arXiv:2601.03756v1 [math.GT] 7 Jan 2026

德恩填充的群论视角：性质 P 猜想及其后续发展

伊藤哲也、茂手木公彦和寺垣内政一

Abstract. 由 Kronheimer 和 Mrowka 证明的性质 P 猜想断言，对非平凡纽结进行非平凡德恩手术所得到的任何 3维流形都不是单连通的。我们从群论视角提出研究德恩填充的新观点，这些观点源于性质 P 猜想的若干变体。

1. Introduction

Poincar´最初曾猜想，任何同调平凡的闭 3维流形都与 3维球面同胚 S^3 [32]。然而，1904 年，Poincar´构造了一个非凡的 3维流形，它的同调平凡，但其基本群非平凡。这个 3维流形如今称为 Poincar´同调 3维球面；这个例子促使他将上述猜想修正为真正的Poincar´猜想，该猜想断言，任何基本群平凡的闭 3维流形都与 S^3同胚。

1910年，在其著名论文中， [10] Dehn 引入了所谓的德恩手术，并奠定了无限群论的基础。利用德恩手术，他构造了无限多个同调 3-球；值得注意的是，在 Dehn 的工作之前，人们只知道 Poincar´e 的例子（Poincar´e 同调 3-球）。

我们可以想象，曾有人尝试利用德恩手术寻找庞加莱猜想的反例。后来，Bing 和 Martin [4]提出了性质 P 猜想，该猜想断言，对非平凡纽结进行任何非平凡的德恩手术，都不会产生单连通的 3 维流形。从那以后，性质 P 猜想一直在 3 维拓扑学中占据重要地位，最终 Kronheimer 和 Mrowka

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：57K10，次要分类：57K30、57M05、57M07、20F65。*Key words and phrases.* 德恩填充、纽结群、性质 P、周边 Magnus 性质、德恩填充平凡化、剩余有限性。第一位署名作者部分获得日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 19K03490、21H04428、23K03110。第二位署名作者部分获得日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 25K07018、21H04428、23K03110、23K20791。第三位署名作者部分获得日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 20K03587、25K07004。

[24] 利用规范理论和辛拓扑肯定地解决了这一猜想。

本文从群论的角度探讨德恩填充研究的新视角，其动机来自性质 P。

2. Dehn filling and Property P conjecture

设 K 是 S^3 中的一个非平凡纽结，其外部为 $E(K)$。对 $E(K)$ 进行德恩填充是一种几何操作：将实心环面附加（填入）到 $E(K)$ 上，从而得到闭的 3维流形 $K(r)$。将实心环面附加到 $E(K)$ 上有无限多种方式。每种附加方式都可以用 $\partial E(K)$ 上的“斜率”来指定。

由环定理，包含映射 $i\colon \partial E(K) \to E(K)$ 诱导出单射 $i_*\colon \pi_1(\partial E(K)) \to \pi_1(E(K))$，因此我们得到子群 $i_*(\pi_1(\partial E(K))) \subset \pi_1(E(K))$。我们将 $\pi_1(E(K))$ 记为 $G(K)$，称其为 K 的纽结群；将 $i_*(\pi_1(\partial E(K)))$ 记为 $P(K)$，称其为 K 的周边子群。$G(K)$ 中的斜率元素是 $P(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 中的本原元素 γ，由 $\partial E(K)$ 中的一条定向简单闭曲线表示。我们将 $G(K)$ 中 γ 的正规闭包记为 $\langle\langle \gamma \rangle\rangle$。利用 K 的标准子午线-经线对 (μ, λ)，每个斜率元素 γ 都可表示为 $\mu^p\lambda^q$，其中 p、q 是互素整数。按照惯例，斜率指 $\partial E(K)$ 中无向简单闭曲线的同痕类。斜率元素 γ 及其逆元 γ^{-1} 表示同一个斜率（忽略其方向），该斜率与 $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty (= 1/0)\}$ 对应，其中子午线对应于 $1/0$。由于 $\langle\langle \gamma \rangle\rangle = \langle\langle \gamma^{-1} \rangle\rangle$，我们可以将它们记为 $\langle\langle p/q \rangle\rangle$。因此，每个斜率都定义了正规子群 $\langle\langle p/q \rangle\rangle \subset G(K)$；为简便起见，我们将其称为斜率 p/q 的正规闭包。

沿边界将实心环面 $S^1 \times D^2$ 粘到 $E(K)$ 上，使得 $\{*\} \times \partial D^2$ 表示斜率 r，从而得到闭 3维流形 $K(r)$。我们称 $K(r)$ 为通过在 $E(K)$ 上进行 r–德恩填充 得到的 3-流形。（$K(r)$ 也称为通过在 K 上进行 r–德恩手术 得到的 3-流形。）

那么，范坎彭定理告诉我们，$\pi_1(K(p/q)) = G(K)/\langle\langle \mu^p\lambda^q \rangle\rangle = G(K)/\langle\langle p/q \rangle\rangle = G(K)/\langle\langle r \rangle\rangle$，由此得到一个自然的满同态

$$p_r\colon G(K) \to G(K)/\langle\langle r \rangle\rangle = \pi_1(K(r)),$$

我们称其为德恩填充满同态，更具体地说，是 r–德恩填充满同态。德恩填充满同态给出了以下短正合列，它联系了 $G(K)$ $\langle\langle r \rangle\rangle$ 与 $\pi_1(K(r))$；

$$1 \to \langle\langle r \rangle\rangle \to G(K) \xrightarrow{p_r} G(K)/\langle\langle r \rangle\rangle = \pi_1(K(r)) \to 1.$$

许多人曾关心能否通过对纽结进行德恩手术，得到一个不同于3-球面的同伦3-球面。另一方面，许多纽结被证明不存在非平凡手术能产生单连通的3维流形，Bing 和 Martin [4]提出了性质 P。

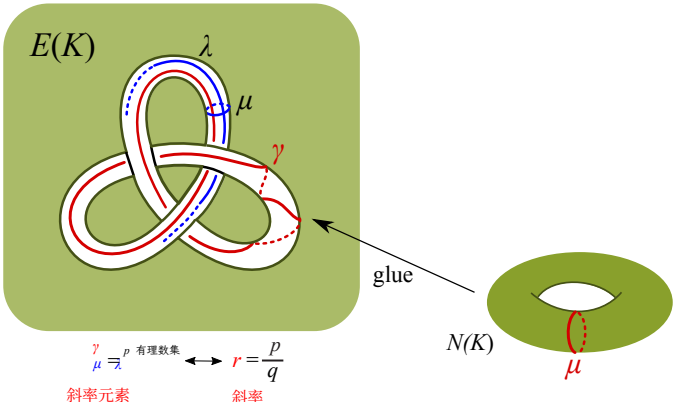

FIGURE 2.1. 德恩填充

性质 P。对 $E(K)$ 进行的每一种非平凡德恩填充，所得的3–流形都不是单连通的。

随后，他们提出了以下性质 P 猜想。

猜想 2.1（性质 P 猜想）。每个非平凡纽结都满足性质 *P*，即对于每个非平凡纽结 K，$\pi_1(K(r)) \neq 1$ 对于任意$r \in \mathbb{Q}$。

注意，平凡纽结不满足性质 P。事实上，对其外部进行 $1/n$– 德恩填充可得到 S^3。

3. BRIEF HISTORY BEFORE THE SOLUTION TO THE PROPERTY P CONJECTURE

性质 P 猜想为 Dehn手术理论提供了重要的研究动力，围绕这一猜想也有许多研究。下面回顾一些与性质 P 猜想相关的重要结果。

Culler、Gordon、Luecke 和 Shalen 提出的循环手术定理[9] 是其中一项重要成果。该定理在更一般的情形下也成立，但此处我们只讨论对 S^3中的纽结进行的德恩手术。

定理 3.1（循环手术定理 [9]）。设 K 是 S^3 中一个非环面结。假设 $K(p_1/q_1)$ 和 $K(p_2/q_2)$ 的基本群都是循环群。那么距离 $\Delta(p_1/q_1, p_2/q_2)$ 小于或等于一。因此，这样的斜率至多有三个。

在此定理中，距离 $\Delta(p_1/q_1,\ p_2/q_2)$（由 [16] 引入）是两个斜率 p_1/q_1 和 p_2/q_2之间的最小几何交点数，其定义为 $|p_1q_2 - p_2q_1|$。注意， Δ 不满足三角不等式，因此不是通常意义上的距离函数；但为了描述例外斜率，距离 Δ这一概念既方便又非常有用。由于

