arXiv:2601.03773v1 [math.DG] 7 Jan 2026

二维球面的格林函数刚性

MIJIA LAI 和 CHILIN ZHANG

摘要。我们验证了 X. Chen 和 Y. Shi 提出的一个猜想，该猜想源于他们对欧几里得空间中球面上格林函数的研究。更准确地说，设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是一个闭的 C^2 嵌入曲面，并假设存在一点 $p \in M$，使得其格林函数 G 具有如下形式：$G(p, q) = -\frac{1}{2\pi} \ln d_{\mathbb{R}^3}(p, q) + c$，$\forall q \neq p$，那么 M 必为圆球面。

1. 引言

在 [CS1], 中，作者对欧几里得空间中圆球面上各种共形不变算子的格林函数进行了有趣的研究。一项有趣的发现是，格林函数的显式表达式可以用所在欧几里得空间中的外在距离来表示。记 $||\cdot||$ 为一个向量的欧几里得范数，则有如下结论。

- 对于 $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$，$\Delta_g$ 的格林函数形式为 $G(p, q) = -\frac{1}{2\pi} \log \|p - q\| + C$;
- 对于 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 3$，共形拉普拉斯算子 P_2^g 的格林函数形式为 $G(p, q) = c_{n,1} \|p - q\|^{2-n}$;
- 对于 $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$，Paneitz 算子 P_4^g 的格林函数形式为 $G(p, q) = -\frac{1}{8\pi^2} \log \|p - q\| + C$;
- 对于 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 3, n \neq 4$，Paneitz 算子 P_4^g 的格林函数形式为 $G(p, q) = c_{n,2} \|p - q\|^{4-n}$。

随后，作者提出了逆向问题：设 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭合嵌入超曲面，假设其格林函数具有上述形式，那么 M 是否必定与圆球面等距？可以证明，如果对 M 上任意一对点 (p, q)，格林函数都具有这种特定形式，那么 M 上所有点都是脐点，因此逆向问题的答案显然是肯定的。鉴于此，Chen-Shi 提出了一个更难的问题，称为强格林函数刚性猜想：

猜想 1.1。设 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为光滑闭合嵌入超曲面。假设存在一点 $p \in M$，使得相应共形不变算子的格林函数具有上述形式，则 M 必为圆球面。

利用正质量定理，Chen-Shi、Chen-Gan-Shi 验证了他们关于 $n \geq 3$ [CS1、CGS、CS2]维共形拉普拉斯算子的猜想。他们证明的关键在于与渐近平坦流形的联系。实际上，以 $G^{\frac{4}{n-2}}(p, \cdot)$ 为共形因子，可以将 M 转化为渐近平坦流形，其中 $\overline{p}$ 被展开至无穷远处。格林函数的特殊形式使得我们能够计算 ADM 质量，而其结果恰为零。因此，刚性结论得以成立。

然而，这种方法在二维情形下似乎并不可行。本文采用另一种策略，肯定地解决了二维球面上标准拉普拉斯算子的强格林函数刚性猜想。

定理 1.1. 设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是一个 C^2 闭嵌入曲面，假设存在一点 $p \in M$，使得其格林函数 G 具有如下形式

$$G(p,q) = -\frac{1}{2\pi} \ln ||p-q|| + c, \quad \forall q \in M \setminus p,$$

那么 M 必定是一个圆球面。

证明的主要思路如下。首先，我们证明格林函数的这一特定形式等价于一个关于 M平均曲率的方程（见（2.4））。其次，根据（2.4）， M 是星形的，因此可以将其视为$\mathbb{S}^2_+$上的径向图。于是，我们将（2.4）转化为一个方程（见（2.5）），径向函数 ρ 满足该方程。这是定义在 $\mathbb{S}^2_+$ 上的一个极小曲面型方程，其狄利克雷边界条件为 $\rho = -\infty$。关于径向图的类似方程一直是研究热点，参见例如 [FR、L、S、T]。最后，我们使用移动平面法（实际上是旋转圆法），证明方程（2.5）的任意解都必须是旋转对称的，由此即可得出主要结论。

我们还指出，Chen-Shi[CS1] 已在假设 M 为解析的且旋转对称的条件下，验证了二维球面的强格林函数猜想。

本文结构安排如下。第2节中，我们设定基本记号，并根据格林函数的特定形式推导出若干等价方程。我们还建立了若干引理来处理（2.5）。第3节中，我们详细证明定理1.1。第4节中，我们借鉴 Chen-Shi 的一些思路，进一步讨论我们的方法。

2. 准备工作

2.1. 基本设定。 设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是一个紧致嵌入曲面。设 ν 是 M 上的外单位法向量场。第二基本形式定义为 $II(e_i, e_j) =$

$\langle \nabla_{e_i}\nu,\ e_j\rangle$，我们用 $H=\kappa_1+\kappa_2$ 表示平均曲率。按照这种记号，单位二维球面相对于单位外法向量的 $H=2$ 。

在定理1.1的假设下， M 的格林函数具有如下形式$G(p,q)=-\frac{1}{2\pi}\log||p-q||+c$，其中某个固定的 p以及任意的 $q\neq p$。我们可以令 p 在原点处取值，并将格林函数简写为

$$G(y)=-\frac{1}{2\pi}\log|y|+c.$$

由于缩放不会改变格林函数，我们还假设 $\mathrm{Area}(M)=4\pi$。

因此，在 M 上有

$$\Delta_M G=\frac{1}{4\pi}-\delta_0 \tag{2.1}$$

以分布的意义而言。直接计算可得

$$\Delta_{\mathbb{R}^3}G(y)=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|y|},\quad y\neq 0. \tag{2.2}$$

我们还有

$$\Delta_{\mathbb{R}^3}G(y)=\nabla^2G(\nu,\nu)+H\frac{\partial G}{\partial \nu}+\Delta_M G(y), \tag{2.3}$$

由于 $\nabla^2 G=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{|y|^2}-\frac{2y_iy_j}{|y|^4}\right)$ 鉴于 $G(y)=-\frac{1}{2\pi}$对数$|y|+c$，结合（2.1）、（2.2）、（2.3），我们得到

$$\frac{2(\langle y,\nu\rangle)^2}{|y|^4}-H\frac{\langle y,\nu\rangle}{|y|^2}+\frac{1}{2}=0\quad ,x\in M\setminus\{0\}. \tag{2.4}$$

