arXiv:2601.03816v1 [math.AG] 7 Jan 2026

奇异曲线上的留数平衡

MOUNIR NISSE

Abstract. 本文研究奇异代数曲线上的留数映射及其张成性质，尤其着重探讨三个相互关联的主题：概形论留数张成、留数平衡原理，以及任意奇点下的留数平衡。从节点曲线上的对偶化层理论出发，我们将典范微分和高阶微分重新诠释为正规化上的亚纯对象，其局部主部受到明确留数条件的约束。一项关键结果是概形论留数张成定理，该定理断言，对于几何亏格为 g 、有 δ 个节点的节点曲线，当 $\delta \geq g$ 时，节点处的留数泛函张成$H^0(C, \omega_C)^\vee$，因此典范微分完全由其留数数据确定。这为 $H^0(C, \omega_C)$提供了具体的线性描述，并在变形理论、塞韦里簇和模空间问题中带来有力的应用。

随后，我们阐述留数平衡原理，证明奇异曲线每个不可约分支上的全局留数条件，等价于奇点处的局部平衡条件。这种等价性阐明了对偶化层的局部到整体结构，并自然推广到 k–微分。最后，我们讨论任意奇点的情形，此时节点已不足以描述局部几何。利用正规化和导子理想，我们提出一种精细的平衡原理，以高阶约束和导子层级约束取代简单的留数抵消。总之，这些结果为理解局部奇异行为如何支配全局微分及其变形提供了统一框架。

1. Introduction

作为局部到整体原理的留数。留数是复分析和代数几何中最经典的不变量之一。在光滑紧黎曼曲面X上，每个亚纯微分 ω 都满足全局留数定理

$$\sum_{p \in X} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0. \tag{1}$$

这个相等体现了局部解析行为与整体拓扑之间深刻的相容性。从代数几何的角度来看，它反映了典范丛 ω_X 的次数为 $2g-2$ ，且亚纯截面受到整体线性约束。

2020 数学主题分类。14B05, 14B10, 32G20, 14B07。关键词和短语。无穷小变形、最大变化、留数、孤立奇点。本研究部分由马来西亚厦门大学研究基金（项目编号 XMUMRF/ 2020-C5/IMAT/0013）资助。

从光滑曲线转向奇异曲线时，留数的性质会发生根本变化。奇点引入了新的局部现象，因此必须重新表述经典留数定理，使其纳入正规化、对偶化层和局部修正项。在奇异曲线中，节点曲线是最简单且最具启发性的情形。局部解析地，节点可表示为

$$xy = 0,$$

其正规化将两个分支分离开来。在节点曲线上，正则微分不再处处全纯；相反，它对应于正规化上的一个亚纯微分，该微分在节点的原像处具有简单极点，并且在两个分支上的留数相反。

这一观察引出了本文的指导原则：奇异曲线上的全局微分受满足平衡条件的局部留数数据控制。使这一原则精确化，并理解其在族、高阶情形以及更复杂奇点中的后果，是本文的主要目标。

对偶化层与概形论留数。 令 C 为定义在 $\mathbb{C}$上的一个约化、不可约~射影曲线，允许其具有奇点，并令 $\nu : C \to C$ 为其正规化。在 C 上，典范丛的正确替代物是对偶化层 ω_C。当 C 仅具有节点奇点时，ω_C 是可逆的，并且可以借助正规化作如下具体描述：

$$0 \longrightarrow \omega_C \longrightarrow \nu_*\omega_{\widetilde{C}} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\delta} k(P_i) \longrightarrow 0, \tag{2}$$

其中 $P_1, \ldots, P_\delta$是 C的节点。(2)中的商由各节点处的留数类生成，而相应的上同调连接态射导出留数映射

$$\mathrm{Res} : H^0(C, \omega_C) \longrightarrow k^\delta.$$

从概形论的角度看，这些留数不仅仅是解析量；它们是由正合序列(2)导出的典范线性泛函。这种解释对于理解留数在族中及变形下的行为至关重要，并自然引出了概形论留数这一概念。

本文的一个核心结果是概形论留数张成定理。最简单的表述是：若 C 是几何亏格为 g 且有 $\delta \geq g$ 个节点的节点曲线，则留数泛函

$$r_i : H^0(C, \omega_C) \longrightarrow k$$

与节点 P_i相关联的留数泛函张成整个对偶空间 $H^0(C,\ \omega_C)^\vee$。等价地，映射 Res 是单射，其像是 k^δ 中的一个 g维子空间，其对偶空间可恢复$H^0(C,\ \omega_C)^\vee$，并且我们有如下定理：

