arXiv:2601.03766v1 [math.AT] 7 Jan 2026

# 图上同边物的泛性质

ANDREA BIANCHI 和 ADELA YIYU ZHANG

摘要。我们将空间之间的图上同边物的对称幺半 8-范畴 GrCob 展示为预层 8-范畴 Psh(Gr) 的满 8- 子范畴，其中 Gr 是有限集之间的图上同边物的对称幺半 8- 范畴。我们还描述了 GrCob 的一种泛性质：在适当意义下，它是 Gr 的自由对称幺半扩张，并为所有空间$X_*$ 赋予了普遍 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数的因子化同调 $\int$。作为推论，我们确定了作用于$\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数的因子化同调（尤其是霍赫希尔德同调）上的泛自然运算空间。

## 1. 引言

空间之间的图上同边物的对称幺半 $\infty$-范畴 GrCob 由 引入于 [Bia25a] ，作为弦拓扑运算的一种便捷来源。更确切地说，对于任意 $\mathbf{E}_\infty$-环谱 $R$ 以及任意 $R$-定向的庞加莱对偶空间 $M$，第一作者构造了一个“图场论”，即一个对称幺半 $R$-线性函子 $\mathrm{GFT}_M$ ，其定义域为某个适当的$R$-线性化 $\mathrm{GrCob}^{\mathrm{op}}$ ，值域为$R$-线性 $\infty$-范畴 $\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Sp})$ 中的$R$-模。对 GrCob 中适当态射求值$^{\mathrm{op}}$ 即可恢复最基本的同伦不变量弦拓扑运算，尤其是 Chas–Sullivan 乘积。

从 [Bia25a] 构造 GrCob 相当复杂。其中一个主要组成部分是对称幺半 8-范畴 Gr，它由有限集之间的图上同边物构成。根据 Barkan–Steinebrunner [BS]最近的一项结果，Gr 可刻画为表示 $\mathrm{E}_\infty$-Frobenius 代数的对称幺半 8-范畴；参见后文的定理2.3。这里，对称幺半 8-范畴中的 $\mathrm{E}_\infty$-Frobenius 代数是一个 $\mathrm{E}_\infty$-代数 $\mathcal{A}$ ，并配有一个映射 $\lambda\colon \mathcal{A}\to\mathbf{1}$ 到幺半单位，使得与乘法复合后得到非退化配对$\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\xrightarrow{\mu}\mathcal{A}\xrightarrow{\lambda}\mathbf{1}$。[1] 事实证明，Gr 等价于 GrCob 的一个对称幺半满 8-子范畴 [Bia25a, Corollary 7.11]；然而，原文并未将 Gr 的泛性质“扩展”为 GrCob 的泛性质，更不用说实际运用了这种扩展。图场论 $\mathrm{GFT}_M$ 的构造则是利用 Gr 的泛性质，再辅以一系列临时且颇为复杂的操作。

本文的首要目标是针对任意空间上的因子化同调，为 GrCob 提供一个泛性质，其中涉及与包含 $\mathrm{Gr}_\infty\mathbf{E}\to$-Frobenius 代数相对应的 [GrCob。我们采用的方法受到 Barkan、Steinebrunner 和第二作者25], BSZ $\mathcal{OC}$ 的工作的启发，并与之平行；他们在那里$_1$建立了开闭二维余 bordism 范畴的泛性质，$\mathbf{E}_1$其表述基于 Frobenius 代数的 Hochschild 同调。本文中的许多证明也运用了他们所建立的技术性结果。

为表述这一泛性质，我们需要以下定义。

**定义 1.1.** 对于空间 $X\in\mathcal{S}$，我们将 $\mathrm{Fin}_{/X}$ 简记为 8-范畴 $\mathrm{Fin}\times_{\mathcal{S}}\mathcal{S}_{/X}$,，其中拉回沿包含 $\mathrm{Fin}\hookrightarrow\mathcal{S}$ 和源函子 $\mathcal{S}_{/X}\to\mathcal{S}$ 形成。对于任意

[1] 这一概念以*Frobenius* 代数对象的形式引入于 [Lur17，4.6.5。1]。

函子 $F\colon \mathrm{Fin} \to \mathcal{V}$，若下列余极限存在，则记为 $\int_X F$：

$$\int_X F := \mathrm{colim}_{\mathrm{Fin}_{/X}} F \in \mathcal{V}.$$

在上述公式中，沿源函子 $\mathrm{Fin}_{/X} \to \mathrm{Fin}$ 对 $F$ 的限制是隐含的。我们将 $\int_X F$ 称为系数为 $F$ 的 $X$ 上的因子化同调。

当 $F\colon \mathrm{Fin} \to \mathcal{V}$ 是一个对称幺半函子，且 X 是带框架的 n 维流形时，此定义还原为将 $\mathbb{E}_\infty$-代数视为 $\mathbb{E}_n$-代数时通常所说的因子化同调，参见 [AF20，命题 5.7]。在这种情况下，因子化同调 $\int_X F$ 也与张量积“$X \otimes F$”（即在 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{V})$中计算的常值余极限 $\mathrm{colim}_X F$）的（底层对象）一致。尤其是，当 $X = S^1$, 时，它与底层 $\mathbb{E}_1$-代数的霍赫希尔德同调一致；另见 [NS18，IV.2.2]以及下文的引理 4.6。

我们引入任意从 Fin 出发的函子的因子化同调 $\int_X F$，以便于后文的记号使用。

**定义 1.2**。在对称幺半 8-范畴 $\mathcal{V}$ 中，如果一个 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数 $\mathcal{A}\colon \mathrm{Gr} \to \mathcal{V}$ 满足以下条件，我们称其为可延拓的：

• 对于所有空间 $X \in \mathcal{S}$，因子化同调 $\int_X \mathcal{A}$ 存在于 $\mathcal{V}$ 中；这里我们将 Fin 视为 Gr 的 8-子范畴；• 对于所有 $X \in \mathcal{S}$ 和 $v \in \mathcal{V}$，以下组装映射是一个等价：

$$\int_X (\mathcal{A} \otimes v) \xrightarrow{\simeq} \left(\int_X \mathcal{A}\right) \otimes v.$$

我们引入一个 8-子范畴 $\mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty} \subseteq \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)_{\mathrm{Gr}/}$，其对象是所有可延拓的 $\mathbf{E}_\infty$- Frobenius 代数 $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$。在可延拓的 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数之间的 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)_{\mathrm{Gr}/}$ 中，一个态射 $F\colon (\mathcal{V}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{V}', \mathcal{A}')$ 属于 $\mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty}$，当且仅当对于所有 $X \in \mathcal{S}$，以下组装映射是一个等价：

$$\int_X \mathcal{A}' \simeq \int_X F(\mathcal{A}) \to F\left(\int_X \mathcal{A}\right).$$

**定理 A**。将GrCob 视为$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)_{\mathrm{Gr}/}$ 中的一个对象，其方式是通过包含 $\iota\colon \mathrm{Gr} \hookrightarrow \mathrm{GrCob}$。那么GrCob 是可延拓的，并且是 $\mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty}$中的初始对象。

作为定理 A的直接应用，我们得到以下推论：它在$\mathbb{E}_\infty$-Frobenius 代数的因子化同调层面，提供由 GrCob 参数化的弦运算；通过限制，在霍赫希尔德同调层面也提供此类运算。

**推论 A.1**。设 $\mathcal{V}$ 是一个余完备的对称幺半∞-范畴，其幺半乘积在每个变量中分别保持余极限（例如，$\mathcal{V}$ 是某个$\mathbf{E}_\infty$-环谱 $R$ 上的谱中 $R$-模构成的∞-范畴）。设 $\mathcal{A}\colon \mathrm{Gr} \to \mathcal{V}$ 是一个$\mathbf{E}_\infty$-*Frobenius* 代数。那么存在本质唯一的对称幺半延拓

$$\int_{(-)} \mathcal{A}\colon \mathrm{GrCob} \to \mathcal{V}$$

其在任意空间 $X$ 上的取值 $\in \mathrm{GrCob}$ 等价于沿由函子 $\mathrm{Fin}_{/X} \to \mathrm{GrCob}_{/X}$ 诱导的典范映射得到的因子化同调 $\int_X \mathcal{A}$。此外，$\int_{(-)} \mathcal{A}$ 的底层函子等价于 $\iota_! \mathcal{A}\colon \mathrm{Gr} \to \mathcal{V}$沿 $\iota\colon \mathrm{Gr} \hookrightarrow \mathrm{GrCob}$ 的左 *Kan* 延拓。

