arXiv:2601.03755v1 [math.AP] 7 Jan 2026

BV非线性抛物型偏微分方程（含线性漂移项）的估计

EL MAHDI ERRAJI[†]、NOUREDDINE IGBIDA[‡]、FAHD KARAMI[†] 和 DRISS MESKINE[†]

摘要：本文建立了涉及线性漂移项的非线性抛物型偏微分方程解在空间有界变差（BV）意义下的正则性。我们研究的是有界区域中的问题，其具有混合狄利克雷-诺伊曼边界条件、一般的非线性项，以及对数据的合理假设。我们的结果还涵盖一个特例：有界区域中的线性输运方程，且边界上存在向外指向的漂移向量场。

1. 引言

在过去几十年里，许多研究都致力于探讨含线性漂移项的退化抛物型偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta p + \nabla \cdot (u\, V) = f \\ \\ u \in \beta(p) \end{cases} \qquad \text{in } Q := (0,T) \times \Omega. \tag{1.1}$$

我们的目标是为满足狄利克雷-诺伊曼混合边界条件且具有给定初始数据的解建立局部有界变差（简称 BV）估计。这里，$\Omega \subset I\!R^N$ 是具有正则边界 $\partial\Omega =: \Gamma$ 的有界开集，图像 β 是极大单调的，而 $V\colon \Omega \to I\!R^N$ 是给定的向量场。

近年来，原型方程 (1.1) 因能够刻画输运与非线性扩散相互作用的现象而受到广泛关注。这类方程自然见于种群动力学、生物学、多孔介质流和相变过程。典型例子包括多孔介质方程 $\beta(r) = r^m$ (参见例如 [15])、人群运动，其中$\beta(r)$ =sign(r)（参见例如 [12, 8]），以及斯特藩型相变问题。

对方程 (1.1) 的解析研究内容丰富且颇具挑战。弱解的存在性可以通过若干互补的方法加以证明。对于诺伊曼边界条件情形，Wasserstein变分方法可能有所助益（参见 [14]）。若能实现单调性，则非线性半群理论可能适用（参见 [10]）。对偶变分方法（最小通量方法）对于涉及混合边界条件和非齐次边界条件的一般情形尤其有效，正如 [11] 所示。

日期：2026年1月8日。

[‡]法国利摩日大学XLIM-DMI研究所、UMR-CNRS 6172、科学与技术学院。电子邮箱：noureddine.igbida@unilim.fr。

[†]数学、计算机与复杂系统建模实验室，索维拉高等技术学院，马拉喀什卡迪·阿亚德大学，摩洛哥。电子邮箱：el.erraji@uca.ac.ma、fa.karami@uca.ac.ma、dr.meskine@uca.ac.ma。

与存在性相比，一般情形下的唯一性仍基本悬而未决。只有当 β 足够正则时，经典比较论证才能保证唯一性。对于奇异或多值非线性，情况要微妙得多。即使在多孔介质或赫勒-肖情形下，证明唯一性也可能需要更复杂的技巧（DiPerna-Lions 式重整化、变量加倍与消去加倍技巧）以及额外的结构性假设（例如参见 [9, 10, 7, 5]）。

例如，在研究解的渐近行为及其对物理参数的依赖性时，还会遇到其他分析上的困难。这类问题通常要求密度 u 或所谓的压力 p具有强紧性。然而，经典的能量估计只能提供弱紧性，即 u 在 $L^1(Q)$ 中以及 p 在 $L^2(0,\ T;\ H^1(\Omega))$ 中，但由于扩散算子的退化，这不足以处理非线性项中的极限过程。在此背景下， u 的空间 BV估计发挥着核心作用，因为它们提供了稳定性和渐近分析所需的缺失强紧性。对于狄利克雷边界条件，常向量场 V 情形下的空间 BV-型估计已在 [2], 中得到；其他结果可见 [6] ，但在当前框架下人们所知甚少。

本文旨在对方程 (1.1) 的解建立局部空间 BV-估计，并对数据及非线性项 β作出合理假设。我们的结果还涵盖一个特例：取 $\beta^{-1} \equiv 0$时得到的线性输运方程。

本文结构。 在接下来的第 2 节中，我们将介绍主要假设并陈述本文的主要结果。为建立这些结果，我们采用隐式欧拉时间离散格式。我们的分析始于第 3 节，在该节中我们证明与相应稳态问题的解有关的关键估计。第 4 节则专门用于详细证明有关演化问题的主要结果。

2. 主要结果

考虑演化问题，它将作为我们分析的动力学框架，即

$$
\begin{cases}
\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta p + \nabla \cdot (u\, V) = f \\ u \in \beta(p) \end{array}\right\} & \text{in } Q := (0,T)\times\Omega \\
p = 0 & \text{on } \Sigma_D := (0,T)\times\Gamma_D \\
(\nabla p - u\, V)\cdot \nu = 0 & \text{on } \Sigma_N := (0,T)\times\Gamma_N \\
u(0) = u_0 & \text{in } \Omega,
\end{cases} \tag{2.1}
$$

其中 ν 表示边界 Γ， β 上的外单位法向量， $u_0 \in L^2$是一个给定的极大单调图，(Ω) 和 $f \in L^2(Q)$。在整个分析中，我们假设向量场 V 满足以下一组假设：

($T1$) 正则性： $V \in L^2(0,T;\ H^1(\Omega)^N)$ ($T2$) 散度控制：$(\nabla\cdot V)^- \in L^\infty(Q)$
($T3$) 边界条件： $V\cdot\nu \geq 0$, 在 Γ_D, 且在 $V\cdot\nu = 0$, 在 Γ_N.

为研究问题 (2.1)，对于任意满足条件 $(n+1)\varepsilon = T.$ 的 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$，我们采用相应的 ε–欧拉隐式格式。考虑如下定常问题序列：

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} u_{i+1} - \varepsilon\,\Delta p_{i+1} + \varepsilon\,\nabla\cdot(u_{i+1}\,V_i) = u_i + \varepsilon\,f_i \\ u_{i+1} \in \beta(p_{i+1}) \end{array}\right\} & \text{in } \Omega \\ \\ p_{i+1} = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ \\ (\nabla p_{i+1} - u_{i+1}\,V_i)\cdot\nu = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{array}\right. \qquad i = 0, 1, \ldots n-1, \tag{2.2}$$

其中，对于每个 $i = 0,\ \ldots n-1,\ f_i$ 和 V_i，其定义如下

$$f_i = \frac{1}{\varepsilon}\int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} f(s)\,ds, \quad V_i = \frac{1}{\varepsilon}\int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} V(s)\,ds, \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

此处，对向量场的积分 V 应按分量逐一进行理解 .

命题 2.1。 在假设 $(T1)$ 和 $(T2)$下，对于任意 $u_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $f \in L^2(Q)$，求解问题 (2.2)的序列对 (u_i, p_i)，其中 $i = 0,\ldots, n-1$，是良好定义的；也就是说，$u_i \in L^1(\Omega)$ $p_i \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ 并且

$$\int_\Omega u_{i+1}\,\xi + \varepsilon\int_\Omega \nabla p_{i+1}\cdot\nabla\xi - \varepsilon\int_\Omega u_{i+1}\,V_i\cdot\nabla\xi = \varepsilon\int_\Omega f_i\,\xi + \int_\Omega u_i\,\xi,$$

对任意 $\xi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$。

现在，对于给定的 ε–时间离散化 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T$，满足 $t_{i+1} - t_i \leq \varepsilon$，我们将 ε–近似解定义为

$$u_\varepsilon := \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}\chi_{[t_i,t_{i+1})}, \quad p_\varepsilon := \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1}\chi_{[t_i,t_{i+1})}, \quad f_\varepsilon := \sum_{i=0}^{n-1} f_i\chi_{[t_i,t_{i+1})}, \tag{2.3}$$

and

$$V_\varepsilon := \sum_{i=0}^{n-1} V_i\chi_{[t_i,t_{i+1})}$$

注意，取

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) = \frac{(t-t_i)u_{i+1} - (t-t_{i+1})u_i}{\varepsilon} \quad \text{for any } t \in [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, \ldots, n-1,$$

我们有

$$\partial_t\tilde{u}_\varepsilon - \Delta p_\varepsilon + \nabla\cdot(u_\varepsilon\,V_\varepsilon) = f_\varepsilon, \quad \text{in } \mathcal{D}'(Q). \tag{2.4}$$

演化问题 (2.1) 的一个解可通过令 $\varepsilon \to 0$ 属于 (2.4) 给出。这正是以下定理的目的。

定理 2.1. 在假设 $(T1)$、$(T2)$ 和$(T3)$下，对于任意 $u_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $f \in L^2(Q)$，存在 $u \in L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))$ 和 $p \in L^2(0,T;\, H^1_{\Gamma_D}(\Omega))$，使得必要时取子列 $\varepsilon \to 0$ 后，我们有

$$u_\varepsilon \to u \quad in\ L^2(Q) - weak, \tag{2.5}$$

$$\tilde{u}_\varepsilon \to u \quad in\ L^2(Q) - weak \tag{2.6}$$

and

$$p_\varepsilon \to p \quad in\ L^2(0,T;H^1_{\Gamma_D}(\Omega)) - weak \quad as\ \varepsilon \to 0. \tag{2.7}$$

