曲率依赖型表面弹性中的增量方程

Xiang Yu[a]，Michal ˇSmejkal[b]，Martin Hor´ak[b,c]

[a]东莞理工学院计算机科学与技术学院数学系，中国东莞，*523808*[b]布拉格捷克理工大学土木工程学院力学系，*Th´akurova 2077/7*，*166 29* 捷克布拉格*6*[c]捷克科学院信息理论与自动化研究所，*Pod vod´arenskou v ˇe ˇz´ı 4*，*182 00* 捷克布拉格*8*

arXiv:2601.03814v1 [math-ph] 7 Jan 2026

摘要

我们建立了一个适用于超弹性固体的一般增量框架，其表面同时具有依赖于伸长和依赖于曲率的弹性行为。基于曲率依赖型表面弹性的变分公式，我们推导出一组简洁的控制方程，并以无坐标拉格朗日框架表示，适用于任意几何构形。围绕任意大的有限变形进行线性化后，可得增量体平衡定律和曲面平衡定律；它们与经典的大变形上的小扰动理论十分相似，但现已纳入表面曲率诱导应力。我们通过分析软圆柱基底上周期性珠化的起始，展示该一般理论的适用性。该基底涂覆有表面层，其行为依赖于拉伸或曲率。分析说明了表面拉伸和弯曲效应如何影响可压缩体材料和不可压缩体材料的失稳阈值。因此，这一统一公式为研究弹性毛细系统中的稳定性现象奠定了基础；在此类系统中，表面曲率发挥着关键的力学作用。

关键词：表面弹性、曲率依赖性、增量理论、周期性珠化

1. 引言

表面弹性在理解微纳材料、薄膜和软固体等小尺度材料的力学行为方面发挥着重要作用；在这些材料中，由于表面积与体积之比很高，表面效应占据主导地位（Chen 等人，2022b；Long 等人，2016；Mogilevskaya 等人，2010；Roudbari 等人，2022；Style 等人，2013）。表面弹性的理论框架源于 Gurtin 和 Murdoch 的开创性工作（Gurtin & Murdoch，1975，1978）；他们提出了一种唯象表面弹性理论，将固体表面视为具有自身自由能、且与体相自由能不同的零厚度膜。该模型通过表面能描述表面应力和应变，从而为表面效应提供了内在解释（Chen 等人，2022a；Lu 等人，2021）。随着纳米科学和纳米技术的迅速发展，Gurtin-Murdoch 理论已广泛应用于分析纳米材料和纳米结构的弹性性质，包括纳米线（Chen 等人，2006；Wang & Feng，2009）、纳米薄膜（Cammarata，1994）以及具有纳米尺度非均质性的复合材料（Duan 等人，2005a,b；Mogilevskaya 等人，2021b；Sharma 等人，2003）。

尽管 Gurtin–Murdoch 模型在各种应用中取得了成功，但它仅考虑表面应变对表面能的贡献，而忽略了在纳米结构或生物膜等问题中变得至关重要的曲率效应；参见（Mogilevskaya 等人，2021a，Zhang 等人，2024）。为解决这一局限，Steigmann 和 Ogden（Steigmann &Ogden，1999）提出了一种广义表面弹性理论，将曲率依赖性和有限应变效应均纳入其中，从而扩展了经典 Gurtin-Murdoch 模型。该理论将曲面视为具有内在弯曲阻力的二维壳体；因此，表面能取决于表面应变和表面曲率。为便于进行解析处理，人们广泛研究了其线性化版本，尤其是在平面应变和圆柱几何中（Chhapadia 等人，2011，Dai & Schiavone，2023年）。例如，

在纳米压痕中，该模型通过考虑接触界面处的曲率诱导应力，预测尺寸依赖硬度（Li & Mi，2019）。同样，在断裂力学中，该模型已用于模拟曲线裂纹和多个相互作用的断裂，与经典理论预测的奇异应力不同，该模型得出的裂纹尖端应力有界（Zemlyanova，2018，Zemlyanova &Walton，2012）。

本研究的动机在于，当前尚缺乏适用于曲率依赖型表面弹性的一般增量公式，这阻碍了涉及曲率效应的弹性毛细问题的稳定性分析。本研究可视为 Yu & Fu (2025) 先前研究的续篇；该研究建立了不考虑表面曲率效应的应变依赖型表面弹性的增量方程。尽管在推导曲率依赖型表面弹性的增量方程方面已有一些进展（Dryburgh & Ogden, 1999, Ogden & Steigmann, 2002, Ogden et al., 1997），但这些推导仅限于平面应变情形。因此，过去的研究往往依赖巧妙但针对性很强的方法，以适应特定的几何形状和表面能。例如，Taffetani & Hennessy (2024) 最近分析了具有薄涂层的软弹性圆柱中的周期性珠化，其中涂层由 Helfrich自由能描述；参见 Helfrich (1973)。他们的方法包括直接从变分原理推导控制方程、通过流函数形式施加不可压缩性，然后对系统进行线性化以开展分岔分析。尽管该方法有效，但每个问题都需要重复进行变分和线性化过程，因而繁琐且依赖具体问题。本文通过在 Biot (1939) 和 Ogden (1984) 所述的数学框架下推导曲率依赖型表面弹性的增量方程，填补了这一空白。我们的主要贡献是以紧凑的无坐标拉格朗日形式推导出曲率依赖型表面弹性相应增量方程的一般形式，从而使其适用于任意本构模型和几何形状。需要强调的是，曲率依赖型曲面的无坐标形式由 Silhav´y (2013) 和 Tomassetti (2024) 建立。

本文其余部分分为以下六节。第2 节回顾可变形曲面的运动学。第3节以无坐标形式推导曲率依赖型表面弹性的控制方程。第4 节以无坐标形式建立增量方程。此外，第5节给出了任意曲线坐标下增量方程的表达式。第6 节通过分析软涂层圆柱的周期性珠化来阐释该理论。最后，第7节给出结论。

2. 运动学

本节介绍描述弹性表面变形所需的定义和预备知识。本文的论述遵循Hor´ak etal. (2025)和Yu & Fu (2025)；更多细节可参见Steigmann& Ogden (1999)、ˇSilhav´y (2013)、Steinmann (2008)以及Gao et al.(2014)。

我们考虑一个有界参考域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$，其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 足够光滑。假设边界的一部分（记为$S \subset \Gamma$）具有表面能，且其边界 ∂S 是光滑的。令$\boldsymbol{X}$表示参考构形中一个代表性材料点的位置。在变形 $\boldsymbol{\phi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$作用下，材料点$\boldsymbol{X}$ 被映射至变形构形 $\boldsymbol{\phi}(\Omega)$ 中的新位置$\boldsymbol{y}$，

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X} \in \Omega. \tag{2.1}$$

假设变形 $\boldsymbol{\phi}$充分光滑、单射且保持方向。此外，$\boldsymbol{\phi}$ 可连续延拓至闭包 Ω，我们不再区分 $\boldsymbol{\phi}$ 与该延拓。相应的表面变形 $\boldsymbol{\phi}_s$： $\Gamma \to \boldsymbol{\phi}(\Gamma)$ 由 $\boldsymbol{\phi}$在边界上的限制给出，即，

$$\boldsymbol{\phi}_s(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X} \in \Gamma. \tag{2.2}$$

2.1. 体变形

体的变形梯度定义为

$$\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{\phi} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{X}}, \tag{2.3}$$

其中，∇ 表示相对于参考坐标的梯度。它将无穷小向量从参考构形映射到变形构形。雅可比行列式记为$J = \det(\boldsymbol{F})$，它将参考体积元 $\mathrm{d}V$ 变换为当前体积元 $\mathrm{d}v$，满足 $\mathrm{d}v = J\mathrm{d}V$。定向保持要求$J > 0$。

在确定了线元和体积元的映射后，我们现在转向面元。南森公式将参考构形中的有向面积元$\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}A$ 与其变形后的对应量$\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 联系起来：

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \mathrm{cof}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}A, \tag{2.4}$$

其中，$\boldsymbol{N}$ 和$\boldsymbol{n}$分别表示参考构形和变形构形中的单位外法向量。$\boldsymbol{F}$ 的余因子张量由以下普适性质定义：

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} = \mathrm{cof}(\boldsymbol{F})(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \qquad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3, \tag{2.5}$$

并且在$\boldsymbol{F}$可逆时，显式表示为 $\mathrm{cof}(\boldsymbol{F}) = J\boldsymbol{F}^{-T}$，其中 $\times$ 表示叉积。

2.2. 表面变形

为了定义与边界曲面相关的变形度量，我们首先按照定义在流形上的函数的微分的一般定义，说明如何对定义在边界曲面上的张量场求微分。

设$\boldsymbol{D}_s : \Gamma \to V$ 是从边界曲面 Γ到有限维向量空间V的张量场。对于我们的目的，$V = \mathbb{R}$、 $\mathbb{R}^3$或 $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$，因此$\boldsymbol{D}_s$ 分别可表示标量场、向量场或二阶张量场。$\boldsymbol{D}_s$ 在$\boldsymbol{X}$ 处的曲面梯度 定义为线性变换 $\nabla_s\boldsymbol{D}_s(\boldsymbol{X}) : \mathbb{R}^3 \to V$，使得

$$\lim_{\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\Gamma} \frac{|\boldsymbol{D}_s(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{D}_s(\boldsymbol{X}) - \nabla_s\boldsymbol{D}_s(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y})|}{|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}|} = 0, \tag{2.6}$$

and

$$\nabla_s\boldsymbol{D}_s(\boldsymbol{X})\boldsymbol{I}_s = \nabla_s\boldsymbol{D}_s(\boldsymbol{X}), \tag{2.7}$$

其中，$\mathrm{I}_s = \mathrm{I} - \mathrm{N} \otimes \mathrm{N}$ 是到曲面 Γ 在 X 处的切空间 $\mathrm{T}_X\Gamma$ 的正交投影，I 是 $\mathbb{R}^3$ 中的恒等张量，$|\cdot|$ 表示欧几里得范数。第一个条件将单变量标量值函数的导数推广到多变量向量值函数的导数，第二个条件则通过令 $\nabla_s\mathrm{D}_s(\mathrm{X})\mathrm{N} = 0$，将导数映射的定义域从切空间 $\mathrm{T}_X\Gamma$ 扩展到 $\mathbb{R}^3$。这一约定遵循 ˇSilhav´y (2013)，并与其他表述略有不同（例如 Gurtin & Murdoch (1975)），后者将曲面梯度直接限制在切空间上。在当前设定中，曲面梯度作为 $\mathbb{R}^3$ 上的线性映射，从而统一了曲面上不同点处的定义域，也便于进行运算。特别地，若 D_s 是光滑映射 $\mathrm{D} : \Omega \to \mathrm{V}$ 在边界曲面 Γ 上的限制，则曲面梯度可表示为体梯度在切空间上的投影，

$$\nabla_s\boldsymbol{D}_s = (\nabla\boldsymbol{D})\boldsymbol{I}_s. \tag{2.8}$$

定义在边界曲面上的张量场的另一个重要算子是曲面散度。设 $\boldsymbol{R}_s:\Gamma \to V \otimes \mathbb{R}^3$ 是定义在边界曲面上的张量场，其中通常有 $V = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^3$。$\boldsymbol{R}_s$ 的曲面散度是唯一的场 $\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{R}_s): \Gamma \to V$，满足

$$\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{R}_s)\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{tr}\left(\nabla_s(\boldsymbol{R}_s^T\boldsymbol{v})\right) \qquad \forall\,\boldsymbol{v}\in V, \tag{2.9}$$

其中，$\boldsymbol{R}_s^T: \Gamma \to \mathbb{R}^3 \otimes V$ 表示$\boldsymbol{R}_s$的转置。例如，当$V = \mathbb{R}$ 和$\boldsymbol{R}_s: \Gamma \to \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ 是定义在 Γ上的向量场时，曲面散度具有熟悉的形式 $\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{R}_s) = \mathrm{tr}(\nabla_s\boldsymbol{R}_s)$。根据此定义，还可得到乘积（莱布尼茨）法则：对于任意$\boldsymbol{a}: \Gamma \to V$,

$$\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{R}_s^T\boldsymbol{a}) = \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{R}_s)\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{R}_s\cdot\nabla_s\boldsymbol{a}, \tag{2.10}$$

其中$\boldsymbol{R}_s\cdot\nabla_s\boldsymbol{a} := \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_s^T\nabla_s\boldsymbol{a})$。

2.3. 表面变形梯度

将上述结果应用于曲面变形映射 $\boldsymbol{\phi}_s$（其中$\boldsymbol{D}_s = \boldsymbol{\phi}_s$ 且$V = \mathbb{R}^3$），表面变形梯度$\boldsymbol{F}_s: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定义为

$$\boldsymbol{F}_s = \nabla_s\boldsymbol{\phi}_s.$$

它将参考构形中的切向量映射为变形构形中的切向量。由于$\boldsymbol{F}_s$ 是秩亏的，我们引入其伪逆 $\boldsymbol{F}_s^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，它满足

$$\boldsymbol{F}_s^{-1}\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{I}_s, \qquad \boldsymbol{F}_s\boldsymbol{F}_s^{-1} = \boldsymbol{i}_s, \qquad \boldsymbol{F}_s^{-1}\boldsymbol{i}_s = \boldsymbol{F}_s^{-1} \tag{2.11}$$

其中$\boldsymbol{i}_s = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$ 定义了到变形边界曲面切空间上的投影 $\boldsymbol{\phi}(\Gamma)$ 其中$\boldsymbol{n}$为当前法向量，最后一个等式施加了与（2.7）类似的条件，以确保$\boldsymbol{F}_s^{-1}$仅作用于变形曲面的切向量。根据定义，以下恒等式显然成立：

$$\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{I}_s = \boldsymbol{F}_s, \qquad \boldsymbol{i}_s\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{F}_s, \qquad \boldsymbol{F}_s^{-1}\boldsymbol{i}_s = \boldsymbol{F}_s^{-1}, \qquad \boldsymbol{I}_s\boldsymbol{F}_s^{-1} = \boldsymbol{F}_s^{-1}. \tag{2.12}$$

如果 $\boldsymbol{\phi}_s$ 可以光滑延拓为边界邻域中的 $\boldsymbol{\phi}$，则表面变形梯度及其伪逆可用体变形梯度表示：

$$\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{F}\boldsymbol{I}_s, \qquad \boldsymbol{F}_s^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{i}_s. \tag{2.13}$$

最后，作为式（2.12）的直接推论，我们注意到

$$\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{F}_s^T\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \tag{2.14}$$

也就是说，表面变形梯度将参考法向量 $\boldsymbol{N}$ 以及以转置形式表示的当前法向量 $\boldsymbol{n}$映射为零，这体现了其切向性质。第二个等式在确定表面变形及其单位法向量之间的各种关系时起着重要作用。

通过引入曲面雅可比行列式的概念，可以仅用表面变形梯度来描述无穷小曲面面积的变化。曲面雅可比行列式定义为无穷小曲面元变形后的面积与其对应的原始（参考）面积之比。根据（2.4），该量可用表面变形梯度 $\boldsymbol{F}_s$ 表示为

$$J_s := |\,\mathrm{cof}(\boldsymbol{F}_s)\boldsymbol{N}|. \tag{2.15}$$

不难验证，J_s 对于位于切空间中的向量，满足与（2.5）类似的等式：

$$|\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{F}_s\boldsymbol{v}| = J_s|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|, \qquad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T_X\Gamma, \tag{2.16}$$

它可从外代数的角度作为表面雅可比行列式的另一种定义（Winitzki，2010）。

I为了用实际构形表示某些方程，我们应用 Piola 变换 on

$$\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{R}_s) = J_s\,\mathrm{div}_s(J_s^{-1}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{F}_s^T), \tag{2.17}$$

其中，div_s 表示变形后表面 $\boldsymbol{\phi}(\Gamma)$ 上的曲面散度算子，$\boldsymbol{R}_s$：$\Gamma \to V \otimes \mathbb{R}^3$ 是 Γ上的曲面张量场，即满足$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{R}_s\boldsymbol{I}_s$。

2.4. 曲面二阶梯度与曲率

高阶变形度量需要对曲面梯度求导。对于光滑场$\boldsymbol{D}_s$：$\Gamma \to V$，曲面二阶梯度定义为

$$\nabla_s^2\boldsymbol{D}_s = \nabla_s(\nabla_s\boldsymbol{D}_s), \tag{2.18}$$

它被视为从 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 到V的双线性变换。作为双线性映射，$\nabla^2\boldsymbol{D}_s$ 通常不对称；通过限制到$T_X\Gamma \times T_X\Gamma$，引入其对称形式会更方便。特别地，对于曲面变形映射 $\boldsymbol{\phi}_s$，我们定义一个对称双线性映射，以计入二阶梯度效应：

$$\boldsymbol{H}_s = \nabla_s^2\boldsymbol{\phi}_s \circ (\boldsymbol{I}_s \times \boldsymbol{I}_s), \tag{2.19}$$

其中$\boldsymbol{I}_s \times \boldsymbol{I}_s$：$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to T_X\Gamma \times T_X\Gamma$ 表示满足以下条件的限制映射：$(\boldsymbol{I}_s \times \boldsymbol{I}_s)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{I}_s\boldsymbol{u}, \boldsymbol{I}_s\boldsymbol{v})$ 对所有$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$均成立；$\circ$ 表示函数复合。

The 曲面的几何特征由其曲率决定。曲面曲率张量定义为

$$\boldsymbol{b} = -\nabla_s^y\boldsymbol{n}, \tag{2.20}$$

它作为切空间$T_y\Gamma$ 上的对称自同态，其中 ∇_s^y 表示实际的（空间）曲面梯度。主曲率是曲面曲率张量$\boldsymbol{b}$的特征值。平均曲率H 和高斯曲率K 定义为$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{b})$ 以及$K = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{b})^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{b}^2)]$。因此，$H$ 和K 分别对应曲率张量$\boldsymbol{b}$的第一和第二不变量。此外，还可引入相对曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$，其定义为

$$\boldsymbol{\kappa} = -\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}_s. \tag{2.21}$$

对（2.14）中的第二个方程应用曲面梯度，可得

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}_s - \boldsymbol{F}_s^T\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s = 0. \tag{2.22}$$

因此，相对曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 与曲面曲率张量 $\boldsymbol{b}$ 的关系为

$$\boldsymbol{\kappa} = -\boldsymbol{F}_s^T\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s. \tag{2.23}$$

请注意，根据定义，相对曲率仅沿切向作用，即 $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{I}_s\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{I}_s$。

2.5. 曲线变形

为描述边界曲线 ∂S 上的边界条件，引入曲线梯度和曲线散度也很有用。

场的曲线梯度 $\nabla_{\|}\boldsymbol{D}_c$ 与其曲面对应量的定义类似。为简洁起见，我们假设场 $\boldsymbol{D}_c$ 可扩展至点 $\boldsymbol{X} \in \partial S$的邻域。因此，我们通过对曲面梯度进行投影来定义曲线梯度

$$\nabla_{\|}\boldsymbol{D}_c = (\nabla_s \boldsymbol{D}_c)\,\boldsymbol{I}_{\|}, \tag{2.24}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{\|} = \boldsymbol{I}_s - \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{V}$ 是曲线 ∂S 的切空间上的投影，$\boldsymbol{V}$ 表示边界曲线 ∂S的单位面内法向量。曲线散度 $\mathrm{Div}_{\|}$ 的定义与方程（2.9）类似，只需将曲面梯度替换为相应的曲线梯度。根据此定义，张量场 $\boldsymbol{R}_c : \Gamma \to V \otimes \mathbb{R}^3$ 的曲线散度 $\mathrm{Div}_{\|}(\boldsymbol{R}_c) : \Gamma \to V$ 可明确表示为

$$\mathrm{Div}_{\|}(\boldsymbol{R}_c) = \boldsymbol{R}_{c,s} \cdot \boldsymbol{T}, \tag{2.25}$$