注意到 $\langle y,\ \nu\rangle\neq 0$ 在 $M\setminus\{0\}$中，即 M（更确切地说，由 M围成的区域）相对于原点是星形的。

由此可 以从（2.4）推出 $\langle y,\ \nu\rangle\neq 0$ 对所有 $y\neq 0$。于是，对于 $y\neq 0$， （2.4）化简为 to

$$H=\frac{2\langle y,\nu\rangle}{|y|^2}+\frac{|y|^2}{2\langle y,\nu\rangle}\geq 2.$$

我们可以将原点附近的 M写成函数 $y_3=f(y_1,y_2)$的图形，其中 $\nabla f(0)=0$。由此可得

$$\nu=\frac{(-f_1,-f_2,1)}{\sqrt{1+|Df|^2}}.$$

在 $(y_1,\ y_2)=(0,\ 0)$ 处进行泰勒展开，我们得到

$$\langle y,\nu\rangle=-\frac{1}{2}f_{11}(0,0)y_1^2-f_{12}(0,0)y_1y_2-f_{22}(0,0)y_2^2+o(r^2),\qquad \text{where } r^2=y_1^2+y_2^2.$$

我们还有 $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + o(r^2)$。于是可得

$$\lim_{(y_1,y_2)=\lambda e_i, \lambda\to 0} \frac{\langle y, \nu\rangle}{|y|^2} = \frac{1}{2}\kappa_i, \quad i = 1, 2$$

其中 e_i 是 M 在原点处的主方向，其主曲率为 κ_i。代回（2.4），我们推得 $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ 因此，原点是**脐点**，属于 M。

2.2. 径向图。如上所述， M 相对于原点是星形的。此外， M 在原点附近局部凸，因此我们可以将其表示为上半球 $\mathbb{S}^2_+$上的径向图，即 $X(q) = e^{\rho(q)}q$, $q \in \mathbb{S}^2_+$。设 $\{e_1, e_2\}$ 是 $\mathbb{S}^2_+$上的局部正交标架，则我们可以将 M 上的诱导度量写为

$$g_{ij} = e^{2\rho}(\delta_{ij} + \rho_i\rho_j).$$

其逆为

$$g^{ij} = e^{-2\rho}(\delta_{ij} - \frac{\rho_i\rho_j}{1 + |\nabla\rho|^2}).$$

外单位法向量为

$$\nu(q) = \frac{q - \nabla\rho(q)}{\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}}.$$

第二基本形式为（将 ∇记作协变导数）

$$A_{ij} = -\langle X_{ij}, \nu\rangle = \frac{e^{\rho}\left(\delta_{ij} + \nabla_i\rho\nabla_j\rho - \nabla_{ij}\rho\right)}{\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}}.$$

Then

$$A_i^j = A_{ik}g^{kj} = \frac{e^{-\rho}\delta_i^j}{\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}} - e^{-\rho}\partial_i(\frac{\rho_j}{\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}}),$$

因此

$$H = g^{ij}A_{ji} = e^{-\rho}\left(\frac{2}{\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}} - \mathrm{div}(\frac{\nabla\rho}{\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}})\right).$$

于是（2.3）变为

$$\mathrm{div}(\frac{\nabla\rho}{\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}}) = -\frac{1}{2}e^{2\rho}\sqrt{1 + |\nabla\rho|^2}. \tag{2.5}$$

再次，若将原点附近的 $y \in M$表示为函数 $y_3 = f(y_1, y_2)$ 的图像，且 $\nabla f(0) = 0$。令 $x = \frac{y}{|y|}$ 为在 $\mathbb{S}^2_+$上的投影，则 $e^{\rho(x)} = |y|$。令

$$(r, \phi) = \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \angle(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2, \vec{e}_1)\right)$$

为 $y_1 - y_2$ 平面中的极坐标，则有

$$r^2 + f(y_1, y_2)^2 = e^{2\rho(x)}.$$

由于原点是主曲率为 1 的脐点，因此当 $(y_1,\ y_2) \to 0$ 时，

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2}r^2 + \mathcal{E}_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2}r^2 + o(r^2) \quad \text{with } D^2_{(y_1,y_2)}\mathcal{E}_1 = o(1).$$

那么，在极坐标 $(r,\ \phi)$ 下，我们有

$$D_{(r,\phi)}\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} o(r) & o(r^2) \end{bmatrix}, \quad D^2_{(r,\phi)}\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} o(1) & o(r) \\ o(r) & o(r^2) \end{bmatrix}.$$

我们应用反函数定理，具体地，将 $(f,\ \phi)$ 视为一组新的变量，并将 r 写成 $(f,\ \phi)$ 的函数，则

$$\frac{\partial r}{\partial f} = \frac{1}{r + o(r)} = \frac{1 + o(1)}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial \phi} = \frac{-o(r^2)}{r + o(r)} = o(r),$$

这意味着 $\mathcal{E}_2(f,\ \phi) = -2\mathcal{E}_1(r,\ \phi)$ 满足：

$$r(f, \phi)^2 = 2f + \mathcal{E}_2(f, \theta) = 2f + o(f), \quad D_{(f,\phi)}\mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} o(1) & o(f) \end{bmatrix}.$$

利用 $r^2 + f^2 = e^{2\rho}$，对于 $\mathcal{E}_3(f,\ \phi) = \mathcal{E}_2(f,\ \phi) + f^2$，有：

$$e^{2\rho(x)} = 2f + \mathcal{E}_3(f, \phi) = 2f + o(f), \quad D_{(f,\phi)}\mathcal{E}_3 = \begin{bmatrix} o(1) & o(f) \end{bmatrix}.$$

另请注意，$f = e^{\rho(x)} \cdot \langle x,\ \vec{e_3}\rangle$ 以及 $\phi = \angle(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2,\ \vec{e}_1)$，因此我们有

$$e^{\rho(x)} = 2\langle x, \vec{e_3}\rangle + o(\langle x, \vec{e_3}\rangle), \quad \text{as } \langle x, \vec{e_3}\rangle \to 0, \tag{2.6}$$

and

$$e^{\rho}\nabla\rho = 2\vec{e_3} + o(1), \quad \text{as } \langle x, \vec{e_3}\rangle \to 0. \tag{2.7}$$