这一对 (u,p) 是 (2.1) 的弱解，其意义为 $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,p'}_{\Gamma_D}(\Omega))$ $u(0) = u_0$ 在 Ω $p \in L^2(0,T;H^1_{\Gamma_D}(\Omega))$ $u \in \beta(p)$ 中几乎处处成立，且

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u\,\xi\,dx + \int_\Omega (\nabla p - u\,V)\cdot\nabla\xi\,dx = \int_\Omega f\,\xi\,dx, \quad in\ \mathcal{D}'([0,T)) \quad for\ any\ \xi \in W^{1,2}_{\Gamma_D}(\Omega). \tag{2.8}$$

此外，我们有

(1) 对于任意 $q \in [1,\infty]$，我们有

$$\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} \le \mathcal{M}_q(t) := \begin{cases} e^{(q-1)\int_0^t \|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}} \left(\|u_0\|_{L^q(\Omega)} + \displaystyle\int_0^t \|f(t)\|_{L^q(\Omega)}\,dt\right) & if \quad q < \infty \\ e^{\int_0^t \|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}} \left(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \displaystyle\int_0^t \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\,dt\right) & if \quad q = \infty. \end{cases}.$$

(2) 对于任意 $t \in [0,T)$，我们有

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega j(u)\,dx + \int_\Omega |\nabla p|^2\,dx \le \int_\Omega f\,p\,dx + \int_\Omega p\,u\,(\nabla\cdot V)^-\,dx \quad in\ \mathcal{D}'(0,T).$$

(3) 若 $u_0 \ge 0$ 且 $f \ge 0$，则 $u \ge 0$.

注 1. 可以看出，在定理 *2.1* 的假设下，我们可以找到一个常数 $C(N,\Omega)$，它仅取决于庞加莱不等式常数，使得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega j(u)\,dx + \int_\Omega |\nabla p|^2\,dx \le C(N,\Omega)\left(\int_\Omega |f|^2\,dx + \|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}\,\mathcal{M}_2^2\right) \quad in\ \mathcal{D}'(0,T).$$

注 2. 定理 *2.1* 中所述解的一般唯一性仍是一个尚未解决且充满挑战的问题。即使函数 β 连续，这一困难依然存在。对于多孔介质方程 $(\beta(r) = r^\alpha)$ 和赫尔-肖问题 $(\beta(r) = Sign(r))$ 这些特殊情形，读者可参阅相关著作 [10, 9, 7, 5] 以及其中的讨论。

为了陈述关于方程 (2.1) 的解的 $BV-$ 估计这一主要结果，我们先提醒读者有界变差函数的一些基本定义和工具。给定函数 $u \in L^1(\Omega)$ 被称为有界变差函数，当且仅当对于每个 $i = 1,...N$,

$$TV_i(u,\Omega) := \sup\left\{\int_\Omega u\,\partial_{x_i}\xi\,dx\ :\ \xi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega) \text{ and } \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1\right\} < \infty,$$

这里 $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ 表示在 Ω 中紧支撑的 $\mathcal{C}^1-$函数。更一般地，若且唯若对于任意开集 $\omega \subset\subset \Omega$ $TV_i(u,\ \omega) < \infty$ 对于任意 $i = 1,$ ....., $N.$，函数在区域 Ω 中局部有界变差。一般而言，Ω 中的局部有界变差函数（以及有界变差函数），可能不可微；但根据里斯表示定理，它们在分布意义下的偏导数是 Ω 中的博雷尔测度。由此引出如下定义：

Ω 中有界变差函数构成的向量空间，通常记作 $BV(\Omega)$，其元素为满足以下条件的 $u \in L^1(\Omega)$：存在 Radon测度 μ_1，……，μ_N，且其在 Ω 中具有有限总质量：

$$\int_\Omega v\,\partial_{x_i}\xi\,dx = -\int_\Omega \xi\,d\mu_i, \quad \text{for any } \xi \in \mathcal{C}_c(\Omega), \quad \text{for } i = 1, ..., N.$$

为避免记号滥用，我们仍将测度 μ_i 记作 $\partial_{x_i} v$，并将 $|\partial_{x_i} v|$记作 μ_i.的全变差。此外，按照惯例，我们将使用 $Dv = (\partial_{x_1} v, \ldots\ldots, \partial_{x_N} v)$ 表示指出任意函数 $v \in BV(\Omega)$，梯度的向量值拉东测度，而 $|Dv|$ 表示 v.的全变差测度。特别地，对于任意开集 $\omega \subset\subset \Omega$ $TV_i(v, \omega)$，$= |\partial_{x_i} v|(\omega) < \infty$，函数 v 在 ω 中的全变差也是有限的；即

$$|Dv|(\omega) = \sup\left\{\int_\Omega v\,\nabla\cdot\xi\,dx \,:\, \xi \in \mathcal{C}_c^1(\omega)^N \text{ and } \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1\right\} < \infty.$$

最后，我们在此提醒读者关于有界变差函数的著名紧性结果：给定一列 v_n 中的函数 $BV_{loc}(\Omega)$，使得对于任意开集 $\omega \subset\subset \Omega$，都有

$$\sup_n \left\{\int_\omega |v_n|\,dx + |Dv_n|(\omega)\right\} < \infty,$$

存在一个子列，我们仍记为 v_n，它在 $L^1_{loc}(\Omega)$ 中收敛到函数 $v \in BV_{loc}(\Omega)$。此外，对于任意紧支连续函数 $0 \le \xi$，极限 v 满足

$$\int \xi\,|\partial_{x_i} v| \le \liminf_{n\to\infty} \int \xi\,|\partial_{x_i} v_n|,$$

对于任意 $i = 1, \ldots N$，以及

$$\int \xi\,|Dv| \le \liminf_{n\to\infty} \int \xi\,|Dv_n|.$$

现在，我们可以给出关于空间 BV_{loc}-估计的主要结果。

定理 2.2. 假设向量场 V 还满足

($T'1$) $V \in L^1(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)^N) \cap L^\infty(Q)$ (

$T'2$) $\nabla\cdot V \in L^2(0, T; W^{1,2}_{loc}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$

($T'3$) $V\cdot\nu = 0$，在 Γ_N，此外

$$V(x)\cdot\nu(\pi(x)) \ge 0, \quad \text{for a.e. } x \in \Omega\setminus\Omega_h, \tag{2.9}$$

对于任意足够小的 $0 < h < h_0$，其中

$$\Omega_h = \left\{x \in \Omega \,:\, d(x, \Gamma) > h\right\},$$

并且 $\pi(x)$ 表示 x 在边界 Γ.上的投影

对于给定的 $f \in L^1(0, T; BV_{loc}(\Omega)) \cap L^2(Q)$ 和 $u_0 \in BV_{loc}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$，考虑由定理 *2.1* 给出的($u$、$p$) 解。于是，对于任意开集 $\omega \subset\subset \Omega$，存在 $0 \le \xi \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$ 使得

$\xi\chi_\omega \equiv 1$，并且存在一个常数 $C := C(\omega、\ N、\Omega\ \|f\|_{L^2}、\ \|(\nabla\cdot V)^-\|_\infty)$ 使得(2.10
)

$$\sum_{j=1}^{N}|\partial_{x_j}u(t)|(\omega) \le C\left(1+\int_0^T\left(\int_\Omega |f|^2\,dx + \|(\nabla\cdot V)^-\|^2_{L^\infty(\Omega)}\,\mathcal{M}_2(T)^2\right)+\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega |\partial_{x_j}(\nabla\cdot V)|^2\,dx \right.$$
$$\left. +\sum_{j=1}^{N}\int_0^T |\partial_{x_j}f(t)|(\Omega)+\sum_{j=1}^{N}|\partial_{x_j}u_0|(\Omega)\right), \quad \textit{for any } t\in(0,T).$$

注记3。 (1) 注意，条件$(T'3)$必然蕴含$(T3)$。但反过来则未必成立。事实上，在$(T'3)$ 中，我们假设 V 在 Γ. 附近沿着距离函数所确定的路径向外指向。正如我们将看到的，这一假设可以弱化为：向量场沿着 Γ附近给定的任意路径向外指向（参见注7）。无论如何，控制 V 在边界附近的向外指向方向，对于抑制解的振荡（至少对于稳态问题）并获得局部 BV-估计，似乎至关重要。

(2) 我们不知道在缺少条件$(T'3)$时，定理的结论是否仍然成立。不过，该条件似乎与二阶项及其相应的诺伊曼边界条件有关； $\nabla p\cdot\nu = 0$. 正如我们稍后将证明的，只要图形 β 消失，且偏微分方程约化为一个具有向外指向向量场的一阶线性守恒方程，定义在 $\partial\Omega$上，该条件便不再必要。