秉承类似思路，Barkan、Steinebrunner 和第二作者在 [BSZ25]中为对称幺半 8-范畴 $\mathcal{OC}$ （其对象是开闭二维定向余边界）给出了泛性质：对称幺半 8- 范畴 $\mathcal{O}$ （其对象是开二维定向余边界）承载泛 $\mathbf{E}_1$-Frobenius 代数 $\mathcal{A}$，而其延拓 $\mathcal{OC}$ 则由对所有紧致定向 1-流形 $M$上的因子化同调 $\int_M \mathcal{A}$ 作普适添加而得。尤为重要的是，取 $M = S^1$，时，我们也在普适地添加 $\mathcal{A}$ 的霍赫希尔德同调 $\int_{S_1} \mathcal{A}$ 。

**注 1.3**。 第一位署名作者在 [Bia25a，注 1.5] 中构造了一个对称幺半函子，我们在此将其记为 $\varepsilon\colon \mathcal{OC} \to \mathrm{GrCob}$。令 $\mathcal{O} \subset \mathcal{OC}$ 表示开二维定向余边界的对称幺半$\infty$-子范畴，即由圆盘的不交并张成的满8-子范畴。于是， $\varepsilon$ 限制后得到函子 $\varepsilon\colon \mathcal{O} \to \mathrm{Gr}$，因此我们得到如下对称幺半$\infty$-范畴的交换方形：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathrm{Gr} \\ \downarrow & & \downarrow \iota \\ \mathcal{OC} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathrm{GrCob}. \end{array}$$

事实上，利用两个竖直函子都是完全忠实的这一点，以及一个紧致一维流形当且仅当与某个有限集同伦等价时才是圆盘的不交并这一事实，我们可以得到这个方形实际上是一个拉回方块。结合定理 A 以及 [BS、BSZ25], 的结果，我们可以通过泛性质来解释这个方形：上下两条水平映射分别由以下观察诱导：任何 $\mathbf{E}\infty$-Frobenius 代数都有一个底层的 $\mathbf{E}_1$-Frobenius 代数；而在任意空间上存在因子化同调，意味着在紧致一维流形上也存在因子化同调。两条竖直映射分别记录了我们据以取因子化同调的$\mathbf{E}_1$ 和$\mathbf{E}\infty$-Frobenius 代数。

**注 1.4.** 与函子 $\varepsilon\colon \mathcal{OC} \to \mathrm{GrCob}$（见注 1.3 ）复合后，对任意$(\mathcal{V},\ \mathcal{A}) \in \mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty}$，得到一个对称幺半函子

$$\int_{(-)} \mathcal{A} \circ \varepsilon\colon \mathcal{OC} \to \mathcal{V},$$

也称为开闭二维拓扑场论。特别地，它在圆盘处取值为$\mathcal{A}(*)$ ，在圆 $S^1$处取值为霍赫希尔德同调 $\mathrm{HH}(\mathcal{A}) := \int_{S_1} \mathcal{A}$ 。 $\mathcal{OC}$的态射空间的同调（这些态射空间等价于带边界的黎曼曲面的适当模空间）给出了更高阶弦运算，将底层对象与作为 $E_1$-Frobenius 代数看待的 $E\infty$-Frobenius 代数的霍赫希尔德同调联系起来。此类开闭二维场论已在文献中得到广泛研究；参考文献包括 [TZ06a、TZ06b、Cos07a、Cos07b、CTZ08、Kau07、Kau08、Kau10、LP07、LP08、WW16、Wah16、MW25、BSZ25]。因此，我们的定理 A 和推论 A.1 是对上述文献的深化，并将在下文的定理 C 中更精确地阐明这种联系。

备注 1.5。特别值得关注的一个例子是，$E\infty$-Frobenius 代数 $\mathcal{A}$ 是上链复形 $C^*(M; R)$，其中 R 是离散交换环，M 是 R-定向流形。一方面，R-定向可用于将 $C^*(M;R)$ 提升为链复形上的“皮卡扭曲”对称幺半 8-范畴 $\mathcal{D}(R)/\mathrm{Pic}(\mathcal{D}(R))$ 中的 $E\infty$-Frobenius 代数：该范畴在 [BS] 中定义为 $\mathcal{D}(R)$ 关于由张量积给出的 $\mathrm{Pic}(\mathcal{D}(R))$作用的商；另见 [Bia25a，定义 5.3] ，其中提供了另一种 2-范畴视角。另一方面，当 M 单连通时，$\int_{S^1} \mathcal{A}$等价于 M 的自由环路空间的上链复形 $C^*(\mathcal{L}M;R)$ 。在这种情况下，我们的构造给出关联上链复形 $C^*(M; R)$ 和 $C^*(\mathcal{L}M; R)$的弦运算；这些弦运算由态射空间的同调给出

GrCob 的态射空间的同调，以及通过限制得到的 $\mathcal{OC}$。但我们强调，如果 $M$ 不是单连通的，那么一般而言 $C^*(\mathcal{L}M;R)$ 并不等价于 $\int_{S^1} C^*(M;R)$；在这种情况下，我们的结果无法复现 [Bia25a], 中的结果，而这些结果适用于任意 $R$-定向流形。

推论 A.1 的一个重要应用是通过 Yoneda 嵌入 $\text{よ}_{\mathrm{Gr}}\colon \mathrm{Gr} \to \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 得到的；若赋予 $\mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 由 Day 卷积给出的对称幺半结构，则该嵌入是一个对称幺半函子。事实上，Day 卷积可以刻画为 $\mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 上本质唯一的对称幺半结构：它分别保持每个变量中的余极限，并且使 $\text{よ}_{\mathrm{Gr}}$ 升格为对称幺半函子 [Lur17, 推论 4.8.1.12]。在推论 A.1 中令 $\mathcal{V}=\mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$，即可得到一个对称幺半函子 $\int_{(-)}\text{よ}_{\mathrm{Gr}}\colon \mathrm{GrCob} \to \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$，其底层函子是左 Kan 延拓 $\iota_!\text{よ}_{\mathrm{Gr}}$。我们将证明以下定理，它为 GrCob 提供了另一种刻画。

**定理 B.** *左 Kan 延拓 $\iota_!\text{よ}_{\mathrm{Gr}}\colon \mathrm{GrCob} \to \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 是全忠实的，并且与复合对称幺半函子一致*

$$\mathrm{GrCob} \xrightarrow{\text{よ}_{\mathrm{GrCob}}} \mathrm{Psh}(\mathrm{GrCob}) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr}).$$

*任一函子都将 GrCob 识别为由余极限 $\int X\,\text{よ}_{\mathrm{Gr}} \simeq \mathrm{colim}^{\mathrm{Fin}_{/X}}\text{よ}_{\mathrm{Gr}}$（对所有空间 $X \in \mathcal{S}$）生成的 $\mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 的满对称幺半$\infty$-子范畴。*

秉持类似的思路，Barkan、Steinebrunner 和第二作者将 $\mathcal{OC}$ 识别为$\infty$-子范畴 $\mathrm{Psh}(\mathcal{O})$ 由余极限$\int_M \text{よ}_{\mathcal{O}}$ 生成的满子范畴，其中 $M$ [BSZ25].