$K(1/0) = S^3$ 具有平凡的、因而也是循环的基本群，由此定理我们得到以下结论：

•若 K 不是环面结，则只有在 $|q| = 1$ 时， $K(p/q)$ 的基本群才是循环群，即手术必须是整数手术。

对于环面结，性质 P 猜想已被证明成立 [27]。因此，注意到 $H_1(K(p/q)) \cong \mathbb{Z}_{|p|}$，循环手术定理推出

- $K(p/q)$ 仅当 $p/q = \pm 1$ 时才是单连通的。

将条件“$\pi_1(K(r)) = \{1\}$”替换为条件“$K(r) = S^3$”后，Gordon 和 Luecke 证明了以下结果。

定理 3.2 ([17])。设 K 是 S^3 中的一个非平凡纽结。那么，对于所有 $r \in \mathbb{Q}$，$K(r) \ncong S^3$。

该定理指出，$N(K) \cong K \times D^2$的子午盘边界——子午线——由外部 $S^3 - \text{int}N(K)$唯一确定。因此，该定理立即为 Tietze [35]提出的“纽结补空间猜想”给出了肯定答案。

定理 3.3 (纽结补空间定理 [17])。纽结由其补空间确定；也就是说，若存在一个从 $S^3 - K_1$ 到 $S^3 - K_2$的保定向同胚，则存在一个 S^3 的保定向同胚，将 K_1 映射到 K_2。

定理 3.2被视为性质 P 的一个特例，但其证明还给出了以下重要结果。

- 若 $K(r)$是可约的，即其中包含一个不围成任何 3-球的 2-球面，则它有一个透镜空间（$\neq S^3$， $S^2 \times S^1$）作为连通和项。这样的斜率 r 称为约化手术斜率。因此，对 S^3 中的纽结进行德恩手术所得的任何同调 3-球面都是不可约的。

如上所述，对于任意非平凡纽结 K， $\pi_1(K(r)) = \{1\}$ 仅当 $r = \pm 1$。另请注意，对于 K 的 K镜像，存在一个从 $K(-r)$ 到 $K(r)$ 的反向定向同胚。因此，要证明性质 P 猜想，只需证明 K对于非平凡纽结 K，(1) 不是单连通的。Kronheimer 和 Mrowka [24] 证明，对于任意非平凡纽结，都存在一个从 π_1 $(K(1))$ 到三维特殊正交群的非平凡表示，从而解决了性质 P 猜想。

性质 P 定理 [24]。设 K 是 S^3中的一个非平凡纽结。那么$\pi_1(K(r)) \neq 1$ 对任意 $r \in \mathbb{Q}$都成立。

4. Property P and peripheral Magnus property

回忆一下， $\pi_1(K(r)) = G(K)/\langle\langle r\rangle\rangle$。特别地，由于 $K(\infty) = S^3$，纽结群 $G(K)$由子午线正规生成，即 $G(K) = \langle\langle\infty\rangle\rangle$。因此，性质 P 定理可以改述为以下形式：无需借助德恩填充，完全用纽结群的语言来表述。

性质 P 定理（2nd 表述）。对于任意非平凡纽结，

$$\langle\langle r\rangle\rangle = \langle\langle\infty\rangle\rangle \text{ if and only if } r = \infty.$$

因此，对于所有 $r \in \mathbb{Q}$， $\langle\langle r\rangle\rangle$ 是 $G(K)$ 的真子群。

这种释义促使我们将性质 P 定理（2nd 表述）扩展到 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 中的所有斜率 r ，以建立斜率与其正规闭包之间的一一对应关系。

定理 4.1 (周边 Magnus 性质 [21])。设 K 是一个非平凡纽结，且 r， r' 是 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$中的斜率。那么

$$\langle\langle r\rangle\rangle = \langle\langle r'\rangle\rangle \text{ if and only if } r = r'.$$

我们应当强调，即使 $\langle\langle r\rangle\rangle \neq \langle\langle r'\rangle\rangle$，也可能存在同构的基本群 $\pi_1(K(r)) = G(K)/\langle\langle r\rangle\rangle$ 和 $\pi_1(K(r')) = G(K)/\langle\langle r'\rangle\rangle$。也就是说，定理 4.1 并不意味着 $\pi_1(K(r)) = \pi_1(K(r'))$ 当且仅当$r = r'$。事实上，对于三叶结 $T_{2,3}$，存在不同的有理数对 r, r' ，使得 $K(r)$ 与$K(r')$反向定向同胚。详情参见 [25] 和 [21, 命题 3.1]。

5. Dehn filling trivialization

回想一下，每个 r–德恩填充都会导出一个满同态 $p_r\colon G(K) \to G(K)/\langle\langle r\rangle\rangle = \pi_1(K(r))$，它使 $\langle\langle r\rangle\rangle \subset G(K)$ 中的元素变为平凡元。我们将这种平凡化称为德恩填充平凡化。

反过来，对于 $G(K)$ 中给定的一个非平凡元，我们关注这样的斜率r ：经过 r–德恩填充后， g 变为平凡元。下面在 $G(K)$ 上引入以下函数。

定义 5.1 （德恩填充平凡化斜率集）。设 K 是 S^3 中的一个非平凡纽结。对每个元素 $g \in G(K)$，赋予一个子集

$$\mathcal{S}_K(g) = \{r \in \mathbb{Q} \mid p_r(g) = 1 \in \pi_1(K(r))\} = \{r \in \mathbb{Q} \mid g \in \langle\langle r\rangle\rangle\} \subset \mathbb{Q},$$

我们得到一个集值函数

$$\mathcal{S}_K\colon G(K) \to 2^{\mathbb{Q}}.$$

我们称 $\mathcal{S}_K(g)$的德恩填充平凡化斜率集为 g，简称 g 的平凡化斜率集。

根据定义，对于平凡元 1， $\mathcal{S}_K(1) = \mathbb{Q}$。

一般而言，判定一个给定元素（用固定生成元表示成一个字）是否表示平凡元的问题，是由 Dehn 提出的 [10, 11]，作为一种算法问题，称为字问题。判定 $\mathcal{S}(g)$ 需要一个“参数化字问题”，而且非常困难。

函数 $\mathcal{S}_K\colon G(K) \to 2^{\mathbb{Q}}$ 远非单射。事实上，显然，对于 $G(K)$中的任意 α 和g ，德恩填充平凡化斜率集都满足 $\mathcal{S}_K(\alpha^{-1}g\alpha) = \mathcal{S}_K(g)$。

此外，我们还有以下结果。为简化记号，对于 a， $b \in G(K)$，记 $b^{-1}ab$ 为 a^b 。

定理 5.2。 设 K 为一个非平凡纽结。对于任意非平凡元素$g \in G(K)$，我们有

$$\mathcal{S}_K(g) = \mathcal{S}_K(g^{g^\alpha} g^{-2}) \text{ for any } \alpha \in G(K).$$

我们将在第 5.2 节6 中利用 3–流形群的剩余有限性证明定理 [22]。通过完全不同的方法也可在其中得到类似结果。

另一方面，由于纽结群 $G(K)$是可数的，康托尔定理表明，函数 $\mathcal{S}_K\colon G(K) \to 2^{\mathbb{Q}}$ 不是满射。

特别地，对于双曲结，我们有如下有限性性质。

定理 5.3 （有限性定理 [28, 18, 20]）。 对于任意双曲结 K，$\mathcal{S}_K$（g） 对于任意非平凡元 $g \in G$（K）总是有限的。

注 *5.4*. *(1)* 虽然对于每个非平凡元， $\mathcal{S}_K(g)$ 总是有限的，但不存在统一的上界。事实上，对于给定的整数$N > 0$，存在一个非平凡元 g ，使得 $|\mathcal{S}_K(g)| > N$[21]。*(2)* 定理 *5.3* 对环面纽结不成立。实际上，对于 (p, q)–环面结 $T_{p,q}$， $\frac{m}{n}$–对 $T_{p,q}$ 进行手术，其中 $\frac{m}{n}$ 满足 $|pqn - m| = 1$，可得到一个透镜空间，因此每个元素 $g \in G(T_{p,q})\setminus G(T_{p,q})$ 在 $\pi_1(T_{p,q}(m/n)) = \mathbb{Z}_m$ 中都变为平凡元。这意味着，$\mathcal{S}_{T_{p,q}}(g) \supset \{pq \pm 1, \frac{2pq\pm1}{2}, \dots, \frac{npq\pm1}{n}, \dots\}$。

让我们在平凡化斜率集合的背景下重新表述性质 P 定理。

性质 P 定理（3rd **表述**）。设 K 为一个非平凡纽结。对于给定的非平凡斜率 $r \in \mathbb{Q}$，存在一个元素 $g \in G$（K），使得$\mathcal{S}_K$（g） $\not\ni r$。

那么，是否可以选择这样的一个元素 g ，使得

- $\mathcal{S}_K$（g） $\ni s$ 对于给定的 $s \neq r$?
- 更具挑战性的问题是， $\mathcal{S}_K$（g） $= \emptyset$?

