Solovay* 模型 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 的尖点存在。

证明。 在下面的证明中，集合论的非良基模型将发挥重要作用。我们假设此类模型的良基部分总是传递的。

我们定义如下双人博弈 $G^\sharp$，它是上一小节介绍的博弈 $G_{\phi,\ \psi}$ 的一个变体。该博弈的典型对局过程如下所示。

I	m_0, x_0		$\cdots$	$m_1, x_{\omega\cdot\eta_0}$			$\cdots$
II		v_0, x_1	$\cdots$		$v_1, x_{\omega\cdot\eta_0+1}$		$\cdots$

博弈最多分为 ω 个回合。每个回合中，玩家 I 和玩家 II 轮流选择实数 x_β。此外，每个回合开始时，玩家 I 选择一个自然数 $m_i \in \omega$ ，玩家 II 选择一个数字 $v_i \in \{0, 1\}$。博弈长度的确定方式与 $G_{\phi,\psi}$ 定义中的方式相同，具体如下。 Round 0 的长度为 ω。在 Round n 之后，我们根据玩家的行动定义一个序数 η_n ，如同 $G_{\phi,\psi}$ 的定义中那样。如果 $\eta_{n+1} \leq \eta_n$ ，则博弈立即结束，玩家 I 获胜。否则，博弈继续进行到下一回合，并将 Round $n+1$ 的长度设为 $\omega \cdot \eta_n$。假设已经进行了 ω 个回合。然后我们停止博弈，并按如下方式判定获胜者。令 $\lambda = \sup\{\eta_n \mid n < \omega\}$ ，并令 $g\colon \lambda \to \wp_{\omega_1}(\mathbb{R})$ 定义为

$$g(\eta) = \{x_\xi \mid \xi < \omega \cdot (1 + \eta)\}.$$

此外，令 $y = \langle m_i \mid i < \omega\rangle$ ，并令 T 为由满足 $v_i = 1$ 的 $\mathcal{L}^+$-句子 ϕ_i 组成的理论。则玩家 II 获胜当且仅当

- 要么 $y \notin$是良序，要么
- T 是某个满足以下条件的 ω-模型[6] M 的理论

$$M \models \mathrm{ZF}^-[7] + V = L(\mathbb{R}_g, \mathcal{F}^g_{<\alpha}) + \text{决定公理} + \forall\beta < \omega_1\ (\mathcal{F}^g_\beta \text{是} [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R}_g)]^{\omega^\beta} \text{上的超滤子})$$

并且 $\|y\|_{\mathrm{WO}}$ 包含在 M的良基部分中。

断言 3.7.1。 玩家 *I* 不可能在此博弈中拥有获胜策略。

---

[5]同一结果也在 [Fri73, 定理 2.2]中得到了证明。看来他们几乎在同一时间独立地得出了相同结果。根据 [Jen10], 的序言，Jensen 于 1969年在洛克菲勒大学就这一主题进行了一系列讲座。根据[MR73], 的序言，Harvey Friedman 于 1971年在剑桥举办的数学逻辑暑期学校上就此作了一场讲座。[6]回想一下，若某理论的模型 M 满足 $\omega^M = \omega$，则称其为 ω-*model* 。因此，这样的 M 可能不是良基的。[7] ZF^- 表示不含幂集公理的 ZF。

证明。这可由 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 有界性得到，正如 [Tra13 的引理 2.313]所示。 □

根据我们的决定性假设，该断言意味着玩家 II 有一个获胜策略 τ。与定义 3.5 证明中的各项断言的证明一样，我们取一个由 V_θ 的可数初等子模型组成的连续 $\in$-链 $\langle H_\xi \mid \xi < \omega_1\rangle$，其中$\theta$ 是一个足够大的正则基数，并且满足 $\tau \in H_0$。对于每个 $\xi < \omega_1$，令$\mathbb{R}_\xi$，M_ξ，π_ξ 如定义 3.5 的证明中所述。此外，令 α 为满足 $\alpha = \omega_1 \cap H_\alpha$ 的最小序数。

现在考虑 $G^\sharp$ 的一局对局过程，其中玩家 II 遵循 τ，玩家 I 则出实数，使得 $\mathbb{R}_\xi = \{x_{\omega\cdot\xi+2i} \mid i < \omega\}$。由于 $\tau \in M_\xi$，玩家 I 的行动 $x_{\omega\cdot\xi+2i}$ 全都属于 M_ξ。博弈恰好在长度为 α 时结束，并且我们有

$$g = \langle \mathbb{R}_\xi \mid \xi < \alpha\rangle.$$

Then

$$N := L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}) = \pi_\alpha^{-1}(L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})).$$

从现在起，我们在 $M_\alpha[G]$ 中工作，其中 $G \subseteq \mathrm{Col}(\omega, \alpha)$ 是 M_α-泛型，使得某个 $x \in \mathbb{R}^{M_\alpha[G]}$ 编码了 g 和 τ。固定这样一个 x。

断言 3.7.2. 在 $M_\alpha[G]$中，以下陈述蕴含存在一个关于 N 的尖点，其意义见定义 *3.6*：

(HP)[8] 对于任意序数 $\gamma > \Theta^N$，若 γ 是 x-容许的，则它是 N 中的一个基数。

证明。这是在 [Har78] 中的一个论证。设 $\lambda > \Theta^N$ 是一个 ω-闭基数，并设 $X \prec L_{\lambda^{++}}[x]$ 满足 $\lambda \subseteq X$，$|X| = \lambda$ 和 $X^\omega \subseteq X$。那么 X 的传递坍缩是某个 x-容许序数 $\beta < \lambda^+$ 的 $L_\beta[x]$。令 $\pi\colon L_\beta[x] \to X$ 为反塌缩映射，并令 $\kappa = \mathrm{crit}(\pi)$。由 HP，$\beta$ 是 N 的一个基数。于是 $(\kappa^+)^N \leq \beta$，因此我们可以定义一个 N-超滤子

$$U = \{A \subseteq \wp(\kappa) \cap N \mid \kappa \in \pi(A)\}.$$

由于 $X^\omega \subseteq X$, U 是可数完备的。此外，由于 $\kappa \geq \lambda > \Theta^N$, U 是 $\mathbb{R}^N$-完备的。因此，我们可以通过对 N 进行 U 的迭代超幂，定义一个临界点为 κ 的初等嵌入 $j\colon N \to N$。 □

根据断言 3.7.2，只需证明 HP 在 $M_\alpha[G]$ 中成立，因为这样一来，根据尖点的泛型绝对性，N 的尖点就在 M_α 中存在；进而根据 π_α 的初等性，$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 的尖点就在 V 中存在。

反设 $\gamma > \Theta^N$ 是 x-容许序数，但不是 N 中的基数。必要时，我们可以通过在 $M_\alpha[G]$ 的泛型扩张中工作，假设 $\gamma < \omega_1^{M_\alpha[G]}$。令 $G^\sharp \restriction \mathbb{R}_\alpha$ 为 N 中小于 γ 的最大基数。令 $G^\sharp \restriction \mathbb{R}_\alpha$ 为博弈 $G^\sharp$，但玩家只能使用 $\mathbb{R}_\alpha$ 中的实数进行博弈。下文中，ω-模型的良基部分总假定为传递的。

断言 3.7.3. 对于任意可数的 ω-模型 $\langle P_0, E_0\rangle$ 和 $\langle P_1, E_1\rangle$，它们都是 ZFC^- 的模型，且满足对每个 $i \in 2$,

- $x \in P_i$,
- $\langle P_i$ 的良基部分的序数高度为 γ,
- $\langle P_i, E_i\rangle \models \tau$ 是玩家 *II* 在 $G^\sharp \restriction \mathbb{R}_\alpha$ 中的获胜策略，并且 x 将 g 编码为 τ,

我们有 $(\wp(\kappa) \cap L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}))^{\langle P_0, E_0\rangle} = (\wp(\kappa) \cap L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}))^{\langle P_0, E_0\rangle}$。

[8] HP 是哈灵顿原理的缩写。

证明。设 $\langle P_0, E_0\rangle, \langle P_1, E_1\rangle$ 是满足上述假设的任意可数 ω-模型。设 $A \subseteq \kappa$ 属于 $L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha})^{\langle P_0, E_0\rangle}$。我们要证明 $A \in L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha})^{\langle P_1, E_1\rangle}$。

根据 Friedman 的经典结果 [Fri73，定理 3.2]，$\langle P_0, E_0\rangle$ 中序数的序型为 $\gamma + \gamma\mathbb{Q}$。我们取非标准序数 $a_0 \in P_0$ 和 $a_1 \in P_1$，使得$\langle P_0, E_0\rangle \models A \in L_{a_0}(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha})$，并且

$$\{\xi \in P_0 \mid \xi\, E_0\, a_0\} \simeq \{\xi \in P_1 \mid \xi\, E_1\, a_1\} \simeq \gamma + \gamma\mathbb{Q}.$$

对于每个 $i \in 2$，令 $\mathbb{P}_i = \mathrm{Col}(\omega, a_i)^{\langle N_i, E_i\rangle}$。注意，存在一个同构$\iota$: $\mathbb{P}_0 \to \mathbb{P}_1$。

子断言 3.7.3.1。对于每个 $i \in 2$，存在 $\langle P_i, E_i\rangle$-泛型 $H_i \subseteq \mathbb{P}_i$，使得

(1) $\iota[H_0] = H_1$, *and*
(2) $P_0[H_0] \cap P_1 \cap V_\gamma = P_0 \cap P_1[H_1] \cap V_\gamma = P_0 \cap P_1 \cap V_\gamma$.

证明。这类泛型滤子的构造如下，通过往返论证完成：固定 P_0 的一个枚举 $\vec{d} = \langle d_i \mid i < \omega\rangle$ 以及 P_1的一个枚举 $\vec{e} = \langle e_i \mid i < \omega\rangle$。此外，固定一个递归双射 b: $\omega \to \omega\times\omega$，并令 $b(k) = \langle b_0(k)\ b_1(k)\rangle$，其中任意 $k < \omega$。

我们将归纳地定义$\mathbb{P}_0$ 中的递减条件序列 $\langle p_k \mid k < \omega\rangle$，以及 $\mathbb{P}_1$中的递减条件序列 $\langle q_k \mid k < \omega\rangle$。我们从$p_0 = q_0 = \emptyset$开始。假设 p_k 和 q_k 已定义。令 $p'_k = \iota^{-1}(q_k)$。为定义 p_{k+1}，我们根据$\vec{}$中 d 对 P_0 的枚举的第 $b_0(k)$ 个元素，分三种情况讨论：

- Case 1。$d_{b_0(k)}$ 是 $\langle P_0, E_0\rangle$中的 $\mathbb{P}_0$ 稠密子集。
- Case 2。$d_{b_0(k)}$ 是 $\langle P_0, E_0\rangle$中的一个 $\mathbb{P}_0$-名称。
- Case 3。$d_{b_0(k)}$ 既不是 $\mathbb{P}_0$ 稠密子集，也不是 $\mathbb{P}_0$-名称。

在 Case 1中，任取一个 $p_{k+1} \leq_{\mathbb{P}} p'_k$，使其属于$d_{b_0(k)}$。在 Case 3中，令 $p_{k+1} = p'_k$。假设 Case 2 成立。若$e_{b_1(k)} \in P_0$，则令 $p_{k+1} = p'_k$。否则，若存在这样的 x_k，则取关于 $\vec{d}$ 极小的 $x_k \in P_0$，使得 p'_k 不能判定$\check{}x_k \in d_{b_0(k)}$是否成立。若 x_k 有定义，选择$p_{k+1} \leq_{\mathbb{P}_0} p'_k$ 使得

$$x_k \in e_{b_1(k)} \Rightarrow p_{k+1} \Vdash^{\langle P_0, E_0\rangle}_{\mathbb{P}_0} \check{x}_k \notin d_{b_0(k)},$$
$$x_k \notin e_{b_1(k)} \Rightarrow p_{k+1} \Vdash^{\langle P_0, E_0\rangle}_{\mathbb{P}_0} \check{x}_k \in d_{b_0(k)}.$$

若 x_k 未定义，则令 $p_{k+1} = p'_k$。至此，p_{k+1}的定义完成。令 $q'_k = \iota(p_{k+1})$，并按照定义 p_{k+1} 由p'_k得出的相同方式，由 q'_k 定义 q_{k+1}。现在，暂且令 H_0（分别令 H_1）为 p_k（分别为 q_k）的向上闭包。

要证明滤子 H_0 是 $\langle P_0, E_0\rangle$-泛型的，令 $D \in P_0$ 满足 $\langle P_0, E_0\rangle \models$“$D$是 $\mathbb{P}_0$ 的一个稠密子集。”令 $k < \omega$ 满足 $D = d_{b_0(k)}$。那么，构造的 Case 1 保证 $p_{k+1} \in d_{b_0(k)}$，因此 $H_0 \cap D \neq \emptyset$。对称地，可以证明 H_1 的 $\langle P_1, E_1\rangle$-泛性。