2.3. **两个代数引理**。为处理极小曲面型方程（2.5），我们证明两个代数引理。

引理 2.1. 假设 $\vec{a}$、$\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ 满足 $|\vec{a}|$、$|\vec{b}| \le M$。那么，存在某个仅依赖于 M 的 $\lambda > 1$，使得

$$\Big|\frac{\vec{b}}{\sqrt{1 + |\vec{b}|^2}} - \frac{\vec{a}}{\sqrt{1 + |\vec{a}|^2}}\Big| \le \lambda|\vec{b} - \vec{a}|,$$

and

$$\langle\frac{\vec{b}}{\sqrt{1 + |\vec{b}|^2}} - \frac{\vec{a}}{\sqrt{1 + |\vec{a}|^2}}, \vec{b} - \vec{a}\rangle \ge \lambda^{-1}|\vec{b} - \vec{a}|^2.$$

证明。 我们注意到，对于 $\vec{v} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$, $\dfrac{v}{\sqrt{1+|\vec{v}|^2}}$ 实际上是 $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ 的梯度。我们可以很容易地验证 f 的一致凸性，即：

$$\lambda(M)^{-1} I_2 \leq D^2 f(\vec{v}) \leq \lambda(M) I_2, \quad \text{as long as } |\vec{v}| \leq M.$$

对于 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}| \leq M$，其中 $L = |\vec{b} - \vec{a}|$，我们考虑它们的凸组合曲线：

$$\gamma(t) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}.$$

那么， $|\gamma(t)| \leq M$, $\gamma'(t) = \vec{b} - \vec{a}$，并且

$$\frac{\vec{b}}{\sqrt{1+|\vec{b}|^2}} - \frac{\vec{a}}{\sqrt{1+|\vec{a}|^2}} = \int_0^1 D^2 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 D^2 f(\gamma(t)) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) dt.$$

利用 f 的一致凸性，我们可以证明所需的两个不等式。 □

引理 2.2。 假设 $\vec{a}, \vec{b} \in T_p \mathbb{S}^2_+$，使得 $|\vec{b}| \leq \lambda |\vec{a}|$ 且 $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \geq \lambda^{-1} |\vec{a}|^2$ 对某个$\lambda > 1$成立。那么，存在一个自伴张量 $A \in T_1^1(T_p \mathbb{S}^2_+)$，使得 $\vec{b} = A\vec{a}$，并且

$$\{\Lambda^{-1} g_{ij}\} \leq \{A_i^k g_{kj}\} \leq \{\Lambda g_{ij}\}$$

其中某个 $\Lambda > 1$ 仅依赖于 λ。

证明。 不失一般性，假设 $T_p \mathbb{S}^2_+ = \text{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ 且 $\vec{a} = \vec{e}_1$。于是，我们有 $\vec{b} = b^i \vec{e}_i$，其中 $b^1 \geq \lambda^{-1}$ 且 $|\vec{b}| \leq \lambda$。设 $(\vec{\eta}^1, \vec{\eta}^2)$ 是与 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ 对偶的余标架，则令

$$A = b^1 \vec{\eta}^1 \otimes \vec{e}_1 + b^2 \vec{\eta}^1 \otimes \vec{e}_2 + b^2 \vec{\eta}^2 \otimes \vec{e}_1 + 3\lambda \vec{\eta}^2 \otimes \vec{e}_2.$$

可以很容易看出， A 是自伴的，且满足 $b = A\vec{a}$。此外，对于 $g_{ij} = \delta$，我们有

$$\{\frac{\lambda^{-1}}{2} \delta_{ij}\} \leq \{A_i^k \delta_{kj}\} \leq \{4\lambda \delta_{ij}\}.$$

因此，我们可以选取 $\Lambda = 4\lambda$。 □

3. 定理1.1的证明

定理 *1.1*的证明。 如引言所述，我们将采用移动平面法（更准确地说是旋转圆法）来证明以下定义在 $\rho(x)$ 上的狄利克雷问题的解具有旋转对称性 $\mathbb{S}^2_+$：

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \rho(x)}{\sqrt{1+|\nabla \rho(x)|^2}}\right) = -\frac{1}{2} e^{2\rho(x)} \sqrt{1+|\nabla \rho(x)|^2}, & x \in \mathbb{S}^2_+, \\ e^{\rho(x)} = 0, & x \in \partial \mathbb{S}^2_+, \end{cases}$$

并满足额外的渐近假设（2.6）和（2.7）。

1. 旋转圆的设定

定义 3.1。 设 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，并设 $\vec{v}_\theta = \text{余弦}\ \theta\vec{e}_3 - \text{正弦}\ \theta\vec{e}_1$。令

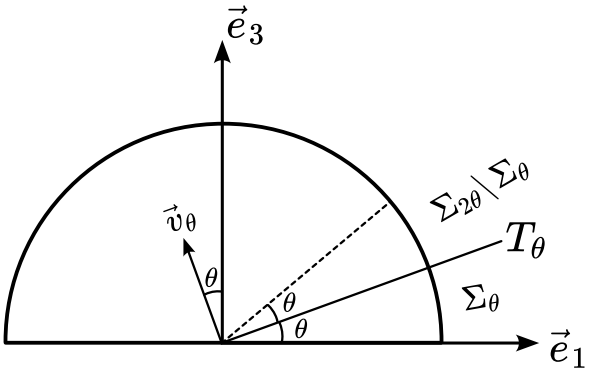
$$T_\theta = \{x \in \mathbb{S}^2_+ : \langle x, \vec{v}_\theta\rangle = 0\}, \quad \Sigma_\theta = \{x \in \mathbb{S}^2_+ : \langle x, \vec{v}_\theta\rangle < 0\}.$$

T_θ 是我们将要旋转的半圆。令 $x_\theta \in \Sigma_{2\theta} \setminus \Sigma_\theta$ 为 x关于 T_θ的反射，即：

$$x_\theta = x - 2\langle x, \vec{v}_\theta\rangle\vec{v}_\theta.$$

令 $\rho_\theta(x) = \rho(x_\theta)$ 以及 $w_\theta(x) = \rho_\theta(x) - \rho(x)$，其中 $x \in \Sigma_\theta$。对于每个 $\sigma > 0$，我们记 ：

$$w_{\theta,\sigma} = w_\theta + \max\left\{\frac{\sigma}{\langle x, \vec{e}_3\rangle} - 1, 0\right\}, \quad \Omega_{\theta,\sigma} = \{x \in \Sigma_\theta : w_{\theta,\sigma}(x) < 0\}.$$