(3) 当 $f\equiv 0$ 和 $\nabla\cdot V = 0$时，我们得到一个或多或少广为人知的结果

$$\sum_{j=1}^{N}|\partial_{x_j}u(t)|(\omega) \le \sum_{j=1}^{N}|\partial_{x_j}u_0|(\Omega), \quad \textit{for any } t\in(0,T).$$

现在，让我们暂时聚焦于连续性方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot(u\,V) = f & \text{in } Q \\ \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $Q := (0,T)\times\Omega$，其中 Ω 是一个有界开域。按照 [3, 4], 处理 (2.11) 的边界条件，我们需要将流入边界定义为:

$$\Sigma^- := \Big\{x\in\partial\Omega\ :\ V\cdot\nu<0\Big\},$$

并考虑具有齐次狄利克雷边界条件的演化问题 (2.11)。也就是说

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot(u\,V) = f & \text{in } Q \\ \\ u = 0 & \text{on } \Sigma^- := (0,T)\times\Sigma^- \\ \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

在假设（$T1$）和（$T2$）下，我们知道（参见 [3, 4]），对于任意 $u_0\in L^\infty(\Omega)$ 和 $f\in L^\infty(Q)$，问题 (2.12) 存在唯一的弱解 u，其意义为： $u\in L^\infty(Q)$, $(u\,V)\cdot\nu\in L^\infty(\Sigma)$,

$(u\,V)\cdot\nu=0$, $\mathcal{H}^{N-1}$–在 Σ^- 上几乎处处成立，并且

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u\,\xi\,dx-\int_\Omega u\,V\cdot\nabla\xi\,dx=\int_\Omega f\,\xi\,dx,\ \text{in}\ \mathcal{D}'([0,T)), \tag{2.13}$$

对任意 $\xi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$。

因此，假设

$$V\cdot\nu\geq 0,\quad \text{on}\ \partial\Omega, \tag{2.14}$$

显然 $\Sigma^-=\emptyset$，于是问题 (2.11) 存在唯一解。特别地，$(u\ V)\cdot\nu$ 在 Σ. 上有唯一确定的定义。作为定理 2.2 的推论，在假设 (2.14) 下，我们可以证明以下关于解 u. 的 BV-正则性结果

定理2.3。假设 $V\in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^N)\cap L^2(0,T;W^2{}_{,loc}{}^2(\Omega)^N)$。对任意 $f\in L^1(0,T;BV(\Omega))\cap L^2(Q)$ 且 $u_0\in BV(\Omega)\cap L^2(\Omega)$，问题 (2.11) 的唯一解 u 满足

(1) $u\in L^1(0,T;BV(\Omega$

))(2) 存在一个常数 $C:=C(N,\Omega\,\|f\|_{L^2(Q)}\ \|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(Q)})$，使得

$$\sum_{j=1}^N|\partial_{x_j}u(t)|(\Omega)\leq C\left(1+\int_0^T\left(\int_\Omega|f|^2\,dx+\mathcal{M}_2(T)^2\,\|(\nabla\cdot V)^-\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)+\sum_{j=1}^N\int_\Omega|\partial_{x_j}(\nabla\cdot V)|^2\,dx\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^N\int_0^T|\partial_{x_j}f(t)|(\Omega)+\sum_{j=1}^N|\partial_{x_j}u_0|(\Omega)\right)\quad \textit{for any } t\in(0,T).$$

为证明该定理，我们考虑 $\tilde{V}$，使其满足 $\tilde{V}\in L^1(0,\ T;\ W^{1,\ \infty}(\mathbb{R}^N)^N)\cap L^\infty((0,\ T)\times\mathbb{R}^N)^N$，$\nabla\cdot V\in L^2(0,\ T;\ W^{1,\ 2}_{,\ loc}(\mathbb{R}^N))\cap L^\infty((0,\ T)\times\mathbb{R}^N)$，且存在一个有界开集 $\Omega\subset\subset D\subset\mathbb{R}^N$，使得

$$\text{support}(\tilde{V}(t))\subset\subset D,\quad \text{for a.e. } t\in(0,T)$$

and

$$\tilde{V}(t,x)=V(t,x)\qquad \text{for all } x\in\Omega,\ \text{a.e. } t\in(0,T).$$

˜更确切地说，V 可按如下方式构造：

(1) 对几乎处处的 t，我们将 $V(t,\ \cdot)$ 延拓为 $W^{1,\ \infty}(\mathbb{R}^N)^N$ 中的函数 $EV(t,\ \cdot)$，使用 Lipschitz 域上的标准有界延拓算子。(2) 选取_ $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$，使其在 Ω 上满足 $\varphi\equiv 1$。˜(3) 定义 $V(t,\ x):=\varphi(x)\,EV(t,\ x)$。

那么 $\tilde{V}$满足 $\tilde{V}\in L^1(0,T;\ W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N)\cap L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)$,

$$\text{supp}(\tilde{V}(t,\cdot))\subseteq\text{supp}(\varphi)=:D\Subset\mathbb{R}^N,$$

并且在 Ω 上与 V 一致。此外，由于

$$\nabla\cdot\tilde{V}=\varphi\,\nabla\cdot(EV)+\nabla\varphi\cdot EV,$$

t假设 $V\in L^2(0,T;\ W^2{}_{,loc}{}^2(\Omega)^N)$ 蕴含 $\nabla\cdot\tilde{V}\in L^2(0,T;\ W^1{}_{,loc}{}^2(\Omega))$.

说到这里，我们来考虑以下连续性方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\,u}{\partial t}+\nabla\cdot(\,u\,\tilde{V})=\tilde{f} & \text{in } (0,T)\times D\\ u(0)=\tilde{u}_0 & \text{in } D,\end{cases} \tag{2.15}$$

˜这里， f 和 $\tilde{u}_0$ 由 Lipschitz 域上的标准有界延拓算子给出，并且紧支撑于 D中。由于延拓后的向量场 V 紧支撑于 D中，其法向分量必定在边界上消失：

$$\tilde{V} \cdot \nu = 0 \quad \text{on } \partial D.$$

˜ ˜因此，与 V在 D中相关的流入边界定义为 $\Sigma^- := (0, T) \times (\partial D)^-$，该边界为空˜ $(\Sigma^- = \emptyset)$。由于 [3], 问题 (2.15) 存在唯一的弱解 $\tilde{u}$。特别地， $\tilde{u}$ 满足弱形式 (2.13)。根据唯一性， $\tilde{u}$ 定义了 u. 的一个延拓。也就是说

$$\tilde{u} = u \quad \text{a.e. in } Q.$$

此外，取极大单调图 $\beta^{-1} \equiv 0$，可以看出 $\tilde{u}$ 也是在 D中定义的问题 (2.1) 的一个解：

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \tilde{p} + \nabla \cdot (\tilde{u}\ \tilde{V}) = \tilde{f} \\ \tilde{u} \in \beta(\tilde{p}) \end{array}\right\} & \text{in } (0,T) \times D \\ \tilde{p} = 0 & \text{on } (0,T) \times \partial D \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 & \text{in } D. \end{cases}$$

由于 $\tilde{V}$紧支撑，根据定理（2.2），我们可推出 $\tilde{u} \in L^1(0, T; BV_{loc}(D))$，并且存在一个常数 C: $= C(\omega, N, D, \|f\|_{L^2((0,T)\times D)} \|(\nabla \cdot V)^-\|_{L^\infty((0,T)\times D)})$，使得

$$\sum_{j=1}^{N} |\partial_{x_j} \tilde{u}(t)|(\omega) \le C \left(1 + \int_0^T \left(\int_D |\tilde{f}|^2 \, dx + \|(\nabla \cdot \tilde{V})^-\|^2_{L^\infty(D)} \right) + \sum_{j=1}^{N} \int_D |\partial_{x_j} (\nabla \cdot \tilde{V})|^2 \, dx \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \int_0^T |\partial_{x_j} \tilde{f}(t)|(D) + \sum_{j=1}^{N} |\partial_{x_j} \tilde{u}_0|(D) \right) \quad \text{for any } t \in (0,T).$$

取 $\omega = \Omega$，我们便得出定理的结论。

注释4。若不满足假设 $V \in L^2(0, T; W^{2,\ {}^2_{loc}}(\Omega)^N)$，上述构造通常无法保持额外正则性

$$\nabla \cdot \tilde{V} \in L^2(0,T; W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)).$$