本文最后将刻画 $\mathrm{E}_\infty$-Frobenius 代数的因子化同调之间的泛“自然运算”空间。“结构化” $\mathrm{E}_1$- 代数上的自然运算概念由 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 中的 [Wah16] 引入，定义为霍赫希尔德同调函子的自然变换。在 [BSZ25, Section 3.3], 中，这一概念被提升到空间层次，并且 $\mathcal{OC}$被识别为 $\mathrm{E}_1$-Frobenius 代数霍赫希尔德同调上的泛自然运算的 8-范畴，位于 $\mathcal{S}$中。为统一处理结构化 $\mathrm{E}_\infty$-代数和结构化 $\mathrm{E}_1$-代数的自然运算，我们将在定义 4.3 中引入“自然运算语境”这一一般概念，并借此引入对称幺半 8-范畴 $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Disk}_1}[\mathcal{O},\mathrm{Mfld}_1]$ 和 $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Fin}}[\mathrm{Gr}\ \mathcal{S}]$，它们描述 $\mathrm{E}_1$ 和 $\mathrm{E}_\infty$-Frobenius 代数因子化同调上的自然运算。关于自然运算的主要定理如下；完整陈述见定理 4.7。

**定理 C.** *存在一个对称幺半$\infty$范畴的交换方形，其水平箭头均为**等价**：*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{OC} & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Nat}_{\mathrm{Disk}_1}[\mathcal{O},\mathrm{Mfld}_1] \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nat}[\varepsilon]} \\ \mathrm{GrCob} & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Nat}_{\mathrm{Fin}}[\mathrm{Gr},\mathcal{S}]. \end{array}$$

由于$\mathrm{S}^1$ 上的因子化同调$\mathbf{E}_\infty$-代数与其底层$\mathrm{E}_1$-代数的霍赫希尔德同调一致，因此定理C 指出，后者上的自然运算可经由前者上的自然运算分解。

致谢。 我们感谢 Jan Steinebrunner 就本项目进行的有益交流，以及对本文草稿提出的详细反馈。此外，本项目也可视为 [BSZ25] 的一个类比，其中以 GrCob 代替 $\mathcal{OC}$（并以 Gr 代替 $\mathcal{O}$）；特别是，我们承认，导向定理 A 和 B 的主要思想改编自该文，并且最初也由 Jan Steinebrunner 提出。

A.B. 获马克斯·普朗克数学研究所（波恩）和博洛尼亚大学资助。A.Z. 获欧盟玛丽·居里博士后奖学金（项目 101150469）和几何与拓扑中心（DNRF151）资助。我们还要感谢 GeoTop 和哥本哈根大学提供的热情接待；A.B. 曾在那里进行研究访问，本项目也正是在访问期间孕育的。

## 2. 回顾

我们首先回顾主要对象 Gr 和 GrCob 的构造与基本性质，以及它们与二维同边物范畴 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{OC}$ 的联系。

**定义 2.1**。 我们将 $\mathrm{Gr} \subset \mathrm{Cospan}(\mathcal{S})$ 称为余跨度空间的 8-范畴中由以下对象和态射张成的 8-子范畴：

- Gr 中的对象是与某个有限集等价的空间；
- 对于 $A,B \in \mathrm{Fin}$，Gr 中从 $A$ 到 $B$ 的态射是形如 $A \to G \leftarrow B$ 的空间余跨度，其中 $G$ 与维数至多为 1 的有限胞腔复形等价。

我们称 Gr 为有限集之间的图上同边物 8-范畴。空间的不交并使 Gr 成为 $\mathrm{Cospan}(\mathcal{S})$ 的对称幺半 8-子范畴。

我们指出，Gr 将 Fin（有限集的对称幺半范畴）作为对称幺半 $\infty$-范畴包含在内。Barkan–Steinebrunner 的一项近期结果 [BS] (另见 [Bia25b]) 给出了 Gr 的一个泛性质。

**定义 2.2**。设 $\mathcal{V}$ 是一个对称幺半 8-范畴。$\mathcal{V}$ 中的一个 $\mathbf{E}_\infty$-*Frobenius* 代数是一个对 $(\mathcal{A},\ \lambda)$ 由以下部分组成：

- $\mathcal{V}$ 中的一个 $\mathbf{E}_\infty$-代数 $\mathcal{A}$，我们将其视为一个对称幺半函子 $\mathcal{A}\colon \mathrm{Fin} \to \mathcal{V}$；
- $\mathcal{V}$ 中的一个态射 $\lambda\colon \mathcal{A}(*) \to 1_{\mathcal{V}}$，

使得复合 $\mathcal{A}(*)\otimes\mathcal{A}(*) \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}(*) \xrightarrow{\lambda} 1_{\mathcal{V}}$ 将 $\mathcal{A}(*)$ 表明为其在 $\mathcal{V}$ 中的自身对偶。这里的“乘法” $\mu$ 是沿着 $\mathcal{A}$ 对 Fin 中的态射 $* \sqcup * \to *$ 取像所得。

我们用 $\mathrm{Frob}^{\mathbf{E}_\infty}\colon \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty) \to \mathcal{S}$ 表示将 $\mathcal{V} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 与其关联的函子，其值为 $\mathcal{V}$ 中 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数的模空间 $\mathrm{Frob}_{\mathbf{E}_\infty}(\mathcal{V})$。

**定理2.3** ([BS])。 函子 $\mathrm{Frob}^{\mathbf{E}_\infty}$ 由 Gr余表示，即存在一个函子等价$\mathrm{Frob}_{\mathbf{E}_\infty} \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{Gr}\ -)$，其为函子 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty) \to \mathcal{S}$。

我们也简要回顾一下 [Bia25a]中 GrCob 的定义。

**定义 2.4**。 考虑由空间的箭头之余跨度构成的对称幺半 8-范畴 $\mathrm{Cospan}(\mathrm{Fun}([1],\ \mathcal{S}))$。我们将由形如 $A \to X$ 的对象所张成的对称幺半 8-子范畴记为 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}} \subset \mathrm{Cospan}(\mathrm{Fun}([1],\ \mathcal{S}))$，其中 $A \in$ 属于 Fin，态射形如

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & G & \longleftarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & W & \longleftarrow & Y \end{array}$$

使得右侧方块是一个推出方块，且顶行给出 Gr 中的一个态射。我们将$D_1, D_0\colon \mathrm{Gr}_{\mathcal{S}} \to \mathrm{Cospan}(\mathcal{S})$ 记为函子，分别将 $(A \to X)$ 映至 $A$、$X$。注意，$D_1$ 可经由 Gr 分解。

我们将 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}$ at 记为 GrCob，即沿“空闲态射”进行的（对称幺半）局部化，也就是说，沿着在 $D_0$ 下被映为等价的态射进行局部化；同时，我们也滥用记号，将局部化上自然诱导的函子记为 $D_0\colon \mathrm{GrCob} \to \mathrm{Cospan}(\mathcal{S})$。

**记号 2.5.** 我们用 $-\otimes-$ 表示 Gr 和 GrCob 的幺半乘积，以便将它们与 Fin 和 $\mathcal{S}$ 的幺半乘积区分开来，后者记为 $-\sqcup-$。

根据 [Bia25a，推论 7。9], 函子 $D_0$ 在核心群胚上诱导出一个等价；特别地，可以合理地将 GrCob 的对象视为空间。根据 [Bia25a，推论 7。11], 函子 $D_0$ 限制为 GrCob 中由有限集张成的满$\infty$-子范畴与 $\mathrm{Gr}\subset\mathrm{Cospan}(\mathcal{S})$之间的一个等价。这特别为我们提供了一个对称幺半全嵌入$\iota$: $\mathrm{Gr}\hookrightarrow\mathrm{GrCob}$。将其与来自 $\infty$-子范畴的包含 $\mathcal{S}\hookrightarrow\mathrm{GrCob}$ 结合起来，该包含来自 [Bia25a，推论 7，10], 我们得到如下对称幺半 $\infty$-范畴的交换方形，其中竖直箭头是全嵌入，水平箭头是宽嵌入：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Fin} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}\\ \downarrow & & \downarrow\iota\\ \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathrm{GrCob}.\end{array}\tag{1}$$

事实上，这是 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 中的一个拉回方块，但我们不需要用到这一点。

另一方面，回忆一下对称幺半 8-范畴 $\mathrm{Cob}_2^\partial$，其对象是带边界的定向紧致 1-流形之间的定向二维配边；配边是带边界和角的定向紧致 2-流形。精确构造可参见例如 [BSZ25，第 2] 节。开闭配边的对称幺半 8-范畴 $\mathcal{OC}$ 定义为 $\mathrm{Cob}_2^\partial$ 的宽 8-子范畴，其态射由满足以下条件的配边 $\mathrm{A}\to\mathrm{W}\leftarrow\mathrm{B}$ 张成：W 的任何连通分支的整个边界都不包含在 B 中。等价地，我们只允许相对于出射边界把手维数至多为 1 的配边。开配边的对称幺半 8-子范畴 $\mathcal{O}$ 随后定义为 $\mathcal{OC}$ 的满 8-子范畴，其态射由圆盘的不交并张成。将方块 (1) 沿 Remark 1.3 中的函子 $\varepsilon\colon\mathcal{OC}\to\mathrm{GrCob}$ 作拉回，我们得到以下交换立方体，其中所有竖直函子都是满包含，所有水平函子都是宽嵌入，并且每个面都是 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 中的拉回方块：

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Disk}_1 & & \longrightarrow & & \mathcal{O}\\ & \searrow & & \overset{\varepsilon}{\searrow} & \\ & & \mathrm{Fin} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{Mfld}_1 & & \longrightarrow & & \mathcal{OC}\\ & \searrow & & \overset{\varepsilon}{\searrow} & \\ & & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathrm{GrCob}\end{array}\tag{2}$$