为证明 $\iota[H_0] \subseteq H_1$，令 $p \in H_0$。取满足 $p_{k+1} \leq p$ 的 $k < \omega$。那么 $\iota(p_{k+1}) = q'_k \in H_1$，因此 $\iota(p) \in H_1$。同理，也可以证明 $\iota^{-1}[H_1] \subseteq H_0$，所以 $\iota[H_0] = H_1$。

最后，我们证明 $P_0[H_0] \cap P_1 \cap V_\gamma \subseteq P_0 \cap P_1$。反设不然。于是，对于某个 $\mathbb{P}_0$-名称 $\tau \in P_0$，$\tau^{H_0} \in (P_1 \setminus P_0) \cap V_\gamma$。通过选择一个 E_0-极小的此类 τ，不妨设 $\tau^{H_0} \subseteq P_0$。令 $k < \omega$ 满足$\tau = d_{b_0(k)}$ 且$\tau^{H_0} = e_{b_1(k)}$。现在我们处于 Case 2中。如果 x_k 有定义，那么 p_{k+1} 强制 x_k 为

$d^{H_0}_{b_0(k)}$ 与 $e_{b_1(k)}$ 的对称差中的元素。如果 x_k 未定义，那么 p'_k 判定 $\check{}x_k \in d_{b_0(k)} = \tau$ 是否成立，从而得到 $\tau^{H_0} \in P_0$。无论哪种情况，我们都得到矛盾。对称地，我们可以证明 $P_0 \cap P_1[H] \cap V_\gamma \subseteq P_0 \cap P_1$。这就完成了该子断言的证明。□

固定 H_0 和 H_1，如子断言 3.7.3.1 中所述。令 $h \in \mathbb{R}$ 为编码

$$\{\langle i,j\rangle \in \omega\times\omega \mid H_0(i)\, E_0\, H_0(j)\} = \{\langle i,j\rangle \in \omega\times\omega \mid H_1(i)\, E_1\, H_1(j)\}.$$

注意，$h \in P_0[H_0] \cap P_1[H_1]$。根据 Σ^1_1-绝对性，在 $P_0[H_0]$ 和 $P_1[H_1]$中，τ都是博弈 $G^\sharp \restriction \mathbb{R}_\alpha$中玩家 II 的获胜策略。因此，玩家 I 出招 g和 h时，τ 的应对记作 $\langle g, h\rangle * \tau$，属于 $P_0[H_0] \cap P_1[H_1]$。在 $P_0[H_0]$中，h编码了一个长度为 a_0 的良序，而 $\langle g, h\rangle * \tau$编码了一个 $V = L$的 ω-模型（$\mathbb{R}_g$，$\mu^g_{<\alpha}$），其标准部分为 $>a_0$。因此，在 $P_0[H_0]$中，可以用一种简单的方式从 $\langle g, h\rangle * \tau$定义 A。于是 $A \in P_1[H_1]$，因为 $\tau(\mathbb{R}_\alpha, h) \in P_1[H_1]$。根据子断言 3.7.3.1 (2)，$A \in P_1$ 如所需。□

现在固定一个满足断言 3.7.3 中假设的 ω-模型 $\langle P, E\rangle$。

断言 3.7.4。设 $R \subseteq \kappa\times\kappa$ 是 $L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha})^{\langle P, E\rangle}$ 中的一个线性序。那么

$$R \text{ is wellorderd} \iff \langle P, E\rangle \models R \text{ is wellordered}.$$

证明。正向结论显然。为证明逆向结论，假设 R 是非良基的。由 Jensen 模型存在定理，存在一个 ω-模型 $\langle P', E'\rangle$，它是 $L_\gamma[x]$ 的端延拓，并且满足

$$\langle P', E'\rangle \models R \text{ is ill-founded}.$$

由断言 3.7.3，R 非良基的见证属于 $(\wp(\kappa)\cap L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}))^{\langle P, E\rangle} = (\wp(\kappa) \cap L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}))^{\langle P', E'\rangle}$，因此 R 在 $\langle P, E\rangle$ 中也非良基。□

由于 γ 是 $\langle P$ 中 $E\rangle$良基部分的序数高度，断言 3.7.4 蕴含 $\eta := (\kappa^+)^{L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha})^{\langle P, E\rangle}} < \gamma$。现在回忆一下，$\kappa$ 被定义为 N 中小于 γ 的最大基数。于是根据 Jensen 模型存在定理，存在另一个 ω-模型 $\langle P', E'\rangle$，它扩展了 $L_\gamma[x]$，使得

$$\langle P', E'\rangle \models \eta \text{ is not a cardinal in } L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}).$$

κ 与 η 之间的双射可以规范地编码为 κ 在 $(\wp(\kappa) \cap L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}))^{\langle P, E\rangle} = (\wp(\kappa) \cap L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha}))^{\langle P', E'\rangle}$中的一个子集，因此，根据断言 3.7.3，$\eta$ 也不是 $L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\alpha})^{\langle P, E\rangle}$ 中的基数。这与 η 的定义矛盾，并完成了定义 3.7 的证明。□

3.3. 关于决定公理$^+$ 与鼠标捕获的简短说明。

定义 3.8. 鼠标捕获（MC）是指：对于任意实数 x、$y \in \mathbb{R}$，若 x 可由 y 序数可定义，则存在一个 $\omega_1 + 1$-可迭代的可靠 y-小鼠$\mathcal{M}$，投射到 ω，使得 $x \in \mathcal{M}$。

核心模型归纳在 [Tra14] 中的论证可以推广，从而证明：

定理 3.9. 假设

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \mathsf{AD} + \forall\alpha < \omega_1\, (\mu_\alpha \text{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}).$$

那么，以下结论在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 中成立：

(1) $\mathrm{Lp}(\mathbb{R}) \models \mathsf{AD}^+ + \Theta = \theta_0 + \mathsf{MC}$,

(2) $\wp(\mathbb{R}) = \mathrm{Lp}(\mathbb{R}) \cap \wp(\mathbb{R})$，因此(
3) 决定公理$^+ + \Theta = \theta_0$。

虽然定义 3.9 的结论是证明定义 4.7 和定义 5.18 所必需的，但对于定义 1.7，我们无需证明定义 3.9，因为 MC 不成立所需的一致性强度高于定义 1.7 的大基数假设（参见 [Ste16, Ste08c]）。因此，我们省略定义 3.9 的证明。

4. Structure theory of the Solovay-type model

我们总结 Trang–Woodin 关于模型 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 的工作，见 [Tra13]。尽管本节没有包含任何新结果，但对于 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 的导出模型定理的无平稳塔证明是我们给出的。我们将在下一节使用此证明。

4.1. 导出模型定理。 回顾第 3 节开头引入的记号。

定义 4.1。 设 λ 是 *Woodin* 基数的极限，且低于 λ 的所有 *Woodin* 基数的序型为 λ。设 $G \subseteq \mathrm{Col}(\omega, <\lambda)$ 是 V-泛型。在 $V[G]$中，我们定义 $g\colon\ \lambda \to \wp_{\omega_1}(\mathbb{R})$ 如下：

$$g(\eta) = \bigcup_{\xi<\eta} \mathbb{R}^{V[G\restriction\xi]}$$

对所有 $\eta < \lambda$，其中 $G \restriction \xi = G \cap \mathrm{Col}(\omega, \xi)$。在 $V[G]$ 中，λ 处的导出 Δ-Solovay 模型 定义为

$$L(\mathbb{R}^*_G, \mu^G_{<\lambda}) := L(\mathbb{R}_g, \mu^g_{<\lambda}).$$

此外，对每个 $\alpha < \lambda$，我们记 $\mathcal{F}^G_\alpha = \mathcal{F}^g_\alpha$ 和 $\mu^G_\alpha = \mu^g_\alpha$。注意 $\lambda = \omega_1^{V[G]}$。

以下定理在 [Tra13], 中提出，但下面的证明是我们给出的。

定理 4.2 (Trang–Woodin [Tra13])。 假设存在 *Woodin* 基数的极限 λ，使得低于 λ 的 *Woodin* 基数的序型为 λ。设 $G \subseteq \mathrm{Col}(\omega, <\lambda)$ 是 V-泛型。那么在 $V[G]$中，以下结论成立：

(1) *Let $x \in \mathbb{R}^*_G$ and let $\eta < \lambda$ be such that $x \in \mathbb{R}^{V[G\restriction\eta]}$. If*

$$\exists B \in \wp(\mathbb{R}^*_G) \cap L(\mathbb{R}^*_G, \mu^G_{<\omega_1})\, (\mathrm{HC}^*_G, \in, B) \models \phi[x],$$

then

$$\exists B \in \mathrm{Hom}^{V[G\restriction\eta]}_{<\lambda}\, (\mathrm{HC}^{V[G\restriction\eta]}, \in, B) \models \phi[x].$$

(2) $L(\mathbb{R}^*_G, \mu^G_{<\lambda}) \models \mathsf{AD}^+ \wedge \forall \alpha < \omega_1\, (\mu^G_\alpha$ *is an ultrafilter on* $[\wp_{\omega_1}(\mathbb{R}^*_G)]^{\omega^\alpha})$.

证明。 根据 [Tra13, 引理 2.2.6], ，我们可以假设

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \forall \alpha < \omega_1\, (\mu_\alpha \text{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}). \tag{4.1}$$

设 $\pi\colon\ P \to V_\theta$ 是初等嵌入，其中 P 是可数传递的，θ 足够大，且 $\lambda \in \mathrm{ran}(\pi)$。令 $\lambda = \pi^{-1}(\lambda)$。那么 P 对于 Neeman 的泛型性迭代是足够可迭代的。固定一个连续的 $\in$-链 $\langle H_\xi \mid \xi < \omega_1\rangle$，其成员是 V_θ 的可数初等子模型，并满足 $P \in H_0$。对于每个 $\xi < \omega_1$，令

$$\mathbb{R}_\xi = \mathbb{R} \cap H_\xi,$$

令 M_ξ 为 H_ξ 的传递坍缩，并令 $\pi_\xi\colon\ M_\xi \to V_\theta$ 为反塌缩映射。现在，我们按如下方式构造泛性迭代序列 $\langle P_\xi \mid \xi \le \alpha\rangle$：

- $P_0 = P$。
- 若 $\xi < \alpha$，则令 $P_{\xi+1}$ 为使用 Woodin 基数 $\delta_{\xi+n}$ 在 $n < \omega$ 中的像对 P_ξ 进行的 $\mathbb{R}_{-1+\xi+1}$-泛性迭代，使得该迭代的每个初始段都属于 M_ξ。注意，整个迭代只属于 $M_{\xi+1}$。
- 若 $\xi \leq \alpha$ 是极限，则令 P_ξ 为 $\langle P_\eta \mid \eta < \xi\rangle$ 沿迭代映射的直接极限。
- 若 ξ 是 P_0 到 P_ξ的迭代嵌入下 λ 的像，我们便停止构造，并令 $\alpha = \xi$。

每个 P_ξ 都可以还原到 V_θ，因此它是良基的。照例，我们安排存在一个 P_α-泛型 $H \subseteq \mathrm{Col}(\omega, <\alpha)$，使得

$$\langle \mathbb{R}^*_{H\restriction\delta_\xi} \mid \xi < \alpha\rangle = \langle \mathbb{R}_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$$

因此 $\mathbb{R}^*_H = \mathbb{R}_\alpha$。

命题 4.2.1. *P_α 在 α 处的 Δ-Solovay 模型是 M_α中的 Δ-Solovay 模型的一个 L-初始段，即*

$$L(\mathbb{R}^*_H, \mu^H_{<\alpha})^{P_\alpha[H]} = L_{P_\alpha\cap\mathrm{Ord}}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})^{M_\alpha}.$$

证明. 注意到 $\alpha = \omega_1^{M_\alpha}$。令 $\langle \mathcal{F}_\beta \mid \overline{\beta} < \alpha\rangle = \pi_\alpha^{-1}(\langle \mathcal{F}_\beta \mid \beta < \omega_1\rangle)$，并记$\mu_\beta = \mathcal{F}_\beta \cap L(\mathbb{R}, \overline{\mu_{<\omega_1}})^{M_\alpha}$ 为 $\beta < \alpha_\circ$ 使用这一记号，

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})^{M_\alpha} = L_{M_\alpha\cap\mathrm{Ord}}(\mathbb{R}_\alpha, \overline{\mu}_{<\alpha}).$$

现在我们断言，对所有 $\beta < \alpha$、 $\mathcal{F}_\beta \overline{\subseteq} \mathcal{F}^H_\beta$均成立。为此，固定 $\beta < \alpha$ 以及由 $F \in \overline{M_\alpha}$ 见证的 $Z \in \mathcal{F}_\beta$。那么，对所有充分大的$\xi < \alpha$， $\mathbb{R}^*_{H\restriction\delta_\xi} = \mathbb{R}_\xi$ 在 F 下封闭，因此 $Z \in \mathcal{F}^H_\beta$。