事实上，尽管 EV属于 $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)^N$，但这并不能保证散度 $\nabla \cdot (EV)$ 属于 $W^{1,\ {}^2_{loc}}(\mathbb{R}^N)$，因为这需要控制 V 的二阶导数。仅凭假设 $V \in W^{1,\infty}(\Omega)$ 无法获得这种控制。此外，乘以截断函数 φ 后，散度变为 $\nabla \cdot (\varphi EV) = \varphi \nabla \cdot (EV) + \nabla \varphi \cdot EV$，其中的项 $\nabla \varphi \cdot EV$通常不属于 $W^{1,\ {}^2_{loc}}$，除非对 V 施加额外的二阶正则性条件，例如 $V \in L^2(0,T; W^{2,\ {}^2_{loc}}(\Omega)^N)$。因此，这种延拓保持了空间 $L^1(0,T; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap L^\infty((0,T)\times\Omega)^N$，但通常不会保持条件 $\nabla \cdot V \in L^2(0,T; W^{1,\ {}^2_{loc}}(\Omega))$。

3. 稳态问题

借助欧拉隐式离散化 (2.2)，我们的分析从一般的稳态问题开始

$$\begin{cases} v - \lambda\Delta p + \lambda\nabla\cdot(v\,V) = f, \quad v \in \beta(p), & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ (\nabla p - v\,V)\cdot\nu = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$，若函数 $v \in L^1(\Omega)$ 满足 $p \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ 且.....，则称其为 (3.1) 的弱解

$$\int_\Omega v\,\xi + \lambda\int_\Omega \nabla p\cdot\nabla\xi - \lambda\int_\Omega v\,V\cdot\nabla\xi = \int_\Omega f\,\xi, \quad \text{for all } \xi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega).$$

命题 3.2. 假设 $V \in W^{1,\,2}(\Omega)$、$(\nabla\cdot V)^- \in L^\infty(\Omega)$ 且满足 $(T3)$。对于任意 $f \in L^2(\Omega)$和 λ，使得

$$0 < \lambda < \lambda_0 := 1/\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{3.2}$$

问题 (3.1) 存在一个解，记为 v.此外， v 满足以下性质：

(1) 对于任意 $1 \le q < \infty$，我们有

$$\Big(1 - (q-1)\lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\|v\|_{L^q(\Omega)} \le \|f\|_{L^q(\Omega)}, \tag{3.3}$$

(2)

$$\Big(1 - \lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\int_\Omega v\,p\,dx + \lambda\int_\Omega |\nabla p|^2\,dx \le \int_\Omega f\,p\,dx. \tag{3.4}$$

(3) 对于任意 $k \in I\!R$，我们有

$$\int_\Omega (v-k)^+\,dx \le \int_\Omega (f - k(1 - \lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}))^+\,dx. \tag{3.5}$$

and

$$\int_\Omega (k-v)^+\,dx \le \int_\Omega (-f + k(1 - \lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}))^+\,dx. \tag{3.6}$$

特别地，我们有

- 若 $f \in L^\infty(\Omega)$，则 $v \in L^\infty(\Omega)$ 且

$$\Big(1 - \lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.7}$$

- 若 $f \ge 0$，则 $v \ge 0$.

为证明命题 3.2，我们采用正则化和紧性论证。对每个 $\delta > 0$，我们考虑 β_δ 一个光滑的 Lipschitz 连续函数，该函数严格递增，满足 $\beta_\delta(0) = 0$ 并且，当$\delta \to 0$,

$$\beta_\delta \to \beta, \quad \text{in the sense of graph in } I\!R \times I\!R.$$

例如，可以取 β_δ 映射 $r \in I\!R \to r^{1/m}$. 的 Yosida 逼近。接着，我们考虑如下问题

$$\begin{cases} v - \lambda\Delta p + \lambda\nabla\cdot(v\,V) = f, \quad v = \beta_\delta(p) & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ (\nabla p - v\,V)\cdot\nu = 0 & \text{on } \Gamma_N. \end{cases} \tag{3.8}$$

定义函数 H_σ 和 H_σ^+，分别作为映射 Sign_0 和 Sign_0^+的光滑逼近。它们的定义如下:

$$H_\sigma(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \geq \sigma \\ r/\sigma & \text{if } |r| \leq \sigma \\ -1 & \text{if } r \leq -\sigma \end{cases} \qquad H_\sigma^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \geq \sigma \\ r/\sigma & \text{if } 0 \leq r < \sigma \\ 0 & \text{if } r \leq 0\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

其中， σ 表示控制逼近光滑程度的正则化参数。

引理 3.1. 对于任意 $f \in L^2(\Omega)$，满足 (3.2) 的 $\delta > 0$ 和 λ，问题 (3.8) 存在一个解 v_δ，其意义是 $v_\delta \in L^2(\Omega)$ $p_\delta := \beta_\delta^{-1}(v_\delta) \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$，并且

$$\int_\Omega v_\delta\,\xi\,dx + \lambda\int_\Omega \nabla p_\delta\cdot\nabla\xi\,dx - \lambda\int_\Omega v_\delta\,V\cdot\nabla\xi\,dx = \int_\Omega f\,\xi\,dx, \tag{3.10}$$

对于任意 $\xi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$。此外，该解 v_δ 满足命题 *3.2* 的所有性质。

证明。 为简化表述，在本证明中，我们省略记号(v_δ, p_δ)和 β_δ 中的下标 δ 。记 $H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega)$为 $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$的通常拓扑对偶空间，并记 $\langle .,. \rangle$ 为相应的对偶配对。考虑定义如下的 A: $H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \to H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega)$:

$$\langle Ap, \xi\rangle = \int_\Omega \beta(p)\,\xi\,dx + \lambda\int_\Omega \nabla p\cdot\nabla\xi\,dx - \lambda\int_\Omega \beta(p)\,V\cdot\nabla\xi\,dx, \quad \text{for any } \xi,\, p \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega),$$

是一个有界弱连续算子。此外，对于任意满足(3.2)的 λ， A 是强制的。事实上，对于任意 $p \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$，有

$$\begin{aligned} \langle Ap, p\rangle &= \int_\Omega \beta(p)\,p\,dx + \lambda\int_\Omega |\nabla p|^2\,dx - \lambda\int_\Omega \beta(p)\,V\cdot\nabla p\,dx \\ &= \int_\Omega \beta(p)\,p\,dx + \lambda\int_\Omega |\nabla p|^2\,dx - \lambda\int_\Omega V\cdot\nabla\left(\int_0^p \beta(r)dr\right)dx \\ &\geq \int_\Omega \beta(p)\,p\,dx + \lambda\int_\Omega |\nabla p|^2\,dx - \lambda\int_\Omega p\beta(p)\,(\nabla\cdot V)^-\,dx - \lambda\underbrace{\int_{\Gamma_N} p\beta(p)\,V\cdot\nu\,dx}_{=0} \\ &\geq \lambda\int_\Omega |\nabla p|^2\,dx + (1 - \lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)})\int_\Omega \beta(p)\,p\,dx \\ &\geq \lambda\int_\Omega |\nabla p|^2\,dx, \end{aligned} \tag{3.11}$$

这里我们利用了以下事实: $V\cdot\nu = 0$ 在 Γ_N 上，且 $0 \leq \int_0^p \beta(r)dr \leq p\beta(p)$。 因此，对任意 $f \in H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega)$，问题 $Ap = f$ 都有一个解 $p \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$。 现在，对每个 $1 < q < \infty$， 取 v^{q-1} 作为检验函数

在 (3.10) 中。利用以下事实： $v\nabla(v^{q-1}) = \frac{q-1}{q}\nabla|v|^q$ 且 $\nabla p\cdot\nabla(v^{q-1}) \geq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v|^q\,dx &\leq \int_\Omega f\,v^{q-1}\,dx + \lambda\frac{q-1}{q}\int_\Omega V\cdot\nabla|v|^q\,dx\\ &\leq \int_\Omega fv^{q-1}\,dx - \lambda\frac{q-1}{q}\int_\Omega \nabla\cdot V\,|v|^q\,dx + \lambda\frac{q-1}{q}\underbrace{\int_{\Gamma_N} V\cdot\nu\,|v|^q\,dx}_{=0}\\ &\leq \int_\Omega fv^{q-1}\,dx + \lambda\frac{q-1}{q}\int_\Omega (\nabla\cdot V)^-\,|v|^q\,dx\\ &\leq \frac{1}{q}\int_\Omega |f|^q\,dx + \frac{q-1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx + \lambda\frac{q-1}{q}\left\|(\nabla\cdot V)^-\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |v|^q\,dx,\end{aligned}$$

其中我们再次使用杨氏不等式。这意味着，当 v_ε 时， $1<q<\infty$. 的情形满足 (3.3)。通过令 $q\to 1.$ ， $q=1$ 的情形显然成立。对于剩余情形 $q=\infty$，我们取 $H_\sigma^+(v-k)\in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$，其中给定 $k\geq 0$ 和 $\sigma>0$，将其作为 (3.10) 中的检验函数。然后令 $\sigma\to 0$ ，并利用 $\nabla p\cdot\nabla H_\sigma^+(v-k)\geq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立这一事实，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega (v-k)^+\,dx &\leq \int_\Omega (f-k(1+\lambda\,\nabla\cdot V))\,\mathrm{Sign}_0^+(v-k)\,dx + \lambda\lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega (v-k)\,V\cdot\nabla H_\sigma^+(v-k)\,dx\\ &\leq \int_\Omega (f-k(1+\lambda\,\nabla\cdot V))\,\mathrm{Sign}_0^+(v-k)\,dx,\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega (v-k)V\cdot\nabla H_\sigma^+(v-k)dx = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\int_{0\leq v-k\leq\sigma}(v-k)V\cdot\nabla(v-k)\,dx = 0$这一事实。因此

(3.5).