其中，s 是边界曲线 ∂S的弧长参数，$\boldsymbol{T}$ 是其单位切向量，“s”表示对变量 s求导。

与曲面 Piola 变换（2.17）对应的曲线形式为

$$\mathrm{Div}_{\|}(\boldsymbol{R}_c) = J_{\|}\,\mathrm{div}_{\|}(J_{\|}^{-1}\boldsymbol{R}_c\boldsymbol{F}_{\|}^{T}), \tag{2.26}$$

其中，$\boldsymbol{R}_c : \Gamma \to V \otimes \mathbb{R}^3$ 是满足条件$\boldsymbol{R}_c = \boldsymbol{R}_c\boldsymbol{I}_{\|}$的张量场，$\mathrm{div}_{\|}$ 表示变形曲线$\boldsymbol{\phi}(\partial S)$ 上的散度算子，而$J_{\|}$ 表示曲线变换的雅可比，定义为$J_{\|} = |\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{T}| = J_s|\boldsymbol{F}_s^{-T}\boldsymbol{V}|$。

3. 变分公式

3.1. 基于曲面二阶梯度的一般公式

该系统的总能量在一个兼顾可压缩材料和不可压缩材料的一般框架内进行表述，其中不可压缩材料通过罚函数法处理。总能量由体能和表面能，以及规定的外部体力$\boldsymbol{f}$ 和表面力$\boldsymbol{q}$所做的功组成，表示为

$$E[\boldsymbol{y}] = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V + \int_{S} \Phi(\boldsymbol{F}_s, \boldsymbol{H}_s)\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{3.1}$$

其中

$$\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{F}_s = \nabla_s\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{H}_s = \nabla_s\boldsymbol{F}_s \circ (\boldsymbol{I}_s \times \boldsymbol{I}_s). \tag{3.2}$$

这里请注意，张量$\boldsymbol{I}_s = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}$ 表示投影到S切空间上的投影算子，而 $\nabla_s(\cdot) = \nabla(\cdot)\,\boldsymbol{I}_s$ 是曲面梯度，作为线性映射作用于 $\mathbb{R}^3$。

应变能密度函数W 描述单位参考体积内储存的体能，而表面应变能密度 Φ 则表征单位参考表面积内储存的表面能。我们回顾一下，直接表示为 $\Phi = \Phi(\boldsymbol{F}_s,\boldsymbol{H}_s)$ 的表面应变能函数通常不具客观性，因为它取决于观察者的选择。为确保框架无关性，表面能必须用在叠加刚体运动下保持不变的客观量来表示。例如，可将能量重新表述为曲面右柯西–格林张量及其曲面梯度的函数，从而满足这一要求，

$$\Phi = \tilde{\Phi}(\boldsymbol{C}_s, \nabla_s\boldsymbol{C}_s), \qquad \text{with} \quad \boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{F}_s^{T}\boldsymbol{F}_s, \tag{3.3}$$

这与广义（或高阶梯度）弹性理论的框架直接类似。然而，在本研究中，出于符号简便，我们不明确采用这种重新表述，而保留表面能对$\boldsymbol{F}_s$和$\boldsymbol{H}_s$的依赖关系。

定义第一类 Piola–Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{P}$、参考构形表面应力 $\boldsymbol{L}_s$ 和参考构形三阶表面偶应力 $\boldsymbol{A}_s$如下：

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}, \qquad \boldsymbol{L}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{F}_s}, \qquad \boldsymbol{A}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{H}_s}. \tag{3.4}$$

根据 3.2 中对 $\boldsymbol{F}_s$ 和 $\boldsymbol{H}_s$ 的定义，能量泛函的一阶变分可写为

$$\delta E = \int_\Omega \boldsymbol{P} : \nabla \delta \boldsymbol{y} \, \mathrm{d}V + \int_S (\boldsymbol{L}_s : \nabla_s \delta \boldsymbol{y} + \boldsymbol{A}_s \vdots \nabla_s^2 \delta \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega} \delta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{q} \, \mathrm{d}\Gamma, \tag{3.5}$$

。其中，δ 表示变分，: 和 .. 分别表示张量的双重缩并和三重缩并。在体内应用格林恒等式可得

$$\int_\Omega \boldsymbol{P} : \nabla \delta \boldsymbol{y} \, \mathrm{d}V = -\int_\Omega \delta \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{Div}(\boldsymbol{P}) \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} \delta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{P}\boldsymbol{N} \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{3.6}$$

由于表面应力 $\boldsymbol{L}_s$ 是表面量，表面散度定理（Steinmann，2008）给出

$$\int_S \boldsymbol{L}_s : \nabla_s \delta \boldsymbol{y} \, \mathrm{d}\Gamma = -\int_S \delta \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{L}_s) \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\partial S} \delta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{L}_s \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}s, \tag{3.7}$$

其中，$\boldsymbol{V}$ 是边界曲线 ∂S 的单位面内法向量。

对于二阶梯度项，连续两次进行表面分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{A}_s \vdots \nabla_s^2 \delta \boldsymbol{y} \, \mathrm{d}\Gamma &= -\int_S \nabla_s \delta \boldsymbol{y} : \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s) \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\partial S} \nabla_s \delta \boldsymbol{y} : \boldsymbol{A}_s \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}s \\ &= \int_S \delta \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{Div}_s\left(\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{I}_s\right) \mathrm{d}\Gamma - \int_{\partial S} \delta \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{I}_s \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}s + \int_{\partial S} \nabla_s \delta \boldsymbol{y} : \boldsymbol{A}_s \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.8}$$

将最后一个边界项分解为相对于 ∂S的法向和切向部分，并应用线散度定理（Steinmann，2008），注意到 $\partial(\partial S) = \varnothing$，可得

$$\int_{\partial S} \nabla_s \delta \boldsymbol{y} : \boldsymbol{A}_s \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}s = \int_{\partial S} \nabla_{s,\perp} \delta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}_{s,\perp} - \delta \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{Div}_{\parallel}(\boldsymbol{A}_{s,\parallel}) \, \mathrm{d}s. \tag{3.9}$$

其中，法向分量和切向分量定义为

$$\nabla_{s,\perp} \delta \boldsymbol{y} = (\nabla_s \delta \boldsymbol{y})\boldsymbol{V}, \qquad \boldsymbol{A}_{s,\perp} = (\boldsymbol{A}_s \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{V}, \qquad \boldsymbol{A}_{s,\parallel} = (\boldsymbol{A}_s \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{I}_{\parallel}, \tag{3.10}$$

其中，$\boldsymbol{I}_{\parallel}$ 表示投影到 ∂S切向量上的投影算子。

将这些恒等式代入（3.5），得到

$$\begin{aligned} \delta E = &-\int_\Omega \delta \boldsymbol{y} \cdot (\mathrm{Div}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{f}) \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} \delta \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{P}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{q}) \, \mathrm{d}\Gamma - \int_S \delta \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{Div}_s\left(\boldsymbol{L}_s - \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{I}_s\right) \mathrm{d}\Gamma \\ &+ \int_{\partial S} \left[\delta \boldsymbol{y} \cdot \left((\boldsymbol{L}_s - \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{I}_s)\boldsymbol{V} - \mathrm{Div}_{\parallel}(\boldsymbol{A}_{s,\parallel})\right) + \nabla_{s,\perp} \delta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}_{s,\perp}\right] \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.11}$$

根据变分法基本引理，平衡方程和边界条件可写成无坐标形式

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \qquad \text{in } \Omega, \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{q} \qquad \text{on } \partial\Omega\backslash S, \tag{3.13}$$

$$\mathrm{Div}_s\left(\boldsymbol{L}_s - \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{I}_s\right) + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad \text{在 } S \text{ 上}, \tag{3.14}$$

$$\left(\boldsymbol{L}_s - \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{I}_s\right)\boldsymbol{V} - \mathrm{Div}_{\|}(\boldsymbol{A}_{s,\|}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{在 } \partial S \text{ 上}, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{A}_{s,\perp} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } \partial S. \tag{3.16}$$

3.2. 基于曲率的表述

在许多表面弹性表述中（例如，Gao et al. （2014），Steigmann & Ogden （1999），表面能取决于曲率张量，而非完整的三阶张量 $\boldsymbol{H}_s$。回顾相对曲率的定义

$$\boldsymbol{\kappa} = -\boldsymbol{n}(\boldsymbol{F}_s)\cdot\boldsymbol{H}_s, \tag{3.17}$$

ˇ，其中我们强调表面法向量 $\boldsymbol{n}$ 对 $\boldsymbol{F}_s$ 的依赖关系。请注意，一些作者（例如 Silhav´y （2013））省略了负号；此处我们保留负号，以与 Steigmann & Ogden （1999）保持一致。

为了得到以曲率表示的约化表述，我们引入基于曲率的表面能密度

$$\Psi(\boldsymbol{F}_s, \boldsymbol{\kappa}) := \Phi(\boldsymbol{F}_s, \boldsymbol{H}_s). \tag{3.18}$$

利用关系 $\boldsymbol{H}_s = -\partial\boldsymbol{\kappa}/\partial\boldsymbol{n}$并结合约束 $\boldsymbol{F}_s^T\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$的微分，可得

$$\boldsymbol{L}_s = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{F}_s} + \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\kappa}} : \frac{\partial\boldsymbol{\kappa}}{\partial\boldsymbol{F}_s} = \boldsymbol{P}_s - (\boldsymbol{H}_s : \boldsymbol{M}_s)\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\boldsymbol{F}_s} = \boldsymbol{P}_s + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s^{-1}\big(\boldsymbol{H}_s : \boldsymbol{M}_s\big), \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{A}_s = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{H}_s} = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\kappa}}\frac{\partial\boldsymbol{\kappa}}{\partial\boldsymbol{H}_s} = -\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{M}_s, \tag{3.20}$$

其中，曲面第一类 Piola–Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{P}_s$ 和曲面力矩张量 $\boldsymbol{M}_s$ 定义为

$$\boldsymbol{P}_s = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{F}_s}, \qquad \boldsymbol{M}_s = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\kappa}}. \tag{3.21}$$

因此，式（3.14）中出现曲面散度的张量可改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_s - \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{I}_s &= \boldsymbol{P}_s + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s^{-1}(\boldsymbol{H}_s : \boldsymbol{M}_s) + \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{M}_s)\,\boldsymbol{I}_s \\ &= \boldsymbol{P}_s + \boldsymbol{F}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s),\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中，最后一个等号由恒等张量关系得出

$$\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s^{-1}(\boldsymbol{H}_s : \boldsymbol{M}_s) + \mathrm{Div}_s(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{M}_s)\,\boldsymbol{I}_s = \boldsymbol{F}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s). \tag{3.23}$$

展开曲面散度，并利用曲率张量 $\boldsymbol{b}$，可将结果表示为

$$\boldsymbol{F}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s) = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s). \tag{3.24}$$

鉴于方程（3.22）和（3.24），表面平衡方程（3.14）可仅用二阶表面应力 $\boldsymbol{P}_s$ 和表面力矩 $\boldsymbol{M}_s$表示，从而无需使用三阶张量，写为

$$\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{P}_s - \boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s)) + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } S. \tag{3.25}$$

最后，通过引入有效的表面第一类 Piola–Kirchhoff应力 $\boldsymbol{Q}_s$，定义为

$$\boldsymbol{Q}_s := \boldsymbol{P}_s - \boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s)\,, \tag{3.26}$$

可以　轻松将表面平衡方程（3.14）和边界条件（3.15）及（3.16）表示为

$$\mathrm{Div}_s\,(\boldsymbol{Q}_s) + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } S, \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{V} + \mathrm{Div}_{\shortparallel}(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } \partial S, \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{V} = 0 \qquad \text{on } \partial S. \tag{3.29}$$

由于（*3.28*）和 $\boldsymbol{I}_s\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{M}_s$，边界条件中不再出现投影算子 $\shortparallel$。在这种形式下，（3.27）–（3.29）与经典表面弹性方程（Gao et al.，2014，Steigmann & Ogden，1999）相似，只是曲率效应被嵌入在 $\boldsymbol{Q}_s$中。

4. 增量理论

本节将通过对第 3 节中得到的控制方程线性化，推导曲率依赖型表面弹性的增量方程。

4.1. 运动学

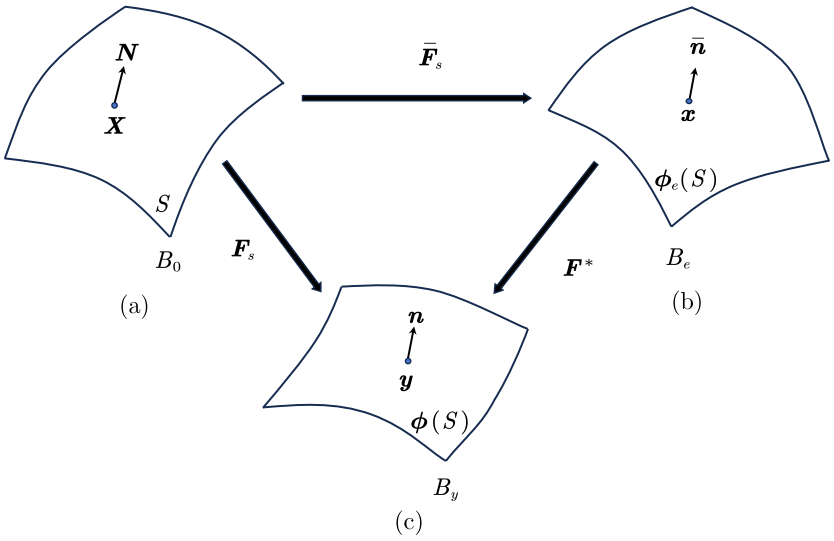

图 1：三个 c　的弹性表面：(a) 参考构形，(b) 有限变形构形，以及 (c) 当前构形　　on.

根据Ogden(1984)，我们考虑弹性体经连续变形所形成的三种构形。参考构形中，物体未发生变形，占据区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$，记为$B_0$。在外部载荷作用下，物体发生有限变形，进入平衡构形B_e。随后，对B_e施加进一步变形，形成当前构形B_y，如图1所示。

这三种构形中材料点的位置表示为

$$\boldsymbol{X}\in B_0, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}_e(\boldsymbol{X})\in B_e, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}_y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X})\in B_y, \tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}_e : B_0 \to B_e$ 和 $\boldsymbol{\phi}_y : B_e \to B_y$ 是变形映射，$\boldsymbol{\phi} := \boldsymbol{\phi}_y \circ \boldsymbol{\phi}_e$ 表示它们的复合映射。与变形 $B_0 \to B_y$、$B_0 \to B_e$ 和 $B_e \to B_t$ 相对应的变形梯度定义为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{X}}, \qquad \bar{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}, \qquad \boldsymbol{F}^* = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{4.2}$$

根据链式法则，这些梯度通过乘法分解相互关联

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^* \, \bar{\boldsymbol{F}}. \tag{4.3}$$

将（4.3）限制到曲面上可得

$$\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{F}_s^* \, \bar{\boldsymbol{F}}_s. \tag{4.4}$$

为了分析平衡解的稳定性，我们将叠加变形 $\boldsymbol{\phi}_y$ 视为平衡构形 B_e的一个小扰动。具体而言，相关的位移场 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ 写作 $\epsilon \boldsymbol{u}$，其中ϵ 是一个小参数。假设 ϵ 任意小，即可将平衡方程和边界条件线性化。随后，在总变形映射 $\boldsymbol{\phi}$ 失去单射性的构形处，即多个解变得可接受时，识别出一个分岔。该过程通常称为增量或小扰动叠加大变形方法，参见，例如 Ogden （1984）、Bigoni （2012）和 Goriely （2017）。

4.2. 平衡方程

在此设定下，我们假设由 $\boldsymbol{\phi}_e(\boldsymbol{X})$得到的有限变形构形 B_e处于平衡状态。也就是说，相关的第一类 Piola–Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{P}$和有效第一类 Piola-Kirchhoff 曲面应力 $\boldsymbol{Q}_s$ 满足平衡方程和边界条件。描述这一平衡状态的完整控制方程组如下：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Div}(\bar{\boldsymbol{P}}) + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} && \text{in } \Omega, && (4.5)\\
&\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{q} && \text{on } \partial\Omega \backslash S, && (4.6)\\
&\mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{Q}}_s) + \boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} && \text{on } S, && (4.7)\\
&\bar{\boldsymbol{Q}}_s \boldsymbol{V} + \mathrm{Div}_{\|}(\bar{\boldsymbol{n}} \otimes \bar{\boldsymbol{M}}_s \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{0} && \text{在 } \partial S \text{ 上}, && (4.8)\\
&\boldsymbol{V} \cdot \bar{\boldsymbol{M}}_s \boldsymbol{V} = 0 && \text{on } \partial S. && (4.9)
\end{aligned}$$

在此平衡构形的基础上，我们叠加一个由 ϵ 参数化的增量变形，使得

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}). \tag{4.10}$$

由此得到扰动后的变形梯度

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{I} + \epsilon \bar{\nabla} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{I} + \epsilon \boldsymbol{\eta}, \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{F}_s^* = \boldsymbol{i}_s + \epsilon \bar{\nabla}_s \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}_s + \epsilon \boldsymbol{\eta}_s, \tag{4.12}$$

其中，我们引入增量体位移梯度张量和曲面位移梯度张量 $\boldsymbol{\eta} = \nabla \boldsymbol{u}$和 $\boldsymbol{\eta}_s = \nabla_s \boldsymbol{u}$，其中 ∇和∇_s 分别表示相对于构形 B_e的体梯度和曲面梯度。

为推导增量方程，我们将表面应力张量和力矩张量 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}_s$、$\boldsymbol{M}_s$ 以及当前单位法向量 $\boldsymbol{n}$按参数 ϵ 的幂展开，得到

$$\boldsymbol{P} = \bar{\boldsymbol{P}} + \epsilon \boldsymbol{P}^{[1]} + O(\epsilon^2), \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{Q}_s = \bar{\boldsymbol{Q}}_s + \epsilon \boldsymbol{Q}_s^{[1]} + O(\epsilon^2), \tag{4.14}$$

$$\boldsymbol{M}_s = \bar{\boldsymbol{M}}_s + \epsilon \boldsymbol{M}_s^{[1]} + O(\epsilon^2), \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{n}} + \epsilon \boldsymbol{n}^{[1]} + O(\epsilon^2), \tag{4.16}$$

其中，带横线的量表示与中间构形相关的张量，即与扰动ϵ无关；上标 [1]表示一阶扰动（其具体形式将在下一节讨论）。

¯请注意，可能有人会担心，诸如$\boldsymbol{P}$ 和$\boldsymbol{P}$ 这样的量位于不同的切空间，因此不应直接等同。对此，只需注意，体和曲面的变形梯度公式（4.12）实际上应预先乘以移位算子，以便将这些量从$\mathcal{B}_e$ 的切空间映射到扰动构形$\mathcal{B}_y$ 的切空间（见Marsden & Hughes 的第 1.3 章（1994））。随后，在展开式（4.13）–（4.15）中也应包含移位算子。不过，由于在我们的公式中，我们将$\boldsymbol{F}_s$ 的定义域和值域扩展为 $\mathbb{R}^3$，变形构形和未变形构形的切空间都与 $\mathbb{R}^3$重合，因此定义中无需包含移位算子。

随后，我们将这些关系代入平衡方程（3.12）、（3.13）、（3.25）和（3.29），并利用中间构形的平衡关系（4.5）–（4.9）。将所得方程除以 ϵ并取极限 $\epsilon \to 0$，我们得到增量问题：

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{P}^{[1]}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{in } \Omega, \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{P}^{[1]}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } \partial\Omega \backslash S, \tag{4.18}$$

$$\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{Q}_s^{[1]}) - \boldsymbol{P}^{[1]}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad \text{在} S\text{上}, \tag{4.19}$$

$$\boldsymbol{Q}_s^{[1]}\boldsymbol{V} + \mathrm{Div}_{\|}\left(\bar{\boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{M}_s^{[1]}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{n}^{[1]} \otimes \bar{\boldsymbol{M}}_s\boldsymbol{V}\right) = \boldsymbol{0} \qquad \text{在 } \partial S\text{上}, \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{M}_s^{[1]}\boldsymbol{V} = 0 \qquad \text{on } \partial S. \tag{4.21}$$