第一个问题引出了下面的分离性质。

分离性质。

(i) 对于给定的两个斜率 r 和 s （属于 $\mathbb{Q}$），存在一个元素 $g \in G(K)$，使得 $r \in \mathcal{S}_K(g)$ 且 $s \notin \mathcal{S}_K(g)$。(ii)对于 $\mathbb{Q}$的任意两个不相交子集 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$，存在一个元素$g \in G(K)$，使得 $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_K(g) \subset \mathbb{Q} - \mathcal{S}$。

关于 (i)，我们证明定理7.2。另请参见例子 8.2 和 8.3。关于 (ii)，正如我们在定理5.3中提到的，对于任意双曲结 K 和任意非平凡元 $g \in G(K)$，$\mathcal{S}_K(g)$ 是一个有限集，因此将注意力限制在有限子集 $\mathcal{R}$上是合理的。

在 [22]中，我们证明了关于双曲结的以下结果。若斜率 r 对应一个 塞弗特手术斜率，则 $K(r)$ 是塞弗特纤维空间。

定理 5.5 ([22])。 设 K 是一个双曲结。设 $\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_n\}$ 和$\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_m\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的任意有限非空子集，且满足 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$。假设 $\mathcal{S}$ 不包含塞弗特手术斜率。那么存在一个元素 $g \in [G(K)\ G(K)] \subset G(K)$ 使得 $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_K(g) \subset \mathbb{Q} - \mathcal{S}$。

本文将把这一结果推广为以下定理，该定理涵盖卫星结。

定理 5.6 (分离定理)。 设 K 是一个非平凡纽结，且不是环面结。设 $\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_n\}$ 和 $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_m\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的任意有限子集，且满足 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$。假设 $\mathcal{S}$ 不包含塞弗特手术斜率。那么存在一个元素 $g \in [G(K)\ G(K)] \subset G(K)$ 使得 $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_K(g) \subset \mathbb{Q} - \mathcal{S}$。

正如我们在第 8 节所观察到的，定理 5.6 并非无条件成立。

让我们转向第二个问题。由于 $G(K) = \langle\langle \mu \rangle\rangle$， $\pi_1(K(r))$ 也由单个元素 $p_r(\mu)$正规生成，即 $\pi_1(K(r)) = \langle\langle p_r(\mu) \rangle\rangle$。因此，性质 P 蕴含对于所有斜率 $r \in \mathbb{Q}$， $p_r(\mu) \neq 1$ 。

因此，我们得到如下性质 P 定理的一个等价表述；当 g 为子午线时，该表述还确定了 $\mathcal{S}(g)$。

性质 P 定理（4th 表述）。对于任意非平凡纽结 K，$\mathcal{S}_K(\mu) = \emptyset$。

这促使我们进一步寻找具有 $\mathcal{S}_K(g) = \emptyset$ 的元素。为方便起见，我们称这样的元素为 持久元素。在即将发表的论文 [23] 中，我们将详细讨论持久元素。

性质 P 定理（4th 表述）指出，对于任意非平凡纽结 K，空集都可以由 $\mathcal{S}_K(\mu)$ 实现。随后，分离性质和性质 P 定理（4th 表述）启发了以下实现性质。

实现性质。 每个有限子集 $\mathcal{R} \subset \mathbb{Q}$都可以由$\mathcal{S}_K(g)$ 实现，其中某个元素为 $g \in G(K)$。

如上所述，即使 $\mathcal{R}$ 是有限的，也可能存在两个不相交的斜率族 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$，使得不存在任何元素 $g \in G(K)$ 满足 $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_K(g) \subset \mathbb{Q} - \mathcal{S}$。这意味着，对于任意元素 g， $\mathcal{R}$都无法由 $\mathcal{S}_K(g)$ 实现。

我们讨论了双曲结的实现问题 [22]，并在一个附加条件下确立了实现性质。定理 5.5 是证明它的关键步骤。为求简洁，我们陈述最简单的情形。

定理 5.7 (实现定理 [22])。 设 K 是一个没有例外(即非双曲) 手术的双曲结。设 $\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_n\}$ 是 $\mathbb{Q}$的任意有限(可以为空) 子集。则存在一个元素 $g \in G(K)$使得 $\mathcal{S}_K(g) = \mathcal{R}$。

例 5.8。 设 K_1 为图 6_3 所示的双曲结5.1（左）。根据 [6, 定理 **1**， 1]它是按交叉数衡量的最简单的、没有例外手术的双曲结。因此，任意有限（可以为空）子集 $\mathcal{R} \subset \mathbb{Q}$ 都可表示为 $\mathcal{S}_{K_1}$（g），其中某个元素 $g \in G$（K_1）。

定理 5.9 （[22]）。 设 K 为双曲结， $\mathcal{R}$为例外手术斜率集合。则存在元素 $g \in G$（K），使得 $\mathcal{S}_K$（g） $= \mathcal{R}$。

例 5.10。 设 K_2为图-2（3，7）椒结，图5.1 （右）展示了该结。已知其例外手术斜率集合为$\{16, 17, 18, \frac{37}{2}, 19, 20\}$。于是存在元素 $g \in G$（K_2），满足 $\mathcal{S}_{K_2}$ $(\underline{g})$ $=\{16, 17, 18, \frac{37}{2}, 19, 20\}$。

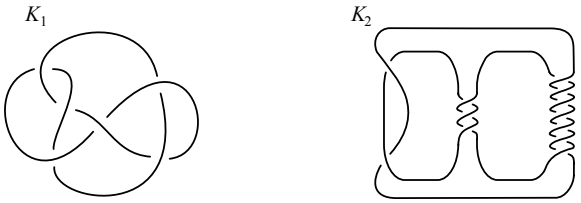

FIGURE 5.1. 没有例外手术的双曲结 K_1 以及（-2，3， 7）椒结 K_2

我们以以下待解决问题结束本节。

问题 5.11。 在适当条件下，证明非双曲纽结的实现性质。

6. Residual finiteness of 3–manifold groups and Dehn filling trivializing slope sets

对于任意双曲结 K，如果 $\mathcal{S}_K(g)$ 是无限的，那么定理 5.3 表明 $g = 1$。

问题 6.1。 如果 $|\mathcal{S}_K(g)|$ 充分大，那么满足$\mathcal{S}_K(h) = \mathcal{S}_K(g)$ 的元素 h 是否共轭于 g 或 g 的某个幂?

利用 3-流形群的剩余有限性，我们将证明以下结论。

定理 5.2。 设 K 是一个非平凡纽结。对于任意非平凡元素$g \in G(K)$，我们有

$$\mathcal{S}_K(g) = \mathcal{S}_K(g^{g^\alpha} g^{-2}) \text{ for any } \alpha \in G(K).$$

如果 $g \notin [G(K)\ G(K)]$, ，那么 $g^{g^\alpha} g^{-2}$ 与 g^{-1} 同调等价，因此它不共轭于 g^n $(n \neq -1)$。

这个结果相当一般，但要看出改变元素 α 实际上可以得到非共轭元素 $g^{g^\alpha} g^{-2}$并不那么容易。见命题6.6。将定理5.2 与 [22,定理 112]进行比较应该很有意思。

定理5.2 的证明既需要 3-流形群的剩余有限性，也需要存在非剩余有限的单关系子群。

我们先回顾一些定义。群 G 是剩余有限的，是指对每个非平凡元素 $g \in G$，都存在一个不包含 g 的有限指数正规子群。这等价于说，对每个 $1 \neq g \in G$，都存在一个同态 $\varphi\colon G \to F$ 到某个有限群 F，使得$\varphi(g) \neq 1$。

令 $\mathcal{F}(G)$ 表示 G 中的元素集合，其中每个元素在任意有限群 F以及任意同态 $\varphi\colon G \to F$ 下都映射为平凡元。根据定义， G 是剩余有限的，当且仅当 $\mathcal{F}(G) = \{1\}$。

对于 3维流形，我们有:

定理 6.2 ([19, 29, 30, 31])。 每个紧致3维流形的基本群都是剩余有限的。

设 $F_n = \langle a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n\rangle$ 是由$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n$生成的秩为 $n > 1$ 的自由群。对于元素 $w \in F_n$，我们照常将其视为 $\{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm 1}\}$ 上的约化词，并记

$$G_w := F_n/\langle\langle w\rangle\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid w\rangle,$$