由（4.1）$\bar{}$， μ_β 是$L_{M_\alpha\cap\text{序数类}}(\mathbb{R}_\alpha,\mu_{<\alpha})$中的一个超滤子。然后对 $\gamma \in P_\alpha\cap$序数类使用归纳法，得到

$$\mathcal{F}^H_\beta \cap L_\gamma(\mathbb{R}^*_H, \mu^H_{<\alpha}) = \overline{\mathcal{F}}_\beta \cap L_\gamma(\mathbb{R}_\alpha, \overline{\mu}_{<\alpha})$$

对所有 $\beta < \alpha$，因此

$$L_\gamma(\mathbb{R}^*_H, \mu^H_{<\alpha}) = L_\gamma(\mathbb{R}_\alpha, \overline{\mu}_{<\alpha}),$$

至此便完成了该命题的证明。 □

现在我们证明 (1)。为简单起见，假设 $x = \emptyset$ 且 $\eta = 0$。根据命题 4.2.1，(1) 的假设意味着存在某个 $B \in L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$，使得 $(\mathrm{HC}, \in, B) \models \phi$。我们称这样的集合 B 为一个 ϕ-见证。令 β_0 为最小的序数 β，使得在 $L_\beta(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 中存在一个ϕ-见证。此外，通过最小化序数参数，我们可以找到一个公式 $\psi(u, v)$ 和一个实数 $y \in \mathbb{R}$，使得 $(\mathrm{HC}, \in, B_0) \models \phi$，其中

$$B_0 = \{u \in \mathbb{R} \mid \langle L_{\beta_0}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}), \in, \mu_{<\omega_1}\rangle \models \psi[u, y]\}.$$

令 $\lambda' < \lambda$ 足够大，使得任意弱 λ'-齐次的实数集都属于 $\mathrm{Hom}_{<\lambda}$。此外，令 ρ 为大于 λ' 的最小 Woodin 基数。令 W 为满足以下条件的 2^ω-闭[9] 迭代树的集合（其元素为实数编码）：这些迭代树 $\mathcal{T}$ 建于 P 之上，长度为 $\omega+1$，且位于 λ'[10] 之上，并且 $\pi\mathcal{T}$ 是一棵（良基）迭代树。Windszus 定理（见 [Ste07，引理 1.1]）

[9]若对所有 $\alpha+1 < \mathrm{lh}(\mathcal{T})$，都有 $M^{\mathcal{T}}_\alpha \models$“Ult($V$, $E^{\mathcal{T}}_\alpha$) 对 2^ω-序列封闭”，则称迭代树 $\mathcal{T}$ 为 2^ω-*closed*。[10]若对所有 $\alpha+1 < \mathrm{lh}(\mathcal{T})$，都有 $\mathrm{crit}(E^{\mathcal{T}}_\alpha) > \lambda'$，则称迭代树 $\mathcal{T}$ 为 *above* λ'。

断言 W 是 $\pi(\lambda')$-齐次 Suslin 集。于是，以下断言推出 B 属于 $\mathrm{Hom}_{<\lambda}$，从而完成 (1) 的证明。

引理 4.2.2. 对于任意 $u \in \mathbb{R}$，以下条件等价：

- $u \in B_0$。
- 存在一个在 P 上的迭代树 $\mathcal{T}$，它位于 W 中；并且存在一个在 $M_\omega^\mathcal{T}$ 上泛型的 $g \subseteq \mathrm{Col}(\omega, i^\mathcal{T}_{0,\omega}(\rho))$，使得 $u, y \in M_\omega^\mathcal{T}[g]$，即在 $i^\mathcal{T}_{0,\omega}(\lambda)$ 处由 $M_\omega^\mathcal{T}[g]$ 导出的 *Solovay* 模型的某个初始段，具有一个 ϕ-见证；而满足此条件的最小初始段满足 $\psi[u, y]$。

证明。这与 [Ste07 中引理 2] 的证明方法相同。令 $u \in \mathbb{R}$。根据 Neeman 的泛型性迭代，我们可以取 $\mathcal{T} \in W$ 和 $g \subseteq \mathrm{Col}(\omega, i^\mathcal{T}_{0,\omega}(\rho))$，使得 $u, y \in M_\omega^\mathcal{T}[g]$。与上一个引理的证明一样，我们将 $M_\omega^\mathcal{T}$ 迭代到 N，使得由 N 导出的 Δ-Solovay 模型是 V 的某个初等子模型的 Δ-Solovay 模型的一个初始段。此外，存在一个从 N 到 V_θ 的实现映射。由该实现映射的初等性，(1) 的假设蕴含由 N 导出的 Δ-Solovay 模型具有一个 ϕ-见证。于是，$u \in B_0$ 当且仅当由 N 导出的 Δ-Solovay 模型中包含 ϕ-见证的最小初始段满足 $\psi[u, y]$。由从 $M_\omega^\mathcal{T}$ 到 N 的迭代嵌入的初等性，结论得证。□

(2) 可由 (1) 及其证明推出。关于 AD^+ 的证明，参见 [Ste09] or [Tra15 中引理 6.4 后的讨论、引理 2.4]。由此完成定义 4.2 的证明。□

4.2. **Prikry 类强迫**。在本小节中，我们始终假设

$$\text{(DetSol)} \qquad L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \mathsf{AD} + \forall \alpha < \omega_1 \, (\mu_\alpha \text{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha})$$

并在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 中工作。注意，根据定义 3.9，(DetSol) 蕴含 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 中的 $\mathsf{AD}^+ + \mathsf{MC}$。我们引入一种 Prikry 类强迫 $\mathbb{P}_\Delta$，它是对 [Tra13] 中偏序集 $\mathbb{P}_{\omega_1}$ 的轻微修改。这样的修改似乎是保证 $\mathbb{P}_\Delta$ 具有 Mathias 性质所必需的。不过，本小节中的所有结果都应归功于 Trang 和 Woodin。

对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$，我们定义

$$d_x = \{y \in \mathbb{R} \mid \mathrm{HOD}_x = \mathrm{HOD}_y\}.$$

这称为 x的-度。令 $\mathbb{D}$ 为所有 Σ^2_1-度的集合。Σ^2_1度按照 $d_x \leq d_y \iff x \in$HOD$_y$排序。对于每个 $\alpha < \omega_1$，令 $\mathbb{D}_\alpha$ 为由递增的 Σ^2_1-度构成的 $\omega^{1+\alpha}$-序列集合。Prikry 类强迫 $\mathbb{P}_\Delta$ 将添加一个由递增的 Σ^2_1-度构成的 ω_1^V-序列。我们将在第 5 节看到，这将产生一个小鼠，其中有一个 Woodin 基数的极限 λ，使得低于 λ 的 Woodin 基数的序型为 λ。为了定义 $\mathbb{P}_\Delta$，我们需要一个由定义在 $\mathbb{D}_\alpha$ 上的超滤子构成的序列 $\langle \nu_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$。为了定义这些超滤子，我们通过归纳法同时定义与 $\langle \nu_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 相关联的 Prikry 类强迫 $\mathbb{P}_\alpha$。以下定义是对 [Tra13] 中定义的轻微修改。

首先，注意到决定公理意味着由下式定义的 ν 上的锥滤子 $\mathbb{D}$

$$A \in \nu \iff \exists d \in \mathbb{D} \, \forall e \geq d \, (e \in A)$$

是一个超滤子。我们按 Ket11 第 4] 节中的定义，定义与 ν 相关联的（树）Prikry 类强迫 $\mathbb{P}_{\Sigma^2_1}$：令 T 为 $\omega \times$Ord 上的一棵树，它投射到一个通用 Σ^2_1 集。$\mathbb{P}_{\Sigma^2_1}$的条件是满足以下条件的对 $\langle p, U \rangle$：

- $p = \langle d_i \mid i < n\rangle \in \mathbb{D}^{<\omega}$ 使得对于所有满足 $i+1<n$ 的 i， $d_i \in L[T, d_{i+1}(0)]$，并且 d_i 在 $L[T, d_{i+1}(0)]$，中是可数的，且
- U： $\mathbb{D}^{<\omega} \to \nu$。

$\mathbb{P}_{\Sigma^2_1}$的序由 $\langle q, W\rangle \leq \langle p, U\rangle$ 定义，当且仅当

(1) $q \supseteq p$，(2) 对所有 $i \in \mathrm{dom}(q) \setminus \mathrm{dom}(p)$ $q(i) \in U(p \restriction i)$，(3) 对所有 $r \in \mathbb{D}^{<\omega}$， $W(r) \subseteq U(r)$。

对于任意泛型 $G \subseteq \mathbb{P}_{\Sigma^2_1}$，记

$$\vec{d}(G) = \bigcup \{p \mid \exists U\, (\langle p, U\rangle \in G)\}.$$

我们如下定义 $\mathbb{D}_0$ 上的超滤子 ν_0。对于所有 $A \subseteq \mathbb{D}_0$，令 $A \in \nu_0$，当且仅当对于任意 ∞-博雷尔编码 S（针对 A），对于几乎所有 $\sigma \in \wp_{\omega_1}(\mathbb{R})$，都有 μ_0，

$$L(\sigma)[T,S] \models \text{“}\exists \langle \emptyset, U\rangle \in \mathbb{P}_{\Sigma^2_1}\, (\langle \emptyset, U\rangle \Vdash_{\mathbb{P}_{\Sigma^2_1}} \vec{d}(\dot{G}) \in A_S),\text{”}$$

其中， G 是 $\mathbb{P}_{\Sigma^2_1}$上的泛型滤子的标准名称，而 $A_S \subseteq \mathbb{D}_0$ 是 S的泛型解释。[11] 为了验证 ν_0 定义良好，需要证明对于 μ_0-几乎所有的 σ， $L(\sigma)[T,S] \models$“决定公理$^+ \wedge\, \mathbb{R} = \sigma$”，并且 $A \in \nu_0$是否成立不依赖于 A的 ∞-博雷尔编码的选择。证明见 [Tra13] 或 [Tra15]。

现在归纳地假设 ν_α 已定义。接着，我们将 $\mathbb{P}_\alpha$ 定义为与 ν_α相关联的 Prikry 类强迫，方式与我们从ν定义 $\mathbb{P}_{\Sigma^2_1}$ 相同。此外，对于任意 $g = \langle \sigma_\xi \mid \xi < \omega^{\alpha+1}\rangle \in [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^{\alpha+1}}$，令 $\mathbb{R}_g =$ 为 ran(g)，并令$\mathcal{F}^g_\alpha$ 为所有满足以下条件的 $Z \subseteq [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R}_g)]^{\omega^\alpha}$ 的集合：对于除有限多个 $m < \omega$之外的所有，

$$\langle g(\omega^\alpha \cdot m + \xi) \mid \xi < \omega^\alpha\rangle \in Z.$$

使用这一记号，我们定义 $\mathbb{D}_{\alpha+1}$ 上的超滤子 $\nu_{\alpha+1}$：当且仅当对任意一个关于 A 的 ∞-Borel 编码 S，对于 $\mu_{\alpha+1}$-几乎所有 $g \in [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^{\alpha+1}}$，都有 $A \in \nu_{\alpha+1}$。

$$\mathrm{HOD}_{\mathbb{R}_g \cup \{\mathcal{F}^g_\alpha\}} \models \text{“}\exists \langle \emptyset, U\rangle \in \mathbb{P}^g_\alpha\, (\langle \emptyset, U\rangle \Vdash_{\mathbb{P}^g_\alpha} \vec{d}(\dot{G}) \in A_S),\text{”}$$

其中， $\mathbb{P}^g_\alpha$ 是与 $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}_g \cup \{\mathcal{F}^g_\alpha\}}$ 中定义的 $\mathcal{F}^g_\alpha$（的限制）相关联的 Prikry 类强迫，其关联方式与 $\mathbb{P}_\alpha$ 和 μ_α的关联方式相同。为证明 $\nu_{\alpha+1}$定义良好，需要证明对于 $\mu_{\alpha+1}$-几乎所有 g，$\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}_g \cup \{\mathcal{F}^g_\alpha\}}$满足决定公理 AD^+，$\mathbb{R} = \mathbb{R}_g$，并且 $\mathcal{F}^g_\alpha$（的限制）是一个超滤子。关于 $\alpha = 0$的情形的证明，见 [Tra13]。一般情形的证明类似。

对于归纳法的极限步骤，假设 α 是极限，并且 $\langle \nu_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 已定义。为定义 $\mathbb{P}_\alpha$ 和 ν_α，我们暂时固定共尾递增函数f_β： $\omega \to \beta$，其中 $\beta \leq \alpha$。若有限序列 $\langle d_i \mid i < n\rangle$ 满足对所有 $i < n$， $d_i \in \mathbb{D}_{f_\alpha(i)}$，则称其为相对于 f_β 的 $\mathbb{D}$-序列。$\mathbb{P}_\alpha$ 的条件是满足以下要求的对 $\langle p,\ U\rangle$：

- $p = \langle d_i \mid i < n\rangle$ 是相对于 f_α 的 $\mathbb{D}$-序列，使得对于所有满足$i+1<n$的 i，都有 $d_i \in L[T, d_{i+1}(0)]$，并且 d_i在 $L[T, d_{i+1}(0)]$中是可数的。
- U 是定义在所有相对于 f_α 的 $\mathbb{D}$-序列上的函数，使得对于所有$p \in$，dom(U) $U(p) \in \nu_{f_\alpha(|p|)}$</style}。