2. 开始移动圆

引理 3.1. 对于每个 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，都存在某个 $\sigma > 0$ （取决于 θ），使得对于每个 $\sigma \in (0, \sigma)$，我们有

$$\liminf_{x\to y} w_{\theta,\sigma}(x) \geq 0, \quad \textit{for every } y \in \partial\Sigma_\theta. \tag{3.1}$$

此外，$\Omega_{\theta,\sigma}$ 与 $\partial\mathbb{S}^2_+$ 之间的距离严格为正。

证明。 事实上，当 $\langle x、\ \vec{e}_3\rangle \to 0$ 时，以下一致估计成立：

$$|\rho_\theta(x)|, |\rho(x)| = O(|\ln\langle x, \vec{e}_3\rangle|) = o(\frac{1}{\langle x, \vec{e}_3\rangle}).$$

因此，$\Omega_{\theta,\sigma} \subseteq \Sigma_\theta \cap \{\langle x, \vec{e}_3\rangle \geq h(\sigma)\}$。特别地，当 3.1 时，我们已证明（ $y \in \partial\mathbb{S}^2_+$。此外，由于 $x_\theta = x$ 在 T_θ 上，我们有

$$w_{\theta,\sigma} = \max\left\{\frac{\sigma}{\langle x, \vec{e}_3\rangle} - 1, 0\right\} \geq 0 \text{ on } T_\theta.$$

我们很容易验证，$w_{\theta,\ \sigma}$ 在区域 $\Sigma_\theta \cap \{\langle x, \vec{e}_3\rangle \geq h\ (\sigma)\}$中具有有界梯度，这意味着当3.1时有 $y \in T_\theta$。 □

引理 3.2。 存在某个 $\epsilon > 0$，使得对于所有 $\theta < \epsilon$，我们有 $w_\theta(x) \geq 0$ 在 Σ_θ 中。

注记 3.1. 事实上，我们甚至有 $w_\theta(x) > 0$ 在 Σ_θ 中，这由强极大值原理得出。这个严格不等式将在引理 *3.3* 的证明中很快得到证明。

引理 *3.2* 的证明。 只需证明 $w_{\theta,\sigma} \geq 0$ 对任意 $\sigma \in (0, \bar{\sigma})$均成立。假设对某个 $\sigma > 0$这不成立，那么 $\Omega_{\theta,\sigma} \neq \emptyset$。我们在等式两边乘以

$$\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}}\Big) - \mathrm{div}\Big(\frac{\nabla\rho_\theta}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}}\Big) = \frac{e^{2\rho_\theta}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2} - \frac{e^{2\rho}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2} = O(1),$$

乘以 $w_{\theta,\sigma}$ 并在 $\Omega_{\theta,\sigma}$上积分。根据引理3.1，分部积分时不会产生边界项，因此我们得到

$$\int_{\Omega_{\theta,\sigma}} \langle \nabla w_{\theta,\sigma}, \frac{\nabla\rho_\theta}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}} - \frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}} \rangle dx \leq C \int_{\Omega_{\theta,\sigma}} |w_{\theta,\sigma}| dx. \tag{3.2}$$

令 ϵ 充分小。对于 $x \in \Sigma_\theta$，我们有

$$\nabla \max\Big\{\frac{\sigma}{\langle x, \vec{e}_3\rangle} - 1, 0\Big\} = -\frac{\sigma\chi_{\langle x,\vec{e}_3\rangle<\sigma}}{\langle x, \vec{e}_3\rangle^2}\vec{e}_3,$$

and

$$\nabla\rho(x) = \frac{1}{\langle x, \vec{e}_3\rangle}\Big(\vec{e}_3 + o(1)\Big), \quad \nabla\rho(x_\theta) = \frac{1}{\langle x_\theta, \vec{e}_3\rangle}\Big(\vec{e}_3 + o(1)\Big),$$

其中我们用到了 $x, x_\theta \in \Sigma_{2\epsilon}$。这里， $o(1) \to 0$ 当 $\epsilon \to 0$时成立。这意味着

$$\nabla\rho_\theta(x) = \nabla\rho(x_\theta) - 2\langle\nabla\rho(x_\theta), \vec{v}_\theta\rangle\vec{v}_\theta = \frac{1}{\langle x_\theta, \vec{e}_3\rangle}\Big(-\vec{e}_3 + o(1)\Big).$$

因此，当 ϵ 足够小时，我们有

$$\nabla w_{\theta,\sigma} = |\nabla w_{\theta,\sigma}|\Big(-\vec{e}_3 + o(1)\Big), \quad \frac{\nabla\rho_\theta}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}} - \frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}} = -2\vec{e}_3 + o(1).$$

于是，3.2）表明

$$\int_{\Omega_{\theta,\sigma}} |\nabla w_{\theta,\sigma}| dx \leq C \int_{\Omega_{\theta,\sigma}} |w_{\theta,\sigma}| dx.$$

然而，由于 $\Omega_{\theta,\ \sigma} \subseteq \Sigma_\theta \subseteq \Sigma_\epsilon$，根据庞加莱不等式（回忆一下，$w_{\theta,\ \sigma} = 0$在 $\partial\Omega_{\theta,\ \sigma}$ 上），我们有

$$\int_{\Omega_{\theta,\sigma}} |\nabla w_{\theta,\sigma}| dx \geq \frac{C^{-1}}{\epsilon} \int_{\Omega_{\theta,\sigma}} |w_{\theta,\sigma}| dx.$$

于是我们得出，$w_{\theta,\ \sigma} \equiv 0$ 在 $\Omega_{\theta,\ \sigma}$ 中几乎处处成立，这就产生了矛盾。 □

3. T_θ 的连续旋转与旋转对称性

引理 3.3. 假设 $w_\theta \geq 0$ 属于 Σ_θ，其中某个 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，则存在某个 $\epsilon > 0$（取决于 θ），使得对于 $\forall \epsilon \in (0, \epsilon)$，我们有

$$w_{\theta+\epsilon}(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma_{\theta+\epsilon}.$$