这是关系子为 w 的单关系群。从F_n 到 G_w 的自然投影记作

$$\pi_w\colon F_n \to G_w.$$

定理 6.3。 假设F_n 中有两个非平凡元 v 和 w，使得

$$\pi_w(v) \in \mathcal{F}(G_w) - \{1\}.$$

那么，对于任意同态 ϕ: $F_n \to G(K)$，我们有

$$\mathcal{S}_K(\phi(w)) \subset \mathcal{S}_K(\phi(v)).$$

证明。 如果 $\mathcal{S}_K(\phi(w)) = \emptyset$，则无需证明。因此我们假设 $\mathcal{S}_K(\phi(w)) \neq \emptyset$。令 s 为 $\mathcal{S}_K(\phi(w))$中的一个斜率。由于 $p_s(\phi(w)) = 1$，存在一个同态ψ: $G_w \to \pi_1(K(s))$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{\phi} & G(K) \\ {\scriptstyle \pi_w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_s} \\ G_w = F_n/\langle\langle w \rangle\rangle & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(K(s)) \end{array}$$

反设 $s \notin \mathcal{S}_K(\phi(v))$，于是 $p_s(\phi(v)) \neq 1$。由 $\pi_1(K(s))$的剩余有限性，存在一个同态 κ: $\pi_1(K(s)) \to F$ 到一个有限群 F，使得 $\kappa(p_s(\phi(v))) = \kappa(\psi(\pi_w(v))) \neq 1$。然而，这意味着 $\kappa \circ \psi$: $G_w \to F$满足 $\kappa \circ \psi(\pi_w(v)) \neq 1$。这与假设 $\pi_w(v) \in \mathcal{F}(G_w) - \{1\}$矛盾。□

为了利用定理 6.3，我们需要一个非剩余有限的单关系群G_w 以及其中的一个元素 $\mathcal{F}(G_w) - \{1\}$。尽管最著名且最简单的非剩余有限单关系群例子是 Baumslag– Solitar 群 [1], ，这里我们使用 Baumslag–Miller–Troeger 给出的群 [2]„ 因为对于这个关系子 w， $\mathcal{F}(G_w) - \{1\}$ 包含一个形式相当简单的元素。

定理 6.4 ([2])。 设 $u, v \in F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ 是秩为 $n > 1$ 的自由群中的元素，且满足 $uv \neq vu$。令

$$w = v^{v^u} v^{-2} \in F_n,$$

以及一个单关系群

$$G_w = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid w \rangle.$$

那么 G_w 不是剩余有限的，并且对于自然投影 π_w: $F_n \to G_w$,

$$\pi_w(v) \in \mathcal{F}(G_w) - \{1\}.$$

在这个特例中应用定理 6.3 ，我们得到如下结论。

推论 6.5. 设 $u, v \in F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ 是秩为 $n > 1$ 的自由群中的元素，且满足 $uv \neq vu$。取 $w = v^{v^u} v^{-2}$。设 ϕ: $F_n \to G(K)$ 为一个同态。则对于 $g = \phi(v)$和 $h = \phi(w)$，有 $\mathcal{S}_K(g) = \mathcal{S}_K(h)$。

证明. 根据元素 u, v, w的选取，由定理 6.4 可得

$$\pi_w(v) \in \mathcal{F}(G_w) - \{1\}$$

对于自然投影 π_w: $F_n \to G_w$。

然后应用定理6.3可知

$$\mathcal{S}_K(h) = \mathcal{S}_K(\phi(w)) \subset \mathcal{S}_K(\phi(v)) = \mathcal{S}_K(g).$$

反过来，对于斜率 s，若 $p_s(g) = p_s(\phi(v)) = 1$，则

$$p_s(h) = p_s(\phi(v^{v^u} v^{-2})) = 1$$

因此 $\mathcal{S}_K(g) \subset \mathcal{S}_K(h)$。 □

定理 5.2 的证明。取 $F_2 = \langle a_1、 a_2\rangle$、 $v = a_1$ 和 $u = a_2$，并令 ϕ: $F_2 \to G(K)$ 为一个同态，使得 $\phi(v) = g$ 且 $\phi(u) = \alpha$，其中 $\alpha \in G(K)$ 任意选取。于是根据推论 6.5， $h = \phi(v^{v^u} v^{-2}) = g^{g^\alpha} g^{-2}$ 满足 $\mathcal{S}_K(h) = \mathcal{S}_K(g)$。□

这一构造可以重复。对于每个 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in G(K)$，我们递归地定义 g_i 为 $g_{i+1} = g_i^{g_i^{\alpha_i}} g_i^{-2}$，其中 $g_0 = g$。那么对于每个 i,$\mathcal{S}_K(g_i) = \mathcal{S}_K(g)$。

注意， α 可以任意选取，因此我们可以预期，通过改变 α，得到两两不共轭元素 $g^{g^\alpha} g^{-2}$ 。在下文的命题 6.6 中，我们引入共轭不变量 $r(g, \alpha) \in \mathbb{C}$ ，用于 $g^{g^\alpha} g^{-2}$ （取决于 g 是非周边还是周边的），它们具有以下性质：对于给定元素 $g \in G(K)$，若 $g^{g^\alpha} g^{-2}$与 $g^{g^{\alpha'}} g^{-2}$共轭，则 $r(g, \alpha) = r(g, \alpha')$。

我们用 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 表示 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ 中的元素，以区别于 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 中的矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$。那么 $\mathrm{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 应理解为 $\pm(a + d)$。

命题 6.6。 设 K 是双曲结， g 和 α 是 $G(K)$ 的非平凡元。则有以下结论。

(1) 假设 g 是非周边的。设 ρ: $G(K) \to PSL_2(\mathbb{C})$ 是一个全纯表示，满足 $\rho(g) = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{bmatrix}$ 且 $\rho(\alpha) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$。那么 $r(g, \alpha) = (\zeta - \zeta^{-1})^2($ $xu)^2 - (\zeta - \zeta^{-1})(xu) - 1$ （至多相差一个符号）是 $g^{g^\alpha} g^{-2}$ 的共轭类的不变量。*(2)* 假设 g 是周边的。设 ρ: $G(K) \to PSL_2(\mathbb{C})$ 是一个全纯表示，满足 $\rho(g) = \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $\rho(\alpha) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$。那么$r(g, \alpha)$ $= 2z^4\zeta^4 + 2$ （至多相差一个符号）是共轭类的不变量

of $g^{g^\alpha}g^{-2}$. In particular, if $2z^4\zeta^4+2\neq\pm 2$, then $g^{g^\alpha}g^{-2}$ is not peripheral.

证明。(1) 令 $\gamma=g^\alpha=\alpha^{-1}g\alpha$。

写作 $\rho(\gamma)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$。然后

$$\rho(g^{g^\alpha}g^{-2})=\rho(\gamma^{-1}g\gamma g^{-2})=\begin{bmatrix}ad\zeta^{-1}-bc\zeta^{-3} & bd\zeta^3-bd\zeta\\ -ac\zeta^1+ac\zeta^{-3} & -bc\zeta^3+ad\zeta\end{bmatrix}.$$

因此我们有

$$\mathrm{tr}\rho(g^{g^\alpha}g^{-2})=\pm\left(ad\left((\zeta+\zeta^{-1})-(\zeta^3+\zeta^{-3})\right)+(\zeta^3+\zeta^{-3})\right).$$

注意，$(\zeta+\zeta^{-1})-(\zeta^3+\zeta^{-3})\neq 0$。反设$\zeta+\zeta^{-1}=\zeta^3+\zeta^{-3}=(\zeta+\zeta^{-1})(\zeta^2-1+\zeta^{-2})$。那么 $\zeta^2+\zeta^{-2}=2$，这表明 $\zeta^2=1$。 $\rho(g)=I$，因此 g 是平凡的。这是一个矛盾。因此，ad 是 $g^{g^\alpha}g^{-2}$的共轭不变量。为了用 $\rho(\alpha)$ 表示 ad，我们记 $\rho(\alpha)=\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}$。

$$\text{Then } \rho(\gamma)=\rho(\alpha^{-1}g\alpha)=\begin{bmatrix}xu\zeta-yz\zeta^{-1} & yu\zeta-yu\zeta^{-1}\\ -xz\zeta+xz\zeta^{-1} & -ya\zeta+xu\zeta^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

因此我们有

$$ad=(xu\zeta-yz\zeta^{-1})(xu\zeta^{-1}-yz\zeta)=-(\zeta-\zeta^{-1})^2(xu)^2+(\zeta-\zeta^{-1})(xu)+1.$$