4.3. 运动学量和应力度量的线性化

为了构造体和曲面平衡方程的增量形式，我们推导相关运动学量和应力量的线性化形式。我们首先回顾体和曲面张量值函数的一般扰动展开，然后讨论具体的体和曲面度量。

4.3.1. 一般扰动展开

对于体量，我们考虑一个一般的张量值函数

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\boldsymbol{F}) \tag{4.22}$$

该函数依赖于变形梯度 $\boldsymbol{F}$。扰动态表示为

$$\boldsymbol{F}(\varepsilon) = \bar{\boldsymbol{F}} + \varepsilon\boldsymbol{\eta}\bar{\boldsymbol{F}} + O(\varepsilon^2), \tag{4.23}$$

¯其中，$\boldsymbol{F}$ 表示有限变形构形中的变形梯度，而 $\boldsymbol{\eta}$ 是增量位移梯度。将 $\mathcal{Q}$ 按 ε的幂次展开可得

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{F}(\varepsilon)) = \mathcal{Q}(\bar{\boldsymbol{F}}) + \varepsilon \left.\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \boldsymbol{F}}\right|_{\bar{\boldsymbol{F}}} : (\boldsymbol{\eta}\bar{\boldsymbol{F}}) + O(\varepsilon^2), \tag{4.24}$$

因此，一阶扰动为

$$Q^{[1]} = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{F}}\Big|_{\bar{\boldsymbol{F}}} : (\boldsymbol{\eta}\bar{\boldsymbol{F}}). \tag{4.25}$$

对于表面量，其依赖关系同时涉及表面变形梯度及其曲面梯度。设

$$Q_s = Q_s(\boldsymbol{F}_s, \boldsymbol{H}_s), \tag{4.26}$$

其中 $\boldsymbol{F}_s$ 是表面变形梯度，$\boldsymbol{H}_s = \nabla_s \boldsymbol{F}_s \circ (\boldsymbol{I}_s \times \boldsymbol{I}_s)$ 是其曲面梯度。扰动态表示为

$$\boldsymbol{F}_s(\varepsilon) = \bar{\boldsymbol{F}}_s + \varepsilon \boldsymbol{\eta}_s \bar{\boldsymbol{F}}_s + O(\varepsilon^2), \qquad \boldsymbol{H}_s(\varepsilon) = \bar{\boldsymbol{H}}_s + \varepsilon \nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s \bar{\boldsymbol{F}}_s) + O(\varepsilon^2). \tag{4.27}$$

展开 Q_s 可得

$$Q_s(\boldsymbol{F}_s(\varepsilon), \boldsymbol{H}_s(\varepsilon)) = Q_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s, \bar{\boldsymbol{H}}_s) + \varepsilon\Big(\frac{\partial Q_s}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s, \bar{\boldsymbol{H}}_s)} : (\boldsymbol{\eta}_s \bar{\boldsymbol{F}}_s) + \frac{\partial Q_s}{\partial \boldsymbol{H}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s, \bar{\boldsymbol{H}}_s)} \vdots \nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s \bar{\boldsymbol{F}}_s)\Big) + O(\varepsilon^2), \tag{4.28}$$

因此，

$$Q_s^{[1]} = \frac{\partial Q_s}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s, \bar{\boldsymbol{H}}_s)} : (\boldsymbol{\eta}_s \bar{\boldsymbol{F}}_s) + \frac{\partial Q_s}{\partial \boldsymbol{H}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s, \bar{\boldsymbol{H}}_s)} \vdots \nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s \bar{\boldsymbol{F}}_s). \tag{4.29}$$

扰动公式（4.25）和（4.29）为所有依赖于（体内）变形梯度以及（曲面上）表面变形梯度和曲率相关导数的量的线性化提供了通用结构。

4.3.2. 体量的线性化

增量公式中出现的体量是第一类 Piola-Kirchhoff 应力，其可直接写为

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}. \tag{4.30}$$

沿 F 对第一类 Piola-Kirchhoff 应力（4.30）进行扰动，得到 $\boldsymbol{\eta F}$ 给出

$$\boldsymbol{P}^{[1]} = \mathbb{A} : (\boldsymbol{\eta}\bar{\boldsymbol{F}}), \tag{4.31}$$

其中， $\mathbb{A}$ 表示切线刚度

$$\mathbb{A} := \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{F}\, \partial \boldsymbol{F}}\Big|_{\bar{\boldsymbol{F}}}. \tag{4.32}$$

4.3.3. 曲面量的线性化

现在转而讨论相关曲面量的线性化，即构造边界曲面上增量方程所需的一阶扰动。尽管 Yu & Fu (2025）最近推导了增量表面弹性关系，但由于存在表面力矩张量，且其显式依赖于表面相对曲率，我们的情形更为复杂。

我们首先回顾一下，有效曲面（Piola 型）应力定义为

$$\boldsymbol{Q}_s = \boldsymbol{P}_s - \boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{F}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s). \tag{4.33}$$

对（4.33）在带横线状态附近进行一阶扰动，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_s^{[1]} = \boldsymbol{P}_s^{[1]} - \bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}_s^{[1]} - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s)^{[1]}\bar{\boldsymbol{M}}_s \\ + \boldsymbol{n}^{[1]} \otimes \bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s) + \bar{\boldsymbol{n}} \otimes (\boldsymbol{F}_s^{-1})^{[1]}\,\mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s) \\ + \bar{\boldsymbol{n}} \otimes \bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{F}_s^{[1]}\,\bar{\boldsymbol{M}}_s + \bar{\boldsymbol{F}}_s\,\boldsymbol{M}_s^{[1]}).\end{aligned} \tag{4.34}$$

因此，接下来我们推导所需运动学量的一阶扰动。

单位法向量。当前单位法向量$\boldsymbol{n}$的一阶扰动由$\boldsymbol{n}$对$\boldsymbol{F}$求导，并作用于扰动$\boldsymbol{\eta}_s\boldsymbol{F}_s$得到：

$$\boldsymbol{n}^{[1]} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big|_{\bar{\boldsymbol{F}}_s} : (\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s). \tag{4.35}$$

对关系$\boldsymbol{F}_s^T\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$求导可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{F}_s^{-T}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s)^T\boldsymbol{n}. \tag{4.36}$$

因此，式（4.35）可简化为

$$\boldsymbol{n}^{[1]} = -\boldsymbol{F}_s^{-T}(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)^T\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}. \tag{4.37}$$

乘积$\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s$。在增量公式中，只需对乘积$\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s$进行线性化，因此无需显式计算$\boldsymbol{b}^{[1]}$。根据链式法则，我们有关系式

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s = -\nabla_s\boldsymbol{n}. \tag{4.38}$$

因此，一阶扰动为

$$(\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s)^{[1]} = -\nabla_s\boldsymbol{n}^{[1]} = \underbrace{\bar{\nabla}_s(\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}})}_{\boldsymbol{\omega}_s}\bar{\boldsymbol{F}}_s. \tag{4.39}$$

相对曲率。相对曲率$\boldsymbol{\kappa}$的一阶扰动为

$$\boldsymbol{\kappa}^{[1]} = \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{H}}_s)} : (\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s) + \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \boldsymbol{H}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{H}}_s)} \vdots \nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s). \tag{4.40}$$

由定义$\boldsymbol{\kappa} = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}_s$可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{H}}_s)} : (\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s) = -\boldsymbol{n}^{[1]}\cdot\bar{\boldsymbol{H}}_s = (\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}})\cdot\bar{\boldsymbol{H}}_s, \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \boldsymbol{H}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{H}}_s)} \vdots \nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s) = -\boldsymbol{I}_s(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)) = -\bar{\boldsymbol{F}}_s^T(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_s\boldsymbol{\eta}_s) - (\boldsymbol{\eta}_s^T\boldsymbol{n})\cdot\bar{\boldsymbol{H}}_s, \tag{4.42}$$

其中，我们使用莱布尼茨法则展开梯度$\nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)$。将这些贡献相加起来可得

$$\boldsymbol{\kappa}^{[1]} = -\bar{\boldsymbol{F}}_s^T(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_s\boldsymbol{\eta}_s) = \boldsymbol{F}_s^T\underbrace{(-\bar{\boldsymbol{i}}_s(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\bar{\nabla}_s\boldsymbol{\eta}_s))}_{\boldsymbol{\rho}_s}\bar{\boldsymbol{F}}_s = \bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s, \tag{4.43}$$

其中，我们将相对于参考构形的曲面梯度∇_s转换为相对于中间构形的曲面梯度$\nabla_s(\cdot) = \bar{\nabla}_s(\cdot)\bar{\boldsymbol{F}}_s$。这种改写很方便，因为增量场$\boldsymbol{\eta}_s$表示中间构形与当前构形之间的位移梯度。此外，表达式中引入了曲面恒等张量$\bar{\boldsymbol{i}}_s$，因为$\boldsymbol{F}_s^T$的作用会消去法向分量（$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$），从而投影到切空间。根据莱布尼茨法则，二阶张量$\boldsymbol{\rho}_s$可改写为不涉及三阶张量的形式：

$$\boldsymbol{\rho}_s = -\bar{\boldsymbol{i}}_s\bar{\nabla}_s(\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}) - \boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{b}}. \tag{4.44}$$

逆表面变形梯度。从恒等式

$$\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{F}_s^{-1}=\boldsymbol{i}_s,\qquad \boldsymbol{i}_s=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}, \tag{4.45}$$

对其求导可得

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s)\,\boldsymbol{F}_s^{-1}+\boldsymbol{F}_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s^{-1}=-(\mathrm{d}\boldsymbol{n})\otimes\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\otimes(\mathrm{d}\boldsymbol{n}). \tag{4.46}$$

此外，利用（4.36），可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s^{-1}=-\boldsymbol{F}_s^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s)\boldsymbol{F}_s^{-1}+\boldsymbol{F}_s^{-1}\boldsymbol{F}_s^{-T}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s)^T(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}). \tag{4.47}$$

令 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s=\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s$ 在（4.47）中，并在带横线状态下求值，可得 $\boldsymbol{F}_s^{-1}$的一阶扰动为

$$(\boldsymbol{F}_s^{-1})^{[1]}=-\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}+\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-T}(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)^T(\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{n}})=-\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\underbrace{(\bar{\boldsymbol{i}}_s\boldsymbol{\eta}_s-\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{n}})}_{\boldsymbol{\xi}_s}=-\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\boldsymbol{\xi}_s. \tag{4.48}$$

总之，所需运动学量的一阶扰动为

$$\boldsymbol{n}^{[1]}=-\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}},\qquad(\boldsymbol{b}\boldsymbol{F}_s)^{[1]}=\boldsymbol{\omega}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s,\qquad\boldsymbol{\kappa}^{[1]}=\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s,\qquad(\boldsymbol{F}_s^{-1})^{[1]}=-\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\boldsymbol{\xi}_s, \tag{4.49}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_s=\bar{\nabla}_s(\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}),\qquad\boldsymbol{\rho}_s=-\bar{\boldsymbol{i}}_s\bar{\nabla}_s(\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}})-\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{b}},\qquad\boldsymbol{\xi}_s=\bar{\boldsymbol{i}}_s\boldsymbol{\eta}_s-\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{n}}, \tag{4.50}$$

最后，类表面应力量的线性化增量为

$$\boldsymbol{P}_s^{[1]}=\mathbb{A}_s:\left(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right)+\mathbb{B}_s:\left(\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right), \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{M}_s^{[1]}=\mathbb{C}_s:\left(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right)+\mathbb{D}_s:\left(\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right), \tag{4.52}$$

其中，表面模量定义为

$$\mathbb{A}_s=\left.\frac{\partial\boldsymbol{P}_s}{\partial\boldsymbol{F}_s}\right|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})},\qquad\mathbb{B}_s=\left.\frac{\partial\boldsymbol{P}_s}{\partial\boldsymbol{\kappa}}\right|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})}, \tag{4.53}$$

$$\mathbb{C}_s=\left.\frac{\partial\boldsymbol{M}_s}{\partial\boldsymbol{F}_s}\right|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})},\qquad\mathbb{D}_s=\left.\frac{\partial\boldsymbol{M}_s}{\partial\boldsymbol{\kappa}}\right|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})}. \tag{4.54}$$

将所有这些表达式代入（4.34），得到增量应力$\boldsymbol{Q}^{[1]}{}_s$ 的最终形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_s^{[1]}=&\mathbb{A}_s:(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)+\mathbb{B}_s:(\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)-\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{F}}_s\big(\mathbb{C}_s:(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)+\mathbb{D}_s:(\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)\big)-\boldsymbol{\omega}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s\\&-\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s)-\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\boldsymbol{\xi}_s\,\mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s)\\&+\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s\left(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s+\bar{\boldsymbol{F}}_s(\mathbb{C}_s:(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s)+\mathbb{D}_s:(\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s))\right).\end{aligned} \tag{4.55}$$

该曲面的增量本构方程与体的相应方程（4.31）共同构成了增量理论的完整表述。

4.4. 推前至中间构形

此外，在中间构形中表述平衡方程也很方便。为此，我们引入增量实际应力张量、其曲面对应量、实际力矩张量以及实际增量力矩张量，定义如下：

$$\boldsymbol{\chi}=\bar{J}^{-1}\boldsymbol{P}^{[1]}\bar{\boldsymbol{F}}^T,\qquad\boldsymbol{\chi}_s=\bar{J}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_s^{[1]}\bar{\boldsymbol{F}}_s^T, \tag{4.56}$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_s=\bar{J}_s^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s^T,\qquad\boldsymbol{\tau}_s^{[1]}=\bar{J}_s^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}_s^{[1]}\bar{\boldsymbol{F}}_s^T. \tag{4.57}$$

此外，我们引入边界曲线 $\boldsymbol{\phi}(\partial S)$ 的面内单位法向量 $\bar{\boldsymbol{\nu}}$，其定义为

$$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-T}\boldsymbol{V}}{|\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-T}\boldsymbol{V}|}. \tag{4.58}$$

参考控制方程组的推前（4.17）–（4.21），利用标准的体和曲面 Piola 变换（2.17）以及关系式（4.58），可得:

$$\overline{\mathrm{div}}(\boldsymbol{\chi}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{in } \boldsymbol{\phi}_e(\Omega), \tag{4.59}$$

$$\boldsymbol{\chi}\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(\partial\Omega\backslash S), \tag{4.60}$$

$$\overline{\mathrm{div}}_s(\boldsymbol{\chi}_s) - \boldsymbol{\chi}\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(S), \tag{4.61}$$

$$\boldsymbol{\chi}_s\bar{\boldsymbol{\nu}} + \overline{\mathrm{div}}_{\|}(\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\boldsymbol{\tau}_s^{[1]}\bar{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{n}^{[1]}\otimes\bar{\boldsymbol{\tau}}_s\bar{\boldsymbol{\nu}}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(\partial S), \tag{4.62}$$

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}\cdot\boldsymbol{\tau}_s^{[1]}\bar{\boldsymbol{\nu}} = 0 \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(\partial S), \tag{4.63}$$

其中，$\overline{\mathrm{div}}$、$\overline{\mathrm{div}}_s$和 $\overline{\mathrm{div}}_{\|}$ 分别表示中间构形中的体散度、曲面散度和线散度。唯一需要处理的关键步骤是由（4.62）推导出（4.20）。为此，我们先将定义式（4.56）和（4.58）代入（4.20），然后在边界曲线 ∂S上应用 Piola 变换（2.26），得到

$$\boldsymbol{\chi}_s\bar{\boldsymbol{\nu}} + \overline{\mathrm{div}}_{\|}\Big(\frac{1}{\bar{J}_s|\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-T}\boldsymbol{V}|}(\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\boldsymbol{M}_s^{[1]}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{n}^{[1]}\otimes\bar{\boldsymbol{M}}_s\boldsymbol{V})\bar{\boldsymbol{F}}_s^{T}\Big) = \boldsymbol{0}. \tag{4.64}$$

利用（4.58），将散度中的第一项改写为

$$\frac{1}{\bar{J}_s|\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-T}\boldsymbol{V}|}\bar{\boldsymbol{n}}\otimes(\boldsymbol{M}_s^{[1]}\boldsymbol{V})\bar{\boldsymbol{F}}_s^{T} = \frac{1}{\bar{J}_s}\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}^{[1]}\bar{\boldsymbol{F}}_s^{T}\bar{\boldsymbol{\nu}} = \bar{\boldsymbol{n}}\otimes\boldsymbol{\tau}_s^{[1]}\bar{\boldsymbol{\nu}}. \tag{4.65}$$

对（4.64）中的第二项进行类似运算，可得边界条件（4.62）。

在实际应用中，将增量实际表面应力张量 $\boldsymbol{\chi}_s$ 改写为类似于有效表面应力张量的形式会更方便（参见（3.26））。为此，我们进一步引入增量表面实际应力和力矩度量

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \bar{J}_s^{-1}\boldsymbol{P}_s^{[1]}\bar{\boldsymbol{F}}_s^{T}, \qquad \boldsymbol{m}_s = \bar{J}_s^{-1}(\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}_s)^{[1]}\bar{\boldsymbol{F}}_s^{T} = \boldsymbol{\tau}_s^{[1]} + \boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{\tau}}_s. \tag{4.66}$$

鉴于（4.55）、（4.56）$_2$ 以及 Piola 变换（2.17），增量实际表面应力 $\boldsymbol{\chi}_s$ 可表示为紧凑形式

$$\boldsymbol{\chi}_s = \boldsymbol{\sigma}_s - \bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{m}_s + \bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{i}}_s\overline{\mathrm{div}}_s(\boldsymbol{m}_s) + \boldsymbol{\theta}_s, \tag{4.67}$$

其中，附加项 $\boldsymbol{\theta}_s$ 计入了由增量变形 $B_e \to B$引起的几何变化，其明确表达式为

$$\boldsymbol{\theta}_s = \bar{J}_s^{-1}[(\bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\eta}_s - \boldsymbol{\omega}_s)\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s^{T} - \boldsymbol{\eta}_s^{T}\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{i}}_s\,\mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s) - \bar{\boldsymbol{n}}\otimes\boldsymbol{\xi}_s\,\mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s)]. \tag{4.68}$$

在形式（4.67）中，增量表面应力的结构 $\boldsymbol{\chi}_s$ 会自动显现出来。此外，该表述使 $\boldsymbol{\chi}_s$ 的计算变得直接：只需计算应力和力矩度量 $\boldsymbol{\sigma}_s$ 以及$\boldsymbol{m}_s$，它们可通过对曲面 Piola-基尔霍夫应力和曲面力矩进行线性化而方便地获得。

5. 坐标表达式

本节将在适用于边界曲面的曲线坐标系中表示增量方程。我们首先介绍协变/逆变基、度量系数和曲面适配坐标图的记号，然后以分量形式写出体增量方程和曲面增量方程。全文中，拉丁指标i、j、$\cdots\in\{1、2、3\}$ 表示体坐标，希腊指标 α、β、$\cdots\in\{1、2\}$ 表示面内（曲面）坐标。

5.1. 体

我们首先简要回顾体相相关量的坐标表述以及增量方程（4.17）–（4.18）。

材料位置向量 $\boldsymbol{X}$ 由固定的参考曲线坐标 θ^i 参数化，

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3). \tag{5.1}$$

参考基向量由此得到：

$$\boldsymbol{G}_i = \boldsymbol{X}_{,i} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \theta_i}, \tag{5.2}$$

其中，下标“$_{,i}$”表示对坐标 θ^i 的偏微分。未变形度量系数、相应矩阵的行列式以及逆变基可写为

$$G_{ij} = \boldsymbol{G}_i \cdot \boldsymbol{G}_j, \qquad G = \det(G_{ij}), \qquad (G^{ij}) = (G_{ij})^{-1}, \qquad \boldsymbol{G}^i = G^{ij}\,\boldsymbol{G}_j, \tag{5.3}$$