此处，$\mathrm{Mfld}_1$ 表示由紧致定向 1-流形及保定向嵌入构成的对称幺半 8-范畴；它等价于 $\mathcal{OC}$ 的宽 8-子范畴，该子范畴由满足出射边界 $\mathrm{B}\to\mathrm{W}$ 的包含为同伦等价的跨接 $\mathrm{A}\to\mathrm{W}\leftarrow\mathrm{B}$ 所张成。另一方面，$\mathrm{Disk}_1$ 表示 $\mathrm{Mfld}_1$ 的对称幺半满 8-子范畴，该子范畴由圆盘的不交并所张成。特别地，我们注意到，$\mathrm{Disk}_1$ 在对称幺半 8-范畴中泛表示 $\mathrm{E}_1$-代数，而 $\mathcal{O}$ 则通过 [BS]在对称幺半 8-范畴中泛表示 $\mathrm{E}_1$-Frobenius 代数。

## 3. 规范扩张与 GrCob 的泛性质

在本节中，我们证明，任意可延拓的 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数都存在到 GrCob 的规范对称幺半延拓。因此，我们推导出定理 A 中陈述的 GrCob 的泛性质：GrCob 是初始的可延拓 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数。

3.1. E∞-Frobenius 代数的规范扩张。给定一个对称幺半 8-范畴$\mathcal{V}$以及一个 E∞-Frobenius 代数 $\mathcal{A}\colon \mathrm{Gr} \to \mathcal{V}$，自然会问，$\mathcal{A}$是否存在到“图场论”的延拓，即一个对称幺半函子 $\mathrm{F} : \mathrm{GrCob} \to \mathcal{V}$，使得 F 在 Gr 上的限制为 $\mathcal{A}$。这种延拓的一个合适候选是沿包含 $\iota : \mathrm{Gr} \to \mathrm{GrCob}$ 对 $\mathcal{A}$作歌剧式左 Kan 延拓。我们采用 Lur17 第 3 节1], 中的这一概念，并请参阅 [BSZ25 定理 76] ，其中给出了另一种论述，专门针对我们感兴趣的情形，并特别提供了歌剧式左 Kan 延拓存在的充分必要条件。

**定义 3.1**。宽松对称幺半函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$沿宽松对称幺半函子 $i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 的歌剧式左 Kan 延拓，是一对 $(G\ \alpha)$，其中 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{V}$是一个宽松对称幺半函子，且 $\alpha\colon F \to G \circ i$是一个对称幺半自然变换；它满足：对所有$v \in \mathcal{V}$，由 $\alpha$诱导的变换将 $G(-)\otimes v\colon \mathcal{D} \to \mathcal{V}$展现为 $F(-)\otimes v\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$沿 $i$的普通左 Kan 延拓。特别地，当 $v$为幺半单位时，$G$的底层函子被展现为 $F$ 沿 $i$的左 Kan 延拓。

**记号 3.2**。按照定义 3.1中的记号，$\overset{\otimes}{i_!}F \simeq G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{V}$通常表示该歌剧式左 Kan 延拓；若其存在，则在本质上唯一。我们将记号 $i_!F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{V}$保留用于表示 $F$ 沿i 的（普通）左 Kan 延拓，其定义不涉及任何（宽松）对称幺半结构。

存在歌剧式左 Kan 延拓 $\overset{\otimes}{i_!}F$ 的充要条件是以下两项均成立：

- 对所有 $v \in \mathcal{V}$，左 Kan 延拓 $i_!(F(-)\otimes v)$ 均存在；
- 组装映射 $i_!(F(-)\otimes v) \to i_!F(-)\otimes v$是自然等价。

**注 3.3.** 在某些情况下，例如当 $\mathcal{V}$ 是余完备的，且其幺半乘积在每个变量上分别保持余极限时，所有 宽松对称幺半函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{V}$ 都存在歌剧式左 Kan 延拓 $\mathcal{D} \to \mathcal{V}$。此时，歌剧式左 Kan 延拓是限制函子 $i^*:\mathrm{Fun}^{\otimes,\mathrm{lax}}(\mathcal{D},\mathcal{V}) \to \mathrm{Fun}^{\otimes,\mathrm{lax}}(\mathcal{C},\mathcal{V})$：另一种阐述可参见 [Lur17，第 3 节。1], 或[CH20，定理 1。1] 然而，一般而言，歌剧式左 Kan 延拓这一概念有所不同。

由于 $\iota\colon \mathrm{Gr} \to \mathrm{GrCob}$ 是全忠实的，因此对对称幺半函子 $\iota_!\mathcal{A}\colon \mathrm{Gr} \to \mathcal{V}$若存在，则确实限制为 $\mathcal{A}$在 Gr 上的函子。我们将在下面的命题中证明，其松弛对称幺半结构实际上是（强）对称幺半结构，并给出其逐点取值的简化公式。随后我们将立即推得定理 A。

**命题 3.4**。设 $(\mathcal{V},\ \mathcal{A}) \in \mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty}$ 如定义 *1.2*所述，这意味着歌剧式左 *Kan* 延拓 $\overset{\otimes}{\iota_!}\mathcal{A}$ 存在。那么 $\overset{\otimes}{\iota_!}\mathcal{A}$ 上的松弛对称幺半结构实际上是强对称幺半结构。

我们首先建立一些计算性结果，作为命题 3.4的准备。

**引理 3.5**。对于任意空间 $X$，典范映射

$$\int_X \iota := \mathrm{colim}(\mathrm{Fin}_{/X} \to \mathrm{Fin} \hookrightarrow \mathrm{Gr} \xrightarrow{\iota} \mathrm{GrCob}) \longrightarrow X$$

在 GrCob 中是一个等价；特别地，定义源对象的余极限存在。

证明。对于 Y $\in$GrCob，我们要证明 GrCob(X,Y ) $\xrightarrow{\simeq}$lim$^{A\in(\mathrm{Fin}_{/X})^{\mathrm{op}}}$GrCob(A,Y ) 是空间之间的一个等价。两个空间都映射到 GrCob($\varnothing$,Y)，这是因为 $\varnothing$ 在 $\mathcal{S}$ 中是始对象，并将 $\mathcal{S}$视为 GrCob 的宽 8-子范畴，如 [Bia25a, Corollary 7.10]所述；因此，只需证明对于所有 w $\in$ GrCob($\varnothing$,Y)，纤维在 w 处诱导的映射是一个等价。w 的数据大致包括一个空间映射 Y $\to$ W，以及关于 W 如何由 Y 通过附加一个图而得到的一些信息。根据 [Bia25a, Remark 7.12] ，我们有如下等价，它由该文中记作“$\mathrm{D}_0$”的函子诱导：

$$\mathrm{fib}_w(\mathrm{GrCob}(X,Y)\to\mathrm{GrCob}(\varnothing,Y))\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Map}(X,W);$$

类似地，我们也有如下等价，并且它与上面的等价适当地相容：

$$\begin{aligned}\mathrm{fib}_w\left(\lim_{A\in(\mathrm{Fin}_{/X})^{\mathrm{op}}}\mathrm{GrCob}(A,Y)\to\mathrm{GrCob}(\varnothing,Y)\right)&\simeq\lim_{A\in(\mathrm{Fin}_{/X})^{\mathrm{op}}}\mathrm{fib}_w(\mathrm{GrCob}(A,Y)\to\mathrm{GrCob}(\varnothing,Y))\\&\xrightarrow{\simeq}\lim_{A\in(\mathrm{Fin}_{/X})^{\mathrm{op}}}\mathrm{Map}(A,W)\simeq\mathrm{Map}(X,W),\end{aligned}$$

其中我们利用了 $X$ $\simeq$ 空间中的余极限$^{A\in\mathrm{Fin}_{/X}}A$ 。 □

**推论 3.6.** 对于任意空间 $X$ 和任意有限集 $A$，典范映射

$$\int_X(\iota\otimes A)\to X\otimes A$$

在 GrCob 中是一个等价；特别地，定义源对象的余极限存在。

证明。 我们可以将该映射分解为以下复合映射：

$$\int_X(\iota\otimes A)\to\int_{X\sqcup A}\iota\to X\otimes A.$$

第二个箭头由引理 3.5可知是等价，因此中间的余极限存在。第一个箭头是等价，这也意味着左侧的余极限存在，因为函子 $-\sqcup A\colon\mathrm{Fin}^{/X}\to\mathrm{Fin}^{/X\sqcup A}$ 是终对象。□