注意到 $\zeta-\zeta^{-1}\neq 0$，否则 $\zeta^2=1$ 和 $\rho(g)=I$，从而 $g=1$，这就矛盾了。由于 α 是任意选取的，我们预期存在无限多个元素 $\alpha\in G(K)$，使得 xu，因此 ad 取无限多个值。

(2) 令 $\gamma=g^\alpha=\alpha^{-1}g\alpha$。如上所述，

写作 $\rho(\gamma)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$。于是

$$\rho(g^{g^\alpha}g^{-2})=\rho(\gamma^{-1}g\gamma g^{-2})=\begin{bmatrix}1+cd\zeta & -2\zeta-2cd\zeta^2+d^2\zeta\\ -c^2\zeta & 2c^2\zeta^2+1-cd\zeta\end{bmatrix}.$$

因此我们有

$$\mathrm{tr}\rho(g^{g^\alpha}g^{-2})=\pm(2c^2\zeta^2+2).$$

为了用 $\rho(\alpha)$ 表示这一点，我们写作 $\rho(\alpha)=\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}$。

$$\text{Then } \rho(\gamma)=\rho(\alpha^{-1}g\alpha)=\begin{bmatrix}1+zu\zeta & u^2\zeta\\ -z^2\zeta & 1-zu\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

This implies

$$2c^2\zeta^2+2=2z^4\zeta^4+2.$$

由于 α 是任意选取的，我们预期存在无限多个元素$\alpha\in G(K)$，使得 $2z^4\zeta^4+2$ 在忽略符号的意义下取无限多个值。

回顾一下，当且仅当 $\mathrm{tr}\rho(g) = \pm 2$时， $g \in G(K)$ 是周边的。因此，如果 $2z^4\zeta^4 + 2 \neq \pm 2$，那么 $g^{g^\alpha} g^{-2}$ 不是周边的。□

例 6.7。 设 K 为八字结。取一条子午线 μ 以及一个非平凡元 h ，如图 6.1所示。

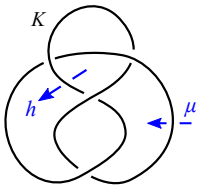

FIGURE 6.1. μ与 h 生成 G（K）。

取一个全纯表示 ρ: $G(K) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, 使得$\rho(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $\rho(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{bmatrix}$，其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$；参见 [8, 14]。那么 $\lambda = h\mu^{-1}h^{-1}\mu^2h^{-1}\mu^{-1}h$，且 $\rho(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{3}\,i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。对于斜率元素 $\mu^p\lambda^q$，有 $\rho(\mu^p\lambda^q) = \begin{bmatrix} 1 & p + 2\sqrt{3}\,qi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

为简单起见，令 $g = \mu^p\lambda^q$。由定理 5.2 可得

$$\mathcal{S}_K(g) = \mathcal{S}_K(g^{g^{h^n}} g^{-2}) \quad \text{for any integer } n > 0.$$

现在应用命题 6.6可知 $g^{g^{h^m}} g^{-2}$与 $g^{g^{h^n}} g^{-2}$共轭，当且仅当对于整数 $m, n > 0$ 有 $m = n$。

注意， $\rho(h^n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n\omega & 1 \end{bmatrix}$，且命题 ζ 6.6(2) 中的 $p + 2\sqrt{3}qi$。由此，命题 6.6(2) 表明 $g^{g^{h^m}} g^{-2}$与 $g^{g^{h^n}} g^{-2}$共轭，当且仅当 $2(-m\omega)^4\zeta^4 + 2 = 2(-n\omega)^4\zeta^4 + 2$，即 $m = n$。

7. SEPARATION PROPERTY

7.1. **两个斜率的分离**。 例 8.2 和8.3 表明，即使是分离性质 (i)，一般情况下也不成立。另一方面，在例8.2中，斜率 r_0 是一个有限手术斜率，即 $\pi_1(K(r_0))$ 是有限的；而在例 8.3中，斜率 18 是一个有限手术斜率。事实上，我们有：

引理7.1 ([21])。 设 K 是一个非平凡纽结。假设 $\langle\langle r\rangle\rangle \subset \langle\langle s\rangle\rangle$。那么 $s = r$ 或 s 是一个有限手术斜率。

结合该引理与周边 Magnus 性质（定理4.1），我们立即得到：

定理 7.2。 设 K 是一个非平凡纽结。对于给定的两个不同斜率r 和 s，若 $\mathbb{Q}$中的 s 不是有限手术斜率，则存在一个元素$g \in G(K)$使得 $r \in \mathcal{S}_K(g)$且 $s \notin \mathcal{S}_K(g)$。

证明。 由于 $r \neq s$，根据定理4。1 $\langle\langle r\rangle\rangle \neq \langle\langle s\rangle\rangle$。此外，由于 s 不是有限手术斜率，$\langle\langle r\rangle\rangle \not\subset \langle\langle s\rangle\rangle$。因此，我们有一个非平凡元$g \in \langle\langle r\rangle\rangle - \langle\langle s\rangle\rangle$。这意味着 $r \in \mathcal{S}_K(g)$，但 $s \notin \mathcal{S}_K(g)$，而 g 是所需的元素。□

注意，若 $\langle\langle r\rangle\rangle \subset \langle\langle s\rangle\rangle$ 对于不同的斜率 r 和 s成立，则 r 不是有限手术斜率，由 [21, 命题 24]可知。因此，在定理 s 中 7.2所述的 g 为有限手术斜率的情形下，我们有一个元素 $s \in \mathcal{S}_K(g)$，但$r \notin \mathcal{S}_K(g)$。

7.2. **两个有限斜率族的分离**。本小节将证明定理 5.6。我们可以应用定理 5.5的证明。注意， [22, 断言 6。1] 对于非平凡纽结成立，因为卫星结至多有一个约化手术；见 [34]。（实际上，如果 K 是一个可进行约化手术的卫星结，那么它是一个非平凡纽结的缆结，且该手术斜率就是缆结斜率。）除此之外，论证与原文完全相同，只有第一步例外。在第一步中，我们需要证明，对于给定的 $\mathcal{S}$ 的 $\mathbb{Q}$ 有限子集，若其中不含塞弗特手术，则存在一个元素g使得 $\mathcal{S}_K(g) \subset \mathbb{Q} - \mathcal{S}$。回顾一下，有限手术是塞弗特手术。接下来，我们将证明当 $\mathcal{S}$ 不含有限手术时，这样的元素确实存在。

命题 7.3。 设 K 是一个非平凡纽结， $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{Q}$的一个有限子集，其中不含有限手术。那么， $[G(K)\ G(K)]$ 中存在无限多个两两不共轭元素 x，使得对于所有斜率 $s \in \mathcal{S}$，均有 $p_s(x) \neq 1$ 。

为证明命题7.3 ，根据瑟斯顿双曲化定理，我们分三种情况讨论： K 是双曲结（命题7.4）、环面结（命题7.5）或卫星结（命题7.7和7.10）。

由于 K 被假定为非平凡的，任意循环手术斜率 s都是有限手术斜率。因为，如果 π_1（K（s） $\cong \mathbb{Z}$，那么 K 就是平凡结，而 $s = 0$[13]。

对于双曲结，我们已经建立了以下结果 [22]。

命题 *7.4*（[22]） 。设 K 是 S^3 中的一个双曲结。则存在无限多个两两不共轭元素 $g \in [G(K)\ G(K)]$，使得对于所有非循环手术斜率 $s \in \mathbb{Q}$， $p_s(g) \neq 1$ 属于 $\pi_1(K(s))$。特别地，若 K 没有循环手术斜率，则存在无限多个两两不共轭元素 $g \in [G(K)\ G(K)]$，使得 $\mathcal{S}_K(g) = \emptyset$。

若 K 有一个循环手术斜率 s，则 $\pi_1(K(s)) \cong G(K)/\langle\langle s\rangle\rangle$ 是阿贝尔的，并且 $[G(K)\ G(K)] \subset \langle\langle s\rangle\rangle$。因此，对于 $[G(K)\ G(K)]$,$p_s(g)$ 中的每个元素 g，$=1$ 属于 $\pi_1(K(s))$。

因此，下面我们考虑两种情况： K 是一个环面结，或者是一个卫星结。

命题 7.5. 设 K 是 S^3 中的一个环面结。那么存在无限多个两两不共轭元素 $g \in [G(K)\ G(K)]$，使得对于所有非循环手术斜率 $s \in \mathbb{Q}$，均有 $p_s(g)\ \neq 1$ 。