这一张成性质具有深远的影响。它意味着典范微分完全由其在节点处的留数决定，并为原本具有整体性且非线性的问题提供了强有力的线性化方法。

留数张成与变形理论。研究留数映射的主要动机之一来自变形理论。保持各节点解析类型不变的节点曲线的无穷小变形，由对偶化层的整体截面控制。概形论留数精确刻画了这些变形与奇点之间的相互作用。

当留数泛函张成对偶空间时，任何非平凡变形都必然会在留数层面上显现出来。这一观察导出了变形理论中自然映射的单射性和满射性的简洁结论。例如，对于具有指定节点数的平面曲线塞韦里簇，自然映射微分的对偶可识别为留数映射。因此，当 $\delta \geq g$ 时，留数张成定理便推出光滑性和预期维数结果。

定理1.1 (概形论留数张成). 设 $\mathcal{C}$ 是一条次数为 $d \geq 4$ 、仅具有节点奇点的既约不可约平面曲线，且其节点数等于 δ。令$\nu:\ C \to \mathcal{C}$ 为其亏格为 g 的正规化，并假设 $\delta \geq g$。则留数泛函$\{r_1, \ldots, r_\delta\}$ 张成 $H^0(C, \omega_C)^\vee$。

从更具概念性的角度看，概形论留数张成体现了一种刚性现象：一旦存在足够多的节点，整体变形便会以最大程度受到局部奇点数据的制约。

留数平衡原理。留数张成定理的基础，是一个更基本、更普遍的陈述，我们称之为留数平衡原理。设 C 是一条具有不可约分支 C_v 的$\widetilde{\ }$节点曲线， C 是它的正规化。设 ω 是 C 上的亚纯$\widetilde{\ }$微分，且其极点仅位于节点上方，则它在每个节点处满足

$$\mathrm{Res}_{p^+}(\omega) + \mathrm{Res}_{p^-}(\omega) = 0 \tag{3}$$

当且仅当对每个分支 C_v，都满足整体条件

$$\sum_{q \in C_v} \mathrm{Res}_q(\omega) = 0. \tag{4}$$

方程（3）是一个局部相容条件，确保 ω 下降为 ω_C 的截面，而（4）则是逐分支应用的经典留数定理。留数平衡原理断言，这两个条件等价。因此，每个分支上的整体约束完全由奇点处的局部平衡所编码。

定理1.2 （留数平衡原理）。设 $\mathcal{C}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、对偶图为 Γ 的连通结点曲线。对于每个顶点 $v \in V(\Gamma)$，记对应的不可约分支为 $\mathcal{C}_v$ ；对于每条边 $e \in E(\Gamma)$ ，记关联节点为 q_e ，其分支为$q_e^+ \in \mathcal{C}_{v^+}$ 和 $q_e^- \in \mathcal{C}_{v^-}$。设 $\eta_v \in H^0\big(\mathcal{C}_v,\ \omega_{\mathcal{C}_v}^{\otimes k}\ (*D_v)\big)$ 是 $\mathcal{C}_v$ 上的亚纯 k–微分，且只允许在标记点和节点的原像处有极点。那么以下条件等价：

(i) 对于每个 $v \in V(\Gamma)$，$\sum_{p \in \mathcal{C}_v}$ 留数$_p(\eta_v) = 0$;
(ii) 对于每个节点 q_e，留数$_{q_e^+}(\eta_{v^+})$ +留数$_{q_e^-}(\eta_{v^-}) = 0$.

这种等价性并非仅仅是技术上的观察；它在局部奇点理论与整体几何之间架起了一座概念桥梁。它还自然地推广到高阶微分，在那里，留数被首项主部的系数所取代。

高阶微分与广义留数。对于整数 $k \geq 1$，光滑曲线 X 上的 k阶微分是$\omega_X^{\otimes k}$ 的一个截面。在奇异曲线上， k阶微分定义为 $\omega_C^{\otimes k}$ 的截面，同样可以用正规化上的亚纯对象来描述。局部地，一个亚纯 k阶微分具有如下形式

$$\eta = f(z)(dz)^k,$$

其留数定义为局部展开式中 $z^{-k}(dz)^k$ 的系数。

对于节点曲线，留数平衡原理直接推广：每个分支上的留数之和为零，当且仅当每个节点的两个分支处的留数互相抵消。显式构造表明，全局 k阶微分可通过在节点处指定局部主部得到，且只需满足这些平衡条件。