$\mathbb{P}_\alpha$的序定义为：$\langle q, W\rangle \leq \langle p, U\rangle$当且仅当

(1) $q \supseteq p$,

[11]例如参见 [Ket11]，以了解关于 ∞-Borel 编码概念的基本事实。

(2) 对所有 $i \in \mathrm{dom}(q) \setminus \mathrm{dom}(p)$ $q(i) \in U(p \restriction i)$，(
3) 对所有 $r \in \mathrm{dom}(U) = \mathrm{dom}(W)$， $W(r) \subseteq U(r)$。
对于任意 $g = \langle \sigma_\beta \mid \beta < \omega^\alpha \rangle \in [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}$，令 $\mathbb{R}_g = \mathrm{ran}(g)$；对于 $\beta < \alpha$，令 $\mathcal{F}^g_\beta$ 为所有满足以下条件的 $Z \subseteq [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R}_g)]^{\omega^\beta}$ 的集合：对几乎所有 $m < \omega$,

$$\langle g(f_\beta(m) + \xi)) \mid \xi < \omega^\beta \rangle \in Z.$$

我们通过如下方式定义 $\mathbb{D}_\alpha$ 上的超滤子 ν_α：当且仅当对于任意 ∞-博雷尔编码 S，对于 A，对几乎所有 μ_α($g \in [\wp_{\omega_1}\mathbb{R}]^{\omega^\alpha}$,

$$\mathrm{HOD}_{\mathbb{R}_g \cup \{\mathcal{F}^g_\beta \mid \beta < \alpha\}} \models \text{“}\mathsf{AD}^+ + \mathbb{R}_g = \mathbb{R} + \exists \langle \emptyset, U \rangle \in \mathbb{P}^g_\alpha \, (\langle \emptyset, U \rangle \Vdash_{\mathbb{P}^g_\alpha} \vec{d}(\dot{G}) \in A_S),\text{”}$$

其中，$\mathbb{P}^g_\alpha$ 是与 $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}_g \cup \{\mathcal{F}^g_\beta \mid \beta < \alpha\}}$ 中定义的（限制）$\langle \mathcal{F}^g_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$相关联的 Prikry 类强迫，其关联方式与 $\langle \nu_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$和 $\mathbb{P}_\alpha$ 的关联方式相同。可以证明，ν_α 与共尾函数 f_β: $\omega \to \beta$ 的选取无关，其中 $\beta \leq \alpha$。参见 Tra15 定理 1.2(2) 的证明 []。

我们终于准备好介绍主要的 Prikry 类强迫 $\mathbb{P}_\Delta$。

定义 4.3。若存在一个由可数序数构成的递增序列 $\langle \alpha_i \mid i < n \rangle$，使得对所有 $i < n$ 都有 $d_i \in \mathbb{D}_{\alpha_i}$，则称有限序列 $\langle d_i \mid i < n \rangle$ 为 $\mathbb{D}$-序列。$\mathbb{P}_\Delta$ 的条件是满足以下条件的有序对 $\langle p$、$U \rangle$:

- $p = \langle d_i \mid i < n \rangle$ 是一个 $\mathbb{D}$-序列，并且对于所有满足 $i + 1 < n$ 的 i， d_i 属于 $L[T, d_{i+1}(0)]$，且在那里是可数的。
- U 是定义在所有 $\mathbb{D}$-序列上的函数，并满足(1) 对所有 $p \in \mathrm{dom}(U)$ $U(p) \subseteq \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathbb{D}_\alpha$，以及(2) 对闭无界多个 $\alpha < \omega_1$， $U(p) \cap \mathbb{D}_\alpha \in \nu_\alpha$。

$\mathbb{P}_\Delta$ 的序由 $\langle q$、$W \rangle \leq \langle p$、$U \rangle$ 定义，当且仅当
(1) $q \supseteq p$，(2) 对所有 $i \in \mathrm{dom}(q) \setminus \mathrm{dom}(p)$， $q(i) \in U(p \restriction i)$，(3) $W(r) \subseteq U(r)$ 对所有 $\mathbb{D}$-序列 r。

对于任意泛型 $G \subseteq \mathbb{P}_\Delta$，我们定义

$$\vec{d}(G) = \bigcup \{p \mid \exists U \, (\langle p, U \rangle \in G)\}.$$

回忆一下，对于 κ 上的任意超滤子 $\mathcal{U}$ 和序列 $\langle \mathcal{V}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$，其中每个 $\mathcal{V}_\alpha$ 都是某个集合 X_α 上的超滤子，$\langle \mathcal{V}_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ 关于 $\mathcal{U}$ 的富比尼和记作 $\sum_{\mathcal{U}} \mathcal{V}_\alpha$，它是 $\bigcup_{\alpha<\kappa}$($\{\alpha\} \times X_\alpha$) 上定义的超滤子:

$$X \in \sum_{\mathcal{U}} \mathcal{V}_\alpha \iff \{\alpha < \kappa \mid \{A \in X_\alpha \mid \langle \alpha, A \rangle \in X\} \in \mathcal{V}_\alpha\} \in \mathcal{U}.$$

可以将 $\mathbb{P}_\Delta$ 看作与 $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbb{D}_\alpha \simeq \bigcup_{\alpha<\omega_1}(\{\alpha\} \times \mathbb{D}_\alpha)$ 上的超滤子 $\Sigma_{\mathcal{C}}\, \nu_\alpha$ 相关联的普里克里强迫，其中 $\mathcal{C}$ 是 ω_1 上的闭无界集滤子。注意，根据我们的假设（DetSol），$\mathcal{C}$ 和各个 ν_α 都是超滤子，因此 $\Sigma_{\mathcal{C}}\, \nu_\alpha$ 也是超滤子。

一个简单的论证表明，对于任意泛型 $G \subseteq \mathbb{P}_\Delta$，如果 ω_1^V 在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})[G]$ 中是可数的，那么 $\sup_{i<\omega} d_i(0) < \omega_1^V$。以下引理的证明可见于 [Ket11，定理 4.1]。基本相同的论证也见于[KW10，引理 6.18] 以及 [SW16，断言 6.38], 。

引理 4.4. 在假设（*DetSol*）的条件下， $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$中以下结论成立：设 $\langle p$, $U \rangle \in \mathbb{P}_\Delta$，且 ϕ 是强迫语言中的一个句子。那么存在$\langle p, W \rangle \leq \langle p, U \rangle$，使得

(1) $\langle p, W\rangle$ 决定 ϕ，并且(2) $\langle p, W\rangle$ 是由 $\langle p, U\rangle$ 和 ϕ 序数可定义的。

设 U 满足 $\langle \emptyset, U\rangle \in \mathbb{P}_\Delta$。若每当 q 是 p 的子序列时，$U(p) \subseteq U(q)$，我们就称 U 为一致的[12]。注意，对于任意 $\langle \emptyset, U\rangle$，都可以用可定义的方式找到一个一致的$W$，使得 $\langle \emptyset, W\rangle \leq \langle \emptyset, U\rangle$。以下引理在[Ket11，定理 4.2] 中得到证明，且本质上也见于 [SW16，引理 6.40], 。

引理 4.5 (Mathias 性质)。 假设 ***(DetSol)***。若序列 $\vec{d} = \langle d_i \mid i < \omega\rangle$ 满足：对于所有一致的 U，都有 $\exists i \forall j \geq i (d_j \in U(d \restriction j))$，那么 d 是 $\mathbb{P}_\Delta$-泛型的，且相对于$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$。

推论 4.6. 假设（***DetSol***）成立。那么， $\mathbb{P}_\Delta$-泛型序列在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 上的任意无限子序列，也是 $\mathbb{P}_\Delta$-泛型的，且定义在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 上。

证明。 设 d 是定义在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 上的 $\mathbb{P}_\Delta$-泛型序列，且 $\vec{e} = \langle e_i \mid i < \omega\rangle = \langle d_{k_i} \mid i < \omega\rangle$ 是 d 的一个无限子序列。由泛性可知，对于任意一致的 U，存在一个 $i_0 < \omega$，使得 $\forall j \geq i_0 (d_j \in U(\vec{d} \restriction j))$。于是对所有 $j \geq i_0$，

$$e_j = d_{k_j} \in U(\vec{d} \restriction k_j) \subseteq U(\vec{e} \restriction j),$$

因为 $\vec{e} \restriction j$ 是 $d \restriction k_j$ 的子序列，且 U 是一致的。根据定义 4.5， $\vec{e}$ 是 $\mathbb{P}_\Delta$-泛型的。□

可以采用 [Tra13, Tra15] 中针对 $L(\mathbb{R}, \mu)$ 的论证，证明如下结论：

定理 4.7 (Trang–Woodin, [Tra13])。 假设 ***(DetSol)*** 成立，且令 $G \subseteq \mathbb{P}_\Delta$ 在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 上泛型。那么在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})[G]$中，存在一个 ***ZFC*** 的真类模型 N，使得令 λ 为 N的所有 ***Woodin*** 基数的上确界，

- λ 是 N的所有 ***Woodin*** 基数的序型，并且
- 存在一个 N-泛型 $H \subseteq \mathrm{Col}(\omega, <\lambda)$，使得 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 是 N 在 λ 处通过 H导出的 Δ-***Solovay*** 模型。

由此得到的重要推论是，Δ-Solovay 模型中以下形式的 Σ_1 反射将在下一节中使用。

定理 4.8 (Trang–Woodin, [Tra13])。 假设 ***(DetSol)*** 成立。那么

$$\langle L_{\delta^2_1}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}), \in, \mu_{<\omega_1} \cap L_{\delta^2_1}(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})\rangle \prec_{\Sigma_1} \langle L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}), \in, \mu_{<\omega_1}\rangle.$$

这里，我们考虑集合论语言中带有一个关于 $\mu_{<\omega_1}$的额外谓词的 Σ_1-初等性。

证明。 由 [Tra15 定理 1.2], 的证明可知，这由定义 4.2 和定义 4.7 得出。□

5. A mouse from determinacy in the Solovay-type model

我们将在本节证明以下定理。

定理 5.1. 假设

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \mathsf{AD} + \forall \alpha < \omega_1 (\mu_\alpha \textit{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha})$$

并且 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 的尖点存在。那么存在一个 ω_1-可迭代的活跃小鼠$\mathcal{M}$ ，它具有一个由 $\mathcal{M}$的 ***Woodin*** 基数组成的极限 λ ，使得 $\mathcal{M}$ 的 λ 以下的 ***Woodin*** 基数的序型为 λ。

[12] 这一术语源自 [SW16] 中引理 6.40 的证明。

5.1. **Γ-适宜性与 A-可迭代性**。我们参照 [Ste08b, ST16] 中关于 Γ-适宜性和 A-可迭代性的定义，并稍作调整以适应我们的语境。具体而言，请参阅定义 5.4 中关于类型为 Δ 的 Γ-适宜小鼠的定义。 [RT18] 中也有类似的调整。

定义 5.2 ([ST16，定义 2.43])。

(1) 设 $\mathcal{M}$ 是某个传递 x上的 x-小鼠。若对于任意初等嵌入$\pi\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}$，满足 $x\in ran(\pi)$（以及 $\eta\in ran(\pi)$），我们都有 $\mathcal{M}$ 作为一个 $\pi^{-1}(x)$ -小鼠在（n，ω_1+1）-迭代策略下（在 $\pi^{-1}(\eta)$ 以上）可迭代，则称 $\mathcal{M}$ 在（n，ω_1+1）下可数可迭代（在 η 以上）。*(2)* 对于传递集 x，$Lp^\Gamma(x)$ 表示所有可数（ω，ω_1+1）-可迭代的 x-小鼠的堆叠，其中 $\mathcal{M}$ 完全健全且投射到 ω。*(3)* 设 $\mathcal{N}$ 是某个传递 x 上的 x-小鼠，且 $\eta=\mathcal{N}\cap Ord$。则 $Lp^\Gamma_+(\mathcal{N})$ 表示所有扩张 $\mathcal{N}$ 的 x-小鼠 $\mathcal{M}$ 的堆叠，其中 $\mathcal{M}=\mathcal{N}$ 或 $\mathcal{M}$ 是 η-健全的，$\rho^{\mathcal{N}}_{n+1}\le\eta<\rho^{\mathcal{N}}_n$ 对某个 $n<\omega$ 成立，并且 $\mathcal{M}$ 在迭代策略的见证下，作为一个 x- 小鼠在 η 以上可数（n，ω_1+1）-可迭代；这些迭代策略在可数迭代树上的限制属于 Γ。

定义 5.3. 设 Γ 是一个点类。对于 $x\in\mathbb{R}$，$C_\Gamma(x)$ 表示所有满足以下条件的 $y\in\mathbb{R}$ 的集合：y 在某个可数序数中是 $\Delta_\Gamma(x)$。[13] 对于传递可数集 x，$C_\Gamma(x)$ 表示所有满足以下条件的 $y\subseteq x$ 的集合：对于每个满射 $f\colon\ \omega\to x$，$f^{-1}[y]\in C_\Gamma(x_f)$，其中 $x_f\in\mathbb{R}$ 是通过 f 对 x 编码所得的编码。[14]

定义 5.4（参见 [ST16，定义 5.28]）。设 $x\in\mathbb{R}$，$\mathcal{P}$ 是一个可数的 x-小鼠，且 Γ 是一个点类。我们称 $\mathcal{P}$ 为 Γ-适宜的，如果令 $\langle\delta_\alpha\mid\alpha<\lambda\rangle$ 为 $\mathcal{P}$ 的 *Woodin* 基数及 *Woodin* 基数极限的递增枚举，则有：

（1）若 η 是 $\mathcal{P}$ 的强截点，则

$$\mathcal{P}|(\eta^+)^{\mathcal{P}}=\mathrm{Lp}^\Gamma_+(\mathcal{P}|\eta),$$

(2) 如果 $\eta\in\mathcal{P}\cap$序数类 在 $\mathcal{P}$中不是 *Woodin*，则

$$C_\Gamma(\mathcal{P}|\eta)\models\eta\ is\ not\ Woodin,$$

(3) 则

(a) λ 是后继序数，且 $\mathcal{P}\cap$序数类 $=$上确界 $_{i<\omega}(\delta^{+i}_{\lambda-1})^{\mathcal{P}}$，或

(b) λ 是极限序数，且 $\mathcal{P}\cap$序数类 $=$上确界$_{\alpha<\lambda}\delta_\alpha$.