**引理 3.7**。典范映射

$$\mathrm{colim}_{B\in\mathrm{Fin}_{/X}}\mathrm{GrCob}(A,B)\to\mathrm{GrCob}(A,X)$$

对于任意空间 $X$ $\in$ GrCob 和有限集 $A$ $\in$Gr，都是等价。

证明。上述典范映射可分解为一系列等价

$$\begin{aligned}\mathrm{colim}_{B\in\mathrm{Fin}_{/X}}\mathrm{GrCob}(A,B)&\simeq\mathrm{colim}_{B\in\mathrm{Fin}_{/X}}\left(\mathrm{colim}_{C\in\mathrm{Fin}_{/B}}\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(\varnothing\to A,C\to B)\right)\\&\xleftarrow{\simeq}\mathrm{colim}_{B\in\mathrm{Fin}_{/X}}\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(\varnothing\to A,B=B)\\&\xleftarrow{\simeq}\mathrm{colim}_{B\in\mathrm{Fin}_{/X}}\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(A=A,B=B)\\&\xrightarrow{\simeq}\mathrm{colim}_{B\in\mathrm{Fin}_{/X}}\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(A=A,B\to X)\\&\xrightarrow{\simeq}\mathrm{colim}_{B\in\mathrm{Fin}_{/X}}\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(\varnothing\to A,B\to X)\simeq\mathrm{GrCob}(A,X).\end{aligned}$$

在上述等价序列中，我们利用了$\infty$-范畴 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}$，它来自 [Bia25a], ，而 GrCob 是其局部化；我们建议读者参阅该文以了解详情。第一个和最后一个等价来自 GrCob 中态射空间的公式，该公式见 [Bia25a，推论 7。8];

第二个等价则来自这样一个事实：由于$B$ 是有限集，$B$ 的恒等映射是 $\mathrm{Fin}_{/B}$中的终对象；第三个和第四个等价则来自态射空间的等价

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(\varnothing \to A, B = B) \xleftarrow{\simeq} \mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(A = A, B = B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}(A = A, B \to X),$$

由左复合于 $(\varnothing \to A) \to (A = A)$ 以及右复合于 $(B = B) \to (B \to X)$分别诱导；根据 Gr 的定义，立即可以验证$_{\mathcal{S}}$ 这些确实是等价；最后，第五个等价由左复合于 $(\varnothing \to A) \to (A = A)$诱导，并由[Bia25a，命题 74], 得出，即 GrCob 对 Gr 的局部化$_{\mathcal{S}}$ 可以通过左分式演算计算得到这一事实。 □

**推论 3.8**。 设 $X$ 是一个空间。则以下函子是终对象的：

$$\Phi : \mathrm{Fin}_{/X} = \mathrm{Fin} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_{/X} \to \mathrm{Gr} \times_{\mathrm{GrCob}} \mathrm{GrCob}_{/X}.$$

在定义 $\Phi$ 时，我们使用了 $\mathcal{S}$ 是 GrCob 的一个宽$\infty$-子范畴，并将 Fin 识别为 GrCob 中各个 $\cap\mathcal{S}$的交集$\infty$-子范畴。我们注意到， $\Phi$是一个满的$\infty$-子范畴包含，因为宽的$\infty$-子范畴 $\mathcal{S} \subset$GrCob 满足 2/3 性质。具体而言， $\mathcal{S}$可以刻画为 GrCob 中由如下图上同边物张成的宽$\infty$-子范畴：$X \to W \xleftarrow{\simeq} Y$，其中第二个箭头是一个等价 [Bia25a，推论 710]。

证明。 其源 $\Phi$ 是限制约田函子的非直化 $\text{よ}^{\circ}_{\mathrm{Gr}} : \mathrm{GrCob} \to \mathrm{Psh}(\mathrm{GrCob}) \to \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 在 $X$ 上。因此，根据 [BSZ25，引理 7。1], 要证明 $\Phi$是终对象，只需证明典范映射 $\mathrm{colim}^{B \in \mathrm{Fin}_{/X}} \text{よ}_{\mathrm{Gr}}(B) \to \text{よ}^{\circ}_{\mathrm{Gr}}(X)$ 是一个等价。这确实由上面的引理 3.7 得出。 □

现在我们可以证明命题 3.4

命题 *3.4* 的证明。 关于 $\mathcal{V}$ 的条件使我们能够应用 [BSZ25，定理 7。6] ，从而得出沿包含 $\iota^{\otimes}_{!}\mathcal{A}$ 的歌剧式左 Kan 延拓 $\iota : \mathrm{Gr} \to \mathrm{GrCob}$ 存在。要证明这个松对称幺半函子实际上是对称幺半的，只需验证 [BSZ25，引理 7。7], 中的条件，即典范函子

$$(\mathrm{Gr} \times_{\mathrm{GrCob}} \mathrm{GrCob}_{/X}) \times (\mathrm{Gr} \times_{\mathrm{GrCob}} \mathrm{GrCob}_{/Y}) \to \mathrm{Gr} \times_{\mathrm{GrCob}} \mathrm{GrCob}_{/X \otimes Y}$$

对任意空间 $X$、$Y$ $\in$ GrCob 都是终对象。这由推论 3.8、包含 Fin $\to$ GrCob 是对称幺半的这一事实，以及典范函子 $\mathrm{Fin}_{/X} \times \mathrm{Fin}_{/Y} \to \mathrm{Fin}_{/X \sqcup Y}$对任意空间 $X$、$Y$都是等价这一事实得出。 □

3.2. **定理的证明A**。 由命题3.4直接可得定理A，即 $(\mathrm{GrCob}\ \iota)$ 是可扩张的，并且是所有可扩张的 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数中的始对象。

定理 A 的证明。我们首先验证 $(\mathrm{GrCob}\ \iota)$ 是可扩张的，即满足定义 1.2 中关于 $(\mathcal{V}、\mathcal{A})$ 的条件。由引理 3.5 可知，只需证明对于所有空间 X 和 Y，$\int_X (\iota \otimes Y) \xrightarrow{\simeq} (\int_X \iota) \otimes Y$。利用引理 3.5 和推论 3.6、 $\iota$ 以有限集为取值、等价 $\mathrm{Fin}_{/X \sqcup Y} \simeq \mathrm{Fin}_{/X} \times \mathrm{Fin}_{/Y}$，以及包含 $\mathcal{S} \hookrightarrow$ GrCob 是对称幺半这一事实，我们得到所需的等价链

$$\int_X (\iota \otimes Y) \simeq \int_X \left(\iota \otimes \int_Y \iota\right) \simeq \int_{X \sqcup Y} \iota \simeq X \otimes Y \simeq \left(\int_X \iota\right) \otimes Y.$$

现在只需注意到，态射 $(\mathrm{GrCob}\ \iota) \in \mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty}$ 是一个初始对象，因为根据推论 $F$: $(\mathrm{GrCob}\ \iota) \to (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ 在 $\mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty}$ 中，恰好对应于一个强对称幺半运算子左 Kan 延拓的数据，该延拓由 $\mathcal{A}$沿着 $\iota$；关于 $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$的假设现在意味着

运算子左 Kan 延拓存在，而命题 3.4 表明它也是强对称幺半的。□

**注 3.9**。 如前所述，歌剧式左 Kan 延拓的底层函子$\iota_!^{\otimes}\mathcal{A}:\mathrm{GrCob}\to\mathcal{V}$是普通左 Kan 延拓 $\iota_!\mathcal{A}:\mathrm{GrCob}\to\mathcal{V}$。根据推论 3.8，这可以刻画为本质上唯一的函子 $F$ ，它配备了一个等价 $\iota^*F\simeq\mathcal{A}$，使得典范映射

$$\int_X\mathcal{A}=\mathrm{colim}(\mathrm{Fin}_{/X}\to\mathrm{Fin}\hookrightarrow\mathrm{Gr}\xrightarrow{\mathcal{A}}\mathcal{V})\to F(X) \tag{3}$$

对于任意空间 $X$，它在 $\mathcal{V}$ 中是一个等价。

推论 *A.1* 的证明。 本质上唯一的对称幺半延拓 $\int_{(-)}\mathcal{A}$ 是歌剧式左 Kan 延拓 $\iota_!^{\otimes}\mathcal{A}$，根据命题 3.4 ，它是对称幺半的。$\iota_!^{\otimes}\mathcal{A}$ 的底层函子是 $\iota_!\mathcal{A}$，并且根据推论 3.8 ，对于 $X\in\mathrm{GrCob}$，我们确实有一个等价$\int_X\mathcal{A}\xrightarrow{\simeq}\iota_!\mathcal{A}(X)$。□