证明. 回顾一下，对于 (p,q) 环面结 $K = T_{p,q}$ $(0 < p < |q|)$，其纽结群 $G(K)$ 有如下表示

$$\langle x, y \mid x^p = y^q\rangle = \langle x\rangle *_{\langle x^p = y^q\rangle} \langle y\rangle,$$

它是两个无限循环群的合并自由积。特别地， $G(K)$ 由两个元素 x 和 y 生成。设 $g = [x, y]$。若 $p_s(g) = 1$，则 $\pi_1(K(s))$ 是阿贝尔群，因此它是循环群。所以 s 是一次循环手术。这表明，对于 K 的任意非循环手术斜率 s，都有 $p_s(g) \neq 1$ 。

对于 $n > 0$ 令 $w_n = y(xy)^{n+1}$ 且 $g_n = g^{g^{w_n}} g^{-2}$。由于 $g \in [G(K)\ G(K)]$,因此 g_n也成立。根据推论6.5， $p_s(g_n) \neq 1$ 对 s的所有非循环手术斜率 K均成立。

我们来证明， g_n 与 g_m 共轭当且仅当 $n = m$。注意到

$$W_n = g^{w_n} = (y(xy)^{n+1})^{-1} g (y(xy)^{n+1})$$

and

$$\begin{aligned} g_n &= g^{g^{w_n}} g^{-2} = g^{W_n} g^{-2} = (W_n)^{-1} g W_n\, g^{-2} \\ &= \left((y(xy)^{n+1})^{-1} g (y(xy)^{n+1})\right)^{-1} g \left((y(xy)^{n+1})^{-1} g (y(xy)^{n+1})\right)\, g^{-2}. \end{aligned}$$

为简化记号，令 $X = x^{-1}$、 $Y = y^{-1}$ 。于是

$$\begin{aligned} g_n &= (y(xy)^{n+1})^{-1}[x,y]^{-1}(y(xy)^{n+1})[x,y](y(xy)^{n+1})^{-1}[x,y]((y(xy))^{n+1}) \\ &\quad [x,y]^{-2} \\ &= ((YX)^n YXY)(yxYX)(y(xy)^{n+1})(xyXY)((YX)^{n+1}Y)(xyXY) \\ &\quad (yxy(xy)^{n-1}xy)(yxYX)^2 \\ &= (YX)^n Y^2 X y (xy)^{n+2} X Y^2 X (YX)^n Y x y^2 (xy)^{n-1} x y^2 x Y X y x Y X. \end{aligned}$$

最后一个词是循环约化的。由 [26, 定理 4。6]可得 g_n 与 g_m 不共轭。□

为方便后续讨论，我们指出以下结果，它将在命题7.10的证明中用到。

断言 7.6。 g、 g_n 在 G（K）中是非周边的。

证明。我们证明 g 不共轭于 $\pi_1(\partial E(K))$ 中。反设 $h^{-1}gh \in \pi_1(\partial E(K))$，其中 $h \in G(K)$。那么，由于$g \in [G(K)\ G(K)]$，$h^{-1}gh$ 是零同调的，因此对于某个整数 m，它是 λ_K^m。于是 $p_0(g) = p_0(h\lambda_K^m h^{-1}) = 1$ 属于 $\pi_1(K(0))$。这意味着 0 是一个循环手术斜率，与命题 7.5 矛盾。因此，g 是非周边的。对 g_n 的证明完全相同。□

现在我们来证明卫星结的命题 7.3 。注意，除（$2ab \pm 1$，2）–缆结 $T_{a,b}$ 之外，卫星结都不允许循环手术 [36]。特别是，下面命题7.7中的纽结都没有循环手术。应用命题 7.5 和7.4 可得：

命题 7.7。设 K 是一个卫星结，且不是以（$abq \pm 1, q$）缆结形式构成的（a, b）–环面结 $T_{a,b}$。那么存在无限多个两两不共轭元素 $x \in [G（K）\ G（K）]$，使得对于所有斜率$s \in \mathbb{Q}$，$p_s（x）\neq 1$ 成立。

证明。在下面的证明中，情形 3 将说明我们为何排除缆结（$abq \pm 1$，q）-缆结 $T_{a,b}$。（另见注 7.9。）

回顾一下，任意卫星结 K 都有一个双曲结或环面结作为其伴随结 k。设 V 是包含 K 且 k 位于其内部的管状邻域。则 $E(K) = E(k) \cup (V - \mathrm{int}\, N(K))$，且 $G(K) = G(k) *_{\pi_1(\partial V)} \pi_1(V - \mathrm{int} N(K))$。

记号：在整个证明过程中，我们按如下方式区分各种投影：

- p_s^K：$G(K) \to \pi_1(K(s))$ 是由对 K 进行 s–德恩填充所诱导的投影，我们将其简记为 p_s。
- p_s^k：$G(k) \to \pi_1(k(s))$ 是由对伴随结 k 进行 s–德恩填充所诱导的投影。

对于 K 上的斜率 s，我们将 $V(K; s)$ 记为对 $K \subset V$ 进行 s-手术后从 V 得到的流形。

由于我们已经证明了环面结和双曲结的命题 7.3 ，因此有：

断言 7.8. 存在无限多个两两不共轭元素$x \in [G(k)\ G(k)] \subset [G(K)\ G(K)]$，使得对于 k的所有非循环手术斜率 $s \in \mathbb{Q}$，均有 $p_s^k(x) \neq 1$。

根据断言 7.6和 [22, 断言 5.3]，，我们可以假设这些元素不能共轭到子群 $P(k) = \pi_1(\partial V)$。下文中我们用 x表示这样的一个元素。

取一个斜率 $s \in \mathbb{Q}$。由于 K 没有循环手术斜率，s 不是 K的循环手术斜率。

情形 1. $\partial V(K; s)$ 是不可压缩的。

那么， $\pi_1(K(s)) = G(k) *_{\pi_1(\partial V(K;s))} \pi_1(V(K;s))$ 是一个合并自由积。因此， $G(k)$ 嵌入到 $\pi_1(K(s))$ 中。由于 x 在 $G(k) = \pi_1(E(k))$ 中非平凡， $p_s(x) = x$ 在 $\pi_1(K(s))$ 中也非平凡。

情形 2。 $V(K; s) = S^1 \times D^2$。

于是 $K(s) = E(k) \cup V(K; s) = k(s/w^2)$，其中 w 是 K 在 V [15]中的缠绕数。由于 $\pi_1(K(s))$ 不是循环的， $\pi_1(k(s/w^2))$ 也不是循环的。因此， s/w^2 不是 k的循环手术斜率，并且 $p_s(x) = p^k_{s/w^2}(x) \neq 1 \in \pi_1(k(s/w^2)) = \pi_1(K(s))$。

情形 3。 $\partial V(K; s)$ 是可压缩的，并且对于某个闭 3维流形 $W \neq S^3$， $V(K; s) = (S^1 \times D^2) \# W$。

于是 $K(s) = E(k) \cup V(K; s) = k(s/w^2) \# W$ [15]。由于 $\partial V(K; s)$ 是可压缩的， [12, 推论 2。5] 和 [33] 表明 $w \neq 0$。因此，根据 [17]，$k(s/w^2) \neq S^3$ 以及 $K(s) = k(s/w^2) \# W$是可约的。随后， [5, 推论 1。4]表明， K 是某个环面结 T_a的（p， q）缆结，b其中 p、 q、 a、 b为整数，并且手术斜率 s 是缆结斜率 pq。注意， $w = q \geq 2$ 且伴随结 k 是 T_a，b。

首先假设 $\pi_1(k(s/w^2))$ 不是循环群。那么 $p^k_{s/w^2}(x) \neq 1$属于 $\pi_1(k(s/w^2))$，而后者嵌入 $\pi_1(K(s)) = \pi_1(k(s/w^2)) * \pi_1(W)$。因此 $p_{s/w^2}(x) \neq 1$ 属于$\pi_1(K(s))$。

接下来假设 $\pi_1(k(s/w^2)) = \pi_1(T_{a,b}(pq/q^2)) = \pi_1(T_{a,b}(p/q))$ 是循环群。这意味着斜率 p/q 和 ab 之间的距离应为一，即 $|abq - p| = 1$。因此 K 是 $abq \pm 1, q$–缆结。此结论与初始假设矛盾。

最后，我们证明存在无限多个两两不共轭元素 $x \in [G(K)\ G(K)]$ ，它们对所有斜率 $s \in \mathbb{Q}$ 均满足 $p_s(x) \neq 1$ 。在证明中，元素 $x \in G(k)$ 在 $G(k)$ 中两两不共轭。因此，只需证明这类元素在 $G(K)$中仍然互不共轭。事实上，这直接由如下事实得出：对于合并自由积$G = A *_C B$ 及元素 $a, a' \in A - C$、a 和 a'，它们在 G 中共轭，当且仅当它们在 A [26, 中共轭（定理 4.6]）。在我们的情形中，$G = G(K)$ $A = G(k)$ $B = \pi_1(V(K; s))$，且 $C = P(k) = \pi_1(\partial E(k))$。□