(4) （小性假设）对任意 $\alpha<\lambda$、$\alpha<\delta_\alpha$。

现在令 $\mathcal{P}$ 为 Γ-适合的。我们将 $\langle\delta^{\mathcal{P}}_\alpha\mid\alpha<\lambda^{\mathcal{P}}\rangle$ 记作 $\mathcal{P}$中所有 *Woodin* 基数及 *Woodin* 基数极限的递增枚举。为方便起见，我们也将 $\delta^{\mathcal{P}}_{-1}=0$记作。我们称

若 $\lambda^{\mathcal{P}}$ 是后继序数，则称• $\mathcal{P}$ 具有后继类型，
若 $\lambda^{\mathcal{P}}$ 是极限序数，则称• $\mathcal{P}$ 具有极限类型，并且
• $\mathcal{P}$ 若 $\lambda^{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\cap$序数类，则具有类型 Δ[16]。

---

[13]Γ(x)表示将 Γ 相对化到 x，而 Δ_Γ(x)表示 Γ(x)的模糊部分，即Γ(x)∩ ˇΓ(x)。[14]也就是说，x_f 以递归方式对 $f^{-1}[\in\cap(x\times x)]$ 进行编码。[15]回顾一下，若给定的小鼠 $\mathcal{P}$上不存在序数临界点满足 crit(E) $\le\eta<$ lh(E)的（部分）扩张子 E，则称 η为 $\mathcal{P}$的一个 *strong cutpoint*。[16]字母 Δ 表示我们引入的长博弈。

此外，对任意 $\alpha < \lambda^{\mathcal{P}}$，令 $\mathcal{P}(\alpha)$ 为 $\mathcal{P}$ 的唯一 Γ-适用初始段 $\mathcal{Q}$，使得

- 如果 α 是 *0* 或后继序数，那么 $\lambda^{\mathcal{Q}} = \alpha + 1$，并且
- 如果 α 是极限序数，那么 $\lambda^{\mathcal{Q}} = \alpha$。

在以 [Ste08b、ST16], 为例的既有文献中，对 Γ-适宜的 $\mathcal{P}$ 所作的小性假设是 $\lambda^{\mathcal{P}} \leq \omega$。尽管我们在定义 5.4 中放宽了这一小性假设，但关于 Γ-适宜前鼠的基本论证在我们的情形中仍然适用。请注意，在 a Γ-适宜小鼠 $\mathcal{P}$中，即使采用我们的小性假设，每个 Woodin 基数仍是强截点。

定义 *5.5*（[*ST16*，定义 *5*.29]）。设 $\mathcal{P}$ 是一个可数精细结构模型， $\mathcal{T}$是其上的一个可数正规迭代树。那么，如果对每个极限$\lambda < lh(\mathcal{T})$， $\mathcal{T}$ 都是 Q-引导的，则存在 $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}([0,\lambda]_{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \restriction \lambda)$，且相系 $\Phi(\mathcal{T} \restriction \lambda)^\frown\langle \mathcal{Q}, \delta(\mathcal{T})\rangle$ 是 (ω, ω_1+1)- 可迭代的。[18] 对于点类 Γ，若有编码属于 Γ的迭代策略作见证，我们就称 $\mathcal{T}$是 Γ-引导的。

由于 Γ-适宜前鼠没有重叠的 Woodin 基数，标准的相系比较论证表明，至多存在一条共尾分支b 穿过 $\mathcal{T}$，使得 $\mathcal{T}^\frown b$ 是 Q-引导的。

定义 5.6 ([ST16，定义 5.31])。设 $\mathcal{P}$ 是某个 $x \in \mathbb{R}$ 的 Γ-适宜的 x-小鼠，且 $\mathcal{T}$ 是定义在 $\mathcal{P}$ 上的一棵极限长度的 Γ-引导迭代树。若 $\mathcal{Q}(\mathcal{T})$ 存在且是$\mathrm{Lp}^{\Gamma}_{+}(\mathcal{M}(\mathcal{T}))$ 的初始段，则称$\mathcal{T}$为 Γ-短的 。[19] 否则，称 $\mathcal{T}$ 为 Γ-极大的。

定义 5.7 ([ST16，定义 5.32])。设 $\mathcal{P}$ 是某个 $x \in \mathbb{R}$的 Γ-适宜的 x-小鼠。设 $\mathcal{T}$ 是定义在 $\mathcal{P}$上的一棵迭代树。若对于每个 $\alpha < \mathrm{lh}(\mathcal{T})$， $\mathcal{T}$都是 Γ-适宜性严格的，

(1) 若 $[0,\alpha]_{\mathcal{T}}$不发生下降，则 $M^{\mathcal{T}}_{\alpha}$是 Γ-适宜的。(2) 若 $[0,\alpha]_{\mathcal{T}}$发生下降，且存在树 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$ 使得 $\mathcal{T} \restriction \alpha+1 = \mathcal{U}^\frown\mathcal{V}$，其中$\mathcal{U}$ 的末模型为 $\mathcal{R}$， $b^{\mathcal{U}}$ 不发生下降，并且 $\mathcal{V}$ 基于 $[\delta^{\mathcal{R}}_{\beta-1}, \delta^{\mathcal{R}}_{\beta})$ 对某个 $\beta \in \mathcal{R} \cap$ 序数类成立，则不存在满足 $\lambda^{\mathcal{Q}} \geq 1+\beta$ 的 Γ- 适宜 $\mathcal{Q} \trianglelefteq M^{\mathcal{T}}_{\alpha}$。

我们称 Σ *for* $\mathcal{P}$ 的（部分）迭代策略是 Γ-适宜性严格的，如果经由 Σ 的每棵树都是 Γ-适宜性严格的。

定义 5.8 ([ST16, 定义 5.33])。设 $\mathcal{P}$ 是 Γ-适宜的。我们称 $\mathcal{P}$ 是Γ-短树可迭代的，如果对于 $\mathcal{P}$ 上每棵正规的 Γ-引导树 $\mathcal{T}$，

(1) $\mathcal{T}$ 是 Γ-适宜性严格的，(2) 如果 $\mathcal{T}$ 具有极限长度且是 Γ-短的，那么存在一条穿过 $\mathcal{T}$ 的共终良基分支b，使得 $\mathcal{T}^\frown b$ 是 Γ-引导的，(3) 如果 $\mathcal{T}$ 具有后继长度，那么 $\mathcal{T}$ 的每个一步假定正规延拓都是一棵迭代树。

我们按照 [Ste08b] 中的定义来定义（正规、几乎、局部） A-可迭代性，并采用 [ST16，定义 5.35]中指出的修改。为方便读者，我们在下面写出精确的定义。

---

[17]参见 [MSW20, 定义 2.4]，了解 $\mathcal{Q}(b, \mathcal{T})$ 的定义。[18]在我们的语境中， $\delta(\mathcal{T})$ 总是 $\mathcal{Q}$ 的强截点，因为我们只会遇到驯顺前鼠。在这种情况下， $\Phi(\mathcal{T} \restriction \lambda)^\frown\langle \mathcal{Q}, \delta(\mathcal{T})\rangle$ 的可迭代性等价于 $\mathcal{Q}$ 在 $\delta(\mathcal{T})$ 之上的可迭代性。[19]参见 c[MSW20, 定义 2.4]，了解 $\mathcal{Q}(\mathcal{T})$ 的定义。另外，按惯例， $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 的公共部分模型。

定义 5.9 ([Ste08b，定义 1.3])。 设 $A \subseteq \mathbb{R}$。设 $\mathcal{P}$ 是一个小鼠，且ν 是 $\mathcal{P}$的一个基数。若存在一个$\mathrm{Col}(\omega,\nu)$-名称$\tau \in \mathcal{P}$，使得对所有 $\mathcal{P}$- $g \subseteq$泛型， $\tau^g = A \cap \mathcal{P}[g]\,\mathrm{Col}(\omega,\nu)$，则称 $\mathcal{P}$ 捕获 A 于 ν 。设$\tau^{\mathcal{P}}_{A,\ \nu}$为这样一个唯一的标准名称。这里，若$\mathrm{Col}(\omega,\nu)$-名称 τ 满足以下条件，则称其为标准：

$$\tau = \{\langle p, \sigma\rangle \mid p \in \mathrm{Col}(\omega,\nu) \wedge \sigma \subseteq \mathrm{Col}(\omega,\nu) \times \{\check{n} \mid n \in \omega \wedge p \Vdash \sigma \in \tau\}\}.$$

定义 5.10 (参见 [Ste08b，定义 1。6])。 设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{P}$ 是某个 $y \in \mathbb{R}$的一个 Γ-适宜y-小鼠，在 $\mathcal{P}$的所有基数处捕获 A 。设 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{P}$上的一棵迭代树。若 $\mathcal{T}$是 Γ-适宜严格的，并且对于任意 $\alpha < \mathrm{lh}(\mathcal{T})$，我们称 $\mathcal{T}$遵循 A （相对于 Γ），

(1) 若 $[0,\alpha]_{\mathcal{T}}$不发生下降，则令 $\mathcal{R} = M^{\mathcal{T}}_{\alpha}$和 $i = i^{\mathcal{T}}_{0,\ \alpha}$, $\mathcal{R}$ 是 Γ-适宜的，并且在 $\mathcal{R}$ 的所有基数处捕获 A ，且

$$i(\tau^{\mathcal{P}}_{A,\nu}) = \tau^{\mathcal{R}}_{A,i(\nu)}$$

对 $\mathcal{P}$的所有基数 ν 都成立，且

(2) 若 α 是一个极限序数且 $[0,\alpha]_{\mathcal{T}}$ 发生下降，则 $\mathcal{T}$是 Γ-短的。

定义 5.11 ([ST16，定义 5。35], [Ste08b，定义 1。7])。 设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和$\mathcal{P}$ 是某个 $y \in \mathbb{R}$的一个 Γ-适宜 y-小鼠，在 $\mathcal{P}$的所有基数处捕获 A 。若 $\mathcal{P}$ 是 Γ-短树可迭代的，且满足以下条件之一，则称 $\mathcal{P}$ 是正规地 A-可迭代的 （相对于 Γ）：

(1) $\mathcal{P}$ 具有后继类型，并且每当 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{P}$上的正规 Γ引导迭代树时，

- $\mathcal{T}$ 尊重 A,
- 若 $\mathcal{T}$具有后继长度，则 $\mathcal{T}$的每个一步候选正规扩张都是一棵迭代树，

- 若 $\mathcal{T}$ 具有极限长度且是 Γ-短的，则存在一条经过 $\mathcal{T}$的共尾分支 b，使得 $\mathcal{T}^\frown b$ 是 Γ引导的，并且
- 若 $\mathcal{T}$是 Γ-极大的，则存在一条经过 $\mathcal{T}$的共尾、良基且不下降的分支 b ，使得 $\mathcal{T}^\frown b$ 尊重 A。

(2) $\mathcal{P}$ 具有极限类型，并且对于任意 $\alpha < \lambda^{\mathcal{P}}$，若 α 是*0*或后继，则$\mathcal{P}(\alpha)$ 按照***(1)***的意义是正规 A-可迭代的。

定义 5.12 ([Ste08b，定义 1。9])。 设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{P}$ 是某个 $y \in \mathbb{R}$ 的 Γ-适宜 y-小鼠，且在 $\mathcal{P}$ 的所有基数处捕获 A 。那么我们定义长度至多为 ω 的双人博弈 $G(A,\ \mathcal{P})$ 如下：