**注 3.10.** 命题 3.4 以及定理 A在稍微放宽关于 $(\mathcal{V},\mathcal{A})\in\mathcal{F}\mathrm{rob}^{\mathrm{ext}}_{\mathbf{E}_\infty}$的假设后仍然成立：将定义 1.2中的第二点替换为：对于所有$X,Y\in\mathcal{S}$组装映射

$$\int_{X\sqcup Y}\mathcal{A}\simeq\mathrm{colim}_{\mathrm{Fin}_{/X}\times\mathrm{Fin}_{/Y}}\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to(\mathrm{colim}_{\mathrm{Fin}_{/X}}\mathcal{A})\otimes(\mathrm{colim}_{\mathrm{Fin}_{/Y}}\mathcal{A})\simeq\int_X\mathcal{A}\otimes\int_Y\mathcal{A}.$$

是一个等价。首先我们注意到，左 Kan 延拓 $\iota_!\mathcal{A}:\mathrm{Gr}\to\mathcal{V}$的本质像包含在由对象$\int_X\mathcal{A}$（对所有空间 $X\in\mathcal{S}$）张成的满 8-子范畴 $\mathcal{V}'\subseteq\mathcal{V}$中。关于 $\mathcal{V}$的假设确实意味着 $\mathcal{V}'$在 $\mathcal{V}$上的幺半乘积下封闭。此外，将$\mathcal{A}$视为 $\mathcal{V}'$中的 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数时，配对 $(\mathcal{V}',\mathcal{A})$满足命题 3.4 的条件，因此我们得到一个对称幺半延拓 $\mathrm{GrCob}\to\mathcal{V}'$。再与对称幺半嵌入 $\mathcal{V}'\to\mathcal{V}$复合，得到 $\mathcal{A}$的对称幺半延拓 $\mathrm{GrCob}\to\mathcal{V}$。然而，这一构造一般并非 $\mathcal{A}$的歌剧式左 Kan 延拓，而后者甚至可能不存在。

## 4. 稠密性与自然运算

在本节中，我们证明定理B，该定理指出 Gr 在 GrCob 中稠密，并将 GrCob 刻画为通过形式地添加所有余极限而从 Gr 得到的扩张$\int_X\!\!\curlywedge_{\mathrm{Gr}}(\iota)$。作为应用，我们确定 $\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数的因子化同调上的泛自然运算空间，并将其与 $\mathbf{E}_1$-Frobenius 代数的因子化同调上的自然运算进行比较，后者见 [BSZ25]。

### 4.1. 稠密性 $\iota:\mathrm{Gr}\to\mathrm{GrCob}$。

我们先回顾稠密性的概念。

**定义 4.1**。 [Lur25, 03VD] 设 $i$: $\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是一个满 $\infty$-子范畴的包含。称$\mathcal{D}$ 在 中稠密 $\mathcal{C}$，如果对每个 $X\in\mathcal{C}$，下式构成一个余极限图表

$$(\mathcal{D}\times_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{/X})^{\triangleright}\to\mathcal{C}_{/X}\to\mathcal{C}.$$

下面的引理给出了稠密性的两种等价刻画。

**引理 4.2**。 满包含 $i$: $\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是稠密的，当且仅当满足以下两个等价条件：

*(1)* [Lur25，03VE] $i$ 沿 $i$ 的（普通）左 *Kan* 延拓是 $\mathcal{C}$的恒等映射。特别地，左 *Kan* 延拓存在。

*(2)* [Lur25，03VG] 下面的受限 *Yoneda* 嵌入是全忠实的：

$$\text{よ}^{\circ}_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \xrightarrow{\text{よ}_{\mathcal{C}}} \mathrm{Psh}(\mathcal{C}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Psh}(\mathcal{D}).$$

为证明定理B，我们将使用第一种刻画来验证 Gr 在 GrCob 中的稠密性，并使用第二种刻画来将 GrCob 描述为向 Gr 形式地添加某些余极限所得的范畴。

定理*B*的证明。 根据引理 4.2.(1)，只需验证沿 $\iota_!\iota$ 的包含 $\iota : \mathrm{Gr} \to \mathrm{GrCob}$ 的左 Kan 延拓 $\iota$ 是 GrCob 上的恒等映射。由引理 3.5 和推论3.8 可知，该左 Kan 延拓确实存在。由于恒等映射 $\mathrm{id} : \mathrm{GrCob} \to \mathrm{GrCob}$ 限制为包含 $\iota : \mathrm{Gr} \to \mathrm{GrCob}$，故存在一个自然变换 $\iota_!\iota \Rightarrow \mathrm{id}$。此外，对于任意$X \in \mathrm{GrCob}$，该自然变换在 X 处取值为典范映射

$$\iota_!\iota(X) = \mathrm{colim}_{B \in \mathrm{Gr} \times_{\mathrm{GrCob}} \mathrm{GrCob}_{/X}} B = \mathrm{colim}_{B \in \mathrm{Fin} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_{/X}} B \xrightarrow{\simeq} X.$$

根据引理 3.5 和推论 3.8，该映射是一个等价；因此我们得到一个自然同构$\iota_!\iota \simeq \mathrm{id}$，它们是 GrCob 上自函子的自然同构，正如所需。

因此，根据引理 4.2(2)，受限 Yoneda 嵌入 $\text{よ}^{\circ}_{\mathrm{Gr}} : \mathrm{GrCob} \to \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 是全忠实的。由于它在满 8-子范畴 Gr 上限制为 $\text{よ}_{\mathrm{Gr}}$，我们得到一个自然变换$\iota_! \text{よ}_{\mathrm{Gr}} \Rightarrow \text{よ}^{\circ}_{\mathrm{Gr}}$。它在任意空间 $X \in \mathrm{GrCob}$ 上取值为典范映射 $\mathrm{colim}^{B \in \mathrm{Fin}_{/X}} \text{よ}^{\circ}_{\mathrm{Gr}}(B) \to \text{よ}^{\circ}_{\mathrm{GrCob}}(X)$，根据引理 3.7，这是一个等价；因此，我们得到了所需的自然同构 $\iota_! \text{よ}_{\mathrm{Gr}} \simeq \text{よ}^{\circ}_{\mathrm{Gr}}$。根据推论 3.8，可确定 $\iota_! \text{よ}_{\mathrm{Gr}}$ 的本质像。□

4.2. **E 因子化同调上的自然运算$\infty$-Frobenius 代数**。现在我们转而研究 E$\mathbf{E}_\infty$-Frobenius 代数的因子化同调之间的自然运算。

**定义 4.3**。 自然运算的语境是对称幺半 8-范畴的一个跨接$\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F} \to \mathcal{G}$，其中 $\mathcal{F}$ 是一个小 8-范畴。给定上述自然运算的语境以及一个可呈对称幺半 8-范畴 $\mathcal{V}$，对于任意对象 $X \in \mathcal{G}$，我们令 $I^{\mathcal{E}}_X$ 为由复合给出的保持余极限且 $\mathcal{V}$-线性函子

$$I^{\mathcal{E}}_X : \mathrm{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{V}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{/X}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\mathrm{colim}} \mathcal{V}.$$

我们将 $\mathcal{F}$-代数在 $\mathcal{V}$ 中的自然运算 8-范畴定义为：其结构取自 $\mathcal{E}$，并扩展到 $\mathcal{G}$

$$\mathrm{Nat}_{\mathcal{F}}[\mathcal{E}, \mathcal{G}; \mathcal{V}] \subseteq \mathrm{Fun}^{L, \mathcal{V}}(\mathrm{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \simeq \mathrm{Psh}(\mathcal{E}; \mathcal{V})$$

它是由 $I^{\mathcal{E}}_X$ 张成的满 8-子范畴，其中 $X$ 遍历 $\mathcal{G}$的对象。当 $\mathcal{V} = \mathcal{S}$ 时，我们在记号中省略它。

**例 4.4**。 我们将要考虑的主要自然运算语境是以下跨接： $\mathcal{O} \leftarrow \mathrm{Disk}_1 \to \mathrm{Mfld}_1$ 和 $\mathrm{Gr} \leftarrow \mathrm{Fin} \to \mathcal{S}$。(： $\mathcal{OC} \to \mathrm{GrCob}$ 在（2）中给出的函子的限制，提供了这两个自然运算语境之间的比较映射。