注7.9。 如果 K 是 $T_{a,b}$ 的$(abq \pm 1, q)$-缆结，那么对 K 进行约化手术会在伴随结 $k = T_{a,b}$ 上诱导一次循环手术。因此，对于约化手术斜率$(abq \pm 1)q$，任意 $x \in [G(T_{a,b})\ G(T_{a,b})]$, $p_{(abq\pm1)q}(x) = 1$ 。

本节余下部分我们将聚焦于 $abq \pm 1, q$)–缆结 $k = T_{a,b}$。注 7.9 中描述的情形促使我们进一步关注如何在 $G(K)$ 中选取所需元素。

命题 7.10。 设 K是$(abq \pm 1, q)$–缆结，且它是(a, b)–环面结$k = T_{a,b}$ $(|q| \geq 2)$。设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个有限子集，其中不包含

有限手术。那么存在无限多个两两不共轭元素 x，属于 $[G(K)\ G(K)]$，使得对于所有斜率 $s \in \mathcal{S}$，都有 $p_s(x) \neq 1$。

证明。将 $E(K)$ 分解为 $E(k) \cup (V - \mathrm{int}N(k))$，其中 $E(k) = E(T_{a,b})$，而 $V - \mathrm{int}N(k)$ 是一个 (p,q)–缆空间（$p = abq \pm 1$），且 $\partial E(k)$。

设 τ_a, τ_b 是 $E(k) = E(T_{a,b})$ 的例外纤维，其指标分别为 $a, |b|$；我们用同一符号 τ_a, τ_b 表示由这些例外纤维所代表的 $G(k)$ 中的元素。注意，τ_a, τ_b 生成 $G(k)$。取一个元素 $g = [\tau_a, \tau_b] \in [G(k)\ G(k)] \subset [G(K)\ G(K)]$。

考虑整数ℓ对应的 $g\lambda_K^\ell = [\tau_a, \tau_b]\lambda_K^\ell \in [G(K)\ G(K)] \subset G(K)$。

接下来我们证明，存在无限多个整数 $\ell > 0$，使得对于所有斜率 $s \in \mathcal{S}$，$p_s(g\lambda_K^\ell) \neq 1$。

由此 [15] 可得：

$$V(K;s) = \begin{cases} \text{a boundary-irreducible Seifert fiber space}, & |npq - m| > 1, \\ S^1 \times D^2, & |npq - m| = 1, \\ S^1 \times D^2 \# L(q,p), & |npq - m| = 0. \end{cases}$$

因此可得：

$$K(s) = \begin{cases} E(k) \cup V(K;s), \text{which is a graph manifold}, & |npq - m| > 1, \\ k(s/q^2), & |npq - m| = 1, \\ k(p/q) \# L(q,p), & |npq - m| = 0. \end{cases}$$

情形 1。 $|npq - m| > 1$。

首先假设 $s = 0$。那么

$$p_0([\tau_a, \tau_b]\lambda_K^\ell) = p_0([\tau_a, \tau_b]) \neq 1,$$

因为 $p_0([\tau_a, \tau_b]) \in G(k) \subset G(k) *_{\pi_1(T)} \pi_1(V(K;0)) = \pi_1(K(0))$，其中$T = \partial E(k) = \partial V$。

对于任意 $0 \neq s \in \mathbb{Q}$，我们有

$$p_s([\tau_a, \tau_b])p_s(\lambda_K)^\ell \in G(k) *_{\pi_1(T)} \pi_1(V(K;0)).$$

注意，$p_s([\tau_a, \tau_b]) \neq 1 \in \pi_1(G(k))$。还要注意，$p_s(\lambda_K) \neq 1$，因为 $s \neq 0$ 和 s 不是 K的有限手术斜率；见引理7.1（[22,引理 5.2]）。现在反设 $p_s([\tau_a, \tau_b])p_s(\lambda_K)^\ell = 1$。那么 $p_s([\tau_a, \tau_b]) = p_s(\lambda_K)^{-\ell}$。这意味着 $p_s([\tau_a, \tau_b]) = p_s(\lambda_K)^{-\ell} \in \pi_1(T)$。然而，断言 7.6 表明 $p_s([\tau_a, \tau_b])$ 在 $G(k)$ 中是非周边的，矛盾。

情形 2。 $|npq - m| = 1$。

假设 $|npq - m| = 1$ 和 $q \geq 2$ 表明 $s = m/n \neq 0$ 和$s \neq pq$，特别是 $K(s) = k(s/q^2)$ 是不可约的。

取 $s \in \mathcal{S}$。假设对于某个整数 ℓ_s（取决于 s），我们有

$$p_s([\tau_a,\tau_b]\lambda_K^{\ell_s}) = p_s([\tau_a,\tau_b])p_s(\lambda_K)^{\ell_s} = 1, \text{ i.e. } p_s([\tau_a,\tau_b]) = p_s(\lambda_K^{-\ell_s})$$

现在我们证明，对于每个 $s \in \mathcal{S}$，这样的整数 ℓ_s 至多只有一个。假设

$$p_s([\tau_a,\tau_b]\lambda_K^{\ell'_s}) = p_s([\tau_a,\tau_b])p_s(\lambda_K)^{\ell'_s} = 1, \text{ i.e. } p_s([\tau_a,\tau_b]) = p_s(\lambda_K)^{-\ell'_s}$$

对于整数 ℓ'_s 也成立。那么我们有

$$p_s(\lambda_K)^{\ell_s} = p_s(\lambda_K)^{\ell'_s}, \text{ i.e. } p_s(\lambda_K)^{\ell_s-\ell'_s} = 1$$

在 $\pi_1(K(s)) = \pi_1(k(s/q^2))$ 中。由于 s 既不是 0 斜率，也不是有限手术斜率（根据假设），$p_s(\lambda_K) \neq 1$；参见引理 7.1（[22, 引理 5.2]）。此外，由于 $K(s) = k(s/q^2)$ 不可约，其基本群无挠。因此，$\ell_s = \ell'_s$。那么，由于 $\mathcal{S}$ 是有限的，我们有一个常数 $N > 0$，使得对于所有满足 $\ell \geq N$ 的 $s \in \mathcal{S}$，$p_s([\tau_a,\tau_b]\lambda_K^{\ell}) \neq 1$ 都在 $\pi_1(K(s))$ 中。

情形 3。$|npq - m| = 0$ 即 $s = pq \neq 0$。

在这种情况下

$$K(pq) = k(p/q)\#L(q,p) = k((abq \pm 1)/q)\#L(q,p) = L(p,qb^2)\#L(q,p).$$

注意，$\pi_1(K(pq)) = \pi_1(L(p, qb^2))*\pi_1(L(q, p))$ 是无限的。由于 $p_s([\tau_a,\tau_b]) = 1 \in \pi_1(L(p, qb^2))$，我们有 $p_s([\tau_a,\tau_b]\lambda^{\ell}) = p_s([\tau_a,\tau_b])p_s(\lambda_K)^{\ell} = p_s(\lambda_K)^{\ell}$，它是非平凡的，因为根据引理 5.2]，$s \neq 0$ 和 s 不是有限手术斜率。

最后，我们证明存在无限多个两两不共轭元素 $[\tau_a,\tau_b]\lambda_K^{\ell} \in [G(K)\ G(K)]$。

设 $\phi\colon G(K) \to \mathbb{R}$ 是缺陷为 $D(\phi)$ 的齐次拟态射。则它满足

$$D(\phi) = \sup_{g,h\in G(K)} |\phi(gh)-\phi(g)-\phi(h)| < \infty, \quad \phi(g^k) = k\phi(g)\ (\forall g \in G(K), k \in \mathbb{Z}).$$

注意，齐次拟态射在共轭类上为常数 [7,2.2.3]。

根据 Bavard 对偶定理 [3]，我们有

$$\mathrm{scl}_{G(K)}(\lambda_K) = \sup_{\phi} \frac{|\phi(\lambda_K)|}{2D(\phi)}$$

其中 $\phi\colon G(K) \to \mathbb{R}$ 遍历 $G(K)$ 的所有非同态齐次拟态射。由于稳定交换子长度$^{G(k)}(\lambda_K) = g(K) - 1/2 > 0$ [7,命题 4.4]，，如有必要，可通过取 $\phi' = -\phi$，令 ϕ 满足 $\phi(\lambda_K) > 0$。