现在，取 $k = \frac{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{1-\lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}}$，我们推得 $v \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{1-\lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}}$。类似地，将 $H_\sigma^+(-v+k)$ 作为检验函数，应用相同的论证，可得 $v\geq -\frac{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{1-\lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}}$。至此，(3.7) 得证。为证明 p_ε，(3.4)，我们在 (3.10) 中取 p 作为 a，并按照 (3.11) 的方法进行，可得

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega |\nabla p|^2\,dx &= \int_\Omega fp\,dx - \int_\Omega vp\,dx - \lambda\int_\Omega \nabla\cdot V\left(\int_0^p \beta(r)dr\right)dx\\ &\leq \int_\Omega fp\,dx - \int_\Omega vp\,dx + \lambda\,\|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega vp\,dx.\end{aligned}$$

因此，(3.4) 成立。最后，假设 $f\geq 0$，容易看出，在 (3.6) 中取 $k=0$ ，即可得到 $v\geq 0$.

□

引理 3.2。 在命题 *3.2* 的假设下，如有必要，取子列 $\delta\to 0$ ， 我们有

$$v_\delta \to v \quad in\ L^2(\Omega)\text{-}weak \tag{3.18}$$

and

$$p_\delta \to p \quad in\ H^1_{\Gamma_D}(\Omega). \tag{3.19}$$

此外， v 是(3.1)的弱解。

证明。 利用引理 3.1 以及杨不等式和庞加莱不等式可知，序列 v_δ 和p_δ 分别在 $L^2(\Omega)$ 和 $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, 中有界。因此，存在一个子列，我们仍记为 v_δ 和 p_δ ，使得 (3.18) 成立,

$$v_\delta \to v \quad \text{in } L^2(\Omega)\text{-weak}, \quad p_\delta \to p \quad \text{in } H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\text{-weak} \tag{3.20}$$

以及 $v \in \beta(p)$。 在 (3.10) 中取 $\delta \to 0$ ，可得 v 是 (3.1) 的弱解。下面证明 (3.20) 实际上在 $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ 中强成立。 事实上，取 p_δ 作为检验函数，可得

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega |\nabla p_\delta|^2 \, dx &= \int_\Omega (f - v_\delta)\, p_\delta \, dx + \lambda \int_\Omega V \cdot \nabla \left(\int_0^{p_\delta} \beta_\delta(r) dr \right) dx \\ &= \int_\Omega (f - v_\delta)\, p_\delta \, dx - \lambda \int_\Omega \nabla \cdot V \int_0^{p_\delta} \beta_\delta(r) dr \, dx.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^r \beta_\delta(s)\, ds$ 收敛于 $\int_0^r \beta(s)\, ds$, 对任意 $r \in I\!R$, $p_\delta \to p$ 在 Ω 中几乎处处成立，并且由 (3.4), $\left| \int_0^{p_\delta} \beta_\delta(s)\ ds \right| \le v_\delta\, p_\delta$ 在 $L^1(\Omega)$ 中有界，因此我们有

$$\int_0^{p_\delta} \beta_\delta(s)\, ds \to \int_0^{p} \beta_0(s)\, ds, \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

因此，一方面我们有

$$\lim_{\delta \to 0} \lambda \int_\Omega |\nabla p_\delta|^2 \, dx = \int_\Omega (f - v)\, p \, dx - \lambda \int_\Omega \nabla \cdot V \int_0^{p} \beta_0(s)\, ds \, dx.$$

另一方面，由于 v 是 (3.1) 的弱解，很容易看出

$$\lambda \int_\Omega |\nabla p|^2 \, dx = \int_\Omega (f - v)\, p \, dx - \lambda \int_\Omega \nabla \cdot V \int_0^{p} \beta_0(s)\, ds \, dx\,;$$

这意味着 $\lim_{\delta \to 0} \int_\Omega |\nabla p_\delta|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla p|^2 \, dx$. 结合这一点与 ∇p_δ,的弱收敛，我们可得强收敛 (3.19)。

□

注 5。 从证明中可以看出，如果将(3.8) 中的 f 替换为满足以下条件的一列 $f_\delta \in L^2(\Omega)$ ，引理 *3.2* 的结论仍然成立

$$f_\delta \to f \quad in\ L^2(\Omega), \quad as\ \delta \to 0.$$

命题 ***3.2*** 的证明。 由引理 3.2 可得证明。此外，在针对 v_δ 和 p_δ. □的估计 (3.3) 和 (3.4) 中令 $\delta \to 0,$ ，即可得到这些估计仍然成立。

为了证明定理（2.2）的 BV–估计，我们现在着手证明稳态问题的以下结果

定理 3.4. 假设 $V \in W^{1,\infty}(\Omega)^N$, $\nabla \cdot V \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ 且满足 (2.9)。令 v为引理 *3.2* 给出的(3.1) 的解。那么，对于任意

$$0 < \lambda < \lambda_1 := \left(\sum_{i,k} \|\partial_{x_i} V_k\|_{L^\infty(\Omega)} \right)^{-1},$$

$v \in BV_{loc}(\Omega)$，并且我们有

$$
\begin{aligned}
(1-\lambda \sum_{i,k} \|\partial_{x_i} V_k\|_{L^\infty(\Omega)}) \sum_{i=1}^N \int_\Omega \omega_h \, d\, |\partial_{x_i} v| \le \lambda \sum_{i=1}^N \int_\Omega (\Delta \omega_h)^+ \, |\partial_{x_i} p| \, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \omega_h \, d\, |\partial_{x_i} f| \\
+\lambda \sum_{i=1}^N \int_\Omega \omega_h \, |v| \, |\partial_{x_i} (\nabla \cdot V)| \, dx,
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

对于任意紧支撑于(Ω_h) 中的 $0 \le \omega_h \in \mathcal{H}^2$，使得 $\omega_h \equiv 1$ 属于Ω_h 且

$$
\int_{\Omega \setminus \Omega_h} \varphi \, V \cdot \nabla \omega_h \, dx \le 0, \quad \text{for any } 0 \le \varphi \in L^2(\Omega). \tag{3.22}
$$

注6. 在假设$(T'3)$下，至少存在一个 w_h 满足定理 *3.4* 的假设。事实上，只需取 $\omega_h(x) = \eta_h(d(.,\Gamma))$，其中任意 $x \in \Omega$均可； $\eta_h \colon [0,\infty) \to I\!R^+$是$(0,\infty)$ 上的非递减 $\mathcal{C}^2$函数，且 $\eta_h \equiv 1$ 属于 $[h,\infty)$。在这种情况下，

$$
\nabla \omega_h = \eta_h'(d(.,\Gamma)) \, \nabla d(.,\Gamma),
$$

因此，对于任意 $0 \le \varphi \in L^2(\Omega)$，我们有

$$
\int_{\Omega \setminus \Omega_h} \varphi \, V \cdot \nabla \omega_h \, dx \;\; = \;\; \int_{\Omega \setminus \Omega_h} \eta_h'(d(.,\Gamma)) \, \varphi \, V \cdot \nabla d(.,\Gamma) \, dx \le 0,
$$

其中我们使用(2.9) 一个以及以下事实： $\nabla d(.,\Gamma) = -\nu(\pi(x))$ 在 $\Omega \setminus \Omega_h$. 中几乎处处成立。该函数可以定义为

$$
\eta_h(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le r \le c_1 h \\ e^{\frac{-C_h}{r^2 - c_1^2 h^2}} & \text{if } c_1 h \le r \le c_2 h \\ 1 - e^{\frac{-C_h}{h^2 - r^2}} & \text{if } c_2 h \le r \le h \\ 1 & \text{if } h \le r \end{cases}
$$

其中 $0 < c_1 < c_2 < 1$ 和 $C_h > 0$ 给定，满足 $2c_2^2 - c_1^2 = 1$ 和 $e^{\frac{-C_h}{M_h}} = 1 - e^{\frac{-C_h}{M_h}}$，其中$M_h$：$= (c_2^2 - c_1^2)h^2 = (1 - c_2^2)h^2$. 例如，可以取 $c_1 = 1/2$ 和 $c_2 = \sqrt{5}/(2\sqrt{2})$。可见

$$
\eta_h'(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le r \le c_1 h \\ \dfrac{2rC_h}{(r^2 - c_1^2 h^2)^2} e^{\frac{-C_h}{r^2 - c_1^2 h^2}} & \text{if } c_1 h \le r \le c_2 h \\ \dfrac{2rC_h}{(h^2 - r^2)^2} e^{\frac{-C_h}{h^2 - r^2}} & \text{if } c_2 h \le r \le h \\ 0 & \text{if } h \le r \end{cases}
$$