自然运算这一概念由 Wahl 在 [Wah16] 中引入，背景为 $\mathcal{V} = \mathrm{D}(\mathbb{Z})$、$\mathcal{F} \simeq \mathrm{Disk}_1$ 和 $\mathcal{G} = \mathrm{Mfld}_1$,，且 $\mathcal{E}$ 的选择任意。在 [BSZ25], 中，研究情境“提升”到了 $\mathcal{V} = \mathcal{S}$，即初始的可呈对称幺半 8-范畴，重点关注 $\mathcal{E} = \mathcal{O}$。在一些有利情形下（包括例 4.4 和定理 C 中讨论的两个情形，我们将对此加以证明），8-范畴 $\mathrm{Nat}_{\mathcal{F}}[\mathcal{E}, \mathcal{G}; \mathcal{V}]$ 恰好是 $\mathrm{Psh}(\mathcal{E}; \mathcal{V})$ 的一个对称幺半 8-子范畴；后者赋有 Day 卷积对称幺半结构。

首先，我们建立一个判据，用以判断自然运算的上下文之间的映射何时会诱导自然运算 $\infty$-范畴之间的比较映射。

**引理 4.5.** 假设我们有一个 ∞-范畴跨接的映射

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \longleftarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \downarrow e & & \downarrow f & & \downarrow g \\ \mathcal{E}' & \longleftarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{G}', \end{array}$$

并且对于任意 $X \in \mathcal{G}$，诱导函子 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{/X} \to \mathcal{F}' \times_{\mathcal{G}'} \mathcal{G}'_{/g(X)}$ 是终对象性的。因此有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Nat}_{\mathcal{F}}[\mathcal{E},\mathcal{G};\mathcal{V}] & \subseteq & \mathrm{Fun}^{L}(\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{V}),\mathcal{V}) & \simeq & \mathrm{Psh}(\mathcal{E};\mathcal{V}) \\ \downarrow \mathrm{Nat}[e] & & \downarrow -\circ e^{*} & & \downarrow e_{!} \\ \mathrm{Nat}_{\mathcal{F}'}[\mathcal{E}',\mathcal{G}';\mathcal{V}] & \subseteq & \mathrm{Fun}^{L}(\mathrm{Fun}(\mathcal{E}',\mathcal{V}),\mathcal{V}) & \simeq & \mathrm{Psh}(\mathcal{E}';\mathcal{V}). \end{array}$$

证明。 对于任意 $X \in \mathcal{G}$，考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Fun}(\mathcal{E}',\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\mathcal{F}' \times_{\mathcal{G}'} \mathcal{G}'_{/g(X)},\mathcal{V}) & & \\ \downarrow e^{*} & & \downarrow & \searrow & \\ \mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{/X},\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathcal{V} \end{array} .$$

在右侧三角形中，指向 $\mathcal{V}$ 的两个箭头是在切片范畴上取余极限，因此根据终对象性假设，右侧三角形交换。左侧方块按构造交换。注意到，沿顶部和底部的复合分别为 $I^{\mathcal{E}'}{}_{g(X)}$ 和 $I^{\mathcal{E}}_{X}$，因此得到一个等价 $I^{\mathcal{E}'}{}_{g(X)} \simeq I^{\mathcal{E}}_{X} \circ e^{*}$，这表明 $-\circ e^{*}$ 到 $\mathrm{Nat}_{\mathcal{F}}[\mathcal{E},\mathcal{G};\,\mathcal{V}]$ 的限制通过 $\mathrm{Nat}_{\mathcal{F}'}[\mathcal{E}',\,\mathcal{G}';\,\mathcal{V}]$ 分解，如所要求。 □

为了证明来自例 4.4 的自然运算的背景映射满足引理 4.5中的假设，我们需要以下众所周知的结果。我们未能在文献中找到确切的参考文献，因此在此给出证明。特别地，这意味着一个 $\mathbf{E}_{\infty}$-代数 $\mathcal{A}$ 在 $S^{1}$ 上的因子化同调与其霍赫希尔德同调一致，其中我们将 $\mathcal{A}$ 视为一个 $\mathbf{E}_{1}$-代数 [NS18，IV.2。2][AF20，命题 5。7]。

**引理 4.6**。 对于任意紧致一维流形 $M$，函子

$$\mathrm{Disk}_{/M} := \mathrm{Disk}_{1} \times_{\mathrm{Mfld}_{1}} (\mathrm{Mfld}_{1})_{/M} \to \mathrm{Fin}_{/M}$$

由取圆盘的道路连通分支并将 *1*-流形视为空间所诱导的函子是终的。

证明。 由于对于所有紧致 1 维流形$M$ 和$N$，典范映射 $\mathrm{Disk}_{/M} \times \mathrm{Disk}_{/N} \to \mathrm{Disk}_{/M \sqcup N}$ 和 $\mathrm{Fin}_{/M} \times \mathrm{Fin}_{/N} \to \mathrm{Fin}_{/M \sqcup N}$ 都是等价，因此只需在两种情形下证明该引理：$M = D^{1}$ 以及$M = S^{1}$。对于$M = D^{1}$，，结论显然，因为源和目标都有一个由$D^{1}$给出的终对象。对于$M = S^{1}$，，我们将 $\mathrm{Fin}_{/S^{1}}$ 识别为具有以下对象和态射的 1-范畴：

- 对象是一个带有自由 $\mathbb{Z}$-作用且轨道有限的集合$A$；
- 态射是一个 $\mathbb{Z}$-等变映射。

类似地，$\mathrm{Disk}_{/S^{1}}$ 等价于副循环范畴 $\Lambda_{\infty}$ [BSZ25，引理 5.13 和 5。18]，它可描述为以下 1-范畴：

- 对象是全序集合$B$，带有自由的 $\mathbb{Z}$-作用且仅有有限多个轨道，使得映射 $1.-\colon B \to B$ 保序，并且对所有$b \in B$满足 $1.b > b$；
- 态射是一个 $\mathbb{Z}$-等变的弱递增映射。

为应用 Quillen 定理 A，我们希望证明：对于任意对象 $A \in \mathrm{Fin}_{/S^1}$，将其视为上述的 $\mathbb{Z}$-集合，以及切片范畴 $\mathcal{C}_A := \mathrm{Disk}_{/S^1} \times_{\mathrm{Fin}_{/S^1}} (\mathrm{Fin}_{/S^1})_{A/}$，其分类空间是可缩的。我们将 $\mathcal{C}_A$ 中的一个对象表示为 $\mathbb{Z}$-集合的映射 $A \to B$，其中 B 赋有如上所述的全序。令 $\mathcal{C}'_A$ 表示由满射 $A \to B$ 张成的 $\mathcal{C}_A$ 的满子范畴。则包含 $\mathcal{C}'_A \hookrightarrow \mathcal{C}_A$ 具有右伴随 $R_A$，将 $A \to B$ 发送到 $A \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(A \to B)$，其中像 $\mathrm{Im}(A \to B) \subseteq B$ 赋有受限的全序。特别地，$|\mathcal{C}_A| \simeq |\mathcal{C}'_A|$。我们还注意到，$\mathcal{C}'_A$ 中的态射由 A 下的满射 $\mathbb{Z}$-等变弱递增映射 $B \twoheadrightarrow B'$ 表示。

我们对 $A$ 的 $\mathbb{Z}$-轨道数进行归纳。对于 $A = \varnothing$，我们注意到 $\mathcal{C}_\varnothing := \mathrm{Disk}_{/S^1} \times_{\mathrm{Fin}_{/S^1}} (\mathrm{Fin}_{/S^1})_{\varnothing/} \simeq \mathrm{Disk}_{/S^1}$ 有一个初始对象 $\varnothing$，因此 $\mathcal{C}_\varnothing \simeq \mathcal{C}'_\varnothing \simeq *$ 作为范畴。

接下来，我们假设对于给定的 $A$，$|\mathcal{C}'_A| \simeq *$，并考虑 $\mathbb{Z}$-集 $A' := A \sqcup \mathbb{Z}$。复合函子

$$\psi \colon \mathcal{C}'_{A'} \hookrightarrow \mathcal{C}_{A'} \xrightarrow{A \hookrightarrow A'} \mathcal{C}_A \xrightarrow{R_A} \mathcal{C}'_A$$