其中，(G_{ij}) 表示其ij项为G_{ij}的 3×3矩阵；对于 $(G^i{}_j)$，定义类似。

为了简洁地描述边界曲面，我们采用曲面适配坐标图：$S \subset \partial\Omega$ 上的点由以下参数化

$$\boldsymbol{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3 = \theta^s), \tag{5.4}$$

其中，θ^s 表示用于确定曲面的横向坐标 θ^3 的常数值。因此，基向量$\boldsymbol{G}_1$ 和$\boldsymbol{G}_2$ 与边界曲面相切。未变形曲面的单位法向量为

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2}{|\boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2|} = \frac{\boldsymbol{G}^3}{\sqrt{G^{33}}}. \tag{5.5}$$

使用相同的坐标描述参考构形和当前（中间）构形中的点较为方便。当前位置向量为

$$\boldsymbol{x}(\theta^i) = \boldsymbol{\phi}_e\big(\boldsymbol{X}(\theta^i)\big), \tag{5.6}$$

当前协变基向量为

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{x}_{,i} = \bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{G}_i, \tag{5.7}$$

¯其中，$\boldsymbol{F}$ 是中间状态下的变形梯度。当前（变形后）的度量系数、度量行列式和逆变基为

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j, \qquad g = \det(g_{ij}), \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, \qquad \boldsymbol{g}^i = g^{ij}\,\boldsymbol{g}_j. \tag{5.8}$$

The 变形后基的克里斯托费尔符号（即与g^{ij}相关联的列维-奇维塔联络）为 ad

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \boldsymbol{g}_{i,j} \cdot \boldsymbol{g}^k, \qquad \text{with} \quad \boldsymbol{g}_{i,j} := \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \theta^j}. \tag{5.9}$$

二阶张量 $\boldsymbol{R} = R_{ji}\,\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{G}^j$ 的物质（参考）散度的坐标表达式为（参见例如 Lee(2012)，第 436 页）

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{\sqrt{G}}\big(\sqrt{G}\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{G}^j\big)_{,j} = \Big(\frac{1}{\sqrt{G}}\big(\sqrt{G}R_i{}^j\big)_{,j} - R_j{}^k\,\bar{\Gamma}^j_{ki}\Big)\boldsymbol{g}^i. \tag{5.10}$$

在参考构形和当前构形中使用相同的坐标时，中间构形处的变形梯度及其行列式为

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^i, \qquad \bar{J} = \det(\bar{\boldsymbol{F}}) = \sqrt{g/G}. \tag{5.11}$$

逆变形梯度为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^{-1} = \boldsymbol{G}_i \otimes \boldsymbol{g}^i. \tag{5.12}$$

变形后曲面的单位外法向量由南森公式给出

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \frac{\bar{\boldsymbol{F}}^{-T}\boldsymbol{N}}{|\bar{\boldsymbol{F}}^{-T}\boldsymbol{N}|} = \frac{\boldsymbol{G}^3 \cdot \boldsymbol{G}_i \otimes \boldsymbol{g}^i}{|\boldsymbol{G}^3 \cdot \boldsymbol{G}_i \otimes \boldsymbol{g}^i|} = \frac{\boldsymbol{g}^3}{\sqrt{g^{33}}}. \tag{5.13}$$

增量位移张量在变形后基中的表达式为

$$\boldsymbol{\eta} = \eta^i{}_j \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j. \tag{5.14}$$

根据框架无关性要求，应变能仅通过变形构形的诱导度量依赖于变形梯度$\boldsymbol{F}$，即 $g^{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$。因此，能量函数 $W(\boldsymbol{F})$ 可以等价地表示为度量系数的函数，

$$W(\boldsymbol{F}) = \tilde{W}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}_i \cdot \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}_j) = \tilde{W}(g_{ij}). \tag{5.15}$$

鉴于恒等式 $\partial g_{jk}/\partial \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{G}_k + \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{G}_j$ 以及对称性 $\partial \tilde{W}/\partial g_{jk} = \partial \tilde{W}/\partial g_{kj}$，链式法则给出如下形式的体积第一类皮奥拉–基尔霍夫应力

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{jk}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \boldsymbol{F}} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{jk}} (\boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{G}_k + \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{G}_j) = 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{kj}} \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{G}_j = 2g_{ik}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{kj}} \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{G}_j. \tag{5.16}$$

换言之，$\boldsymbol{P}$ 在基 $\{\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}_j\}$ 中的混合分量为 $P_{ji} = 2g_{ik}\partial \tilde{W}/\partial g_{kj}$。

于是，中间构形中的切线刚度 $\mathbb{A}$ 可由下式得到

$$\mathbb{A} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{F} \partial \boldsymbol{F}}\Big|_{\bar{\boldsymbol{F}}} = 2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}}\Big(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{ij}} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}_j\Big). \tag{5.17}$$

进一步利用 $\partial \boldsymbol{g}_i/\partial \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}_p \otimes \boldsymbol{g}_p \otimes \boldsymbol{G}_i$，可得

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= 4\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial g_{ij}\partial g_{kl}} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}_j \otimes \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{G}_l + 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{ij}} \boldsymbol{g}_p \otimes \boldsymbol{G}_j \otimes \boldsymbol{g}^p \otimes \boldsymbol{G}_i \\ &= \Big(4\,g_{im}\,g_{kn}\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial g_{ij}\partial g_{kl}} + 2\,g_{nm}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{lj}}\Big) \boldsymbol{g}^m \otimes \boldsymbol{G}_j \otimes \boldsymbol{g}^n \otimes \boldsymbol{G}_l. \end{aligned} \tag{5.18}$$

因此，混合基底 $\{\boldsymbol{g}_m \otimes \boldsymbol{G}_j \otimes \boldsymbol{g}_n \otimes \boldsymbol{G}_l\}$ 中的分量为

$$\mathbb{A}_{m\,n}^{\;j\;\;l} = 4\,g_{im}\,g_{kn}\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial g_{ij}\partial g_{kl}} + 2\,g_{nm}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial g_{lj}}. \tag{5.19}$$

增量体应力随后由线性化定律得出（参见（4.31））

$$\boldsymbol{P}^{[1]} = \mathbb{A} : (\boldsymbol{\eta}\bar{\boldsymbol{F}}) = \mathbb{A}_{m\,n}^{\;j\;\;l}\,\eta^n_{\;l}\,\boldsymbol{g}^m \otimes \boldsymbol{G}_j, \qquad \text{i.e.,} \quad P^{[1]}{}_m^{\;j} = \mathbb{A}_{m\,n}^{\;j\;\;l}\,\eta^n_{\;l}. \tag{5.20}$$

在（4.56）中定义的推前增量应力$\boldsymbol{\chi} = \chi_{ji}\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j$的分量满足

$$\chi_i^{\ j} = \bar{J}^{-1}\, P^{[1]}{}_i^{\ j} \tag{5.21}$$

¯其中 J 由（5.11）给出。

根据曲面散度的坐标表达式（5.10），体增量平衡（4.17）变为

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}P^{[1]}{}_i^{\ j}\right)_{,j} - P^{[1]}{}_j^{\ m}\bar{\Gamma}^j_{\ mi} = 0. \tag{5.22}$$

在空间形式下，利用 $\boldsymbol{\chi}$ 和$g = \det(g_{ij})$的分量，可得

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\chi_i^{\ j}\right)_{,j} - \chi_j^{\ m}\bar{\Gamma}^j_{\ mi} = 0. \tag{5.23}$$

边界一部分上的增量边界条件（4.18）用坐标形式表示为

$$P^{[1]}{}_i^{\ 3} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega\backslash S, \tag{5.24}$$

其空间形式对应式（4.60）为

$$\chi_i^{\ 3} = 0 \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(\partial\Omega\backslash S). \tag{5.25}$$

5.2. 曲面

现在给出曲面对象和增量边界条件（4.19）的坐标表述。利用上文引入的曲面适配坐标图 $\{\theta^i\}$，边界曲面$S \subset \partial\Omega$由面内坐标 θ^α ($\alpha = 1, 2$）和 $\theta^3 = \theta^s$参数化。相应的协变曲面基及其倒易基，是在曲面处取值的体基，

$$\boldsymbol{G}^\alpha = G^{\alpha\beta}\boldsymbol{G}_\beta, \qquad \boldsymbol{g}_\alpha = \bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{G}_\alpha, \qquad \boldsymbol{g}^\alpha = g^{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_\beta, \tag{5.26}$$

其曲面度量为

$$G_{\alpha\beta} = \boldsymbol{G}_\alpha \cdot \boldsymbol{G}_\beta, \qquad g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}_\beta, \qquad G_s = \det(G_{\alpha\beta}), \quad g_s = \det(g_{\alpha\beta}). \tag{5.27}$$

这里，$(G_{\alpha\beta})$ 表示一个 2×2 矩阵，其第 $\alpha\beta$个元素为$G^{\alpha\beta}$；$(g_{\alpha\beta})$的含义类似。此外，某些与曲面相关的量需要将基扩展至三维。在这种情况下，第三个基向量或一形式（记为$\boldsymbol{G}_3, \boldsymbol{g}_3$ 和$\boldsymbol{G}^3, \boldsymbol{g}^3,$）取自体基，并在曲面处取值，即在 $\theta^3 = \theta^s$处取值。稍微滥用一下记号，同一符号既用于表示体中的基向量和一形式，也用于表示曲面上的基向量和一形式。这不会造成歧义，因为体量仅通过在曲面处取值，才与其对应的曲面量相关联。

类比于体散度，曲面张量场$\boldsymbol{R}_s = R_s^{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}^\beta$ 的曲面散度具有如下坐标表达式

$$\mathrm{Div}_s(\boldsymbol{R}_s) = \frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}\boldsymbol{R}_s \cdot \boldsymbol{G}^\beta\right)_{,\beta} = \left(\frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}\,R_s^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + R_s^{\gamma\delta}\bar{\Gamma}^\alpha_{\ \gamma\delta}\right)\boldsymbol{g}_\alpha + R_s^{\alpha\beta}\bar{b}_{\alpha\beta}\,\bar{\boldsymbol{n}}, \tag{5.28}$$

¯其中，含有 $\Gamma^\alpha_{\ \gamma\delta}$ 的项表示协变基 $\boldsymbol{g}_\alpha$ 沿曲面的变化，而含有 $b^{\alpha\beta}$ 的项则汇集了由曲面曲率产生的法向投影。

表面变形梯度及其逆矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{F}}_s = \boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}^\alpha, \qquad \bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1} = \boldsymbol{G}_\alpha \otimes \boldsymbol{g}^\alpha. \tag{5.29}$$

表面雅可比 $\bar{J}_s = \sqrt{g_s/G_s}$ 与体雅可比之间的关系为

$$\bar{J}_s = \bar{J}\sqrt{\frac{g^{33}}{G^{33}}}, \tag{5.30}$$

这是由于前两个基向量具有切向性质。曲率张量 $\boldsymbol{b}$ 和相对曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 可按分量表示为

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{b}_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{g}^\alpha \otimes \boldsymbol{g}^\beta, \qquad \bar{b}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{g}_{\alpha,\beta}, \qquad \boldsymbol{\kappa} = \kappa_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{G}^\alpha \otimes \boldsymbol{G}^\beta. \tag{5.31}$$

因此，按照我们的符号约定，$\bar{\boldsymbol{b}} = -\kappa_{\alpha\beta}\boldsymbol{g}^\alpha\otimes\boldsymbol{g}^\beta$ 和 $\boldsymbol{\kappa} = -\bar{b}_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^\alpha\otimes\boldsymbol{G}^\beta$。

表面增量位移梯度（限制在曲面上并用当前基底表示）写作

$$\boldsymbol{\eta}_s = \boldsymbol{\eta}\big|_{\theta^3=\theta^s}\bar{\boldsymbol{i}}_s = \eta_s{}^i{}_\alpha\,\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^\alpha = \eta_s{}^\beta{}_\alpha\,\boldsymbol{g}_\beta \otimes \boldsymbol{g}^\alpha + \eta_s{}^3{}_\alpha\,\boldsymbol{g}_3 \otimes \boldsymbol{g}^\alpha. \tag{5.32}$$

现在我们转向计算 $\boldsymbol{Q}^{[1]}{}_s$ 所需的坐标表达式。具体而言，我们将用到以下恒等式

$$\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\eta}_s = \frac{\eta_s{}^3{}_\alpha}{\sqrt{g^{33}}}\,\boldsymbol{g}^\alpha, \qquad \bar{\boldsymbol{i}}_s\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s = \eta_s{}^\beta{}_\alpha\,\boldsymbol{g}_\beta\otimes\boldsymbol{G}^\alpha. \tag{5.33}$$

根据上述关系，与增量位移梯度的梯度相关的量可表示为

$$\boldsymbol{\omega}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s = \nabla_s(\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}) = \nabla_s\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_\alpha}{\sqrt{g^{33}}}\boldsymbol{g}^\alpha\Big) = \Big[\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_\alpha}{\sqrt{g^{33}}}\Big)_{,\beta} - \frac{\eta_s{}^3{}_\gamma}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\Gamma}^\gamma{}_{\alpha\beta}\Big]\boldsymbol{g}^\alpha\otimes\boldsymbol{G}^\beta + \frac{\eta_s{}^3{}_\alpha}{g^{33}}\bar{b}^\alpha_\beta\boldsymbol{g}^3\otimes\boldsymbol{G}^\beta. \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{\rho}_s = -\bar{\boldsymbol{i}}_s\boldsymbol{\omega}_s - \boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{b}} = -\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_{\alpha,\beta}}{\sqrt{g^{33}}} - \frac{\eta_s{}^3{}_\gamma}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\Gamma}^\gamma{}_{\alpha\beta} + \eta_s{}^\gamma{}_\alpha\bar{b}_{\gamma\beta}\Big)\boldsymbol{g}^\alpha\otimes\boldsymbol{g}^\beta, \tag{5.35}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s = -\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_{\alpha,\beta}}{\sqrt{g^{33}}} - \frac{\eta_s{}^3{}_\gamma}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\Gamma}^\gamma{}_{\alpha\beta} + \eta_s{}^\gamma{}_\alpha\bar{b}_{\gamma\beta}\Big)\boldsymbol{G}^\alpha\otimes\boldsymbol{G}^\beta. \tag{5.36}$$

现在，我们将重点讨论曲面应力和力矩张量$\boldsymbol{P}_s$与$\boldsymbol{M}_s$的坐标表述。为满足材料坐标架无关性的要求，方便起见，我们将表面能表示为函数

$$\Psi(\boldsymbol{F}_s,\boldsymbol{\kappa}) = \tilde{\Psi}(\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{G}_\alpha\cdot\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{G}_\beta\,,\ \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{g}_\delta\cdot\boldsymbol{g}_\gamma) = \tilde{\Psi}(g_{\alpha\beta},\kappa_{\gamma\delta}), \tag{5.37}$$

其中，$g_{\alpha\beta}$ 为变形后表面基底的度量系数，$\kappa_{\gamma\delta}$ 表示相对曲率张量的分量。因此，表面应力$\boldsymbol{P}_s$和表面力矩$\boldsymbol{M}_s$可表示为

$$\boldsymbol{P}_s = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{F}_s} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial g_{\beta\nu}}\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial\boldsymbol{F}_s} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial g_{\beta\nu}}(\boldsymbol{g}_\nu\otimes\boldsymbol{G}_\beta + \boldsymbol{g}_\beta\otimes\boldsymbol{G}_\nu) = 2\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial g_{\beta\nu}}\boldsymbol{g}_\nu\otimes\boldsymbol{G}_\beta = \underbrace{2g_{\nu\alpha}\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial g_{\beta\nu}}}_{P_{s\alpha}{}^\beta}\boldsymbol{g}^\alpha\otimes\boldsymbol{G}_\beta, \tag{5.38}$$

$$\boldsymbol{M}_s = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\kappa_{\alpha\beta}}\frac{\partial\kappa_{\alpha\beta}}{\partial\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\kappa_{\alpha\beta}}\boldsymbol{G}_\alpha\otimes\boldsymbol{G}_\beta. \tag{5.39}$$

接下来，我们计算能量的二阶导数，以求得增量应力。首先计算$\boldsymbol{M}_s$的导数；由于$\boldsymbol{M}_s$是参考张量，其计算很直接。

$$\mathbb{C}_s = \frac{\partial \boldsymbol{M}_s}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \kappa_{\alpha\beta}}\boldsymbol{G}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta\Big) = \underbrace{2g_{\nu\gamma}\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \kappa_{\alpha\beta}\partial g_{\delta\nu}}}_{\mathbb{C}_s{}^{\alpha\beta\ \delta}_{\ \ \gamma}}\boldsymbol{G}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{g}^\gamma \otimes \boldsymbol{G}_\delta, \tag{5.40}$$

$$\mathbb{D}_s = \frac{\partial \boldsymbol{M}_s}{\partial \boldsymbol{\kappa}}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \kappa_{\alpha\beta}\partial \kappa_{\gamma\delta}}\boldsymbol{G}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{G}_\gamma \otimes \boldsymbol{G}_\delta. \tag{5.41}$$

相对于 $\boldsymbol{\kappa}$ 对$\boldsymbol{P}_s$ 求导同样十分直接，因为度量系数和基向量都不依赖于 $\boldsymbol{\kappa}$，即:

$$\mathbb{B}_s = \frac{\partial \boldsymbol{P}_s}{\partial \boldsymbol{\kappa}}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})} = \underbrace{2g_{\nu\alpha}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial g_{\beta\nu}\partial \kappa_{\gamma\delta}}}_{\mathbb{B}_{s\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}}\boldsymbol{g}^\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{G}_\gamma \otimes \boldsymbol{G}_\delta. \tag{5.42}$$

相比之下，相对于$\boldsymbol{F}_s$ 对$\boldsymbol{P}_s$ 求导时，还需考虑基底变化。利用导数$\partial \boldsymbol{g}_\alpha/\partial \boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{G}_\alpha$ 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_s &= \frac{\partial \boldsymbol{P}_s}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big|_{(\bar{\boldsymbol{F}}_s,\bar{\boldsymbol{\kappa}})} = 2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}_s}\Big(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}}\boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta\Big) = 4\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}\partial g_{\gamma\delta}}\boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{g}_\gamma \otimes \boldsymbol{G}_\delta + 2\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}}\frac{\partial\left(\boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta\right)}{\partial \boldsymbol{F}_s} \\
&= 4g_{\alpha\omega}g_{\gamma\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}\partial g_{\gamma\delta}}\boldsymbol{g}^\omega \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{g}^\nu \otimes \boldsymbol{G}_\delta + 2\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}}\left(\boldsymbol{g}_\xi \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{g}^\xi + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{n}\right) \otimes \boldsymbol{G}_\alpha \\
&= \underbrace{\Big(4g_{\alpha\omega}g_{\gamma\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}\partial g_{\gamma\delta}} + 2g_{\nu\omega}\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial g_{\delta\beta}}\Big)}_{\mathbb{A}_{s\omega}{}^{\beta\ \delta}_{\ \ \nu}}\boldsymbol{g}^\omega \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{g}^\nu \otimes \boldsymbol{G}_\delta + \underbrace{2\frac{1}{g^{33}}\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}}}_{\mathbb{A}_{s3}{}^{\beta\ \alpha}_{\ 3}}\boldsymbol{g}^3 \otimes \boldsymbol{G}_\beta \otimes \boldsymbol{g}^3 \otimes \boldsymbol{G}_\alpha.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