于是我们得到一个不等式

$$D(\phi) \geq |\phi([\tau_a,\tau_b]\lambda_K^{\ell}) - \phi([\tau_a,\tau_b]) - \phi(\lambda_K^{\ell})|,$$

这意味着

$$\phi([\tau_a,\tau_b]\lambda_K^\ell) \geq \phi([\tau_a,\tau_b]) + \phi(\lambda_K^\ell) - D(\phi) = \phi([\tau_a,\tau_b]) + \ell\phi(\lambda_K) - D(\phi).$$

因此 $\lim_{\ell\to\infty} \phi([\tau_a,\tau_b]\lambda_K^\ell) \to \infty$。由于齐次拟态射 ϕ 在共轭下不变，这表明 $\{[\tau_a,\tau_b]\lambda_K^\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 具有无限多个两两不共轭元素。□

8. Non-separable pairs of finite families of slopes

本节给出一些有限族斜率的不可分离对。

例8.1。设 K 是一个环面结 $T_{p,\ q}$。则由正则纤维 pq 表示的斜率具有一个特殊性质。

$$\langle\langle pq\rangle\rangle \cap \langle\langle r\rangle\rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } r \text{ is a finite surgery slope,} \\ \{1\} & \text{if } r \neq pq \text{ and } r \text{ is not a finite surgery slope.} \end{cases}$$

参见 [21, 命题5。4]因此，如果 $pq \in \mathcal{S}_K(g)$，那么对于所有非有限手术斜率 $r \neq pq$，都有 $r \notin \mathcal{S}_K(g)$。所以，对于任意非有限手术斜率 r，不存在满足 $\mathcal{R} = \{pq, r\} \subset \mathcal{S}_K(g)$ 的非平凡元素 $g \in G(K)$。特别地，对于任意 $\mathcal{S} \subset \mathbb{Q}$ 满足 $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$，不存在满足$\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_K(g)$ 的元素 $g \in G(K) \subset \mathbb{Q} - \mathcal{S}$。

一般而言，包含关系 $\langle\langle r\rangle\rangle \subset \langle\langle s\rangle\rangle$ 迫使我们施加限制：$r \in \mathcal{S}_K(g)$ 蕴含 $s \in \mathcal{S}_K(g)$。由此得到以下例子。

例8.2。设 K 是环面结 $T_{p,\ q}$ $(p > q \geq 2)$。那么，对于每个有限手术斜率 $r_0 \in \mathbb{Q}$, [21, 定理 6.4] 表明存在一条无限递降链

$$\langle\langle r_0\rangle\rangle \supset \langle\langle r_1\rangle\rangle \supset \langle\langle r_2\rangle\rangle \supset \cdots.$$

因此，若 $g \in \langle\langle r_n\rangle\rangle$，则对任意一对 $m,\ n$，只要 $m < n$，就有 $g \in \langle\langle r_m\rangle\rangle$。这意味着不存在元素 $g \in G(K)$ 使得 $r_n \in \mathcal{S}_K(g)$ 且 $r_m \notin \mathcal{S}_K(g)$。

即使对于双曲结，我们也有：

例8.3。设 K 是 $(-2,\ 3,\ 7)$–椒结。选取两个斜率 $18\,5$和 18。那么，正如–[21, 例6.2]所示，$\langle\langle \frac{18}{5} \rangle\rangle \subset \langle\langle 18\rangle\rangle$。因此不存在元素 g 使得 $\frac{18}{5} \in \mathcal{S}_K(g)$ 且 $18 \notin \mathcal{S}_K(g)$。 —

因此，集合 $\mathcal{S}_K(g)$ 并非任意的。

致谢 我们感谢审稿人认真审阅并提出有益的意见。

References

[1] G. Baumslag 和 D. Solitar；Some two-generator one-relator non-Hopfian groups, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 199–201. [2] G. Baumslag、C. F. Miller III 和 D. Troeger；Reflections on the residual finiteness of one-relator groups, Groups Geom. Dyn. 1 (2007), 209–219. [3] C. Bavard；Longeur stable des commutateurs, Enseign. Math. 37 (1991), 109–150. [4] R. H. Bing 和 J. Martin；Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971), 217–231. [5] S. Boyer 和 X. Zhang；纽结上的有限德恩手术, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 1005–1050.[6] M. Brittenham 和 Y.-Q. Wu；二桥纽结上例外德恩手术的分类, Comm. Anal. Geom. 9 (2001), 97–113. [7] D. Calegari；稳定交换子长度, Mem. Math. Soc. Japan 20 (2009). [8] P. J. Callahan 和 A. W. Reid；纽结补空间上的双曲结构, Chaos, Solitons & Fractals, 9 (1998), 705–738. [9] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke 和 P.B. Shalen；纽结上的德恩手术, Ann. Math. 125 (1987), 237–300. [10] M. Dehn； ¨关于三维空间的拓扑学, Math. Ann. 69 (1910) 137–168.[11] M. Dehn； ¨关于无限离散群, Math. Ann. 71 (1911), 116– 144.[12] D. Gabai；叶状结构与3维流形的拓扑学 II, J. Diff. Geom. 26 (1987), 461–478.[13] D. Gabai；叶状结构与3维流形的拓扑学 III, J. Diff. Geom. 26 (1987), 479–536.[14] H. Goda；纽结与链环的双曲体积和扭曲亚历山大不变量 预印本，arXiv 1710 09963 . C. McA. Gordon；德恩手术与卫星结, Trans. Amer. Math. Soc. 275 (1983), 687–708. [16] C.McA.Gordon 和 Litherland；3-流形中的不可压缩平面曲面, Topology Appl. 18 (1984), 121–144. [17] C. McA. Gordon 和 J. Luecke；纽结由其补空间确定, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 371–415. [18] Groves, D., 和 J. F. Manning.《相对双曲群中的德恩填充》。 *Israel J. Math.* 168 2008 317 429 ( ): – .[19] J. Hempel ；3 维流形的剩余有限性，载于：组合群论与拓扑学，第 379–396 页, Ann. of Math. Studies，第111卷，Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. [20] K. Ichihara, K. Motegi 和 M. Teragaito；通过德恩填充使纽结群中的非平凡元素消失, Topology Appl. 264 (2019), 223–232. [21] T. Ito, K. Motegi 和 M. Teragaito；纽结群中可通过德恩填充变为平凡元的非平凡元素, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2021 (2021), 8297–8321. [22] T. Ito, K. Motegi 和 M. Teragaito；德恩填充与纽结群 I：实现性质, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2025 (2025), 1–31. [23] T. Ito, K. Motegi 和 M. Teragaito；德恩填充与纽结群 II：持久元素的普遍性，准备中。[24] P. Kronheimer 和 T. Mrowka；Witten猜想与性质 P, Geom. Topol. 8 (2004), 295–310. [25] Y. Mathieu；经德恩手术后保持不变的闭3维流形。J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), 279–296.

[26] W. Magnus、A. Karrass 和 D. Solitar；《组合群论：用生成元和关系表示群》，多佛数学丛书，Courier Corporation，2004年。[27] L. Moser；《沿环面结进行初等手术》，Pacific J. Math. **38** （1971年），737–745。[28] Osin, D. V.《相对双曲群的外围填充》。*Invent Math.* 167 （2007年）：295–326。[29] G. Perelman；《里奇流的熵公式及其几何应用》，2002, 0211159 arXiv:math.DG/ G. Perelman；《三维流形上的里奇流手术》，2003年，arXiv:math.DG/0303109 [30] G. Perelman；《某些三维流形上里奇流解的有限灭绝时间》，2003, 0307245 arXiv:math.DG/ H. Poincare；《第二篇补充论文：位置分析》，Proc. London Math. Soc. **32** （1900年），277–308。[31] M. Scharlemann；《缝合流形与广义瑟斯顿范数》，J. Diff. Geom. **29** （1989年）557–614。[32] M. Scharlemann；《通过对纽结进行手术产生可约3维流形》。Topology**29**, 481–500（1990年）[33] H. Tietze； ¨Uber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten，Monatsh. Math. Phys. **19** （1908年），1-118。[34] Y.-Q. Wu；《循环手术与卫星结》，Topology Appl. **36** （1990年），205–208。

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN
Email address: tetitoh@math.kyoto-u.ac.jpDepartment of Mathematics, Nihon University, 3-25-40 Sakurajosui, Setagaya-ku, Tokyo 156–8550, Japan
Email address: motegi.kimihiko@nihon-u.ac.jp
Department of Mathematics Education, Hiroshima University, 1-1-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739–8524, Japan
Email address: teragai@hiroshima-u.ac.jp