是一个余笛卡尔纤维化。$\psi^{-1}(A \twoheadrightarrow B)$ 上方的纤维，其对应于 $\psi$ 中的对象 $A \twoheadrightarrow B$，是由以下对象和态射描述的偏序集：

- 对象有两种类型：(1) 第一类由满射 $A' = A \sqcup \mathbb{Z} \twoheadrightarrow B$ 给出，它们延拓了给定的满射 $A \twoheadrightarrow B$；(2) 第二类由满射 $A' = A \sqcup \mathbb{Z} \twoheadrightarrow B \sqcup \mathbb{Z}$ 给出，它们是给定满射 $A \twoheadrightarrow B$ 与 $\mathbb{Z}$ 的恒等映射的余积；这些对象还包含将 $B \sqcup \mathbb{Z}$ 上的全序延拓至 $B$ 的信息，并满足上述要求。
- 态射只能从类型 (2) 的对象指向类型 (1) 的对象；若存在，则它是在 $A'$，下的唯一映射。

偏序集 $\psi^{-1}(A \twoheadrightarrow B)$ 可直接识别为全序集 $B$ 中含一个或两个元素的子区间所构成的偏序集，其偏序由包含关系给出；特别地，我们有 $|\psi^{-1}(A \twoheadrightarrow B)| \simeq *$。利用归纳假设 $|\mathcal{C}'_A| \simeq *$，我们还可得出 $|\mathcal{C}'_{A'}| \simeq *$。□

现在我们可以证明定理 C，下面借助一个更大的交换图再次陈述该定理。

**定理 4.7**。存在一个对称幺半$\infty$-范畴的交换方形，其中左侧的水平箭头是等价：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{OC} & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Nat}_{\mathrm{Disk}_1}[\mathcal{O}, \mathrm{Mfld}_1] & \subseteq & \mathrm{Psh}(\mathcal{O}) \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nat}[\varepsilon]} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_!} \\ \mathrm{GrCob} & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Nat}_{\mathrm{Fin}}[\mathrm{Gr}, \mathcal{S}] & \subseteq & \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr}). \end{array}$$

证明。根据引理4.5 和引理4.6，中间的竖直映射定义良好，因此右侧的方形自动交换。由 [BSZ25，推论 36]，，上方左侧的水平箭头是等价，其中 $M \in \mathcal{OC}$ 和 $I^{\mathcal{O}}_M$ 都对应于预层 $\int_M \text{ょ}_{\mathcal{O}}(\iota)$。根据定理 B，下方左侧的水平箭头是等价：GrCob 和 $\mathrm{Nat}_{\mathrm{Fin}}[\mathrm{Gr}\ \mathcal{S}]$ 都可识别为 $\mathrm{Psh}(\mathrm{Gr})$ 中由相同对象张成的满子范畴，因而彼此等价，其中$X \in$GrCob 和$I^{\mathrm{Gr}}_X$都对应于预层 $\int_X \text{ょ}_{\mathrm{Gr}}(\iota)$。

左侧方形的交换性可由外侧方形的交换性推出，而外侧方形的交换性又来自（受限）Yoneda 嵌入的自然性。□

**注 4.8.** 令 $\mathcal{V}$ 为任意一个可呈对称幺半 8-范畴。一方面，可以利用可呈对称幺半 8-范畴的本质唯一态射 $\mathcal{S} \to \mathcal{V}$，将 $\varepsilon \colon \mathcal{OC} \to \mathrm{GrCob}$（视为 $\mathcal{S}$-富集对称幺半

幺半 8-范畴之间的态射）变换为 $\varepsilon^{\mathcal{V}}\colon \mathcal{OC}^{\mathcal{V}} \to \mathrm{GrCob}^{\mathcal{V}}$（视为 $\mathcal{V}$-富集对称幺半 8-范畴之间的态射）。另一方面，$\varepsilon_!\colon \mathrm{Psh}(\mathcal{O};\,\mathcal{V}) \to \mathrm{Psh}(\mathrm{Gr};\,\mathcal{V})$ 可视为 $\mathcal{V}$-富集对称幺半 8-范畴之间的态射，并限制为一个 $\mathcal{V}$-富集对称幺半函子

$$\mathrm{Nat}[\varepsilon]^{\mathcal{V}}\colon \mathrm{Nat}_{\mathrm{Disk}_1}[\mathcal{O},\mathrm{Mfld}_1;\mathcal{V}] \to \mathrm{Nat}_{\mathrm{Fin}}[\mathrm{Gr},\mathcal{S};\mathcal{V}].$$

定理 C 的类似结论给出了 $\mathcal{V}$-富集对称幺半函子 $\varepsilon^{\mathcal{V}}$ 与 $\mathrm{Nat}[\varepsilon]^{\mathcal{V}}$ 之间的对应，并确定了它们的源和目标。证明完全相同，因此我们省略细节。

## 参考文献

[AF20] 大卫·阿亚拉和约翰·弗朗西斯。《因子化同调入门》。载于《同伦论手册》。Chapman and Hall/CRC，纽约，纽约州，美国，2020年。arXiv:1903.10961。[Bia25a] Andrea Bianchi。《弦拓扑与图上同边物》，2025年。arXiv:2511.14978。[Bia25b] Andrea Bianchi。《有限集之间的对称幺半扩张与图上同边物》，2025年。arXiv:2509.22575。[BS] 绍尔·巴尔坎和 Jan Steinebrunner。《通过对偶化模构造循环无穷运算子》。准备中。[BSZ25] 绍尔·巴尔坎、Jan Steinebrunner 和张雅德拉。《开弦二维拓扑场论存在初始开闭扩张》，2025年。arXiv:2509.02553。[CH20] 褚宏毅和鲁内·豪格森。《通过 Day 卷积构造自由代数》，2020年。arXiv:2006.08269。[Cos07a] 凯文·科斯特洛。《拓扑共形场论与卡拉比–丘范畴》。《数学进展》，210：165–214，2007年。[Cos07b] 凯文·科斯特洛。《拓扑共形场论与规范理论》。《几何与拓扑》，11：1539–1579，2007年。[CTZ08] 凯文·科斯特洛、托马斯·特拉德勒和马哈茂德·泽纳利安。《厄米卡拉比–丘椭圆空间的闭弦拓扑共形场论》，2008年。arXiv:0807.3052。[Kau07] 拉尔夫·M·考夫曼。《Frobenius 代数的 Hochschild 上链上的模空间作用。I. 胞腔运算子》。《非交换几何杂志》，1：333–384，2007年。[Kau08] 拉尔夫·M·考夫曼。《Frobenius 代数的 Hochschild 上链上的模空间作用。II. 关联函数》。《非交换几何杂志》，2：283–332，2008年。[Kau10] 拉尔夫·M·考夫曼。《通过开闭 Hochschild 作用构造开闭弦拓扑与模空间作用》。《SIGMA》，6：036，2010年。[LP07] 亚伦·D·劳达和亨德里克·普法伊费尔。《二维开闭拓扑量子场论的态和构造》。《结理论及其应用》，16(09)：1121–1163，2007年。[LP08] 亚伦·D·劳达和亨德里克·普法伊费尔。《开闭弦：二维扩展拓扑量子场论与 Frobenius 代数》。《拓扑及其应用》，155(7)：623–666，2008年。[Lur17] 雅各布·卢里。《高等代数》。哈佛大学，马萨诸塞州剑桥，2017年。[Lur25] 雅各布·卢里。《Kerodon——同伦相容数学在线资源》，2025年。www.kerodon.net。[MW25] 卢卡斯·米勒和卢卡斯·沃伊克。《范畴化开拓扑场论》。《美国数学会会刊》，153(06)：2381–2396，2025年。[NS18] 托马斯·尼古劳斯和彼得·肖尔策。《关于拓扑循环同调》。《数学学报》，221：409，2018年2：203。[TZ06a] 托马斯·特拉德勒和马哈茂德·泽纳利安。《代数弦运算》。《K-理论》，38(1)：59–82，2006年。[TZ06b] 托马斯·特拉德勒和马哈茂德·泽纳利安。《关于循环 Deligne 猜想》。《纯粹与应用代数杂志》，204：280–299，2006年。[Wah16] 娜塔莉·瓦尔。《Hochschild 同调中的泛运算》。《纯数学与应用数学杂志》（Crelle's Journal），2016(720)：81–127，2016年。[WW16] 娜塔莉·瓦尔和克雷格·韦斯特兰。《结构化代数的 Hochschild 同调》。《数学进展》，288：240–307，2016年。