证明。同样地，我们将证明对于每个 $\sigma > 0$，$w_{\theta+\epsilon,\sigma} \geq 0$ 在 $\Sigma_{\theta+\epsilon}$ 中成立。首先，令 δ 为一个满足 $\delta \leq \frac{1}{2}\min\{\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\}$ 的任意数，并作如下分解：

$$\Sigma_{\theta+\epsilon} = \Sigma_{\theta-\delta} \cup \Big(\Sigma_{\theta+\epsilon} \setminus \Sigma_{\theta-\delta}\Big).$$

步骤 1：$\Sigma_{\theta-\delta}$ 中的正性。

在这一步中，我们证明对于每个 $\delta \leq \frac{1}{2}\min\{\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\}$，都存在某个 $\epsilon(\delta) \leq \delta$，使得对于每个 $\epsilon \leq \epsilon(\delta)$，

$$w_{\theta+\epsilon}(x) > 0, \quad \text{for all } x \in \Sigma_{\theta-\delta}. \tag{3.3}$$

对于每个 $x \in \Sigma_{\theta-\delta}$，我们可以假设某个 $\alpha \in (0, \theta - \delta)$ 满足 $x \in T_\alpha$，那么对于每个 $\gamma \in (\theta, \theta + \delta)$，我们有

$$\frac{\langle x_\gamma, \vec{e}_3\rangle}{\langle x, \vec{e}_3\rangle} = \frac{\sin(2\gamma - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\min\{2\gamma - \alpha, \pi - 2\gamma + \alpha\})}{\sin\alpha}.$$

注意，当 $\delta \leq \frac{1}{2}\min\{\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\}$、$\gamma \in (\theta, \theta + \delta)$ 且 $\alpha \in (0, \theta - \delta)$ 时，我们有

$$\alpha + 2\delta \leq \min\{2\gamma - \alpha, \pi - 2\gamma + \alpha\} \leq \frac{\pi}{2},$$

这意味着存在某个 $0 < c_1(\delta) \leq \frac{1}{10}$，使得

$$\frac{\langle x_\gamma, \vec{e}_3\rangle}{\langle x, \vec{e}_3\rangle} \geq 1 + c_1(\delta) > 1 \text{ in } \Sigma_{\theta-\delta}.$$

对于这样的常数 $c_1(\delta)$，我们可以找到相应的常数 $h_1(\delta)$，使得

$$\Big|\frac{e^{\rho(y)}}{2\langle y, \vec{e}_3\rangle} - 1\Big| \leq \frac{c_1(\delta)}{100}, \quad \text{for all } y \in \mathbb{S}^2_+ \text{ with } \langle y, \vec{e}_3\rangle \leq h_1(\delta).$$

于是，我们还可以找到一个常数 $h_2(\delta) \leq h_1(\delta)$，使得

$$\rho(z) \leq \rho(y), \quad \text{for all } y, z \in \mathbb{S}^2_+ \text{ with } \langle y, \vec{e}_3\rangle \geq h_1(\delta) \text{ and } \langle z, \vec{e}_3\rangle \leq h_2(\delta).$$

这使我们能够在附加假设 $\langle x、\ \vec{e}_3\rangle \leq h_2(\delta)$ 下证明（3.3）。事实上，令 $\gamma \in [\theta, \theta + \delta]$。如果 $\langle x_\gamma、\ \vec{e}_3\rangle \geq h_1(\delta)$，那么（3.3）显然成立。另一方面，如果

$\langle x_\gamma, \vec{e}_3\rangle \le h_1(\delta)$，于是有

$$\begin{aligned} e^{\rho(x_\gamma)} - e^{\rho(x)} \ge & 2\langle x_\gamma, \vec{e}_3\rangle\Big(1 - \frac{c_1(\delta)}{100}\Big) - 2\langle x, \vec{e}_3\rangle\Big(1 + \frac{c_1(\delta)}{100}\Big) \\ \ge & 2\langle x, \vec{e}_3\rangle\Big\{\Big(1 + c_1(\delta)\Big)\cdot\Big(1 - \frac{c_1(\delta)}{100}\Big) - \Big(1 + \frac{c_1(\delta)}{100}\Big)\Big\} > 0, \end{aligned}$$

这意味着（3.3）成立，前提是我们另外知道 $\langle x, \vec{e}_3\rangle \le h_2(\delta)$.

对于每个 $x \in \Sigma_{\theta-\delta}$ 满足 $\langle x, \vec{e}_3\rangle \ge h_2(\delta)$ 的情形，我们注意到 $\langle x_\gamma, \vec{e}_3\rangle \ge h_3(\theta, \delta) > 0$ 对所有 $\gamma \in [\theta, \theta+\delta]$ 均成立，这表明

$$\rho(x), \rho_\gamma(x), |\nabla\rho(x)|, |\nabla\rho_\gamma(x)| \le C_2(\theta, \delta) \tag{3.4}$$

于是，在这种情况下，（3.3）的证明归结为证明，对于某个 $c_3(\theta, \delta) > 0$:

$$w_\theta(x) \ge c_3(\theta, \delta) > 0, \quad \text{for all } x \in \overline{\Sigma_{\theta-\delta}} \text{ with } \langle x, \vec{e}_3\rangle \ge h_2(\delta). \tag{3.5}$$

由于 $\overline{\Sigma_{\theta-\delta}} \cap \{x : \langle x, \vec{e}_3\rangle \ge h_2(\delta)\}$ 是一个紧集，我们可以通过反证法证明（3.5）。

假设（3.5）不成立，则根据 $w_\theta \ge 0$ 在 Σ_θ 中，我们可以假设 $w_\theta(x) = 0$ 对于某个 $x \in \Sigma_{\theta-\delta} \cap \overline{\{x : \langle x, \vec{e}_3\rangle \ge h_2(\delta)\}}$。对于 $y \in \mathbb{S}^2_+$ 充分接近 x 的情形，我们有 ρ 和 ρ_θ 都满足方程（2.5）。因此，