I	$\mathcal{T}_0$	$\mathcal{T}_1$	$\ldots$
II	b_0	b_1	

- 在第一轮中，玩家 *I* 必须在 $\mathcal{P}$ 上进行一棵 Γ-极大、由 Γ 引导的正规迭代树 $\mathcal{T}_0$ 。随后，玩家 *II* 必须选择一条经过 $\mathcal{T}_0$ 、共尾、良基且不下降的分支 b_0 ，使得 $\mathcal{T}_0{}^\frown b_0$ 遵从 A。
- 对于任意 $i < \omega$，在第 $i+1$ 轮中，玩家 *I* 必须在 $M^{\mathcal{T}_i}_{b_i}$ 上进行一棵正规、极大的、由 Γ 引导的树 $\mathcal{T}_{i+1}$ ；玩家 *II* 必须选择一条经过 $\mathcal{T}_{i+1}$ 、共尾、良基且不下降的分支 b_{i+1} ，使得 $\mathcal{T}_{i+1}{}^\frown b_{i+1}$ 遵从 A。

第一个违反规则的玩家将输。且仅当博弈持续 ω 多个回合时，玩家 *II* 才获胜。

我们称 $\mathcal{P}$ 是几乎 A可迭代的 （相对于 Γ），如果以下条件之一成立：

(1) $\mathcal{P}$ 具有后继类型，且玩家 *II* 在 $G(A,\mathcal{P})$中有获胜策略。(2) $\mathcal{P}$ 具有极限类型，且对于任意 $\alpha<\lambda^{\mathcal{P}}$，如果 α 为 *0* 或后继类型，那么玩家 *II* 在 $G(A,\mathcal{P}(\alpha))$中有获胜策略。

定义 5.13. 设 $A\subseteq\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{P}$ 是某个 $y\in\mathbb{R}$的一个 Γ-适宜 y-小鼠，并且在 $\mathcal{P}$的所有基数处捕获 A。设 $\alpha<\lambda^{\mathcal{P}}$ 为 *0* 或一个后继序数。于是我们定义

$$\gamma^{\mathcal{P}}_{A,\alpha}=\sup(\mathrm{Hull}^{\mathcal{P}}_1(\{\tau^{\mathcal{P}}_{A,(\delta^{+i}_\alpha)^{\mathcal{P}}}\mid i<\omega\})\cap\delta^{\mathcal{P}}_\alpha),$$
$$H^{\mathcal{P}}_{A,\alpha}=\mathrm{Hull}^{\mathcal{P}}_1(\gamma^{\mathcal{P}}_{A,\alpha}\cup\{\tau^{\mathcal{P}}_{A,(\delta^{+i}_\alpha)^{\mathcal{P}}}\mid i<\omega\}).$$

这里，船体是语言为 y-小鼠的未塌缩 Σ_1 船体。

定义 5.14 ([Ste08b，定义 1。11])。设 $A\subseteq\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{P}$ 是某个 $y\in\mathbb{R}$的一个 Γ-适宜 y-小鼠，并且在 $\mathcal{P}$的所有基数处捕获 A。设 $\alpha<\lambda^{\mathcal{P}}$ 为 *0* 或一个后继序数。

(1) 若有限序列 $s=\langle(\mathcal{P}_i,\mathcal{T}_i,\pi_i)\mid i<n\rangle$ 在 α 处是 A-良好的（相对于Γ），则 $\mathcal{P}_0=\mathcal{P}$ 成立，并且对所有 $i<n$，以下条件均成立：*(a)* $\mathcal{P}_i$ 几乎是 A-可迭代的；*(b)* $\mathcal{T}_i$ 是基于窗口 $(\delta^{\mathcal{P}_i}_{\alpha-1},\delta^{\mathcal{P}_i}_\alpha)$ 的、定义在 $\mathcal{P}_i$ 上的正规迭代树，其末模型为 $\mathcal{P}_{i+1}$，[20]*(c)* $\mathcal{T}_i$ 是 Γ-引导的，或者 $\mathcal{T}_i$ 具有如下形式：对于某个 Γ-极大Γ-引导迭代树 $\mathcal{T}_i^-$ 以及一条穿过 $\mathcal{T}_i^-$ 的共尾分支 b_i，$\mathcal{T}_i$ 为 $\mathcal{T}_i^-{}^\frown b_i$；*(d)* $\mathcal{T}_i$ 尊重 A；*(e)* 穿过 $\mathcal{T}_i$ 的主分支 b_i 不发生下降，并且 $\pi_i\colon\mathcal{P}_i\to\mathcal{P}_{i+1}$ 是沿着 b_i的迭代嵌入。

(2) 我们称一个 A-良序列 s 在 α 处产生 $\pi\colon\mathcal{P}\to\mathcal{Q}$，当且仅当 $\mathcal{Q}=\mathcal{P}_n$ 且 $\pi=\pi_{n-1}\circ\cdots\circ\pi_0$。(3) $\mathcal{P}$ 在 α 处是局部 A-可迭代的（相对于 Γ），如果每当 s 和 t 在 α处是A-良序列，分别产生 $\pi\colon\mathcal{P}\to\mathcal{Q}$和 $\sigma\colon\mathcal{P}\to\mathcal{R}$，并且$\mathcal{Q}(\alpha)=\mathcal{R}(\alpha)$时，都有 $\pi\restriction H^{\mathcal{P}}_{A,\alpha}=\sigma\restriction H^{\mathcal{P}}_{A,\alpha}$。

定义 5.15 ([Ste08b，定义 1。12])。设 $A\subseteq\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{P}$ 是某个 $y\in\mathbb{R}$的 Γ-适宜y-小鼠，且在 $\mathcal{P}$的所有基数处捕获 A。如果满足以下条件之一，我们称 $\mathcal{P}$ 是A-可迭代的（相对于 Γ）：

(1) $\mathcal{P}$ 具有后继类型，且玩家 *II* 在 $G(A,\mathcal{P})$ 中有一个获胜策略，使得每当 $\mathcal{Q}$ 是根据该策略对 $\mathcal{P}$ 进行的不降落迭代时，$\mathcal{Q}$ 在所有 $\alpha<\lambda^{\mathcal{Q}}$处都是局部 A-可迭代的。(2) $\mathcal{P}$ 具有极限类型，且对于任意 $\alpha<\lambda^{\mathcal{P}}$，如果 α 是 *0* 或者是后继序数，那么$\mathcal{P}(\alpha)$ 按照 *(1)* 的意义是 A-可迭代的。

注 5.16。几乎 A-可迭代性是 [SW16]，中 f-可迭代性的类比，而$\vec{}$$A$-可迭代性是如上定义的，对应于 [SW16] 中的强 f-可迭代性。

从现在起，我们用 Γ 表示 $L(\mathbb{R},\langle\mu_\alpha\mid\alpha<\omega_1\rangle)$ 中的点类 Σ^2_1。我们使用 Prikry 型强迫 $\mathbb{P}_\Delta$，以泛型方式添加一个在 $L(\mathbb{R},\langle\mu_\alpha\mid\alpha<\omega_1\rangle)$ 上的、类型为 Δ 的 Γ-适宜前鼠。我们首先需要引入相关记号。设 a 是一个可数传递集。设 $x\in\mathbb{R}$ 满足：存在一个关于 x 实数递归的对象，其编码为 a。对于任意实数 z，我们用 $\mathcal{P}_z$ 表示由 z 编码的 a-前鼠。设 $\mathcal{F}^x_a$ 是直接

[20]也就是说，$\mathcal{T}_i$ 基于 $\mathcal{P}_i|\delta^{\mathcal{P}_i}_\alpha$，并且 $\mathcal{T}_i$ 中使用的所有扩张子的临界点都高于 $\delta^{\mathcal{P}_i}_{\alpha-1}$。

极限系统，由某个 $z \leq_T x$ 的 $\mathcal{P}_z$ 组成，其中 $z \leq_T x$ 是一个 Γ-短树可迭代的Γ-适宜 a-前鼠，且具有 $\lambda^{\mathcal{P}_z} = 1$。我们将 $\mathcal{Q}^{x,\ulcorner a \urcorner}$ 定义为 $\mathcal{F}^x_a$ 中所有 a-前鼠的同时比较与 $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq_T x\}$-泛型性迭代的直接极限。令 $\mathcal{Q}^x_a =$ 为 $\mathbf{Lp}^{\Gamma}_{+}(\mathcal{Q}^{x,\ulcorner a \urcorner})$，并令 δ^x_a 为 $\mathcal{Q}^x_a$ 的最大基数。由于 $\mathcal{Q}^x_a$ 仅取决于 a 和 x 的图灵度，对于图灵度 d，我们也用 $\mathcal{Q}^d_a$ 表示它。

¯固定如上所述的 a，以及一个序列 $d = \langle d_i \mid i < \omega \rangle$，它在$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 上是 $\mathbb{P}_\Delta$-泛型的。对每个 $i < \omega$，取满足 $d_i \in \mathbb{D}_{\alpha_i}$ 的 α_i。我们如下定义序列 $\langle \mathcal{Q}^i_\beta \mid i < \omega \wedge \beta \leq \omega^{1+\alpha_i} \rangle$：

$$\begin{aligned} Q^0_0 &= \mathcal{Q}^{d_0(0)}_a, \\ Q^0_{\beta+1} &= \mathcal{Q}^{d_0(\beta+1)}_{Q^0_\beta}, \\ Q^0_\gamma &= \bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{Q}^0_\beta \quad \text{if } \gamma \leq \omega^{1+\alpha_0} \text{ is limit}, \end{aligned}$$

并且对于 $i < \omega$,

$$\begin{aligned} Q^{i+1}_0 &= \mathcal{Q}^{d_{i+1}(0)}_{\mathcal{Q}^1_{\omega^{1+\alpha_i}}}, \\ Q^{i+1}_{\beta+1} &= \mathcal{Q}^{d_{i+1}(\beta+1)}_{Q^{i+1}_\beta}, \\ Q^{i+1}_\gamma &= \bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{Q}^{i+1}_\beta \quad \text{if } \gamma \leq \omega^{1+\alpha_{i+1}} \text{ is limit}. \end{aligned}$$

然后我们定义

$$M^{\vec{d}}(a) = \bigcup \{ \mathcal{Q}^i_\beta \mid i < \omega \wedge \beta \leq \omega^{1+\alpha_i} \}.$$

此外，对于任意 $i < \omega$ 和 $\beta \leq \omega^{1+\alpha_i}$，我们定义

$$\delta^i_\beta = \begin{cases} \text{the largest cardinal of } \mathcal{Q}^i_\beta & \text{if } \beta \text{ is either 0 or successor}, \\ \mathrm{Ord} \cap \mathcal{Q}^i_\beta & \text{if } \beta \text{ is limit}. \end{cases}$$

以下命题可以用与证明 [SW16 第 6.6] 小节和 [Tra15 引理 2.6] 类似的方法证明。这里需要用到定义 3.9，尤其是 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 中的 MC。

命题 5.17. 假设

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \mathsf{AD} + \forall \alpha < \omega_1 \, (\mu_\alpha \textit{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha})$$

并令 Γ 为 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 中的点类 Σ^2_1。令 a 为可数传递的。那么对于任何在 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$ 上泛型的 $\mathbb{P}_\Delta$-序列 $\vec{d}$，$M^{\vec{d}}(a)$ 是一个类型为 Δ的 Γ-适宜小鼠。

5.2. **主要论证**。由于以下引理的变体已在许多论文中得到证明（例如 [Tra15，第 3], [SW16 节，第 7], [Ste08b 节，引理 1.12.1] 以及[ST16，引理 5.38]），这里我们只给出证明概要。

引理 5.18. 假设

$$L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1}) \models \mathsf{AD} + \forall \alpha < \omega_1 \, (\mu_\alpha \textit{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}).$$

令 Γ 为 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$中的点类 Σ^2_1。令 $A \subseteq \mathbb{R}$ 是从 $L(\mathbb{R}, \mu_{<\omega_1})$中的某个$x \in \mathbb{R}$ 序数可定义的。那么，对于一个 $y \geq_T x$锥，存在一个类型为 Δ的 A-可迭代的 Γ-适宜y-小鼠。

证明。我们将结构 $\langle L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})\in,\mu_{<\omega_1}\rangle$ 记为 M；对于任意序数α， $M|\alpha$ 表示 $\langle L_\alpha(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})\in,\mu_{<\omega_1}\cap L_\alpha(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})\rangle$。在整个证明过程中，我们都在 M中工作。注意， $M\models$ 决定公理$^+ +\mathsf{DC}+\mathsf{MC}$。

我们称 $A\subseteq\mathbb{R}$ 为 Γ-坏的，如果它是定义 5.18 中命题的反例，其中 $\Gamma=(\Sigma^2_1)^M$。为导出矛盾，假设存在一个 Γ-坏的实数集，它可由实数 x （在 M 中）序数定义。于是存在$\xi>\Theta$ 使得

$$M|\xi\models \mathsf{ZF}^- + \text{决定公理}^+ + \mathsf{DC} + \mathsf{MC}$$
$$+\text{“存在一个 }\Gamma\text{-坏的实数集，它可由 }x\text{ 序数定义。”}$$