有了这些模量，增量表面应力$\boldsymbol{P}^{[1]}{}_s$和力矩$\boldsymbol{M}^{[1]}{}_s$可写为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_s^{[1]} &= \mathbb{A}_s : \left(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right) + \mathbb{B}_s : \left(\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right) \\
&= \left(\mathbb{A}_{s\alpha}{}^{\beta\ \omega}_{\ \gamma}\eta_s{}^\gamma{}_\omega + \mathbb{B}_{s\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}\rho_{s\gamma\delta}\right)\boldsymbol{g}^\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta + 2\frac{1}{g^{33}}\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}}\eta_s{}^3{}_\alpha\boldsymbol{g}^3 \otimes \boldsymbol{G}_\beta \\
&= \Big[\mathbb{A}_{s\alpha}{}^{\beta\ \omega}_{\ \gamma}\eta_s{}^\gamma{}_\omega - \mathbb{B}_{s\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_{\gamma,\delta}}{\sqrt{g^{33}}} - \frac{\eta_s{}^3{}_\omega}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\Gamma}^\omega{}_{\gamma\delta} + \eta_s{}^\nu{}_\gamma\bar{b}_{\nu\delta}\Big)\Big]\boldsymbol{g}^\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta + 2\frac{1}{g^{33}}\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial g_{\alpha\beta}}\eta_s{}^3{}_\alpha\boldsymbol{g}^3 \otimes \boldsymbol{G}_\beta,
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_s^{[1]} &= \mathbb{C}_s : \left(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right) + \mathbb{D}_s : \left(\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\boldsymbol{\rho}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\right) \\
&= \Big(\mathbb{C}_s{}^{\alpha\beta\ \delta}_{\ \ \gamma}\eta_s{}^\gamma{}_\delta + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \kappa_{\alpha\beta}\partial \kappa_{\omega\nu}}\rho_{s\omega\nu}\Big)\boldsymbol{G}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta \\
&= \Big[\mathbb{C}_s{}^{\alpha\beta\ \delta}_{\ \ \gamma}\eta_s{}^\gamma{}_\delta - \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \kappa_{\alpha\beta}\partial \kappa_{\omega\nu}}\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_{\omega,\nu}}{\sqrt{g^{33}}} - \frac{\eta_s{}^3{}_\gamma}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\Gamma}^\gamma{}_{\omega\nu} + \eta_s{}^\delta{}_\omega\bar{b}_{\delta\nu}\Big)\Big]\boldsymbol{G}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

需要注意的是，对于各向同性表面材料，应变能密度 Ψ 可表示为由曲面右柯西–格林张量 $\boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{F}_s^T\boldsymbol{F}_s$ 和曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$构造的标量不变量的函数。完整的独立不变量集通常包括 $\boldsymbol{C}_s$的经典不变量、 $\boldsymbol{\kappa}$的曲率不变量，以及一组将二者耦合起来的混合不变量。这些不变量为构造各向同性表面能函数提供了自然框架，也能系统地刻画拉伸–曲率耦合的影响。附录A中讨论了这些不变量。还需强调的是，在本文中，我们始终将

参考坐标视为固定且独立于变形。另一种做法是采用一种表述，使参考坐标和变形坐标均随变形而变化，例如令它们始终与变形梯度张量的主方向对齐。在这种情况下，若假设材料具有各向同性，则刚度张量 $\mathbb{A}_s$, $\mathbb{B}_s$, $\mathbb{C}_s$, 和 $\mathbb{D}_s$ 的分量可显式表示为主伸长、主曲率以及变形梯度 $\boldsymbol{F}_s$ 的特征向量与曲率张量 $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ 的特征向量之间的相对取向的函数，因为通常这两个张量并不共轴。附录A还讨论了 $\boldsymbol{F}_s$ 与 $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ 的主轴对齐这一特殊情况下，以主伸长表示的表达式。

现在我们可以用曲面适配坐标表示 $\boldsymbol{Q}^{[1]}{}_s$，其中（4.55）。为方便起见，我们重述完整表达式

$$\boldsymbol{Q}_s^{[1]} = \boldsymbol{P}_s^{[1]} - \bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}_s^{[1]} - \boldsymbol{\omega}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s - \boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\bar{\boldsymbol{l}} - \bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\boldsymbol{\xi}_s\bar{\boldsymbol{l}} + \bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s\left(\boldsymbol{\eta}_s\,\bar{\boldsymbol{F}}_s\,\bar{\boldsymbol{M}}_s + \bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}_s^{[1]}\right), \tag{5.46}$$

其中，为进一步方便起见，我们引入了辅助向量

$$\bar{\boldsymbol{l}} \;=\; \mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s). \tag{5.47}$$

既然我们已经推导出（5.46）中第一项的坐标表示，现在继续计算其余各项。式（5.46）中的下两项为

$$\begin{aligned}
-\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}_s^{[1]} &= \kappa_{\xi\alpha}\Big[\mathbb{C}_s{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma}{}^{\delta}\eta_s{}^{\gamma}{}_{\delta} - \frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial\boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta}\partial\boldsymbol{\kappa}_{\omega\nu}}\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_{\omega,\nu}}{\sqrt{g^{33}}} - \frac{\eta_s{}^3{}_{\gamma}}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\Gamma}^{\gamma}{}_{\omega\nu} + \eta_s{}^{\delta}{}_{\omega}\bar{b}_{\delta\nu}\Big)\Big]\boldsymbol{g}^{\xi}\otimes\boldsymbol{G}_{\beta},\\
-\boldsymbol{\omega}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s &= -\bar{M}_s^{\beta\delta}\Big[\Big(\Big(\frac{\eta_s{}^3{}_{\alpha}}{\sqrt{g^{33}}}\Big)_{,\beta} - \frac{\eta_s{}^3{}_{\gamma}}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\Gamma}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\Big)\boldsymbol{g}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{G}_{\delta} + \frac{\eta_s{}^3{}_{\alpha}}{g^{33}}\bar{b}^{\alpha}_{\beta}\boldsymbol{g}^3\otimes\boldsymbol{G}_{\delta}\Big].
\end{aligned} \tag{5.48}$$

下面讨论式（5.46）中涉及 $\bar{\ }$l 的两项，即 $-\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\ }$n $\otimes\ \bar{\ }$F^{-1} s $\bar{\ }$l 和 $-\bar{\ }$n $\otimes\ \bar{\ }$F^{-1} s $\boldsymbol{\xi}_s\bar{\ }$l。在（5.28）中令 R$_s$ $=\bar{\ }$F$_s$ $\bar{\ }$M$_s$ $=\ \bar{\ }$M$^{\alpha\beta}$ s g$_{\alpha}$ $\otimes$G$^{\beta}$，可得

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \mathrm{Div}_s(\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s) = \Big(\frac{1}{\sqrt{G_s}}\big(\sqrt{G_s}\bar{M}_s^{\alpha\beta}\big)_{,\beta} + \bar{M}_s^{\gamma\delta}\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\delta}\Big)\boldsymbol{g}_{\alpha} + \bar{M}_s^{\alpha\beta}\bar{b}_{\alpha\beta}\,\bar{\boldsymbol{n}}. \tag{5.49}$$

代入上面得到的曲面散度，并利用 $\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\ }\boldsymbol{n} = \eta_s{}^3{}_{\omega}/\sqrt{g^{33}}\,\boldsymbol{g}^{\omega}$，即可得到坐标表示

$$-\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\bar{\boldsymbol{l}} = -\frac{\eta_s{}^3{}_{\omega}}{\sqrt{g^{33}}}\Big(\frac{1}{\sqrt{G_s}}\big(\sqrt{G_s}\bar{M}_s^{\alpha\beta}\big)_{,\beta} + \bar{M}_s^{\gamma\delta}\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\delta}\Big)\boldsymbol{g}^{\omega}\otimes\boldsymbol{G}_{\alpha}. \tag{5.50}$$

还需注意，涉及 $\bar{\boldsymbol{F}}^{-1}{}_s\bar{\ }\boldsymbol{n}$ 的最后一项会消失，因为 $\bar{\boldsymbol{F}}^{-1}{}_s$ 仅作用于曲面的切空间，因此其对法向量的作用恒为零，即 $\bar{\boldsymbol{F}}^{-1}{}_s\bar{\ }\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$。对于第二项，我们计算得

$$\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\boldsymbol{\xi}_s = \bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}(\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{\eta}_s - \boldsymbol{\eta}_s^T\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) = \eta_s{}^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{G}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{g}^{\beta} - \frac{\eta_s{}^3{}_{\omega}}{\sqrt{g^{33}}}\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\boldsymbol{g}^{\omega}\otimes\bar{\boldsymbol{n}} = \eta_s{}^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{G}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{g}^{\beta} - \frac{\eta_s{}^3{}_{\omega}}{g^{33}}g^{\alpha\omega}\boldsymbol{G}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{g}^3. \tag{5.51}$$

由此可得

$$-\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\boldsymbol{\xi}_s\bar{\boldsymbol{l}} = -\frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\Big[\eta_s{}^{\alpha}{}_{\beta}\Big(\frac{1}{\sqrt{G_s}}\big(\sqrt{G_s}\bar{M}_s^{\beta\omega}\big)_{,\omega} + \bar{M}_s^{\gamma\delta}\bar{\Gamma}^{\beta}{}_{\gamma\delta}\Big) - \frac{\eta_s{}^3{}_{\omega}}{\sqrt{g^{33}}}g^{\alpha\omega}\bar{M}_s^{\gamma\beta}\bar{b}_{\gamma\beta}\Big]\boldsymbol{g}^3\otimes\boldsymbol{G}_{\alpha}. \tag{5.52}$$

对于式（5.46）中的最后一项，我们对 $\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\ }\boldsymbol{M}_s + \bar{\ }\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{M}^{[1]}$ 应用式（5.28），并以相同方式逐项展开。由于

$$\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s = \eta_s{}^{i}{}_{\alpha}\bar{M}_s^{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{G}_{\beta}, \qquad \bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}^{[1]} = \bar{M}^{[1]\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{G}_{\beta}, \tag{5.53}$$

这两项的曲面散度为

$$\mathrm{Div}_s\left(\boldsymbol{\eta}_s\bar{\boldsymbol{F}}_s\bar{\boldsymbol{M}}_s\right)=\frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}\eta_s{}^i{}_\alpha\bar{M}_s^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}\boldsymbol{g}_i+\eta_s{}^i{}_\omega\bar{M}_s^{\omega\beta}\bar{\Gamma}^\alpha_{i\beta}\boldsymbol{g}_\alpha+\eta_s{}^i{}_\omega\bar{M}_s^{\omega\beta}\delta_i^\omega\bar{b}_{\omega\beta}\bar{\boldsymbol{n}}, \tag{5.54}$$

$$\mathrm{Div}_s\left(\bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}_s^{[1]}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}M_s^{[1]\alpha\beta}\right)_{,\beta}+M_s^{[1]\gamma\delta}\bar{\Gamma}^\alpha_{\gamma\delta}\right)\boldsymbol{g}_\alpha+M_s^{[1]\alpha\beta}\bar{b}_{\alpha\beta}\,\bar{\boldsymbol{n}}. \tag{5.55}$$

因此，最后一项为

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\bar{\boldsymbol{F}}_s^{-1}\,\mathrm{Div}_s\left(\boldsymbol{\eta}_s\,\bar{\boldsymbol{F}}_s\,\bar{\boldsymbol{M}}_s+\bar{\boldsymbol{F}}_s\boldsymbol{M}_s^{[1]}\right)=&\frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\left(\frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}\eta_s{}^\alpha{}_\omega\bar{M}_s^{\omega\beta}\right)_{,\beta}+\eta_s{}^i{}_\omega\bar{M}_s^{\omega\beta}\bar{\Gamma}^\alpha_{i\beta}\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}M_s^{[1]\alpha\beta}\right)_{,\beta}+M_s^{[1]\gamma\delta}\bar{\Gamma}^\alpha_{\gamma\delta}\right)\boldsymbol{g}^3\otimes\boldsymbol{G}_\alpha.\end{aligned} \tag{5.56}$$

因此，将公式（5.44）、（5.48）、（5.50）、（5.52）和（5.56）相加，即可得到式（$\boldsymbol{Q}^{[1]}{}_s$ 4.55）中给出的完整增量应力坐标表述。

因此，增量边界条件（4.19）可用坐标形式表示为

$$\frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}Q_s^{[1]}{}_\alpha^\beta\right)_{,\beta}-Q_s^{[1]}{}_i^\beta\bar{\Gamma}^i_{\beta\alpha}-\frac{1}{\sqrt{G^{33}}}P^{[1]}{}_\alpha^3=0\qquad\text{在}S\text{上,} \tag{5.57}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G_s}}\left(\sqrt{G_s}Q_s^{[1]}{}_3^\beta\right)_{,\beta}+\frac{1}{\sqrt{g^{33}}}Q_s^{[1]}{}_\beta^\alpha\bar{b}^\beta_\alpha-\frac{1}{\sqrt{G^{33}}}P^{[1]}{}_3^3=0\qquad\text{on }S. \tag{5.58}$$

其中，体增量应力 $\boldsymbol{P}^{[1]}$ 的坐标取自公式（5.20）。

已知增量应力张量 $\boldsymbol{Q}^{[1]}{}_s=Q^{[1]}{}_s{}^\alpha{}_i\,\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{G}_\alpha$，实际增量表面应力张量的分量$\boldsymbol{\chi}_s=\chi_s{}^\alpha{}_i\,\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_\alpha$ 可由变换（4.56）得出：

$$\chi_s{}_i^\alpha=\bar{J}_s^{-1}Q_s^{[1]}{}_i^\alpha \tag{5.59}$$

其中 $\bar{J}_s=\sqrt{g_s/G_s}$。因此，用实际增量应力（4.61）表示的增量边界条件为

$$\frac{1}{\sqrt{g_s}}\left(\sqrt{g_s}\chi_s{}_\alpha^\beta\right)_{,\beta}-\chi_s{}_i^\beta\bar{\Gamma}^i_{\beta\alpha}-\frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\chi_\alpha^3=0\qquad\text{在 }\boldsymbol{\phi}_e(S)\text{ 上,} \tag{5.60}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g_s}}\left(\sqrt{g_s}\chi_s{}_3^\beta\right)_{,\beta}+\frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\chi_s{}_\beta^\alpha\bar{b}^\beta_\alpha-\frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\chi_3^3=0\qquad\text{on }\boldsymbol{\phi}_e(S). \tag{5.61}$$

现在我们将重点关注 ∂S 上其余的增量边界条件（4.20）和（4.21）。边界曲线单位法向量表示为

$$\boldsymbol{V}=V_\alpha\boldsymbol{G}^\alpha, \tag{5.62}$$

其中，其分量通过 $V_\alpha=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{G}_\alpha$ 获得。因此，边界条件（4.21）为

$$M_s^{[1]\alpha\beta}V_\alpha V_\beta=0\qquad\text{on }\partial S. \tag{5.63}$$

为了用坐标表示边界条件 (4.20)，引入边界曲线 ∂S 上的单位切向量 $\mathrm{T}=\mathrm{T}^\alpha\mathrm{G}_\alpha=\mathrm{T}_\alpha\mathrm{G}^\alpha$ 是有用的。随后，∂S 的切空间上的投影算子为 $\mathrm{I}_\parallel=\mathrm{T}\otimes\mathrm{T}$。设 s 为曲线 ∂S 的弧长变量。于是，对于定义在 ∂S 上且满足 $\mathrm{R}_\parallel\mathrm{I}_\parallel=\mathrm{R}_\parallel$ 的张量场，其在边界曲线上的散度 (2.25) 可写为

$$\mathrm{Div}_\parallel\boldsymbol{R}_\parallel=(\boldsymbol{R}_\parallel\cdot\boldsymbol{T})_{,s}. \tag{5.64}$$

注意到，该公式也可以由曲面散度公式（5.28）得到，因为 ，并使用 s ，从而 $\boldsymbol{G}^1 = \boldsymbol{T}$。取 $\boldsymbol{R}_{\|} = \bar{\boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{M}^{[1]}{}_s \boldsymbol{V} + \boldsymbol{n}^{[1]} \otimes \bar{\boldsymbol{M}}_s \boldsymbol{V}$ ，可得

$$\boldsymbol{R}_{\|} \cdot \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{M}_s^{[1]} \boldsymbol{V}) \bar{\boldsymbol{n}} - (\boldsymbol{T} \cdot \bar{\boldsymbol{M}}_s \boldsymbol{V}) \boldsymbol{\eta}_s^T \boldsymbol{n}, \tag{5.65}$$

以及方程（4.20）得出

$$Q_s^{[1]}{}_i{}^{\alpha} V_\alpha \boldsymbol{g}^i + \left(\frac{M_s^{[1]\alpha\beta} T_\alpha V_\beta}{\sqrt{g^{33}}} \boldsymbol{g}^3 - \eta_s{}^3{}_\gamma \frac{\bar{M}_s^{\alpha\beta} T_\alpha V_\beta}{\sqrt{g^{33}}} \boldsymbol{g}^\gamma \right)_{,s} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on } \partial S. \tag{5.66}$$

沿 ∂S 的弧长导数可进一步改写为关于表面坐标导数的形式 $\theta^\alpha = \theta^\alpha(s)$ ，利用方向导数关系 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial}{}_s = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^\alpha} T^\alpha$。因此，方程（5.66）可分解为面内部分和面外部分，如下所示

$$Q_s^{[1]}{}_\alpha{}^\beta V_\beta - \frac{M_s^{[1]\beta\gamma} T_\beta V_\gamma}{\sqrt{g^{33}}} \bar{\Gamma}^3_{\alpha\delta} T^\delta - \left(\eta_s{}^3{}_\alpha \frac{\bar{M}_s^{\beta\gamma} T_\beta V_\gamma}{\sqrt{g^{33}}} \right)_{,\nu} T^\nu + \eta_s{}^3{}_\delta \frac{\bar{M}_s^{\beta\gamma} T_\beta V_\gamma}{\sqrt{g^{33}}} \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\nu} T^\nu = 0 \qquad \text{在 } \partial S \text{ 上}, \tag{5.67}$$

$$Q_s^{[1]}{}_3{}^\alpha V_\alpha + \left(\frac{M_s^{[1]\alpha\beta} T_\alpha V_\beta}{\sqrt{g^{33}}} \right)_{,\gamma} T^\gamma - \eta_s{}^3{}_\gamma \frac{\bar{M}_s^{\alpha\beta} T_\alpha V_\beta}{g^{33}} \bar{b}_\nu^\gamma T^\nu = 0 \qquad \text{on } \partial S. \tag{5.68}$$

为完整起见，我们也给出实际边界条件（4.62）和（4.63）的坐标表述。不过，由于推导过程类似，我们仅列出最终结果。方程（4.62）再次分解为面内和面外分量，写作

$$\chi_s^{[1]}{}_\alpha{}^\beta \bar{v}_\beta - \frac{\tau_s^{[1]\beta\gamma} \bar{t}_\beta \bar{v}_\gamma}{\sqrt{g^{33}}} \bar{\Gamma}^3_{\alpha\delta} \bar{t}^\delta - \left(\eta_s{}^3{}_\alpha \frac{\bar{\tau}_s^{\beta\gamma} \bar{t}_\beta \bar{v}_\gamma}{\sqrt{g^{33}}} \right)_{,\nu} \bar{t}^\nu + \eta_s{}^3{}_\delta \frac{\bar{\tau}_s^{\beta\gamma} \bar{t}_\beta \bar{v}_\gamma}{\sqrt{g^{33}}} \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\nu} \bar{t}^\nu = 0 \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(\partial S), \tag{5.69}$$

$$\chi_s^{[1]}{}_3{}^\alpha \bar{v}_\alpha + \left(\frac{\tau_s^{[1]\alpha\beta} \bar{t}_\alpha \bar{v}_\beta}{\sqrt{g^{33}}} \right)_{,\gamma} \bar{t}^\gamma - \eta_s{}^3{}_\gamma \frac{\bar{\tau}_s^{\alpha\beta} \bar{t}_\alpha \bar{v}_\beta}{g^{33}} \bar{b}_\nu^\gamma \bar{t}^\nu = 0 \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(\partial S), \tag{5.70}$$