在 $I\!R \setminus \{c_2 h\}$. 上连续且至少可微。因此 $\eta_h \in H^2(\Omega)$。

为证明定理 3.4，我们再次使用正则化问题 (3.8)，并令 $\varepsilon \to 0.$。首先，我们证明以下关于一般问题任意弱解的引理

$$
v - \Delta \beta^{-1}(v) + \nabla \cdot (v \, V) = f \text{ in } \Omega, \tag{3.23}
$$

β 是一个给定的非减函数，假设其具有正则性（至少为 $\mathcal{C}^2$）。

引理 3.3。 在定理 *3.4* 的假设下，我们进一步假设 $f \in W^{1,\,2}_{loc}(\Omega)$。考虑满足 $v \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ 中的 (3.23) 的函数。于是，对于每个 $i = 1、..N$，有

$$
\begin{aligned}
|\partial_{x_i} v| - \sum_{k=1}^{N} |\partial_{x_k} v| \sum_{k=1}^{N} |\partial_{x_i} V_k| - \Delta |\partial_{x_i} \beta^{-1}(v)| + \nabla \cdot (|\partial_{x_i} v|\, V) \\
\leq |\partial_{x_i} f| + |v|\, |\partial_{x_i} (\nabla \cdot V)| \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

证明。 设 $p := \beta^{-1}(v)$。 由 (3.23) 以及 f 和 V的正则性，不难看出v， $p \in H^2_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$，并且对每个 $i = 1$，$...N$，偏导数 $\partial_{x_i} v$ 和 $\partial_{x_i} p$ 满足以下方程

$$
\partial_{x_i} v - \Delta \partial_{x_i} p + \nabla \cdot (\partial_{x_i} v\, V) = \partial_{x_i} f - (\nabla v \cdot \partial_{x_i} V + v\, \partial_{x_i} (\nabla \cdot V)), \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.25}
$$

由稠密性可知，我们可以在 (3.25) 中取 $\xi H_\sigma(\partial_{x_i} v)$ 作为检验函数，其中 $\xi \in H^2(\Omega)$ 在 Ω 中紧支撑，且 H_σ 由 (3.9) 给出。于是得到

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(\partial_{x_i} v\, \xi H_\sigma(\partial_{x_i} v) + \nabla \partial_{x_i} p \cdot \nabla (\xi H_\sigma(\partial_{x_i} v)) \Big)\, dx - \int_\Omega \partial_{x_i} v\, V \cdot \nabla (\xi H_\sigma(\partial_{x_i} v))\, dx \\
&= \int_\Omega \partial_{x_i} f\, \xi H_\sigma(\partial_{x_i} v)\, dx - \int_\Omega (\nabla v \cdot \partial_{x_i} V + v\, \partial_{x_i} (\nabla \cdot V))\, \xi H_\sigma(\partial_{x_i} v)\, dx.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

为令 $\sigma \to 0$，时取极限，我们首先注意到

$$
H'_\sigma(\partial_{x_i} v)\, \partial_{x_i} v = \frac{1}{\sigma}\, \partial_{x_i} v\, \chi_{[|\partial_{x_i} v| \leq \sigma]} \to 0, \quad \text{in } L^\infty(\Omega)\text{-weak}^*. \tag{3.27}
$$

因此，(3.26) 第一部分的最后一项满足

$$
\begin{aligned}
\lim_{\sigma \to 0} \int_\Omega \partial_{x_i} v\, V \cdot \nabla (\xi H_\sigma(\partial_{x_i} v))\, dx &= \int_\Omega |\partial_{x_i} v|\, V \cdot \nabla \xi\, dx + \lim_{\sigma \to 0} \int_\Omega \partial_{x_i} v\, \nabla \partial_{x_i} v \cdot V H'_\sigma(\partial_{x_i} v)\, \xi\, dx \\
&= \int_\Omega |\partial_{x_i} v|\, V \cdot \nabla \xi.
\end{aligned}
$$

另一方面，我们注意到

$$
\int_\Omega \nabla \partial_{x_i} p \cdot \nabla (\xi H_\sigma(\partial_{x_i} v))\, dx = \int_\Omega H_\sigma(\partial_{x_i} v) \nabla \partial_{x_i} p \cdot \nabla \xi\, dx + \int_\Omega \xi\, \nabla \partial_{x_i} p \cdot \nabla H_\sigma(\partial_{x_i} v)\, dx.
$$

由于 $\text{Sign}_0(\partial_{x_i} v) = \text{Sign}_0(\partial_{x_i} p)$，第一项满足

$$
\lim_{\sigma \to 0} \int H_\sigma(\partial_{x_i} v) \nabla \partial_{x_i} p \cdot \nabla \xi\, dx = - \int |\partial_{x_i} p|\, \Delta \xi\, dx.
$$

对于第二项，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega \xi\,\nabla\partial_{x_i}p\cdot\nabla H_\sigma(\partial_{x_i}v)\,dx &= \lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega \xi\,H'_\sigma(\partial_{x_i}v)\,\nabla\partial_{x_i}p\cdot\nabla\partial_{x_i}v\,dx\\ &= \lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega \xi\,H'_\sigma(\partial_{x_i}v)\,\nabla(\beta'(v)\partial_{x_i}v)\cdot\nabla\partial_{x_i}v\,dx\\ &= \lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega \xi\,H'_\sigma(\partial_{x_i}v)\,\beta'(v)\,\|\nabla\partial_{x_i}v\|^2\,dx\\ &\quad+\lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega \xi\,H'_\sigma(\partial_{x_i}v)\,\partial_{x_i}v\,\beta''(v)\nabla v\cdot\nabla\partial_{x_i}v\,dx\\ &\geq \lim_{\sigma\to 0}\int_\Omega \xi\,H'_\sigma(\partial_{x_i}v)\,\partial_{x_i}v\,\beta''(v)\nabla v\cdot\nabla\partial_{x_i}v\,dx\\ &= 0,\end{aligned}$$

这里我们再次使用 (3.27)。因此，将 $\sigma\to 0$ 代入 (3.26)，并再次利用 $\mathrm{Sign}_0(\partial_{x_i}v)=\mathrm{Sign}_0(\partial_{x_i}p)$这一事实，得到

$$\begin{aligned}|\partial_{x_i}v|-\Delta|\partial_{x_i}p|+\nabla\cdot(|\partial_{x_i}v|\,V)\leq \mathrm{Sign}_0(\partial_{x_i}v)\partial_{x_i}f-(\nabla v\cdot\partial_{x_i}V\\ +v\,\partial_{x_i}(\nabla\cdot V))\,\mathrm{Sign}_0(\partial_{x_i}v)\quad\text{in }\mathcal{D}'(\Omega).\end{aligned}$$

最后，利用 $|\nabla v\cdot\partial_{x_i}V|\leq\sum_k|\partial_{x_k}v|\sum_k|\partial_{x_i}V_k|$这一事实，即可得到引理的结论。□

定理 *3.4* 的证明。 在定理 3.4 的假设下，对于任意 $\epsilon>0$，考虑 f_ε 的一个正则化 f，满足 $f_\varepsilon\to f$ 在 $L^1(\Omega)$ 中，并且

$$\int_\Omega \xi\,|\partial_{x_i}f_\varepsilon|\,dx\to\int_\Omega \xi\,d\,|\partial_{x_i}f|\quad\text{for any }\xi\in\mathcal{C}_c(\Omega)\text{ and }i=1,...N.$$

根据引理 3.1，令 v_ε 为问题 (3.1) 的解，其中将 f 替换为正则化 f_ε。将引理 3.3 中的 V 替换为 λV，并将 β^{-1} 替换为 $\lambda\,\beta_\varepsilon^{-1}$，应用该引理可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\partial_{x_i}v_\varepsilon|\,\xi\,dx-\lambda\int_\Omega\sum_{k=1}^N|\partial_{x_i}V_k|\sum_{k=1}^N|\partial_{x_k}v_\varepsilon|\,\xi\,dx\leq\lambda\sum_{k=1}^N\int_\Omega|\partial_{x_i}p_\varepsilon|\,(\Delta\xi)^+\,dx+\int_\Omega|\partial_{x_i}f_\varepsilon|\,\xi\,dx\\ +\lambda\int_\Omega|v_\varepsilon|\,|\partial_{x_i}(\nabla\cdot V)|\,\xi\,dx+\lambda\int_\Omega|\partial_{x_i}v_\varepsilon|\,V\cdot\nabla\,\xi\,dx\quad\text{for any }i=1,...N\text{ and }0\leq\xi\in\mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