任意奇点下的留数平衡。当奇点比节点更为复杂时，情况便更加微妙。尖点、楔点和高阶奇点可能是单分支的，或具有非正规交叉结构，因此，两个分支上留数互为相反数这一简单图景不再适用。在这些情形下，正规化映射 $\nu\colon\ C \to C$在奇点上方的原像点较少，而对偶化层允许出现高阶极点。

扩展留数平衡的正确框架由导子理想$\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$提供。我们有

$$\nu_* \omega_{\widetilde{C}} = \omega_C(\mathfrak{c}),$$

~而 ω_C 的截面对应于 C 上的亚纯微分，其主部被导子消去。在此情形下，留数平衡由导子阶层平衡条件取代，这些条件对高阶系数施加线性约束，而非简单留数。

定理 1.3 (导子约束的正合性**)**。 整体导子条件恰好施加~所需数量的独立线性约束，从而将 $H^0(C, \omega_{\widetilde{C}}(D))$ 降至$H^0(C, \omega_C)$。特别是，

$$\dim H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) - (\textit{number of conductor conditions}) = \dim H^0(C, \omega_C).$$

不会出现额外约束，也不会损失任何可容许截面。

更准确地说，我们有以下定理

定理 1.4 （导子约束的独立性与正合性）。 设 C 为一条约化~射影曲线，设 $\nu\colon C \longrightarrow C$ 为其正规化，设 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$ 为导子理想，并设 $D = \nu^{-1}(\Sigma)$ 为支撑在奇异轨迹原像上的除子。则~施加于 $H^0(C, \omega_{\widetilde{C}}(D))$ 上的整体导子条件彼此独立且正合。更确切地说，它们切出一个与 $H^0(C, \omega_C)$ 典范同构的线性子空间，且独立条件的数量等于局部极点自由度的总数。

这一推广表明，节点情形并非特殊情形，而是普遍现象中最简单的一个实例：全局对偶截面由奇点处的局部条件刻画，而这些条件总能表示为由奇点类型所决定的、对主部施加的线性约束。

展望。概形论留数张成、留数平衡原理及其向任意奇点的推广，共同构成了一个连贯的框架，用于理解奇异曲线上的微分。它们阐明了局部几何如何支配全局结构，统一了解析与代数观点，并为进一步的应用奠定了基础，包括对数几何、热带几何和非阿基米德霍奇理论。

2. Preliminaries

本节汇集了全文所用的基本定义、构造和基础结果。我们的目的是确定有关奇异曲线、正规化和对偶化层的记号与约定，并以适用于节点及更一般奇点的形式介绍留数理论。尽管大部分内容都是标准的，我们仍提供了详细说明，以强调留数平衡和概形论留数映射背后的局部到整体机制。

2.1. 奇异曲线与正规化。本文中，曲线 指 $\mathbb{C}$ 上的约化射影一维概形。我们用 C 表示所有曲线，除非另有明确说明，均允许存在奇点。若曲线 C 作为概形不可约，则称其为不可约；若其在扎里斯基拓扑下连通，则称其为连通 。

设 C 是一条约化曲线。C 的正规化 是一个有限态射

$$\nu : \widetilde{C} \longrightarrow C$$

~，使得 C 是正规的，且 ν 在 C 的光滑轨迹上是一个同构。由于 C 的维数为一，C 是光滑射影曲线的不交并，每个不可约分支对应 C 的一个不可约分支。正规化将每个奇点处的局部分支分离开来，并提供了一个适于进行局部解析计算的自然环境。

~若 $p \in C$ 是一个奇点，则有限集 $\nu^{-1}(p) \subset C$ 由 p 处 C 的各个分支组成。对于节点，$\nu^{-1}(p)$ 由两个点组成；对于尖点，则只由一个点组成。这些点的数量和构型刻画了该奇点的基本局部几何。