其中，我们将边界曲线的实际单位法向量和切向量用坐标表示为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{v}_\alpha \boldsymbol{g}^\alpha, \qquad \bar{\boldsymbol{t}} = \bar{t}_\alpha \boldsymbol{g}^\alpha = \bar{t}^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha. \tag{5.71}$$

（4.62）的坐标形式可直接写为

$$\tau_s^{[1]\alpha\beta} \bar{v}_\alpha \bar{v}_\beta = 0 \qquad \text{on } \boldsymbol{\phi}_e(\partial S). \tag{5.72}$$

6. 弹性毛细珠化在软圆柱中的应用

近年来，毛细作用诱发的软圆柱串珠化引起了广泛关注，原因在于理论预测与实验观测之间长期存在差异。假设表面张力恒定（类似液体）的线性分岔分析预测，失稳发生在零波数处（Bakiler 等人，2023年，Ciarletta 与 Amar，2012，Fu 等人，2021，2016，Lestringant 与 Audoly，2020，Taffetani 与 Ciarletta，2015，Xuan 与 Biggins，2017），对应于局部颈缩和串珠化。然而，这一预测与实验观测并不直接吻合，因为实验通常呈现周期性珠化图案。人们认为，这种差异源于固体中的表面张力并非常数，而是随表面伸长和表面曲率变化（Magni 与 Riccobelli，2025，Taffetani & Hennessy，2024）；其根源在于固体与液体在分子层面的内在差异。本节将运用第 4 节推导的一般增量理论，重新考察软圆柱中的周期性珠化。我们表明，考虑表面拉伸和弯曲后，可能出现有限波数分岔。作为附带结果，我们还重新得到 Taffetani & Hennessy (2024) 的结果，从而验证了我们的增量理论，并凸显其有效性。

6.1. 均匀变形

考虑一根由弹性材料构成的无限长软圆柱，其表面覆有弹性表面；该表面采用经典表面张力模型描述，并增添拉伸阻力或弯曲阻力。圆柱沿轴向均匀拉伸，随后在其外表面施加表面应力。由于假设圆柱无限长，且表面载荷沿轴向均匀，因此几何形状和数据在轴向坐标 z 上具有平移不变性。因此，该问题没有实际端部，无须在轴向端点处规定边界条件。通过无界区域上的可容许性条件保证适定性，即要求所有场在 $|z| \to \infty$ 时保持有界且具有有限能量。实际上，采用谐波试探函数 e^{ikz} 即可满足这一要求。唯一需要施加的边界条件位于侧表面，即牵引力与表面应力相平衡。上述条件共同完全确定了解，无须额外的轴向边界条件。

对于圆柱几何，采用柱坐标 $\theta^1 = \Theta, \theta^2 = Z$ 和 $\theta^3 = R$ 是很自然的，其中 Θ、Z 和 R 分别表示角坐标、纵向坐标和径向坐标。于是，参考位置矢量可以用正交归一柱坐标基 $(\boldsymbol{e}_\theta(\Theta), \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_r(\Theta))$ 表示为

$$\boldsymbol{X} = Z\boldsymbol{e}_z + R\boldsymbol{e}_r. \tag{6.1}$$

注意到 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta/\mathrm{d}\Theta = -\boldsymbol{e}_r$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r/\mathrm{d}\Theta = \boldsymbol{e}_\Theta$，参考构形中的协变和逆变基矢可表示为

$$\boldsymbol{G}_1 = R\boldsymbol{e}_\theta = R^2\boldsymbol{G}^1, \qquad \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{G}^2, \qquad \boldsymbol{G}_3 = \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{G}^3. \tag{6.2}$$

因此，度量系数的行列式为$G = R^2$。

假设圆柱发生均匀变形，则该变形完全由轴向伸长 λ 和方位伸长 a表征。因此，变形后的位置矢量为

$$\boldsymbol{x} = z\boldsymbol{e}_z + r\boldsymbol{e}_r \tag{6.3}$$

变形后的柱坐标为

$$z = \lambda Z, \qquad r = aR. \tag{6.4}$$

由此得到变形构形中的协变基向量和逆变基矢：

$$\boldsymbol{g}_1 = r\boldsymbol{e}_\theta = r^2\boldsymbol{g}^1, \qquad \boldsymbol{g}_2 = \lambda\boldsymbol{e}_z = \lambda^2\boldsymbol{g}^2, \qquad \boldsymbol{g}_3 = a\boldsymbol{e}_r = a^2\boldsymbol{g}^3. \tag{6.5}$$

相应的非零度量系数和度量行列式为：

$$g_{11} = a^2R^2, \qquad g_{22} = \lambda^2, \qquad g_{33} = a^2, \qquad g = a^4\lambda^2R^2. \tag{6.6}$$

于是，非零的克里斯托费尔符号为：

$$\bar{\Gamma}^1_{31} = \bar{\Gamma}^1_{13} = 1/R, \qquad \bar{\Gamma}^3_{11} = -R.$$

由于采用了适配坐标，只需在$R = A$处对体位置求值，即可得到曲面上的点，即：

$$\boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{X}|_{R=A} = Z\boldsymbol{e}_z + A\boldsymbol{e}_r. \tag{6.7}$$

因此，曲面基矢、逆变基向量、度量系数和克里斯托费尔符号都可直接由在$R = A$处求值的体量得到。因此，

$$\boldsymbol{G}_1 = A\boldsymbol{e}_\theta = A^2\boldsymbol{G}^1, \qquad \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{G}^2, \tag{6.8}$$

以及$G_s =$ 行列式$(G_{\alpha\beta}) = A$。相同的步骤也适用于变形构形中的相应量，因此

$$\boldsymbol{g}_1 = aA\boldsymbol{e}_\theta = a^2A^2\boldsymbol{g}^1, \qquad \boldsymbol{g}_2 = \lambda\boldsymbol{e}_z = \lambda^2\boldsymbol{g}^2, \tag{6.9}$$

非零的协变度量系数和度量行列式为

$$g_{11} = a^2A^2, \qquad g_{22} = \lambda^2, \qquad g^{11} = 1/(a^2A^2), \qquad g^{22} = 1/\lambda^2, \qquad g_s = \det(g_{\alpha\beta}) = a^2A^2\lambda^2. \tag{6.10}$$

注意，所有度量分量均为常数，因此其坐标导数为零。参考构形与变形后的法向量重合，且可表示为

$$\boldsymbol{N} = \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{e}_r. \tag{6.11}$$

曲面的非零克里斯托费尔符号为

$$\bar{\Gamma}^1_{31} = \bar{\Gamma}^1_{13} = 1/A, \qquad \bar{\Gamma}^3_{11} = -A. \tag{6.12}$$

鉴于关系式（6.2）和（6.5），使用正交归一基$(\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{e}_r)$而非曲线坐标基，既足够又更为方便。这样可以更清楚地体现特定分量的物理意义，并且由于正交归一基中的协变指标与逆变指标相同，无需再加以区分。按照这一约定，均匀变形的体变形梯度和表面变形梯度可写为

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}^i = a\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \lambda\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z + a\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r, \tag{6.13}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}_s = \boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}^\alpha = a\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \lambda\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z. \tag{6.14}$$

变形后表面的曲率和相对曲率为

$$\bar{\boldsymbol{b}} = -\bar{\nabla}_s\bar{\boldsymbol{n}} = -\frac{\partial\bar{\boldsymbol{n}}}{\partial\Theta} \otimes \boldsymbol{g}^1 = -\frac{1}{aA}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta, \tag{6.15}$$

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = -\bar{\boldsymbol{F}}_s^T\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{F}}_s = \frac{a}{A}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta. \tag{6.16}$$

变形后曲面的切空间上的投影为

$$\bar{\boldsymbol{i}}_s = \boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{n}} \otimes \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z. \tag{6.17}$$

为保持变形的一般性，我们假设体固体由可压缩新胡克超弹性材料构成，其应变能函数为（Bakiler等，2023年，Yu & Fu，2025）

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3 - 2\ln J) + \frac{D}{2}\Big(\frac{J^2-1}{2} - \ln J\Big), \tag{6.18}$$

其中，μ 和 D 是 Lam´e 参数，$I_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) = G^{ij}g_{ij}$ 是右柯西-格林张量$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ 的第一不变量，而 $J = \det(\boldsymbol{F}) = \sqrt{g/G}$ 是雅可比行列式。衡量可压缩性的泊松比 ν 由 $\nu = D/(2(D+\mu))$给出。令模量参数 $D \to \infty$，即可恢复不可压缩变形。

对于均匀变形（6.4），由本构关系（5.16）可得第一类 Piola-Kirchhoff应力：

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{P}} = &\Big[\mu\Big(a-\frac{1}{a}\Big)+\frac{D}{2}\Big(a^3\lambda^2-\frac{1}{a}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta+\Big[\mu\Big(\lambda-\frac{1}{\lambda}\Big)+\frac{D}{2}\Big(a^4\lambda-\frac{1}{\lambda}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z\\&+\Big[\mu\Big(a-\frac{1}{a}\Big)+\frac{D}{2}\Big(a^3\lambda^2-\frac{1}{a}\Big)\Big]\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_r.\end{aligned}\tag{6.19}$$

对于该曲面，我们考虑两类本构模型，分别描述表面拉伸和弯曲阻力。相应的表面能函数形式为

$$\Psi=\gamma J_s+\frac{\alpha_s}{2}(J_s-1)^2\qquad\text{(stretching resistance)},\tag{6.20}$$

$$\Psi=\gamma J_s+\frac{\beta_s}{2}(H-H_0)^2J_s\qquad\text{(bending resistance)},\tag{6.21}$$

其中，$J_s=\sqrt{g_s/G_s}$ 是曲面雅可比行列式，γ 表示表面张力参数，α_s 而 β_s 分别表示表面拉伸刚度和弯曲刚度，$H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{b})$ 是当前曲面的平均曲率，H_0是自发曲率。乘以J_s 可确保表面能以参考面积为基准进行度量。第一个表面能函数（6.20）与曲率无关，因此可以采用我们先前工作（Yu & Fu，2025）中建立的框架进行分析。因此，我们将主要关注第二个表面能模型（6.21），又称 Helfrich 能量（Helfrich，1973），同时也会给出第一个模型的结果以求完整。

将表面能（6.21直接表示为度量张量和相对曲率分量的函数，可得

$$\Psi=\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{G}}\Big[\gamma+\frac{\beta_s}{2}\Big(-\frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}-H_0\Big)^2\Big].\tag{6.22}$$

将（6.22）代入方程（5.38）和（5.39），可得中间构形中的表面应力和力矩

$$\bar{\boldsymbol{P}}_s=\Big[\gamma\lambda+\frac{\beta_s\lambda}{8a^2A^2}(4a^2A^2H_0^2-4aAH_0-3)\Big]\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta+\Big[\gamma a+\frac{\beta_s}{8aA^2}(2aAH_0+1)^2\Big]\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z,\tag{6.23}$$

$$\bar{\boldsymbol{M}}_s=\frac{\beta_s\lambda}{4a^2A}(2aAH_0+1)\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\beta_s}{4\lambda A}(2aAH_0+1)\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z.\tag{6.24}$$

坐标形式的边界条件（3.25）可类似地仅由非平凡方程（5.58）得到，其表达式为

$$\bar{P}_{33}=-\frac{1}{A}\Big(\bar{P}_{s11}+\frac{\bar{M}_{s11}}{A}\Big),\tag{6.25}$$

其中，各分量是相对于有序正交归一基 $(\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{e}_r)$。将（6.19）、（6.23）和（6.24）代入（6.25），可得伸长量 a和 λ之间的关系：

$$8\mu a(a^2-1)A^3+4Da(a^4\lambda^2-1)A^3+8\gamma\lambda a^2A^2+\beta_s\lambda(4a^2A^2H_0^2-1)=0.\tag{6.26}$$

根据隐函数定理，该方程将$a=a(\lambda)$ 定义为 λ 的函数。显然，在不可压缩极限$D\to\infty$下，该函数简化为$a=\lambda^{-1/2}$。最后，合轴向力计算如下

$$F_z=\pi A^2\bar{P}_{22}+2\pi A\bar{P}_{s22}=\pi A^2\Big(\mu\frac{\lambda^2-1}{\lambda}+\frac{D}{2}\frac{a^4\lambda^2-1}{\lambda}+\frac{2\gamma a}{A}+\frac{\beta_s}{4aA^3}(2aAH_0+1)^2\Big).\tag{6.27}$$

6.2. 线性分岔分析

在确定了中间构形中的所有必要量后，我们现在转而考察增量方程，并分析分岔的发生。

按照第4节中的方法，我们考虑如下形式的轴对称扰动

$$\boldsymbol{u} = v(z,r)\boldsymbol{e}_z + u(z,r)\boldsymbol{e}_r, \tag{6.28}$$

其中，函数v(z、r)和u(z、r)分别表示纵向和径向的位移。于是，增量位移梯度为

$$\boldsymbol{\eta} = \bar{\nabla}_s \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \theta^i} \otimes \boldsymbol{g}^i = \frac{u}{r}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z + \frac{\partial v}{\partial r}\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_r + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_z + \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r, \tag{6.29}$$

其中，导数 $\partial/\partial\theta^i$ 利用链式法则和关系式（6.4）计算。

为获得体增量应力的各分量，我们首先将特定能量形式（6.18）代入方程（5.19），以求得各个刚度系数。这些系数随后代入方程（5.20）和（5.21），从而得到在（$\boldsymbol{\chi}$ 中定义的增量实际应力张量4.56的各分量。或者，由于体材料是各向同性的，也可以通过将用主伸长表示的瞬时模量与增量位移梯度的各分量进行缩并来计算这些分量（Ogden，1984）。在正交归一基中，实际应力张量 $\boldsymbol{\chi}$ 的非零分量记为χ_{ij}，其表达式为

$$\begin{aligned}
\chi_{11} &= \frac{2\mu(a^2+1)+D(a^4\lambda^2+1)}{2a^2\lambda}\frac{u}{r} + Da^2\lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\Big),\\
\chi_{22} &= \frac{2\mu(\lambda^2+1)+D(a^4\lambda^2+1)}{2a^2\lambda}\frac{\partial v}{\partial z} + Da^2\lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\Big),\\
\chi_{33} &= \frac{2\mu(a^2+1)+D(a^4\lambda^2+1)}{2a^2\lambda}\frac{\partial u}{\partial r} + Da^2\lambda\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{r}\Big),\\
\chi_{23} &= \frac{2\mu+D(1-a^4\lambda^2)}{2a^2\lambda}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial r},\\
\chi_{32} &= \frac{2\mu+D(1-a^4\lambda^2)}{2a^2\lambda}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\mu\lambda}{a^2}\frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

将增量平衡方程（5.23）专门写成柱坐标形式，可得

$$\frac{\partial \chi_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \chi_{23}}{\partial r} + \frac{\chi_{23}}{r} = 0, \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial \chi_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \chi_{33}}{\partial r} + \frac{\chi_{33}-\chi_{11}}{r} = 0. \tag{6.32}$$

然后将增量体应力的表达式（6.30）代入平衡方程（6.31）和（6.32），得到关于未知位移场 v(z、r)和 u(z、r)的一组微分方程：

$$\begin{aligned}
&\Big(2\mu(1+\lambda^2)+D(a^4\lambda^2+1)\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\mu a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \Big(2\mu+D(a^4\lambda^2+1)\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial r}\\
&+ \frac{2\mu a^2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\mu+D(a^4\lambda^2+1)}{r}\frac{\partial u}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$2\mu\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Big(2\mu+D(a^4\lambda^2+1)\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial r} + \Big(2\mu(a^2+1)+D(a^4\lambda^2+1)\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\Big) = 0. \tag{6.34}$$

接下来，我们分析表面变形。增量表面位移梯度由其体相对应量得到，表示为

$$\boldsymbol{\eta}_s = \boldsymbol{\eta}|_{r=aA}\bar{\boldsymbol{i}}_s = \frac{u}{aA}\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_z, \tag{6.35}$$

其中，位移函数u 和v 在$r = aA$处取值。因此，用于计算相关运动学量一阶扰动的（4.50）中定义的中间量为

$$\boldsymbol{\omega}_s = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, \tag{6.36}$$

$$\boldsymbol{\xi}_s = \frac{u}{aA}\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z - \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_r, \tag{6.37}$$

$$\boldsymbol{\rho}_s = \frac{u}{a^2A^2}\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z. \tag{6.38}$$

为推导增量表面应力张量的分量，我们可以先将表面能的具体形式（6.22）代入一般关系式（5.44）、（5.48）、（5.50）、（5.52）和（5.56）。然后，可通过方程（5.59）求出（4.56）中定义的增量实际表面应力$\boldsymbol{\chi}_s$的分量。这种方法直接明了，但计算过程较为冗长。更高效的方法是注意到，即使在轴对称变形下，表面变形张量$\mathbf{C}_s = \mathbf{F}_s^T\mathbf{F}$的主方向与相对曲率$\boldsymbol{\kappa}$的主方向仍然对齐，因为二者都与$\mathbf{e}_\theta$和$\mathbf{e}_z$轴重合。因此，表面能（6.21）可视为主表面伸长$\lambda_1^s$、$\lambda_2^s$和主相对曲率$\kappa_1$、$\kappa_2$的函数，其形式为

$$\Psi = \Psi^{\mathrm{p}}(\lambda_1^s,\lambda_2^s,\kappa_1,\kappa_2) = \lambda_1^s\lambda_2^s\Big[\gamma + \frac{\beta_s}{2}\Big(\frac{\kappa_1}{2(\lambda_1^s)^2} + \frac{\kappa_2}{2(\lambda_2^s)^2} + H_0\Big)^2\Big]. \tag{6.39}$$

附录A中给出的表面模量简洁表达式（参见（A.13））可用于计算表面应力和力矩度量$\boldsymbol{\sigma}_s$以及$\boldsymbol{m}_s$。将这些表达式与（6.36）–（6.38）代入（4.67），可得到正交归一基中(χ_{sij})增量实际表面应力张量$\boldsymbol{\chi}_s$的分量如下：

$$\begin{aligned}
\chi_{s11} &= \Big(\gamma + \frac{\beta_s}{8a^2A^2}(4H_0^2a^2A^2-1)\Big)\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\beta_s}{4a^3A^3}u - \frac{\beta_s H_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\
\chi_{s22} &= \Big(\frac{\gamma}{aA} + \frac{\beta_s}{8a^3A^3}(4H_0^2a^2A^2-1)\Big)u,\\
\chi_{s32} &= \Big(\gamma + \frac{\beta_s}{8a^2A^2}(4H_0^2a^2A^2+4H_0aA-1)\Big)\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\beta_s}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

曲面上的边界条件由（5.60）和（5.61）得到，其形式为

$$\frac{\partial\chi_{s22}}{\partial z} = \chi_{23} \qquad \text{at } r = aA, \tag{6.41}$$

$$\frac{\partial\chi_{s32}}{\partial z} - \frac{\chi_{s11}}{aA} = \chi_{33} \qquad \text{at } r = aA. \tag{6.42}$$

将增量体应力和表面应力的表达式（6.30）和（6.40）代入（6.41）和（6.42），可得到在$r = aA$处关于未知位移$u(z、r)$和$v(z、r)$的两个边界条件：

$$\frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial r} + \Big(\frac{2\mu + D(1-a^4\lambda^2)}{2a^2\lambda} - \frac{\gamma}{aA} + \frac{\beta_s}{8a^3A^3}(1-4H_0^2a^2A^2)\Big)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{at } r = aA, \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_s}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \Big(\gamma + \frac{\beta_s}{8a^2A^2}(4H_0^2a^2A^2+8H_0aA-1)\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Big(\frac{D\lambda a}{A} + \frac{\beta_s}{4a^4A^4}\Big)u\\
&+ \frac{2\mu(a^2+1) + D(a^4\lambda^2+1)}{2a^2\lambda}\frac{\partial u}{\partial r} + \Big(Da^2\lambda + \frac{\gamma}{aA} + \frac{\beta_s}{8a^3A^3}(4H_0^2a^2A^2-1)\Big)\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad \text{at } r = aA.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