由稠密性可知，我们可以取定理中给出的 $\xi=\omega_h$，使最后一项非正，从而得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\partial_{x_i}v|\,\omega_h\,dx-\lambda\sum_k\|\partial_{x_i}V_k\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\sum_k|\partial_{x_k}v|\,\omega_h\,dx\leq\lambda\sum_k\int_\Omega|\partial_{x_i}p|\,(\Delta\omega_h)^+\,dx\\ +\int_\Omega|\partial_{x_i}f|\,\omega_h\,dx+\lambda\int_\Omega|v\,|\,|\partial_{x_i}(\nabla\cdot V)|\,\omega_h\,dx,\quad\text{for any }i=1,...N.\end{aligned}$$

综上，对于 $i=1,\ ...N$，并利用 λ_1 的定义，我们可以推得

$$\begin{aligned}\sum_i\int_\Omega|\partial_{x_i}v_\varepsilon|\,\omega_h\,dx-\lambda\lambda_1\sum_k\int_\Omega|\partial_{x_k}v_\varepsilon|\,\omega_h\,dx\leq\lambda\sum_i\int_\Omega(\Delta\omega_h)^+\,|\partial_{x_i}p_\varepsilon|\,dx\\ +\int_\Omega\sum_i|\partial_{x_i}f_\varepsilon|\,\omega_h\,dx+\lambda\int_\Omega|v_\varepsilon|\sum_i|\partial_{x_i}(\nabla\cdot V)|\,\omega_h\,dx,\end{aligned}$$

于是，相应的性质 (3.21) 对 v_ε. 也成立。由 (3.3) 和 (3.4) 可知，v_ε 和 $\partial_{x_i} p_\varepsilon$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界。这意味着，对于任意 $\omega \subset\subset$ ， $\sum_i \int_\omega |\partial_{x_i} v_\varepsilon|\, dx$ 在 Ω 上有界。因此， v_ε 在 $BV_{loc}(\Omega)$ 中有界。结合 L^1- 界 (3.3)，特别地，必要时取一个子列，可知 (3.18) 中的收敛在 $L^1(\Omega)$ 中也成立，进而在 $v \in BV_{loc}(\Omega)$ 中也成立。最后，在 (3.24) 中令 $\varepsilon \to 0$ ，并进一步利用 (3.19) 以及变差测度 $|\partial_{x_i} v_\varepsilon|$ 的下半连续性，我们推得 (3.21)。□

注7. 请注意，在证明局部 BV 估计时，我们使用条件 $(T'3)$ ，并通过 *Theorem 3.4* 中引入的 w_h 来进行证明。事实上，一旦项 $\int_\Omega |\partial_{x_i} v_\varepsilon|\, V \cdot \nabla \xi\, dx$ 非正，局部 BV 估计便可由引理 *3.3* 得出。显然，通过使用 $d(.,\partial\Omega)$ 构造 ω_h ，基本上与条件 $(T'3)$ 相关。否则，这一条件可直接由以下假设替代

$$\exists\, 0 \le \omega_h \in \mathcal{H}^2(\Omega_h),\ support(\omega_h) \subset\subset \Omega, \omega_{h_{/\Omega_h}} \equiv 1 \ and\ (3.22)\ is\ fulfilled.$$

4. 演化问题的证明

根据命题 3.2 可知，当 ε 足够小时，(2.3) 中给出的 ε-近似解 u_ε 是良定义的。为证明定理 2.1，我们需要令 $\varepsilon \to 0$. 并取极限

引理4.4. 设$(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ 是问题（*2.4*）的一个解，则

(1) 对于任意 $q \in [1,\infty]$，有

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)} \le \mathcal{M}_q^\varepsilon(t) \quad for\ any\ t \ge 0, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{M}_q^\varepsilon(t) := \left(\|u_0\|_{L^q(\Omega)} + \int_0^t \|f_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)}\, dt \right) e^{(q-1)\int_0^t \|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}}.$$

(2) 对于每个 $\varepsilon > 0$，有

$$\int_\Omega j(u_\varepsilon(t)) + \int_0^t\int_\Omega |\nabla p_\varepsilon|^2 \le \int_0^t\int_\Omega f_\varepsilon\, p_\varepsilon\, dx + \int_0^t\int (\nabla\cdot V)^-\ p_\varepsilon\, u_\varepsilon\, dx + \int_\Omega j(u_0). \tag{4.2}$$

特别地，有

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega j(u_\varepsilon)\, dx + \int_\Omega |\nabla p_\varepsilon|^2\, dx \le C(N,\Omega)\left(\int_\Omega |f_\varepsilon|^2\, dx + \|(\nabla\cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)}\, (\mathcal{M}_2^\varepsilon(t))^2 \right) \quad in\ \mathcal{D}'(0,T). \tag{4.3}$$

(3) 若 $u_0 \ge 0$ 且 $f \ge 0$，则 $u_\varepsilon \ge 0$.

证明. 由命题 3.2，问题（2.2）的解序列 $(u_i)_{i=1,\dots n}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中定义良好，并且满足

$$\int_\Omega u_{i+1}\, \xi + \varepsilon \int_\Omega \nabla p_{i+1}\cdot\nabla\xi - \varepsilon \int_\Omega u_{i+1}\, V_i\cdot\nabla\xi = \int_\Omega u_i\, \xi + \int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon}\int_\Omega f_i\, \xi \quad \text{for } i = 0,\dots,n-1.$$

由（3.3）可得

$\|u_i\|_{L^q(\Omega)} \le \|u_{i-1}\|_{L^q(\Omega)} + \varepsilon\, \|f_i\|_{L^q(\Omega)} + \varepsilon\, (q-1)\, \|(\nabla\cdot V_i)^-\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_i\|_{L^q(\Omega)}$ 并且 $u_i \ge 0$.通过归纳法可得，对于任意 $t \in [0,T)$，我们有

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^q(\Omega)} + \int_0^T \|f_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)}\, dt + (q-1)\int_0^T \|(\nabla\cdot V_i)^-\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)}\, dt.$$

利用格朗沃尔引理，我们推出（4.1）。利用以下事实:

$$(u_i - u_{i-1})\, p_i \geq j(u_i) - j(u_{i-1})$$

and

$$\int u_i\, V_i \cdot \nabla p_i \leq \int\int (\nabla \cdot V_i)^-\, p_i\, u_i,$$

我们得到

$$\int_\Omega j(u_i) + \varepsilon \int_\Omega |\nabla p_i|^2 \leq \varepsilon \int_\Omega f_i\, p_i\, dx + \varepsilon \int (\nabla \cdot V_i)^-\, p_i\, u_i\, dx + \int_\Omega j(u_{i-1}).$$

将这个恒等式对 $i = 1,....,$ 求和，并利用 u_ε、 p_ε 和 f_ε, 的定义，我们得到 (4.2)。最后，不难看出，(4.3) 是将 (4.1) 和 (4.2) 与庞加莱不等式及杨氏不等式结合后得到的直接推论。□

定理 ***2.1*** 的证明。 注意到，(2.5) 和 (2.7) 分别是由 (4.1) 及 $q = 2$ 得出的。至于 $\tilde{u}_\varepsilon,$ ，我们有 (4.3)

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t) = (t - t_i)\, \partial_t \tilde{u}_\varepsilon(t), \quad \text{for any } t \in]t_{i-1}, t_i],\ i = 1, ...n.$$

由于 u_ε、 p_ε 和 f_ε 分别在 $L^2(Q)$ $L^2(0,T;\ H^1_{\Gamma_D}(\Omega))$ 和 $L^2(Q)$ 中有界，我们看到 $\partial_t \tilde{u}_\varepsilon$ 在 $L^2(0,T;\ H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega))$ 中有界。结合 $\tilde{u}_\varepsilon$ 在 $L^2(Q)$ 中有界这一事实，我们依次推出 (2.6)。接着，在 (2.4) 中令 $\varepsilon \to 0$ ，可得一对 (u,p) 满足弱形式 (2.8)。为了证明 $u \in \beta(p)$ 在 Q 中几乎处处成立，我们使用非常弱的奥宾结果（参见 [1] 或 [13]）。结合 (2.5)、(2.7) 以及 $\partial_t \tilde{u}_\varepsilon$ 在 $L^2(0,T;\ H^{-1}_{\Gamma_D}(\Omega))$ 中有界这一事实，我们首先推得，当 $\tau \to 0$ 时，有

$$\int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon\, p_\varepsilon\, \varphi\, dxdt \to \int_0^T \int_\Omega u\, p\, \varphi\, dxdt \quad \text{for any } \varphi \in \mathcal{D}(Q).$$

然后，利用 $u_\varepsilon \in \beta(p_\varepsilon)$ 在 Q 中几乎处处成立这一事实，我们得出

$$u \in \beta(p) \quad \text{a.e. in } Q,$$

根据明蒂技巧（极大单调图的闭性）：由 $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $L^2(Q)$、 $p_\varepsilon \rightharpoonup p$ in $L^2(Q)$（或在 $L^2(0,\ T;\ H^1)$ 中），以及乘积收敛 $\int_Q u_\varepsilon p_\varepsilon \varphi \to \int_Q up\, \varphi$ for all $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$，可推得极限对 $(p,\ u)$ 属于 β 的图。