由 Σ_1 在 $L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})$ 中的反射（定义 4.8），存在一个 $\xi<\delta^2_1$ 和一个点类Γ，使得令 $\overline{[\alpha,\beta]}$ 为包含 ξ 和 $\Gamma=(\Sigma^2_1)^{M|\alpha}$ 的 M 的 Σ_1-间隙，则

$$M|\xi\models \mathsf{ZF}^- + \mathsf{AD}^+ + \mathsf{DC} + \mathsf{MC}$$
$$+\text{ “there is a }\overline{\Gamma}\text{-bad sets of reals that is ordinal definable from }x,\text{”}$$

其中我们以类似的方式定义 Γ-坏性。我们可以假设 ξ 是满足条件的最小者。于是 $\beta=\xi+1$，且 $[\alpha,\xi+1]$ 是 M的一个（弱） Σ_1-间隙。固定 $A\in\wp(\mathbb{R})\cap M|\xi$使得

$$M|\xi\models\text{“}A\text{ is }\overline{\Gamma}\text{-bad and ordinal definable from }x.\text{”}$$

注意，由于 A-可迭代性的绝对性， A 在 M中确实是 Γ-坏的。我们将通过论证 A 不是 Γ-坏的来导出矛盾。

根据 [Ste08a], 中的结果，存在一个自证系统 $\mathcal{A}=\langle A_i\mid i<\omega\rangle$，它封闭了 Γ 的包络，且满足 $A_0=A$。注意，每个 A_i 都属于 $M|\beta$。令$z_0\leq_T z_1\leq_T z_2$ 为满足以下条件的实数:

- $x\leq_T z_0$ 并且在 $M|\xi$中，对于任意 $z\geq_T z_0$，不存在类型为 Δ的 A-可迭代 Γ-适宜z-小鼠。（我们在 $M|\xi$ 中使用决定公理来找到这样的 z_0。）
- 对于任意 $i<\omega$，存在 $\zeta<\Theta^{M|\beta}$，使得 A_i 可由 z_1 在$M|\zeta$上定义。

- 由于 $C_\Gamma(z_1)\subsetneq C_\Gamma(z_1)$，MC（在 M中）蕴含存在一个 z_1-小鼠$\mathcal{M}\triangleleft\mathrm{Lp}^\Gamma(z_1)$，使得 $\rho^{\mathcal{M}}_\omega=\omega$且 $\mathcal{M}\not\triangleleft\mathrm{Lp}^\Gamma(z_1)$。令 $\mathcal{M}$为满足此条件的最小初始段，并令 $z_2\geq_T z_1$ 编码 $\mathcal{M}$。

此外，设 $\Sigma_{\mathcal{M}}$ 是 Γ 中针对 $\mathcal{M}$ 的（ω，ω_1）-迭代策略。由于 M 中成立决定公理，它可以扩展为（ω，ω_1+1）-迭代策略。设 $\Gamma'\subsetneq\Delta_\Gamma$ 是一个良好点类，使得 $\Delta_\Gamma\subseteq\Gamma'$ 且 $\mathcal{A}$，$\Sigma_{\mathcal{M}}\in\Delta_{\Gamma'}$。根据 [Ste08c，定理 10.3]，存在一个实数 $z\geq_T z_2$，使得（$\mathcal{N}^*_z$，δ_z，Σ_z）苏斯林-余苏斯林捕获 $\mathcal{A}$ 及 $\Sigma_{\mathcal{M}}$的编码。在这里， $\mathcal{N}^*_z$是一个具有 $z\in\mathcal{N}^*_z$ 的可迭代粗结构，δ_z 是 $\mathcal{N}^*_z$的唯一 Woodin 基数，而 $\Sigma_z\in\Delta_{\Gamma'}$ 是针对 $\mathcal{N}^*_z$ 的迭代策略。

设 κ_z 是 $\mathcal{N}^*_z$ 的最小 $<\delta_z$-强基数。在 [Tra15，定理 3.13] 以及 [SS15，引理 2.4], 的证明中，证明了在 $\mathcal{N}^*_z$ 中， κ_z 是序数 η 的极限，使得

$$\mathrm{Lp}^{\overline{\Gamma}}(V^{\mathcal{N}^*_z}_\eta)\models\text{“}\eta\text{ is a Woodin cardinal.”}$$

令 $\langle\eta_i\mid i<\kappa_z\rangle$ 为所有此类序数 η 及其极限的递增枚举。令 $\lambda<\kappa_z$ 为满足 $\eta_\xi=\sup_{i<\xi}\eta_i$的最小序数。现在我们按如下方式定义一个前鼠序列 $\langle\mathcal{N}_i\mid i<\lambda\rangle$：

- $\mathcal{N}_0$ 是 $V^{\mathcal{N}^*_z}_{\eta_0}$ 中的极大完全背景化构造的输出。

对于任意 $i<\lambda$， $\mathcal{N}_{i+1}$ 都是 $V^{\mathcal{N}_i^*}_{\eta_{i+1}}$ 中在 $\mathcal{N}_i$ 之上的极大完全背景化构造的输出（使用临界点高于 η_i的扩张子）。

• 对任意极限 $i<\lambda$, $\mathcal{N}_i=\bigcup_{j<i}\mathcal{N}_j$。

利用上一小节中引入的 Prikry 型强迫 $\mathbb{P}_\Delta$ ，可以仿照 [Tra15, 定理 3.13]_ 中的证明，证明 $\mathcal{N}_\lambda$ 是一个类型为 Δ 、 Γ-适用的小鼠，见证为 $\langle\eta_i\mid i<\lambda\rangle$。此外，存在某个 $\mathcal{W}^*\trianglelefteq \mathrm{Lp}^\Gamma(\mathcal{N}_\lambda)$，使得 $\rho_\omega^{\mathcal{W}^*}<\mathcal{N}_\lambda\cap$序数类。令 $\mathcal{W}^*$ 为满足此条件的最小初始段。于是， [SW16, 命题 7.5] 的证明给出如下结果。

命题 5.18.1. *$\mathcal{W}^*=\mathcal{J}_1(\mathcal{W})$[21] 存在某个 $\mathcal{W}$，使得 $\mathcal{W}$ 在某个 λ 处导出的 Δ-Solovay 模型满足“ZF$^-$+存在一个 Γ-坏的实数集”，且 $\mathcal{W}$ 的任何真初始段都不具有此性质。*

令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{W}$ 的逐点可定义包，并令 Λ 为通过将 Γ中 $\mathcal{W}$ 的迭代策略拉回而诱导出的迭代策略。对于给定的小鼠，其 Δ-适宜初始段指唯一一个既是 Γ-适宜小鼠、又属于类型 Δ的初始段。

命题 5.18.2。 *$\mathcal{N}$ 的 Δ-适宜初始段 $\mathcal{P}$ 由 Λ见证为 A-可迭代。*

证明。我们只证明，任何根据 Λ、基于 $\mathcal{P}$ 的正规迭代树都与 A相容，因为证明的其余部分不需要任何新思路。假设 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{N}$上的一棵正规树，其末模型为 $\mathcal{N}'$，并令 $i\colon \mathcal{N}\to\mathcal{N}'$为迭代映射， $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{N}'$的 Δ-适宜初始段，

$$i(\tau^{\mathcal{P}}_{A,\nu})\neq\tau^{\mathcal{Q}}_{A,i(\nu)}$$

其中 ν是 $\mathcal{P}$的某个基数。令 $\pi\colon \overline{M}\to M|\xi$为一个初等映射，使得 M是可数传递的，且 $\mathcal{N},\mathcal{T},S,T\in\mathrm{ran}(\pi)$，其中 S和 T是分别投射到一个普适 Γ 集及其补集的树。我们还可以假设 A 可由M中的一个实数序数可定义。现在，分别使用高于 ν 和 $i(\nu)$的 Woodin 基数，对 $\mathcal{N}$和 $\mathcal{N}'$进行 $\mathbb{R}^M$-泛性迭代。我们可以安排存在一个初等嵌入 $j\colon \mathcal{W}\to\mathcal{W}'$，连接 $\mathbb{R}^M$-泛性迭代中 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}'$ 的末模型 $\mathcal{W},\mathcal{W}'$（参见 SW16 引理 7.7]的证明）。根据命题 5.18.1， $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{W}'$ 的导出 Δ-Solovay 模型相同，因此由 j的初等性可知 $\overline{j}(\tau^{\mathcal{W}}_{A,\nu})=\tau^{\mathcal{W}'}_{A,j(\nu)}$。结合 i与 j之间的一致性，可得

$$i(\tau^{\mathcal{P}}_{A,\nu})=j(\tau^{\mathcal{W}}_{A,\nu})=\tau^{\mathcal{W}'}_{A,j(\nu)}=\tau^{\mathcal{Q}}_{A,i(\nu)},$$

这与 $\mathcal{Q}$ 和 ν 的选取矛盾。 □

命题 5.18.2 意味着 A 不是 Γ-坏的，这与 A 的选取矛盾。由此完成定义 5.18 的证明。□

定义 5.19。 设 $\mathcal{P}$ 是某个 $y\in\mathbb{R}$ 的 Γ-适宜 y-小鼠，类型为 Δ 。我们递归地对 $i<\omega$ 定义 $\eta_i^{\mathcal{P}}$，令其为 $\eta_0^{\mathcal{P}}=\delta_0^{\mathcal{P}}$ 和 $\eta_{i+1}^{\mathcal{P}}=\delta^{\mathcal{P}}_{\eta_i^{\mathcal{P}}+1}$。（注意，$\mathcal{P}\cap$序数类 $=$上确界$_{i<\omega}\eta_i^{\mathcal{P}}$。）此外，设 $\vec{A}=\langle A_i\mid i<\omega\rangle$ 是一个实数集序列。若对所有 $k<\omega$， $\mathcal{P}|\eta_k^{\mathcal{P}}$ 都是$\left(\bigoplus_{i<k}A_i\right)$-可迭代的，则称 $\mathcal{P}$ 是 $\vec{A}$-可迭代的 。

以下是定义 5.18 的一个简单推论：

[21]这意味着 $\mathcal{W}^*$ 是 $\mathcal{W}\cup\{\mathcal{W}\}$ 的初级闭包。

推论 5.20。假设

$$L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})\models \mathsf{AD}+\forall\alpha<\omega_1\,(\mu_\alpha \textit{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha}).$$

令 Γ 为 L 中的点类 Σ^2_1（$\mathbb{R}$，$\mu_{<\omega_1}$）。令 $\vec{A}=\langle A_i\mid i<\omega\rangle$ 为一个 ω-实数集序列，它在 M 中可由 $x\in\mathbb{R}$ 序数定义。于是，对一个 $y\geq_T x$ 锥，存在一个 A-可迭代的 Γ-适宜 y-小鼠，其类型为 Δ。

下一个引理由 [Ste08a] 中的论证得出。

引理 5.21。假设

$$L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})\models \mathsf{AD}+\forall\alpha<\omega_1\,(\mu_\alpha \textit{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha})$$

并且 L（$\mathbb{R}$，$\mu_{<\omega_1}$）的尖点存在。那么 $\wp$（$\mathbb{R}$）$\cap L$（$\mathbb{R}$，$\mu_{<\omega_1}$）是弱尺度化的。

注 5.22。*Aguilera* 与第一作者近期在 [AG] 的工作可以自然地加以运用，从而证明在定义 *5.21* 的假设下，

$$\wp(\mathbb{R})\cap L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})=\mathfrak{D}_\Delta(<\omega^2\text{-}\mathbf{\Pi}^1_1),$$

其中，$\mathfrak{D}_\Delta$ 是与 G_Δ对应的博弈量词。于是，*Martin* 的尺度传播定理 [Mar08] 的证明蕴含 $\wp(\mathbb{R})\cap L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})$ 是弱尺度化的，因此这就给出了定义 *5.21* 的另一种证明。细节留给读者。

引理 5.23. 假设

$$L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})\models \mathsf{AD}+\forall\alpha<\omega_1\,(\mu_\alpha \textit{ is an ultrafilter on } [\wp_{\omega_1}(\mathbb{R})]^{\omega^\alpha})$$

并且 $L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})$ 的尖点存在。令 Γ 为 $L(\mathbb{R},\mu_{<\omega_1})$中的点类 Σ^2_1。那么，对于一个 y的图灵锥，存在一个 Γ-适合的 y-小鼠，其类型为 Δ，并且是通常ω_1-可迭代的。

证明。根据定义 5.21，存在一个自证系统 $\vec{A}=\langle A_i\mid i<\omega\rangle$，它封闭了 Γ的包络。令 $x\in\mathbb{R}$ 满足：每个 A_k 都能在M中由 x 序数可定义。对于任意 $j<\omega$，记作$A'_j=\bigoplus_{i<j}A_i$。根据定义 5.20，对于某个 $y\geq_T x$，存在一个类型为 Δ 的 y-小鼠 $\mathcal{P}$，它是 $\vec{A}$-可迭代的且Γ-适合。令

$$\mathcal{Q}=\mathrm{cHull}^{\mathcal{P}}_1(\eta^{\mathcal{P}}_0\cup\{\tau^{\mathcal{P}}_{A'_j,(\eta^{\mathcal{P}+i})^{\mathcal{P}}}\mid i,j<\omega\})$$

并令 $\pi\colon\ \mathcal{Q}\to\mathcal{P}$ 为反塌缩映射。根据自我论证系统的凝聚性质（参见 [SS14，定理 5.4.3]），$\mathcal{Q}$ 是一个类型为Δ 的 Γ-适宜 y-小鼠，并且

$$\pi(\tau^{\mathcal{Q}}_{A'_j,(\eta^{\mathcal{Q}+i})^{\mathcal{Q}}})=\tau^{\mathcal{P}}_{A'_j,(\eta^{\mathcal{P}+i})^{\mathcal{P}}}$$

对所有 i，$j<\omega$均成立。此外，$\mathcal{Q}$ 由 $\mathcal{P}|\eta^{\mathcal{P}}_k$的拉回策略见证，是 A-可迭代的，并具有以下关键性质：对所有 $k<\omega$，

(1) $\sup_{j<\omega}\gamma^{\mathcal{Q}}_{A'_j,\eta^{\mathcal{Q}}_{k-1}+1}=\eta^{\mathcal{Q}}_k$,[22] and

(2) $\mathcal{Q}=\mathrm{Hull}^{\mathcal{Q}}_1(\eta^{\mathcal{Q}}_k\cup\{\tau^{\mathcal{Q}}_{A'_j,(\eta^{\mathcal{Q}+i})^{\mathcal{Q}}}\mid i,j<\omega\})$.