偏微分方程（6.33）和（6.34），连同边界条件（6.43）和（6.44），构成线性分岔分析的控制方程。

为确定分岔的临界波数，我们寻找如下形式的正规模态解

$$u(r,z) = f(r)e^{\mathrm{i}kz}, \quad v(r,z) = g(r)e^{\mathrm{i}kz}, \tag{6.45}$$

其中 k 为轴向波数。将此解代入增量平衡方程（6.33）、（6.34）以及边界条件（6.43）、（6.44），然后用 $f(r)$表示 $g(r)$，可得关于 $f(r)$ 的线性边值问题：

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2 q_1^2\right)\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2 q_2^2\right)\right) f(r) = 0, \tag{6.46}$$

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + l_1(r)f(r) = 0 \qquad \text{at } r = aA, \tag{6.47}$$

$$f'''(r) + \frac{2}{r}f''(r) + l_2(r)f'(r) + l_3(r)f(r) = 0 \qquad \text{at } r = aA, \tag{6.48}$$

其中

$$q_1 = \frac{\lambda}{a}, \quad q_2 = \frac{2\mu(1+\lambda^2) + D(a^4\lambda^2 + 1)}{2\mu(1+a^2) + D(a^4\lambda^2 + 1)}, \tag{6.49}$$

函数 $l_1, l_2,$ 和 l_3 可求得，但篇幅过长，无法在此列出。

可以看出，式（6.46）在 $r = 0$ 处有界时，其通解为

$$f(r) = c_1 I_1(kq_1 r) + c_2 I_1(kq_2 r), \tag{6.50}$$

其中 $I_1(x)$ 表示第一类修正贝塞尔函数，c_1 和 c_2 为任意常数。施加边界条件（6.47）和（6.48），可得一个关于未知量c_1 和 c_2的齐次线性方程组。只有当系数矩阵的行列式为零时，才存在非平凡解，由此得到色散方程

$$\Omega(k, a, \lambda) = 0. \tag{6.51}$$

Ω 的完整表达式 Ω 虽然相当冗长，但使用符号计算软件*Mathematica*即可轻松求得。作为一致性检查，我们验证了在长波极限 $k \to 0$下，方程（6.51）化为极限点失稳判据 $\mathrm{d}F_z/\mathrm{d}\lambda = 0$。正如Yu & Fu（2022）所证明的，这种关联是意料之中的。利用（a 6.51）中的方位伸长6.51）并结合（6.26将其消去后，可得到k 与 λ 之间的关系，从而确定分岔的色散关系。表面能（6.20）的色散关系（该表面能考虑了表面拉伸效果）可通过类似分析推导得出；篇幅所限，此处省略细节。

作为数值示例，我们采用参数值 $A = 1$ 和 $\mu = 1$，这相当于将所有长度变量按 A 缩放，并将应力变量按 μ缩放。当不存在表面应变依赖性时（即 $\alpha_s = \beta_s = 0$），分岔发生在波数为零处。然而，通过探索 γ、α_s、β_s、H_0, 和体泊松比的参数空间，我们发现，适当选择这些参数时，会出现波数非零的分岔模态。对于分别刻画表面拉伸和弯曲效应的表面能模型，相应的分岔曲线如图 2 所示。结果表明，表面拉伸和弯曲阻力均可诱发波数非零的分岔模态。因此，还需开展更多定量实验，以阐明先前研究中观察到的周期性珠化背后的波数选择机制。

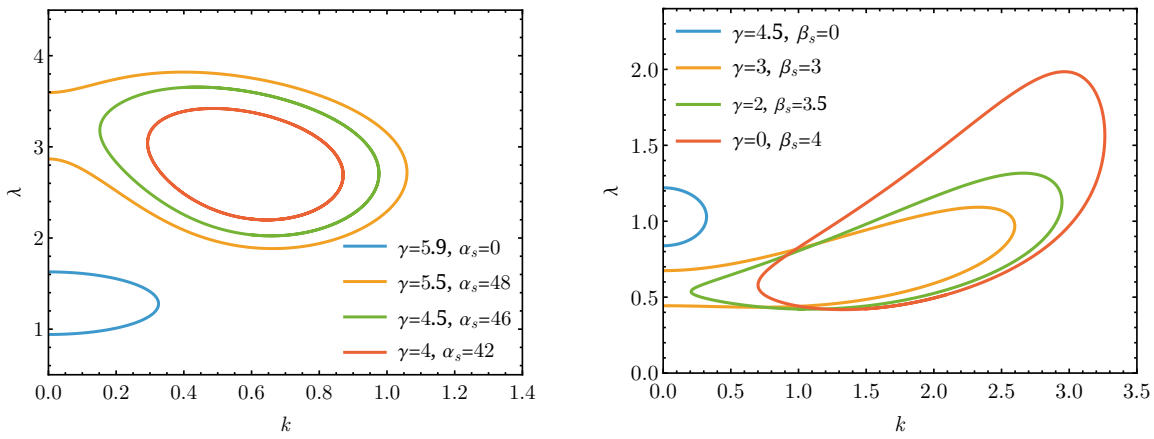

图2：（a）分岔曲线 λ 与k 在不同取值下的关系，（γ，α_s），对应于具有拉伸阻力的表面能（6.20）。圆柱是可压缩的，泊松比为 $\nu = 0。49$。（b）分岔曲线 λ 与k 在不同取值下的关系，（γ，β_s），对应于具有弯曲阻力的表面能（6.21）。圆柱是可压缩的，泊松比为 $\nu = 0。4$，自发曲率为$H_0 = -2。$

6.3. 不可压缩极限 $D \to \infty$

在不可压缩极限 $D \to \infty$下，前一小节推导的表达式大为简化。求解式（6.26）得到 D，随后取极限$a \to \lambda^{-1/2}$，即可得到相应的不可压缩量。在此极限下，一般色散方程（6.51）简化为

$$
\begin{aligned}
&-16\sqrt{\lambda}\left(\lambda^3 - 1 + 2k\lambda\frac{I_0(k\lambda)}{I_1(k\lambda)}\right) + 8k(\lambda^3+1)^2\frac{I_0(k\lambda^{-1/2})}{I_1(k\lambda^{-1/2})} + 8\gamma\lambda(\lambda^3-1)(k^2-\lambda) \\
&+\beta_s\lambda(\lambda^3-1)(4H_0^2(k^2-\lambda) + 8H_0k^2\sqrt{\lambda} + 2k^4 + 3\lambda^2 - k^2\lambda) = 0,
\end{aligned}
\tag{6.52}
$$

其中我们设定$A = 1$ 和$\mu = 1$ 以简化表达式。可以直接验证，分岔条件（6.52）与 Taffetani & Hennessy (2024）使用流函数形式推导出的方程（32）完全相同，只需将我们的参数 (γ, β_s, H_0) 对应于他们的记号 $(l_{ec}, l_{eb}, -C)$。

为重现Taffetani 与 Hennessy (2024的研究结果，我们采用相同的输入参数。作为说明性示例，我们设定 $H_0 = -1。45$，并根据（6.52）确定分岔的色散关系。通过适当平衡 γ 和 β_s，图3 表明，体弹性、表面张力和弯曲刚度之间的竞争可导致有限波数的分岔模态出现。这重现了Taffetani 与 Hennessy(2024）图1所示的结果，从而对本文的增量理论进行了定量验证。关于曲率效应引起的串珠失稳的详细讨论，请参阅该论文ff。

7. 结论

当曲面具有一般几何形状时，直接从变分原理推导表面平衡方程及其增量形式是一项颇具挑战的任务。此类推导通常需要明确计算表面曲率及其变化，这要求对微分几何有深入了解，且往往会产生冗长繁杂的表达式。本研究针对这一难题，为表面–体系统建立了一套简洁、系统的增量框架，该框架能够自然地纳入曲率相关效应，同时易于应用。

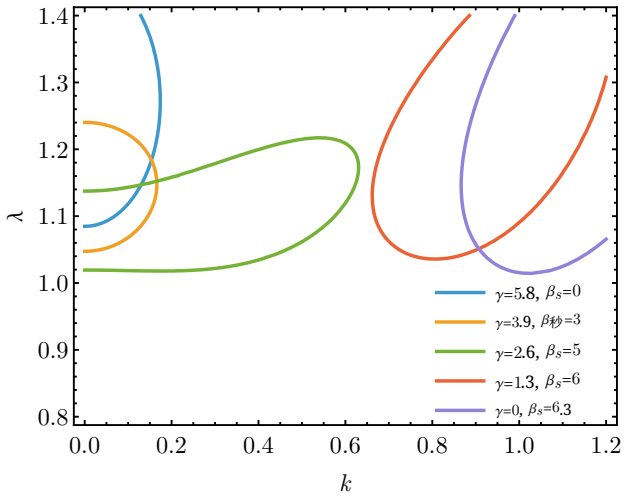

图3：分岔曲线 λ 相对于k，从 (6.52) 开始，适用于不同的 (γ，β_s)。圆柱不可压缩，且其自发曲率$H_0 = -1$。45，与 Taffetani 和 Hennessy (2024)。

基于无坐标变分表述，我们推导出了几何上自洽且代数处理简便的控制方程。所得表达式完全可以用抽象张量记号表示，从而避免了依赖坐标系所带来的复杂性。该表述的一项重要优势是只涉及均匀变形构形的曲率，而这一曲率可通过简单的几何考量直接确定。因此，无需计算当前（变形后）曲面的曲率即可得到增量方程，从而消除了表面力学解析或计算处理中常遇到的一大技术障碍。

本文提出的表述不仅简化了推导过程，还增强了可复用性和通用性。建立增量方程后，无需重新推导完整的变分方程，即可将其直接应用于广泛的弹性毛细问题。例如，同一组增量关系可用于研究具有不同表面能定律的圆柱、球体或环面中的分岔，只需针对几何形状进行特定处理。

因此，本文建立的增量框架为考虑表面曲率的弹性毛细系统稳定性分析提供了统一的处理方法，使得分岔问题能够像经典稳定性问题一样清晰、高效地得到研究。将该框架扩展到更高阶，自然可以进一步研究弱非线性和完全非线性状态，包括分岔后行为，以及具有表面能的软材料中的图案演化。

致谢

Xiang Yu 的研究工作得到国家自然科学基金委员会（资助编号：12402068）和广东省基础与应用基础研究基金（资助编号：2023A1515111141）的支持。Michal Smejkal 和 Martin Hor´ak 衷心感谢捷克教育、青年和体育部通过 ERC CZ 项目 SOFFA（编号：LL2310）及 MSMT-WTZ 项目 8J24AT004 提供的经费支持。

附录A. 各向同性弹性表面的本构定律

对于各向同性曲面，表面能 Ψ 可依据表示定理，表示为广义主不变量的函数，参见Steigmann & Ogden (1999)。具体而言，它可以表示为表面右柯西-格林变形张量$\boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{F}_s^T\boldsymbol{F}_s$ 和相对曲率张量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的六个不变量的函数，形式如下

$$\Psi = \Psi^{\mathrm{i}}(I_1^s, I_2^s, I_3^s, I_4^s, I_5^s, I_6^s), \tag{A.1}$$

其中，六个不变量I_1^s、I_2^s、.....、I_6^s定义为

$$I_1^s = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_s),\ I_2^s = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C}_s)^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_s^2)],\ I_3^s = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\kappa}),\ I_4^s = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\kappa})^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\kappa}^2)],\ I_5^s = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_s\boldsymbol{\kappa}),\ I_6^s = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_s\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{e}), \tag{A.2}$$

且$\boldsymbol{e} = e^{\alpha\beta}\boldsymbol{G}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}_\beta/\sqrt{G}$为二维置换张量。利用式（3.21）直接计算可得，曲面第一类 Piola-Kirchhoff应力和力矩张量可表示为

$$\boldsymbol{P}_s = 2\frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_1^s}\boldsymbol{F}_s + 2I_2^s\frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_2^s}\boldsymbol{F}_s^{-T} + 2\frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_5^s}\boldsymbol{F}_s\boldsymbol{\kappa} + \frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_6^s}\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}), \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{M}_s = \frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_3^s}\boldsymbol{1} + \frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_4^s}\boldsymbol{\kappa}^* + \frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_5^s}\boldsymbol{C}_s + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_6^s}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{C}_s - \boldsymbol{C}_s\boldsymbol{e}), \tag{A.4}$$

其中，$\boldsymbol{\kappa}^* = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{I}_s - \boldsymbol{\kappa}$ 表示 $\boldsymbol{\kappa}$的伴随矩阵，并且我们利用了$\boldsymbol{e}$的反对称性。

在一般的各向同性情形下，耦合项 I_5^s 和 I_6^s 存在，且对于一般变形而言，$\boldsymbol{C}_s$ 与 $\boldsymbol{\kappa}$不对齐（即二者的主方向不重合），此时一阶表面模量只能用表面能 Ψ_s 对六个不变量的导数来表示。在实际应用中，有限变形 $B_0 \to B_e$ 通常是均匀的，且$\boldsymbol{C}_s$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 都与该均匀变形的主方向对齐。鉴于此，我们假设对于有限变形 $B_0 \to B_e$，$\boldsymbol{C}_s$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 彼此对齐，但叠加增量变形后，它们可能不再对齐。

对于有限均匀变形 $B_0 \to B_e$，令 λ_1 和 λ_2 表示两个主伸长，其主方向与$\boldsymbol{C}_s$的主方向重合。相应的主相对曲率用 $\bar{\kappa}_1$ 和 $\bar{\kappa}_2$表示。与该有限变形相关的曲面六个不变量，记作$I_i\,(i = 1, 2, \ldots, 6)$（这里稍微滥用了符号），其表达式为

$$I_1 = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2, \quad I_2 = \bar{\lambda}_1^2\bar{\lambda}_2^2, \quad I_3 = \bar{\kappa}_1 + \bar{\kappa}_2, \quad I_4 = \bar{\kappa}_1\bar{\kappa}_2, \quad I_5 = \bar{\lambda}_1^2\bar{\kappa}_1 + \bar{\lambda}_2^2\bar{\kappa}_2, \quad I_6 = 0. \tag{A.5}$$

此外，令 Ψ_i和 $\Psi_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$ 表示在这些值处求得的 $\Psi = \Psi^{\mathrm{i}}(I_1^s, I_2^s, I_3^s, I_4^s, I_5^s, I_6^s)$ 的导数，

$$\Psi_i = \frac{\partial\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_i^s}\Big|_{(I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_6)}, \quad \Psi_{ij} = \frac{\partial^2\Psi^{\mathrm{i}}}{\partial I_i^s\partial I_j^s}\Big|_{(I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_6)}. \tag{A.6}$$

如第4节所述，在中间构形下书写平衡方程更为方便。在这种情况下，问题归结为计算增量实际应力张量 $\boldsymbol{\chi}_s = \bar{J}_s^{-1}\boldsymbol{Q}^{[1]}{}_s\boldsymbol{F}_s^T$，其可改写为如下形式（参见式（4.67））

$$\boldsymbol{\chi}_s = \boldsymbol{\sigma}_s - \bar{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{m}_s + \bar{\boldsymbol{n}} \otimes \bar{\boldsymbol{i}}_s \overline{\mathrm{div}}_s(\boldsymbol{m}_s) + \boldsymbol{\theta}_s, \tag{A.7}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_s$、$\boldsymbol{m}_s$ 和 $\boldsymbol{\theta}_s$ 定义见（4.66）和（4.68）。量 $\boldsymbol{\theta}_s$ 的计算很直接，因为它直接以增量表面变形梯度表示。为计算增量表面应力和力矩度量 $\boldsymbol{\sigma}_s$ 和 $\boldsymbol{m}_s$，我们将其改写为以下形式

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathcal{A}_s : \boldsymbol{\eta}_s + \mathcal{B}_s : \boldsymbol{\rho}_s, \qquad \boldsymbol{m}_s = C_s : \boldsymbol{\eta}_s + \mathcal{D}_s : \boldsymbol{\rho}_s, \tag{A.8}$$

其中我们回顾一下，$\boldsymbol{\rho}_s = -\bar{\boldsymbol{i}}_s\bar{\nabla}_s(\boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{n}}) - \boldsymbol{\eta}_s^T\bar{\boldsymbol{b}}$ 表示相对曲率的增量。下文中，表面刚度张量 $\mathcal{A}_s$、$\mathcal{B}_s$、C_s 和 $\mathcal{D}_s$ 的分量将利用链式法则，按照正交归一基$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 表示，其中$\boldsymbol{e}_1$ 和$\boldsymbol{e}_2$ 与$\boldsymbol{C}_s$ 的主方向重合，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{n}$ 是单位外法向量。

表面刚度张量 $\mathcal{A}_s$ 的非零分量为

$$\begin{aligned}
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\alpha\alpha\alpha} &= 2\bar{\lambda}_\alpha^2\Psi_1 + 2I_2\Psi_2 + 2\bar{\lambda}_\alpha^2\bar{\kappa}_\alpha\Psi_5 + 4\bar{\lambda}_\alpha^4\Psi_{11} + 8\bar{\lambda}_\alpha^2 I_2\Psi_{12} \\
&\quad + 8\bar{\lambda}_\alpha^4\bar{\kappa}_\alpha\Psi_{15} + 4I_2^2\Psi_{22} + 8\bar{\lambda}_\alpha^2\bar{\kappa}_\alpha I_2\Psi_{25} + 4\bar{\lambda}_\alpha^4\bar{\kappa}_\alpha^2\Psi_{55}, \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= 4I_2(\Psi_2 + \Psi_{11} + I_1\Psi_{12} + I_3\Psi_{15} + I_2\Psi_{22} + I_5\Psi_{25} + I_4\Psi_{55}), \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\alpha\alpha\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta(\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)[\Psi_6 + 2\bar{\lambda}_\alpha^2(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{26} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{56})], \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\alpha\beta\alpha} &= 2\bar{\lambda}_\alpha^3\bar{\lambda}_\beta(\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{26} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{56}), \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\beta\alpha\alpha} &= -\bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta(\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)[\Psi_6 + 2\bar{\lambda}_\alpha^2(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{26} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{56})], \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\beta\beta\beta} &= -2\bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta^3(\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\alpha^2\Psi_{26} + \bar{\kappa}_\beta\Psi_{56}), \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\beta\alpha\beta} &= 2\bar{\lambda}_\beta^2(\Psi_1 + \bar{\kappa}_\beta\Psi_5) + (\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)^2 I_2\Psi_{66}, \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\beta\beta\alpha} &= -I_2[2\Psi_2 + (\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)\Psi_{66}], \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s3\alpha3\alpha} &= 2\bar{\lambda}_\alpha^2\Psi_1 + 2I_2\Psi_2 + 2\bar{\lambda}_\alpha^2\bar{\kappa}_\alpha\Psi_5, \\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s3\alpha3\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta(\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)\Psi_6.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