□

引理 4.5. 在定理 *3.4* 的假设下，对于任意 $\omega \subset\subset \Omega$，存在 $0 \leq \xi \in \mathcal{C}^2_c(\Omega)$ 使得 $\xi \chi_\omega \equiv 1$，并且

$$\sum_{j=1}^N \int \xi\, d|\partial_{x_j} u_\varepsilon(t)| \leq e^{\lambda_V T} \sum_{j=1}^N \left(\int (\Delta \xi)^+\, |\partial_{x_j} p_\varepsilon|\, dx + \int \xi\, |u_\varepsilon|\, |\partial_{x_j}(\nabla \cdot V)|\, dx \right.$$
$$\left. + \int \xi\, d|\partial_{x_j} f_\varepsilon(t)| + \int \xi\, d|\partial_{x_j} u_0| \right),$$

证明. 我们固定定理 3.4 给出的 ξ。下面证明

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int \xi\, d|\partial_{x_j}u_\varepsilon(t)| - \int_0^T\!\!\int \xi\, d|\partial_{x_j}u_\varepsilon(t)|\, dt\right) \le \sum_{j=1}^{N}\int_0^T\!\!\left(\int (\Delta\xi)^+\,|\partial_{x_j}p_\varepsilon|\, dx + \int \xi\,|u_\varepsilon|\,|\partial_{x_j}(\nabla\cdot V)|\, dx + \int \xi\, d|\partial_{x_j}f_\varepsilon(t)| + \int \xi\, d|\partial_{x_j}u_0|\right),$$

回顾一下， u_i 是一个解

$$u_i - \varepsilon\,\Delta p_i + \varepsilon\,\nabla\cdot(u_i\,V_i) = \varepsilon\, f_i, \quad \text{with } u_i \in \beta(p_i) \text{ for each } i = 1, ..., n.$$

根据定理 3.4，我们有

$$(1-\varepsilon\lambda_V)\sum_{k=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_k}u_i| \le \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\int (\Delta\xi)^+\,|\partial_{x_k}p_i|\, dx + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\int \xi\,|u_i|\,|\partial_{x_k}(\nabla\cdot V_i)|\, dx + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_k}f_i| + \sum_{k=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_k}u_{i-1}|,.$$

这里我们用到了以下事实

$$|\partial_{x_k}(\varepsilon\, f_i + u_{i-1})| \le \varepsilon\,|\partial_{x_k}f_i| + |\partial_{x_k}u_{i-1}|.$$

根据 f_i的定义，我们得到

$$(1-\varepsilon\lambda_V)\sum_{k=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_k}u_i| \le \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\int (\Delta\xi)^+\,|\partial_{x_k}p_i|\, dx + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\int \xi\,|u_i|\,|\partial_{x_k}(\nabla\cdot V_i)|\, dx + \sum_{k=1}^{N}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\!\!\int \xi\, d|\partial_{x_k}f| + \sum_{k=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_k}u_{i-1}|.$$

从 $i = 1$ 迭代到 n，这意味着对于任意 $t \in [0, T)$，我们有

$$\sum_{k=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_k}u_\varepsilon(t)| - \lambda_V\sum_{k=1}^{N}\int_0^T\!\!\int \xi\, d|\partial_{x_k}u_\varepsilon(t)|\, dt \le \sum_{k=1}^{N}\int_0^T\!\!\int (\Delta\xi)^+\,|\partial_{x_k}p_\varepsilon|\, dxdt + \sum_{k=1}^{N}\int_0^T\!\!\int \xi\,|u_\varepsilon|\,|\partial_{x_k}(\nabla\cdot V_\varepsilon)|\, dxdt + \sum_{k=1}^{N}\int_0^T\!\!\int \xi\, d|\partial_{x_k}f|dt + \sum_{k=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_k}u_0|.$$

因此，应用格朗沃尔不等式即可得出该引理的结论。 □

定理 ***2.2*** 的证明。 对于固定的 $t \in (0,\ T)$ 和 $\omega \subset\subset \Omega$， 根据引理 4.5，我们知道存在 $0 \le \xi \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$，使得 $\xi\chi_\omega \equiv 1$ 并且

$$\sum_{j=1}^{N}\int \xi\, d|\partial_{x_j}u_\varepsilon(t)| \le e^{\lambda_V T}\sum_{j=1}^{N}\left(\int (\Delta\xi)^+\,|\partial_{x_j}p_\varepsilon|\, dx + \int \xi\ |u_\varepsilon|\,|\partial_{x_j}(\nabla\cdot V)|\, dx + \int \xi\, d|\partial_{x_j}f_\varepsilon(t)| + \int \xi\, d|\partial_{x_j}u_0|\right),$$

将其与 (4.1) 和 (4.3) 结合起来，我们可以找到一个常数 $C := C(\omega,\ N,\ \Omega)$，它仅依赖于 ω 和庞加莱不等式，使得

(4.5)

$$\sum_{j=1}^{N} |\partial_{x_j} u_\varepsilon(t)|(\omega) \le C \left(1 + \int_0^T \int_\Omega |f_\varepsilon|^2 \, dx + \|(\nabla \cdot V)^-\|_{L^\infty(\Omega)} \, (\mathcal{M}_2)^2 + \sum_{j=1}^{N} \int |\partial_{x_j} (\nabla \cdot V)|^2 \, dx \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \int_0^T |\partial_{x_j} f(t)|(\Omega) + \sum_{j=1}^{N} |\partial_{x_j} u_0|(\Omega) \right), \quad \text{for any } t \in (0,T).$$

因此，对于任意 $\omega \subset\subset \Omega$ $\sum_i \int_\omega |\partial_{x_i} u_\varepsilon| \, dx$ 有界。因此，$u_\varepsilon(t)$在 $BV(\omega)$ 中有界，并利用（2.5），我们推得 $u(t) \in BV(\omega)$。此外，令 $\varepsilon \to 0$ 代入（4.5），并利用变差测度的下半连续性 $|\partial_{x_i} u_\varepsilon(t)|$，我们得到极限 u满足（2.10）。

□

致谢

本研究得到摩洛哥国家科学与技术研究中心在 FINCOM 计划下的资助。N. Igbida 对索维拉高等技术学院及其工作人员所给予的热情接待和良好的工作环境表示衷心感谢。

参考文献

[1] B. Andreianov、C. Cances 和 A. Moussa。有界变差系数退化抛物—椭圆型偏微分方程离散化的非线性时间紧性结果及其应用。《J. Func. Anal.》273（2017），第 12 期，3633–3670。[2] J. Carrillo。非线性退化问题的熵解。《Arch. Rational Mech. Anal.》147（1999），269–361。[3] G. Crippa、C. Donadello 和 L. Spinolo。具有有界变差系数的连续性方程的初边值问题。《Journal Math. Pure Appl.》102（2014），第 1 期，79–98。[4] G. Crippa、C. Donadello 和 L. Spinolo。关于具有粗糙系数的连续性方程初边值问题的注记。载于 HYP2012 会议论文集（2012）。[5] N. David 和 M. Schmidtchen。包含对流效应的肿瘤生长模型的不可压缩极限。《Communications on pure and applied Mathematics》77（2024），第 5 期，2613–2650。[6] G. De Philippis、A. Mészáros、F. Santambrogio 和 B. Velichkov。最优传输中的有界变差估计及其应用。《Arch. Rational Mech. Anal.》219（2016），829–860。[7] S. Di Marino 和 A. R. Mészáros。具有密度约束的演化方程的唯一性问题。《Mathematical Mod. Meth. App. Sci.》26（09），1761–1783。[8] H. Ennaji、N. Igbida 和 G. Jradi。利用最小流问题进行预测校正行人流。《Math. Models & Methods Appl. Sci.》34（2024），第 3 期，385–416。[9] N. Igbida。 L^1理论：具有线性漂移的赫勒-肖流。《Math. Models & Methods Appl. Sci.》33 7，1545 2023 1576（），第 – 期。[10] N. Igbida。 L^1理论：具有线性漂移的多孔介质方程的不可压缩极限。《J. Differential Equations》416（2025），第 2 部分，1015–1051。[11] N. Igbida。非线性偏微分方程的最小流最速下降方法。https://arxiv.org/abs/2402.02134。[12] B. Maury、A. Roudneff-Chupin 和 F. Santambrogio。梯度流型宏观人群运动模型。《Math. Models & Methods Appl. Sci.》20（2010），第 10 期，1787–1821。[13] A. Moussa。经典 Aubin–Lions 引理的若干变体。《J. of Evolution Equations》16（2016），65–93。[14] F. Santambrogio。应用数学家的最优传输。Birkäuser，2015。[15] J. L. Vázquez。多孔介质方程：数学理论。牛津大学出版社，2007。