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla\rho_\theta}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}} - \frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}}\Big) = \frac{1}{2}e^{2\rho}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2} - \frac{1}{2}e^{2\rho_\theta}\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}. \tag{3.6}$$

对于（3.6）的左端，我们应用（3.4）、引理2.1 和引理2.2，可得

$$\frac{\nabla\rho_\theta}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}} - \frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}} = A\cdot(\nabla\rho_\theta - \nabla\rho) = A\cdot\nabla w_\theta,$$

其中 A 是在 x 附近的自伴一致椭圆算子。对于（3.6）的右端，我们利用3.4）在 x 附近的有界性估计，得出

$$\frac{1}{2}e^{2\rho}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2} - \frac{1}{2}e^{2\rho_\theta}\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2} = \vec{b}\cdot\nabla w_\theta + c\cdot w_\theta,$$

其中系数 $\vec{b}$ 和 c 在 x 附近一致有界。因此（3.6）表明

$$\operatorname{div}(A\cdot\nabla w_\theta) = \vec{b}\cdot\nabla w_\theta + c\cdot w_\theta.$$

由强最大值原理可知，$w_\theta \equiv 0$ 在 x 附近。由开闭论证可知，$w_\theta \equiv 0$ 在 Σ_θ 处处成立。这与渐近行为 $w_\theta(x) = +\infty$ 当 $x \to x^* \in \Sigma_\theta \cap \{\langle x, \vec{e}_3\rangle = 0\}$ 时矛盾。于是，我们证明了（3.5），从而得到（3.3）。

步骤 2： $\Sigma_{\theta+\epsilon} \setminus \Sigma_{\theta-\delta}$ **中的正性。**

在这一步中，我们证明存在某个$\delta \le \frac{1}{2}\min\{\theta, \frac{\pi}{2}-\theta\}$，使得对于每个$\epsilon \le \epsilon(\delta)$，$w_{\theta+\epsilon}(x) \geqq 0$属于 $\Sigma_{\theta+\epsilon} \setminus \Sigma_{\theta-\delta}$。事实上，只需证明以下关于 $\epsilon \le \epsilon(\delta)$的不等式：

$$w_{\theta+\epsilon,\sigma}(x) \geq 0, \quad \text{for all } x \in \Sigma_{\theta+\epsilon} \setminus \Sigma_{\theta-\delta} \text{ and all } \sigma > 0.$$

我们在以下等式两边乘以 $w_{\theta+\epsilon,\ \sigma}$

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}}\Big) - \operatorname{div}\Big(\frac{\nabla\rho_{\theta+\epsilon}}{\sqrt{1+|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}|^2}}\Big) = \frac{e^{2\rho_{\theta+\epsilon}}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2} - \frac{e^{2\rho}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2},$$

并在 $\Omega_{\theta+\epsilon,\ \sigma}$ 上积分。由引理 3.1 和步骤 1 可知 $\Omega_{\theta+\epsilon,\ \sigma} \subseteq \Big(\Sigma_{\theta+\epsilon} \setminus \Sigma_{\theta-\delta}\Big)$，且不会产生边界项，因此有

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}} \langle \nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}, \frac{\nabla\rho_{\theta+\epsilon}}{\sqrt{1+|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}|^2}} - \frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}} \rangle dx \\ &= \int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}} w_{\theta+\epsilon,\sigma} \cdot \Big(\frac{e^{2\rho_{\theta+\epsilon}}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}|^2} - \frac{e^{2\rho}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2} \Big) dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

为分析这个等式，我们将 $\Omega_{\theta+\epsilon,\ \sigma}$ 分解为两部分。

首先，我们令 $h_4(\theta,\ \delta)$ 足够小，使得对于每个 $\epsilon \le \delta$，以及每个$x \in \Omega_{\theta+\epsilon,\ \sigma} \subseteq \Sigma_{\theta+\epsilon} \setminus \Sigma_{\theta-\delta}$ 满足 $\langle x,\ \vec{e}_3\rangle \le h_4(\theta,\ \delta)$，$\langle x_{\theta+\epsilon},\ \vec{e}_3\rangle$ 也足够小。根据（2.6）和（2.7），可得

$$\nabla\rho(x) = \frac{1}{\langle x, \vec{e}_3\rangle}\Big(\vec{e}_3 + o(1)\Big), \quad \nabla\rho(x_{\theta+\epsilon}) = \frac{1}{\langle x_{\theta+\epsilon}, \vec{e}_3\rangle}\Big(\vec{e}_3 + o(1)\Big).$$

这里，o（1）当 δ 足够小时，$\epsilon \le \delta$。注意，当 δ（以及 $\epsilon \le \delta$）足够小时，$\langle x_{\theta+\epsilon}, \vec{e}_3\rangle = \langle x,\ \vec{e}_3\rangle \cdot \Big(1 + o\text{（1）}\Big)$ 在 $\Sigma_{\theta+\epsilon} \setminus \Sigma_{\theta-\delta}$中成立，并且$\vec{v}_{\theta+\epsilon} = \vec{v}_\theta + o$（1）（参见定义 $\vec{v}_\theta$ 3.1 中的记号），因此有

$$\nabla\rho_{\theta+\epsilon}(x) = \nabla\rho(x_{\theta+\epsilon}) - 2\langle \nabla\rho(x_{\theta+\epsilon}), \vec{v}_{\theta+\epsilon}\rangle \vec{v}_{\theta+\epsilon} = \frac{1}{\langle x, \vec{e}_3\rangle}\Big(\sin(2\theta)\vec{e}_1 - \cos(2\theta)\vec{e}_3 + o(1)\Big).$$

因此，我们有

$$\frac{\nabla\rho_{\theta+\epsilon}}{\sqrt{1+|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}|^2}} - \frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}} = \sin(2\theta)\vec{e}_1 - 2\cos^2(\theta)\vec{e}_3 + o(1).$$

对于给定的 θ，我们由此可知，存在一个正常数 $\lambda_1 = \lambda_1(\theta)$，使得对于所有满足 $\langle x,\ \vec{e}_3\rangle \le h_4(\theta,\delta)$ 的 $x \in \Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}$，都有

$$\langle \nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}, \frac{\nabla\rho_{\theta+\epsilon}}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}} - \frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}} \rangle \geq \lambda_1 |\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}|.$$