表面刚度张量 $\mathcal{B}_s$ 的非零分量为

$$\begin{aligned}
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\alpha\alpha\alpha} &= 2\bar{\lambda}_\alpha^2\Psi_5 + 2\bar{\lambda}_\alpha^4\Psi_{13} + 2\bar{\lambda}_\alpha^4\bar{\kappa}_\alpha^{-1}I_4\Psi_{14} + 2\bar{\lambda}_\alpha^6\Psi_{15} \\
&\quad + 2\bar{\lambda}_\alpha^2 I_2\Psi_{23} + 2\bar{\lambda}_\alpha^2\bar{\kappa}_\alpha^{-1}I_2I_4\Psi_{24} + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 I_2\Psi_{25} \\
&\quad + 2\bar{\lambda}_\alpha^4\bar{\kappa}_\alpha\Psi_{35} + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 I_4\Psi_{45} + 2\bar{\lambda}_\alpha^6\bar{\kappa}_\alpha\Psi_{55}, \\
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= 2I_2(\Psi_{13} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{14} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{15} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{23} + \bar{\kappa}_\beta\bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{24} \\
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\alpha\alpha\beta} &= -2\bar{\lambda}_\alpha^3\bar{\lambda}_\beta[\Psi_6 + \bar{\lambda}_\alpha^2(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{26} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{56})], \\
&\quad + \bar{\lambda}_\beta^4\Psi_{25} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{35} + \bar{\kappa}_\alpha^2\Psi_{45} + \bar{\kappa}_\alpha\bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{55}), \\
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\alpha\beta\alpha} &= 2\bar{\lambda}_\alpha^3\bar{\lambda}_\beta^3(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{26} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{56}), \\
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\beta\alpha\alpha} &= -\bar{\lambda}_\alpha^3\bar{\lambda}_\beta[\Psi_6 + (\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)(\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\beta\Psi_{46} + \bar{\lambda}_\alpha^2\Psi_{56})], \\
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\beta\beta\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta^3[\Psi_6 - (\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)(\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\alpha\Psi_{46} + \bar{\lambda}_\beta^2\Psi_{56})], \\
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\beta\alpha\beta} &= I_2[\Psi_5 + (\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)\bar{\lambda}_\alpha^2\Psi_{66}].
\end{aligned} \tag{A.10}$$

表面刚度张量 C_s 的非零分量为

$$
\begin{aligned}
\bar{J}_s C_{s\alpha\alpha\alpha\alpha} &= \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_3 + \bar{\lambda}_\alpha^2 \bar{\kappa}_\alpha^{-1} I_4 + 3\bar{\lambda}_\alpha^4 \Psi_5 + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 \Psi_{13} + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 \bar{\kappa}_\alpha^{-1} I_4 \Psi_{14} \\
&\quad + 2\bar{\lambda}_\alpha^6 \Psi_{15} + 2\bar{\lambda}_\alpha^2 I_2 \Psi_{23} + 2\bar{\lambda}_\alpha^2 \bar{\kappa}_\alpha^{-1} I_2 I_4 \Psi_{24} + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 I_2 \Psi_{25} \\
&\quad + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 \bar{\kappa}_\alpha \Psi_{35} + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 I_4 \Psi_{45} + 2\bar{\lambda}_\alpha^6 \bar{\kappa}_\alpha \Psi_{55}, \\
\bar{J}_s C_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= 2I_2(\Psi_{13} + \bar{\kappa}_\beta \Psi_{14} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{15} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{23} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \bar{\kappa}_2 \Psi_{24} \\
&\quad + \bar{\lambda}_\alpha^4 \Psi_{25} + \bar{\kappa}_\beta \Psi_{35} + \bar{\kappa}_\beta^2 \Psi_{45} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \bar{\kappa}_\beta \Psi_{55}), \\
\bar{J}_s C_{s\alpha\alpha\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}_\beta I_1 \Psi_6 + \bar{\lambda}_\alpha^3 \bar{\lambda}_\beta (\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)(\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\beta \Psi_{46} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{56}), \\
\bar{J}_s C_{s\alpha\alpha\beta\alpha} &= \bar{\lambda}_\alpha^3 \bar{\lambda}_\beta \Psi_6 + \bar{\lambda}_\alpha^3 \bar{\lambda}_\beta (\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta)(\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\beta \Psi_{46} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{56}), \\
\bar{J}_s C_{s\alpha\beta\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}_\beta (3\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2) \Psi_6 - \bar{\lambda}_\alpha^3 \bar{\lambda}_\beta (\bar{\lambda}_\beta^2 - \bar{\lambda}_\alpha^2)(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\beta^2 \Psi_{26} + \bar{\kappa}_\alpha \Psi_{56}), \\
\bar{J}_s C_{s\alpha\beta\beta\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}_\beta^3 [-\Psi_6 + (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2)(\Psi_{16} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{26} + \bar{\kappa}_1 \Psi_{56})], \\
\bar{J}_s C_{s\alpha\beta\alpha\beta} &= \bar{\lambda}_\beta^2 (\Psi_3 + \bar{\kappa}_2 \Psi_4 + I_1 \Psi_5) + \frac{1}{2} (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2)(\bar{\kappa}_\beta - \bar{\kappa}_\alpha) I_2 \Psi_{66}, \\
\bar{J}_s C_{s\alpha\beta\beta\alpha} &= I_2 [\Psi_5 - \frac{1}{2} (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2)(\bar{\kappa}_\alpha - \bar{\kappa}_\beta) \Psi_{66}], \\
\bar{J}_s C_{s3\alpha3\alpha} &= \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_3 + \bar{\lambda}_\alpha^2 \bar{\kappa}_2 \Psi_4 + \bar{\lambda}_\alpha^4 \Psi_5, \\
\bar{J}_s C_{s3\alpha3\beta} &= -\frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}_\beta (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2) \Psi_6.
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

表面刚度张量 $\mathcal{D}_s$ 的非零分量为

$$
\begin{aligned}
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\alpha\alpha\alpha} &= \bar{\lambda}_\alpha^4 \Psi_{33} + 2\bar{\lambda}_\alpha^4 \bar{\kappa}_\alpha^{-1} I_4 \Psi_{34} + 2\bar{\lambda}_\alpha^6 \Psi_{35} + \bar{\lambda}_\alpha^4 \bar{\kappa}_\alpha^{-2} I_4^2 \Psi_{44} \\
&\quad + 2\bar{\lambda}_\alpha^6 \bar{\kappa}_\alpha^{-1} I_4 \Psi_{45} + \bar{\lambda}_\alpha^8 \Psi_{55}, \\
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= I_2(\Psi_4 + \Psi_{33} + I_3 \Psi_{34} + I_1 \Psi_{35} + I_4 \Psi_{44} + I_5 \Psi_{45} + I_2 \Psi_{55}), \\
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\alpha\alpha\beta} &= -\bar{\lambda}_\alpha^5 \bar{\lambda}_\beta (\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\beta \Psi_{46} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{56}), \\
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\alpha\beta\alpha} &= \bar{\lambda}_\alpha^3 \bar{\lambda}_\beta^3 (\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\beta \Psi_{46} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{56}), \\
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\beta\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha^3 \bar{\lambda}_\beta (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2 -)(\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\beta \Psi_{46} + \bar{\lambda}_\alpha^2 \Psi_{56}), \\
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\beta\beta\beta} &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}_\beta^3 (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2 -)(\Psi_{36} + \bar{\kappa}_\alpha \Psi_{46} + \bar{\lambda}_\beta^2 \Psi_{56}), \\
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\beta\alpha\beta} &= \frac{1}{2} I_2 [-\Psi_4 + \bar{\lambda}_\alpha^2 (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2) \Psi_{66}], \\
\bar{J}_s \mathcal{D}_{s\alpha\beta\beta\alpha} &= -\frac{1}{2} I_2 [\Psi_4 + \bar{\lambda}_\beta^2 (\bar{\lambda}_\alpha^2 - \bar{\lambda}_\beta^2) \Psi_{66}].
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

- - -在上述表达式中，$J_s = \lambda_1 \lambda_2$、 α、 $\beta = 1$、 2 和 $\alpha \neq \beta$。

在张量 $\boldsymbol{C}_s$ 与 $\boldsymbol{\kappa}$ 对齐（即，$\boldsymbol{e}_\alpha$ 也对应于 $\boldsymbol{\kappa}$的主方向）的特殊情况下，或者耦合项 I_5^s 和 I_6^s 不存在时，前述公式可以大幅简化。在这些情况下，采用另一种依赖于主伸长 λ_1^s、 λ_2^s 及主相对曲率 κ_1、 κ_2的表面能密度函数形式会更加方便:

$$
\Psi = \Psi^{\mathrm{p}}(\lambda_1^s, \lambda_2^s, \kappa_1, \kappa_2).
$$

随后，　　用正交归一基（$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}$ 表示的表面刚度张量分量　　3）

简化为

$$
\begin{aligned}
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta\frac{\partial^2\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\alpha^s\partial\lambda_\beta^s},\\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\beta\alpha\beta} &= \frac{\bar{\lambda}_\beta^2}{\bar{\lambda}_\alpha^2-\bar{\lambda}_\beta^2}\Big(\bar{\lambda}_\alpha\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\alpha^s}-\bar{\lambda}_\beta\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\beta^s}\Big),\quad \alpha\neq\beta,\\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s\alpha\beta\beta\alpha} &= \frac{\bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta}{\bar{\lambda}_\beta^2-\bar{\lambda}_\alpha^2}\Big(\bar{\lambda}_\alpha\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\beta^s}-\bar{\lambda}_\beta\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\alpha^s}\Big),\quad \alpha\neq\beta,\\
\bar{J}_s\mathcal{A}_{s3\alpha3\alpha} &= \bar{\lambda}_\alpha\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\alpha^s},\\
\bar{J}_s\mathcal{B}_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha\bar{\lambda}_\beta^2\frac{\partial^2\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\alpha^s\partial\kappa_\beta},\\
\bar{J}_s\mathcal{C}_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha^2\Big(\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\alpha}+\bar{\lambda}_\beta\frac{\partial^2\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\lambda_\beta^s\partial\kappa_\alpha}\Big),\\
\bar{J}_s\mathcal{C}_{s\alpha\beta\alpha\beta} &= \bar{\lambda}_\beta^2\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\beta},\quad \alpha\neq\beta,\\
\bar{J}_s\mathcal{C}_{s3\alpha3\alpha} &= \bar{\lambda}_\alpha^2\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\alpha},\\
\bar{J}_s\mathcal{D}_{s\alpha\alpha\beta\beta} &= \bar{\lambda}_\alpha^2\bar{\lambda}_\beta^2\frac{\partial^2\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\alpha\partial\kappa_\beta},\\
\bar{J}_s\mathcal{D}_{s\alpha\beta\alpha\beta} &= \frac{\bar{\lambda}_\alpha^2\bar{\lambda}_\beta^2}{2(\bar{\kappa}_\alpha-\bar{\kappa}_\beta)}\Big(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\alpha}-\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\beta}\Big),\quad \alpha\neq\beta,\\
\bar{J}_s\mathcal{D}_{s\alpha\beta\beta\alpha} &= \frac{\bar{\lambda}_\alpha^2\bar{\lambda}_\beta^2}{2(\bar{\kappa}_\alpha-\bar{\kappa}_\beta)}\Big(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\alpha}-\frac{\partial\Psi^{\mathrm{p}}}{\partial\kappa_\beta}\Big),\quad \alpha\neq\beta,
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

其中，所有导数均在 $(\lambda_1^s,\lambda_2^s,\kappa_1,\kappa_2)=(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\bar{\kappa}_1,\bar{\kappa}_2)$ 处求值。当两个主伸长相等时，¯ ¯即 $\lambda_1=\lambda_2$，或者主相对曲率相等时，$\bar{\kappa}_1=\bar{\kappa}_2$，相应表达式应理解为¯ ¯极限情形 $\lambda_1\to\lambda_2$（分别为 $\bar{\kappa}_1\to\bar{\kappa}_2$）。

参考文献

Bakiler, A. D., Javili, A., & Dortdivanlioglu, B. (2023年). 表面弹性和面积不可压缩性调控纤维串珠失稳. 力学与物理固体杂志, (p. 105298). Bigoni, D. (2012). 非线性固体力学：分岔理论与材料失稳. 剑桥固态科学丛书. Cambridge: 剑桥大学出版社. Biot, M. A. (1939). Xliii. 初始应力作用下物体的非线性弹性理论及其线性化情形. *Lond. Edinb.Dubl. Phil.Mag.*, *27*, 468–489. Cammarata, R. C. (1994). 薄膜中的表面和界面应力效应. *Prog.Surf.Sci.*,*46*, 1–38. Chen, C., Shi, Y., Zhang, Y. S., Zhu, J., & Yan, Y. (2006). 氧化锌纳米线中杨氏模量的尺寸依赖性. *Phys. Rev. Lett.*, *96*, 075505. Chen, X., Wang, S., & Yue, Z. (2022a). Gurtin和Murdoch表面效应对体力作用下弹性半空间弹性行为的影响.*Eng. Anal. Bound. Elem.*, *138*, 118–132. Chen, Y., Chen, D., Liang, S., Dai, Y., Bai, X., Song, B., Zhang, D., Chen, H., & Feng, L. (2022b). 场控微纳操控和微纳机器人的最新进展. *Adv. Intell. Syst.*, *4*, 2100116. Chhapadia, P., Mohammadi, P., & Sharma, P. (2011). 曲率相关表面能及其对纳米结构的影响. 力学与物理固体杂志, *59*, 2103–2115. Ciarletta, P., & Amar, M. B. (2012). 软圆柱凝胶溶胀和收缩时的蠕动模式 . *Soft Matter*, *8*, 1760–1763. Dai, M., & Schiavone, P. (2023 年). 关于平面变形下Steigmann-Ogden表面模型线性化形式及其在夹杂问题中的应用的讨论. *Int.J.Eng.Sci.*,*192*, 103931.

Dryburgh, G., & Ogden, R. (1999). 受弯曲作用的弹性表面涂层不可压缩各向同性弹性块体的分岔. 《应用数学与物理杂志》, 50, 822–838. Duan, H. L., Wang, J. X., Huang, Z. P., & Karihaloo, B. L. (2005a). 纳米非均质体的Eshelby形式体系. 英国皇家学会会刊A辑, 461, 3335–3353. Duan, H. L., Wang, J. X., Huang, Z. P., & Karihaloo, B. L. (2005b). 含有带界面应力纳米非均质体的固体的尺寸相关有效弹性常数. 力学与物理固体杂志, 53, 1574–1596. Fu, Y. B., Jin, L. S., & Goriely, A. (2021). 软弹性圆柱体中的颈缩、串珠化和鼓胀. 力学与物理固体杂志, 147, 104250. Fu, Y. B., Liu, J. L., & Francisco, G. S. (2016). 任意厚度充气圆柱管的局部鼓胀——弯曲刚度的影响. 力学与物理固体杂志, 90, 45–60. Gao, X., Huang, Z. P., Qu, J. M., & Fang, D. N. (2014). 基于曲率相关界面能的界面应力理论及其在纳米结构材料中的应用：（i）一般理论. 力学与物理固体杂志, 66, 59–77. Goriely, A. (2017). 《生物生长的数学与力学》, 跨学科应用数学第45卷. 纽约：施普林格. Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I. (1975). 弹性材料表面的连续介质理论. 理性力学与分析档案, 57, 291–323. Gurtin, M. E., & Murdoch, A. I. (1978). 固体中的表面应力 . 国际固体与结构杂志 , 14, 431–440. Helfrich, W. (1973). 脂质双层的弹性性质：理论与可能的实验. 自然研究杂志C辑, 28, 693–703. Hor´ak, M., ˇSmejkal, M., & Kruˇz´ık, M. (2025). 软弹性固体的表面多凸模型. 力学与物理固体杂志, 204, 106250. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmps.2025.106250. Lee, J. (2012). 《光滑流形导论》. 数学研究生教材218. 纽约：施普林格. Lestringant, C., & Audoly, B. (2020). 弹毛细颈缩的一维模型. 英国皇家学会会刊A辑, 476, 20200337. Li, X., & Mi, C. (2019). 限定弹性半空间边界的Steigmann–Ogden表面的纳米压痕硬度. 《固体数学与力学》, 24, 2754–2766. Long, J., Wang, G., Feng, X.-Q., & Yu, S. (2016). 表面张力对刚性球与软基底之间黏附接触的影响. 国际固体与结构杂志, 84, 133–138. Lu, P., Liu, R., Zhai, H., Wang, G., Yu, P., & Lu, C. (2021). 基于Gurtin–Murdoch表面弹性理论的修正梁模型. 力学, 56, 1147–1164. Magni, F., & Riccobelli, D. (2025). 软圆柱中的弹性Plateau–Rayleigh失稳：表面弹性与周期性珠化. 力学与物理固体杂志, 203, 106258. Marsden, J. E., & Hughes, T. J. R. (1994). 《弹性的数学基础》. 纽约：多佛出版社. Mogilevskaya, S. G., Crouch, S. L., La Grotta, A., & Stolarski, H. K. (2010). 表面弹性和表面张力对单向纳米复合材料横向整体弹性行为的影响. 复合材料科学与技术, 70, 427–434. Mogilevskaya, S. G., Zemlyanova, A. Y., & Kushch, V. I. (2021a). 具有Gurtin–Murdoch和Steigmann–Ogden表面能界面的纤维和颗粒增强复合材料. 应用力学评论, 73, 050801. Mogilevskaya, S. G., Zemlyanova, A. Y., & Manti˘c, V. (2021b). 运用Gurtin-Murdoch理论模拟具有二维增强体的复合材料中的力学过程. 复合材料科学与技术, 210, 108751. Ogden, R. W. (1984). 《非线性弹性变形》. Ellis Horwood, 纽约. Ogden, R. W., & Steigmann, D. J. (2002). 具有内禀边界弹性的弹性固体的平面应变动力学及其在表面波传播中的应用. 力学与物理固体杂志, 50, 1869–1896. Ogden, R. W., Steigmann, D. J., & Haughton, D. M. (1997). 弹性表面涂层对受压圆环有限变形和分岔的影响. 弹性杂志, 47, 121–145. Roudbari, M. A., Jorshari, T. D., L¨u, C., Ansari, R., Kouzani, A. Z., & Amabili, M. (2022). 微纳结构尺寸相关连续介质力学模型综述. 薄壁结构, 170, 108562. Sharma, P., Ganti, S., & Bhate, N. (2003). 表面对纳米非均质体尺寸相关弹性状态的影响. 应用物理快报, 82, 535–537. ˇSilhav´y, M. (2013). 非线性壳体的直接研究方法及其在表面-基底相互作用中的应用. 复杂系统数学与力学, 1, 211–232. Steigmann, D. J., & Ogden, R. W. (1999). 弹性表面—基底相互作用. 英国皇家学会会刊A辑, 455, 437–474. Steinmann, P. (2008). 变形力学和构形力学中的边界势能. 力学与物理固体杂志, 56, 772–800. Style, R. W., Hyland, C., Boltyanskiy, R., Wettlaufer, J. S., & Dufresne, E. R. (2013). 软弹性固体中的表面张力与接触. 自然-通讯, 4, 2728. Taffetani, M., & Ciarletta, P. (2015). 具有毛细能的软圆柱凝胶中的串珠失稳：弱非线性分析与数值模拟. 力学与物理固体杂志, 81, 91–120. Taffetani, M., & Hennessy, M. G. (2024). 曲率控制软涂层弹性圆柱体中的串珠化：有限波模失稳与局部调制. 力学与物理固体杂志, 187, 105606. Tomassetti, G. (2024). 薄壳力学的无坐标指南. 力学与材料, 192, 104961. Wang, G.-F., & Feng, X.-Q. (2009). 表面效应对单轴压缩下纳米线屈曲的影响. 应用物理快报, 94. Winitzki, S. (2010). 通过外积学习线性代数. Lulu, 圣贝纳迪诺.

Xuan, C., & Biggins, J. (2017). 固体中的Plateau–Rayleigh不稳定性是一种简单的相分离。《物理评论E》,*95*, 053106. Yu, X., & Fu, Y. B. (2022). 超弹性管和薄片中局部化分岔条件的解析推导。《应用数学与物理杂志》, *73*, 1–16. Yu, X., & Fu, Y. B. (2025). 关于表面弹性中的增量方程。《固体数学与力学》,*30*, 470–489. Zemlyanova, A. Y. (2018). 在Steigmann–Ogden形式的表面弹性作用下刚性压头与半平面的无摩擦接触。《固体数学与力学》,*23*, 1140–1155. Zemlyanova, A. Y., & Walton, J. R. (2012). 曲率相关表面张力作用下曲线平面裂纹的建模。《工业与应用数学学会应用数学杂志》, *72*, 1474–1492. Zhang, Y., Wang, L., Cai, Q., & Gou, X. (2024). 一种考虑表面效应、用于评估船舶工程纳米力学超材料强度的新型有限元设计。《海洋工程》, *311*, 118899.