按照 [Ste08b], 的说法，我们称第一个性质为 k-稳定性，称第二个性质为k-健全性。

对于每个 $k<\omega$，令 Σ_k 为 $\mathcal{Q}|\eta^{\mathcal{Q}}_k$ 的一个 A'_k-迭代策略。我们如下定义所需的 $\mathcal{Q}$ 的迭代策略 Λ：令 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{Q}$ 上一个假定的、基于 $(\eta^{\mathcal{Q}}_{j-1},\ \eta^{\mathcal{Q}}_j)$ 的可数长度正规迭代树。

[22]回想一下 $\eta^{\mathcal{Q}}_k=\delta^{\mathcal{Q}}_{\eta^{\mathcal{Q}}_{k-1}+1^{\mathcal{Q}}}$

首先，假设 $\mathcal{T}$ 具有后继长度，或者 $\mathcal{T}$ 是 Γ-短的。那么，对于所有 $k \geq j$， $\mathcal{T}$ 都遵循 Σ_k（当把 $\mathcal{T}$ 视为 $\mathcal{Q}|\eta_k^{\mathcal{Q}}$ 上的一棵迭代树时）。由此可知，若 $\mathcal{T}$ 具有后继长度，则其末模型是良基的；若 $\mathcal{T}$ 具有极限长度，则对于所有 $k \geq j$， Σ_k 都会选择 $\mathcal{T}$ 的同一个共尾分支 b，且 $M_b^{\mathcal{T}}$（它是 $\mathcal{Q}$ 的一个迭代）是良基的。[23] 因此，我们定义 $\Lambda(\mathcal{T}) = b$。

现在改为假设 $\mathcal{T}$是 Γ-极大的。令 $b_k = \Sigma_k(\mathcal{T})$，并令 $\mathcal{Q}_k = M_{b_k}^{\mathcal{T}}$。接着，我们将 $b = \Lambda(\mathcal{T})$ 定义为分支 b_k 的“极限”：

$$\eta \in b \iff \exists k \forall l \geq k (\eta \in b_l).$$

[SS14 定理 5.4.14] 的证明表明， b 是 $\mathcal{T}$的一条共尾良基分支（尊重所有 A_i）。 k-稳定性用于证明 b的共尾性，而 k-健全性用于证明 b的良基性。此外，可以证明 b 尊重所有 A_i， $M_b^{\mathcal{T}}$仍然是 $\vec{A}$-可迭代的、 k-稳定的且 k-健全的。

可以轻松地将上述论证推广，以便为 $\mathcal{Q}$上的任意可数长度正规迭代树 $\mathcal{T}$定义 $\Lambda(\mathcal{T})$。[24] □

与 [FNS10 第 2], 节一样，定义 5.23 蕴含定义 5.1。最后，定义 1.7 可由定义 2.2、定义 3.3 和定义 5.1 得出。

References

[AG] Juan P. Aguilera 和 Takehiko Gappo。可分解长度博弈与内模型。准备中。[AM20] Juan P. Aguilera 和 Sandra M¨uller。长射影确定性的相容性强度。 *J. Symb. Log.*，85(1):338–366，2020。[Cha17] William Chan。Jensen 模型存在定理。见 https://williamchan-math.github.io/ 2017 ，。[FNS10] Gunter Fuchs、Itay Neeman 和 Ralf Schindler。粗迭代性的一个判据。 *Arch.* ， ( ): – 。[Fri73] Harvey Friedman。集合论的可数模型。载于 *Cambridge Summer School in Mathematical Logic (Cambridge, 1971)* 337 *Lecture Notes in Math.* ，第 Vol. 卷，[，第 539–573 页。Springer，柏林—纽约，1973 年。71] Fri *Ann. Math. Logic*Harvey M. Friedman。高阶集合论与数学实践。[， 2 3 325 71357，1970 ( ): – / 。78] Har 0♯Leo Harrington。解析确定性与 *J. Symbolic Logic*。[，43(4):685–693，1978。10] Jen https://www.math.uni-bonn.de/ ~raesch/jensen/ 2010 Ronald Jensen。容许集。见[，。14] Jen *L E-recursion forcing and C*-algebras* 27 *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.* Ronald Jensen。次完备强迫与[-强迫。载于，，第 卷，11]，第 83–182 页。World Sci. Publ.，美国新泽西州哈肯萨克，2014 年。*Set theory and its applications* 533 *Contemp. Math.* 71 105

Ket[Richard Ketchersid。AD 的更多结构性推论。载于 10]，第 卷，*Handbook of set theory. Vols. 1 2 3* 1951 2119 2010 ，第 – 页。Amer. Math. Soc.，美国罗得岛州普罗维登斯，2011 年。[KW08] Peter Koellner 和 W. Hugh Woodin。由确定性得到的大基数。载于 ¨，，，第 – 页。Springer，荷兰多德雷赫特，。 *Games*Mar *Scales and Suslin Cardinals* Donald A. Martin。实数博弈量词传播尺度。载于 A. S. Kechris、B. L *The Cabal*owe 和 J. R. Steel（编），*Seminar， Volume I*，[。剑桥大学出版社，2008 年。70] Mar *Fund. Math.*Donald A. Martin。可测基数与解析博弈。，66 291，1969 287 70 : – / 。

[23]这里，我们利用了 $\mathcal{Q} \cap$ 序数类 $= \sup_{k<\omega} \eta_k^{\mathcal{Q}}$。[24]该证明无法帮助我们定义一种作用于非正规迭代树的迭代策略；设 $\mathcal{T}$是基于 $(\eta_{k-1}^{\mathcal{Q}}, \eta_k^{\mathcal{Q}})$ 的极大树，设 $b = \Lambda(\mathcal{T})$，并设 $\mathcal{R} = M_b^{\mathcal{T}}$。对于某个 $k' < k$，设$\mathcal{U}$ 是基于 $(\eta_{k'-1}^{\mathcal{R}}, \eta_k^{\mathcal{R}})$ 的极大树。由于 $\mathcal{R}$ 不是 k'-健全的，我们无法使用上述证明来定义 $\Lambda(\mathcal{T}^\frown b^\frown \mathcal{U})$。

[MR73] A. R. D. Mathias 和 H. Rogers（编）*Cambridge Summer School in Mathematical Logic (held in Cambridge, England, August 1–21, 1971)* 337 ，第 Vol. 卷，*Lecture Notes in Mathematics* 1973 。Springer-Verlag，柏林—纽约，。[MS89] Donald A. Martin 和 John R. Steel。射影确定性的一个证明。*J. Amer. Math.* ，( ): –125，1989。[*Soc.* 2 1 71

MS08a] D. A. Martin 和 J. R. Steel。 *L*（ℝ）中的尺度范围。载于 A. S. Kechris、B. L¨owe 和 J. R. Steel（编）， *Games, Scales, and Suslin Cardinals. The Cabal Seminar, Volume I* 110 120 2008 ，第 – 页。符号逻辑协会，。[MS08b] Donald A. Martin 和 John R. Steel。 *L*（ℝ）中的尺度范围。载于 Alexander S. Kechris、Benedikt L¨owe 和 John R. Steel （编）， *Games, Scales, and Suslin Cardi-nals. The Cabal Seminar, Volume I*，第 110–120 页。符号逻辑协会，2008 年。[MSW20] Sandra M¨uller、Ralf Schindler 和 W. Hugh Woodin。由最优决定性假设得到的有限多个 Woodin 基数的鼠。 *J. Math. Log.*，20:1950013，118，2020。[Nee95] Itay Neeman。确定性的最优证明。 *Bull. Symbolic Logic*，1(3):327–339，1995。[Nee04] Itay Neeman。*The determinacy of long games* 7 *De Gruyter Series in Logic* ，第 卷，[。Walter de *and its Applications* 2004

Gruyter GmbH & Co. KG，柏林，。06] Nee*J. Symbolic Logic*Itay Neeman。相对于对局而言，在第一个容许序数处结束的博弈的确定性。[，71(2):425–459，2006。07] Nee ω_1Itay Neeman。长度为 *J. Math. Log.* 的博弈。[，7(1):83–124，2007。18] RT´Daniel Rodr *L*íguez 和 Nam Trang。ℝ（ μ， *Adv. Math.*）是唯一的。[，324:355–393，2018。21] Sol *Large cardinals determinacy* Robert M. Solovay。*and other topics. The Cabal Seminar. Vol. IV* 49 *Lect. Notes Log.*

DC 与 AD 的独立性。载于[，，第 卷，14] ，第 66–95 页。剑桥大学出版社，剑桥，2021 年。 https://ivvcnpp.uni-muenster.de/u/rds/ 2014 SS[R. Schindler 和 J. R. Steel。核心模型归纳。见 15] ，。*J. Symb.* SS[Grigor Sargsyan 和 *Log.* 80 2 671 683, 2015

John Steel。实数集的鼠集猜想。16] ，( ): – 。ℝ https: ST[Farmer Schlutzenberg //arxiv.org/abs/1210.7258 2016

和 Nam Trang。07] 上的混合鼠尺度。见 ，。*Advances in logic* 425 *Contemp. Math.* 1 8 Ste[J. R. Steel。导出模型定理的无平稳塔证明。载于] ，第 卷， *K*，第 – 页。Amer. Math. Soc.，美国罗得岛州普罗维登斯，2007 年。ℝSte08a¨J. R. Steel。 *Games*（*Scales and Suslin Cardinals The Cabal Seminar Volume I* ）中的尺度。载于 A. S. Kechris、B. L[owe 和 J. R. Steel（编），] ，*K* ℝ 73 2 369 390, ，，。剑桥大学出版社，2008

2008 年。 *J. Symbolic Logic*Ste08b[J. R. Steel。在弱间隙末端的] （ ）中的尺度。*Computational prospects of infinity. Part I. Tutorials* 14 *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ.* ，( ): – 。*Singap.*Ste08c[

John R. Steel。与鼠相关联的导出模型。载于09] ，*Logic Colloquium 2006* 32 *Lect.* 第 卷，第 105–193 页。*Notes Log.* 280 327 2009

World Sci. Publ.，美国新泽西州哈肯萨克，2008 年。[Ste16] J. R. Steel。导出模型定理。载于 *Ordinal definability and recursion theory: The Cabal Seminar. Vol. III* 43 *Lect. Notes Log.* 243 256 ，第 卷，[，第 – 页。

Assoc. Symbol. Logic，美国伊利诺伊州芝加哥，。16] Ste¨John R. Steel。Woodin关于鼠集的定理。载于 *Ordinal definability and recursion theory*，第 卷，[，第 – 页。Assoc. Symbol. Logic，美国纽约州伊萨卡，2016 年。13] SW *Generalized Solovay measures the HOD analysis and the core model* J. R. Steel 和 W. H. *induction* 2013

Woodin。作为核心模型的 HOD。载于 A. S. Kechris、B. L[owe 和 J. R. Steel（编），14] ，第 257–346 页。2016 年。*L* ℝ μ *Journal of Mathematical Logic* 14 01 1450006, Tra[Nam Trang。15] ，，。2014

博士论文，加州大学伯克利分校，。 *L*Traℝ Nam Trang。 μ（，）中的确定性。，( ):。 *J. Symb. Log.*Tra[Nam Trang。] （，）的结构理论及其应用。，80(1):29–55，2015。WooW. Hugh Woodin。广义Chang模型。即将出版。

Takehiko Gappo Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie TU Wien Wied- ,
ner Hauptstrasse 8-10/104 1040 Wien Austria.

„ , ,*Email address*: takehiko.gappo@tuwien.ac.atSandra Müller,
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien, Wiedner
Hauptstrasse 8-10/104, 1040 Wien, Austria.*Email address*: sandra.mueller@tuwien.ac.at