此外，在该区域内，我们有

$$w_{\theta+\epsilon,\sigma}\cdot\Big(\frac{e^{2\rho_{\theta+\epsilon}}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}|^2}-\frac{e^{2\rho}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}\Big)\leq C|w_{\theta+\epsilon,\sigma}|.$$

其次，我们考虑 $x\in\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}$满足 $\langle x,\vec{e}_3\rangle\geq h_4(\theta,\delta)$ 的区域。在此区域中，$\langle x,\vec{e}_3\rangle$ 和$\langle x_{\theta+\epsilon},\vec{e}_3\rangle$ 都有下界，因此 $|\nabla\rho(x)|$ 和 $|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}(x)|$有界。此外，通过选取足够小的 σ （取决于 $h_4(\theta,\delta)$），我们甚至可以确保

$$w_{\theta+\epsilon,\sigma}\equiv w_{\theta+\epsilon}\text{ when }\langle x,\vec{e}_3\rangle\geq h_4(\theta,\delta).$$

根据引理2.1，我们有

$$\begin{aligned}\langle\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma},\frac{\nabla\rho_\theta}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}}-\frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}}\rangle=&\langle\nabla\rho_{\theta+\epsilon}-\nabla\rho,\frac{\nabla\rho_\theta}{\sqrt{1+|\nabla\rho_\theta|^2}}-\frac{\nabla\rho}{\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}}\rangle\\ \geq&\lambda_2|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}-\nabla\rho|^2=\lambda_2|\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}|^2.\end{aligned}$$

此外，对于满足 $\langle x,\vec{e}_3\rangle\geq h_4(\theta,\delta)$ 的 $x\in\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{e^{2\rho_{\theta+\epsilon}}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}|^2}-\frac{e^{2\rho}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}=&\vec{b}\cdot(\nabla\rho_{\theta+\epsilon}-\nabla\rho)+c\cdot(\rho_{\theta+\epsilon}-\rho)\\ =&\vec{b}\cdot\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}+c\cdot w_{\theta+\epsilon,\sigma}.\end{aligned}$$

于是，我们有：

$$w_{\theta+\epsilon,\sigma}\cdot\Big(\frac{e^{2\rho_{\theta+\epsilon}}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho_{\theta+\epsilon}|^2}-\frac{e^{2\rho}}{2}\sqrt{1+|\nabla\rho|^2}\Big)\leq\frac{\lambda_2}{2}|\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}|^2+C|w_{\theta+\epsilon,\sigma}|^2.$$

由恒等式（3.7）可得以下估计：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\leq h_4\}}|\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}|dx+\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\geq h_4\}}|\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}|^2dx\\ \leq&C\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\leq h_4\}}|w_{\theta+\epsilon,\sigma}|dx+C\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\geq h_4\}}|w_{\theta+\epsilon,\sigma}|^2dx.\end{aligned}$$

然而，回想一下$w_{\theta+\epsilon,\ \sigma}=0$ 在 $\partial\Omega_{\theta+\epsilon,\ \sigma}$ 并且

$$\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\subseteq\Sigma_{\theta+\epsilon}\setminus\Sigma_{\theta-\delta}\subseteq\Sigma_{\theta+\delta}\setminus\Sigma_{\theta-\delta},$$

于是我们根据庞加莱不等式推得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\leq h_4\}}|\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}|dx\geq&\frac{C^{-1}}{\delta}\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\leq h_4\}}|w_{\theta+\epsilon,\sigma}|dx,\\ \int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\geq h_4\}}|\nabla w_{\theta+\epsilon,\sigma}|^2dx\geq&\frac{C^{-1}}{\delta^2}\int_{\Omega_{\theta+\epsilon,\sigma}\cap\{\langle x,\vec{e}_3\rangle\geq h_4\}}|w_{\theta+\epsilon,\sigma}|^2dx.\end{aligned}$$

因此，当 δ充分小时，必有$w_{\theta+\epsilon,\ \sigma}\equiv 0$在 $\Omega_{\theta+\epsilon,\ \sigma}$中，从而 $\Omega_{\theta+\epsilon,\ \sigma}=\emptyset$。由此，我们证明了 $w_{\theta+\epsilon}$ 在区域 $\Sigma_{\theta+\epsilon}$内的正性。□

到目前为止，我们已经证明 ρ： $\mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}$ 关于平面 $\{x_1 = 0\}$对称。上述论证同样适用于 $span(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$中的任意其他方向，因此 $\rho(x)$关于 $\vec{e}_3$ 轴旋转对称。

4. 旋转对称性下的唯一性

我们已经证明， ρ ： $\mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}$ 是一个仅依赖于 θ =arcsin $\langle x, \vec{e}_3\rangle$的函数。令

$$u(\theta) = e^{\rho(\theta)}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

由（2.5）可知， u： $[0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}_+$ 满足以下常微分方程:

$$u^2 \cdot u_{\theta\theta} - u \cdot u_\theta^2 - \tan\theta \cdot u_\theta(u^2 + u_\theta^2) + \frac{u}{2}(u^2 + u_\theta^2)^2 = 0. \tag{3.8}$$

我们将证明 v（θ） = 2sin（θ）是（3.8）的唯一解。首先注意，如果 M是 $\mathbb{S}^2_+$ 上的一个径向图，其径向函数为 ρ（θ） = $\ln(2\sin(\theta))$，那么 M 就是一个半径为1 、中心位于 $\vec{e}_3$的球面。

假设还存在**另一个**径向解 u（θ）满足（2.5），记 N 为其对应的曲面。

我们**断言** N 在原点附近始终位于 M 上方。我们将由 $\vec{e}_1$和 $\vec{e}_2$ 张成的平面称为 $y_1 - y_2$ 平面。我们可以将 N和 M 都看作定义在 $y_1 - y_2$ 平面原点邻域上的两个径向对称函数的图形。分别将这两个函数记为 φ_N 和 φ_M 。于是有

$$H_N = \mathrm{div}_{y_1,y_2}(\frac{\nabla\varphi_N}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi_N|^2}}) \geq 2 = H_M = \mathrm{div}_{y_1,y_2}(\frac{\nabla\varphi_M}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi_M|^2}}).$$

第二个不等式由（2.4）得出。若存在 $r_0 > 0$ 使得 $\varphi_N(r_0) < \varphi_M(r_0)$，则由通常的极小曲面方程的最大值原理可得$\varphi_N(0) < \varphi_M(0) = 0$，这与假设矛盾。

由于 N 在原点附近始终位于 M 上方，存在 $\theta_0 > 0$ 使得 $u(\theta) \leq v(\theta)$ $\forall\theta \in [0, \theta_0)$，且 $u(\theta_0) < v(\theta_0)$。

Let

$$F(M, P, Z, \theta) = M - \frac{P^2}{Z} - \tan(\theta)\frac{P(Z^2 + P^2)}{Z^2} + \frac{(Z^2 + P^2)^2}{2Z}. \tag{3.9}$$

根据（3.8）， $F(u'', u', u, \theta) = F(v'', v', v, \theta)$ 对所有 $\theta \in (0, \theta_0)$成立。令 $w = u - v$，则由拉格朗日中值定理可得

$$F_M(\xi_\theta)w''(\theta) + F_P(\xi_\theta)w'(\theta) + F_Z(\xi_\theta)w(\theta) = 0, \tag{3.10}$$

其中 ξ_θ 是从 $(u''(\theta)\ u'(\theta)\ u(\theta)\ \theta)$ 到 $(v''(\theta)\ v'(\theta)\ v(\theta)\ \theta)$ 的线段上的一点。

鉴于渐近行为（2.6）和（2.7），我们有

$$(\xi_\theta) = (\star, 2 + o(1), 2\theta + o(\theta), \theta).$$

尽管 $\star$的值尚不明确，但由（3.9）和（3.10）仍可得到 w（θ）满足

$$w''(\theta) + (\frac{3 + o(1)}{\theta})w'(\theta) + (\frac{1 + o(1)}{\theta^2})w(\theta) = 0.$$

由于 $w(\theta_0) < 0$，存在 $\kappa > 0$ 使得 $w(\theta_0) + \kappa\theta_0 \leq 0$. 。函数 $\psi(\theta) := w(\theta) + \kappa\theta$ 满足

$$\psi''(\theta) + (\frac{3 + o(1)}{\theta})(\psi'(\theta) - \kappa) + (\frac{1 + o(1)}{\theta^2})(\psi - \kappa\theta) = 0.$$

一个简单的最大值论证表明，ψ 在 $(0, \theta_0)$ 的内部不可能有正的最大值。因此 $\psi(\theta) \leq 0$，这意味着 $w'(0) \leq -\kappa < 0$。这与 $w'(0) = 0$ 矛盾。

上述论证表明 N 在原点附近与 M 重合；但离开原点后，适用于（3.8）唯一性的标准皮卡定理便可应用，因此证明完成。□

4. 进一步讨论

我们以两点评论结束本文。正如引言中所指出的，共形拉普拉斯算子的强格林函数刚性是通过其与正质量定理的联系得到证明的。沿这一方向的探索，加之我们的主定理，表明了以下定理。

定理 4.1。设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是一个具有 $0 \in M$ 的闭嵌入曲面，并令 K（y）为其~高斯曲率。令 M 表示 M 在开尔文变换 Φ（y）$=\sim \sim_{\frac{y}{|y|^2}}$ 下的像。假设 M 的高斯曲率 K（y）与 K（y）具有如下对应关系：

$$\widetilde{K}(y) = \frac{1}{|y|^4}\left(K(\frac{y}{|y|^2}) - 1\right),$$

那么 M 必须是一个圆球面。

~证明。令 $\widetilde{g}$ 为欧几里得度量在 M上的限制。直接计算可得 $\widetilde{g}(\Phi(y)) = \frac{1}{|y|^4}g(y)$，即 $\widetilde{g}$可视为 $M\setminus\{0\}$上与 g共形的度量。共形变换下的高斯曲率方程表明

$$\Delta_g(\ln(\frac{1}{|y|^2})) + \widetilde{K}(\Phi(y))\frac{1}{|y|^4} = K,$$

由此可得， M在原点处的格林函数形式为 $G(y) := -\ln |y|$。由我们的主定理即可得到所需结论。□

我们希望我们的方法也能用于处理高维情形。类似于（2.1）、（2.2）、（2.3）的推导可得如下结果

命题4.1。 设 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$，$(n \geq 3)$是一个具有 $0 \in M$ 的闭合嵌入超曲面。那么，其共形拉普拉斯算子的格林函数$(-\Delta_g + {}^{(n-2)}$ $c_n|y|^{2-n}$ H $\underline{\quad 4}\, n-1$ $H = \frac{\kappa_1+\cdots+\kappa_n}{n}$ y $=_{()}$ $R_g)$ 具有如下形式：$G($，$0)$ 当且仅当平均曲率（取平均值）满足

$$H = \frac{\langle y, \nu \rangle}{|y|^2} + \frac{R}{4n(n-1)} \frac{|y|^2}{\langle y, \nu \rangle}, \quad y \in M \setminus \{0\} \tag{4.1}$$

注意，此处 R 表示 M的标量曲率，也可以表示为$2\sigma_2(II)$。因此，在我们的方法中，处理（4.1）似乎更加复杂。

参考文献

[CS1] X.Chen和Y.Shi，球面上*GJMS*算子的格林函数、*Gegenbauer*多项式与刚性定理，arXiv:2401.02087[CGS] X. Chen、J. Gan和Y. Shi，个人通信[CS2]X. Chen和Y. Shi，反演下超曲面的质量与球面的刚性，arXiv:2501.15805[FR] P. Fusieger和J. Ripoll，具有给定边界的常平均曲率径向图与双连通极小曲面，Ann. Global Anal. Geom. 23 (2003)，第4期，373-400。[L] R. López，关于常平均曲率径向图的注记，Manuscripta Math. 110 (2003) 45-54。[S] J. Serrin，多独立变量拟线性椭圆方程的狄利克雷问题，Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 264 (1969)，413-496。[T] A. Treibergs，给定平均曲率超球面的存在性与凸性，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 12 (1985)，第2期，225-241。

数学科学学院 ，上海交通大学 ，上海 200240

电子邮件地址：laimijia@sjtu.edu.cn

Sc数学科学学院，复旦大学，中国上海 200433

电子邮件地址：zhangchilin@fudan.edu.cn