2.2. 算术亏格与几何亏格。设 C 是一个约化连通射影曲线。C 的算术亏格 定义为

$$p_a(C) := h^1(C, \mathcal{O}_C).$$

如果 C 是光滑的，这与通常的亏格概念一致。一般而言，算术亏格是一个在平坦族中保持不变的全局不变量。

几何亏格 $g(C)$定义为正规化后各不可约分支的亏格之和：

$$g(C) := \sum_i g(\widetilde{C}_i),$$

其中 $\widetilde{C} = \bigsqcup_i C_i$ 是按连通分支的分解。奇点造成了算术亏格与几何亏格之间的差异。对于节点曲线，有

$$p_a(C) = g(C) + \delta,$$

其中 δ 是 C的节点数。更一般地，

$$p_a(C) = g(C) + \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \delta_p,$$

其中 δ_p 表示奇点 p处的 δ不变量。

2.3. 对偶化层。 若 C 光滑，则典范丛 $\omega_C = \Omega^1_C$ 支配着许多几何与上同调性质。当 C 奇异时，Ω^1_C 不再是局部自由的，适当的替代对象是对偶化层 ω_C。

对于曲线，对偶化层可以通过正规化作具体描述。ω_C 的一个截面可视为 C 上的亚纯微分，其在 C 奇点处的局部行为须满足明确的相容条件。

如果 C 只有节点奇点，那么 ω_C 是可逆的，并且存在一个典范正合序列

$$0 \longrightarrow \omega_C \longrightarrow \nu_* \omega_{\widetilde{C}} \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} k(p) \longrightarrow 0. \tag{5}$$

商层记录节点处的留数类，并衡量 C 上的亚纯微分能否下降到 C上的障碍。对于更一般的奇点，ω_C 不一定是局部自由的，但仍是秩一反身层。其截面仍可由正规化上的亚纯微分描述，并须满足由局部奇点类型决定的线性约束。

2.4. 光滑曲线上的留数。 暂且假设 C 光滑。设 C上的亚纯微分为 ω，并设 $p \in C$至多在点 p处有一个单极点（为简单起见，我们作此假设）。选取以 p为中心的局部坐标 z，可将其写为

$$\omega = \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots \right) dz.$$

系数 a_{-1} 称为 ω 在 p 处的留数，记作 $\mathrm{Res}_p(\omega)$.

经典留数定理断言

$$\sum_{p \in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0. \tag{6}$$

这个相等是后续奇异情形中所有平衡陈述的原型。

~2.5. **节点曲线上的留数**。 设 C 为一条节点曲线，且 $\nu\colon\ \widetilde{C} \to C$ 为其正规化。~截面 $\omega \in H^0(C, \omega_C)$ 对应于 C 上的一个亚纯微分，该微分在节点上方的点至多有简单极点。若 $p \in C$ 是一个节点，且 $\nu^{-1}(p) = \{p^+, p^-\}$，则 ω满足局部条件

$$\mathrm{Res}_{p^+}(\omega) + \mathrm{Res}_{p^-}(\omega) = 0. \tag{7}$$

这个条件确保 ω 下降为 ω_C 的整体截面。方程（7）是留数平衡条件最简单的实例。它表达了定义 C 上整体对象所需的奇点各局部分支之间的相容性。

2.6. **概形论留数映射**。 对（5）取整体截面，得到一个典范线性映射

$$\mathrm{Res} : H^0(C, \omega_C) \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathrm{Sing}(C)} k.$$

其分量称为概形论留数泛函。这些泛函是内禀的，具有函子性，并且在曲线族中表现良好。在有利情形下，特别是当 C 有 δ 个节点且几何亏格为 $g(C)$，并且 $\delta \geq g(C)$ 时，留数泛函张成整个对偶空间 $H^0(C,\ \omega_C)^\vee$。这一现象称为概形论留数张成，将是本文的核心主题。

2.7. **高阶微分**。 对于整数 $k \geq 1$，光滑曲线C 上的一个 k阶微分是 $\omega_C^{\otimes k}$ 的一个截面。局部地，它可写为

$$\eta = f(z)(dz)^k,$$

其中 $f(z)$ 是亚纯函数。如果 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处有 k 阶极点，则 $z^{-k}(dz)^k$ 的系数称为 η 的 k–留数 。在奇异曲线 C 上， k–微分定义为 $\omega_C^{\otimes k}$ 的一个截面。这类截面对应于正规化上的一组亚纯 k–微分，并满足奇点处的留数平衡条件。对于 $k = 1$，这便恢复了典范微分理论。

2.8. **导子与任意奇点**。 设 C 为一条约化曲线，其正规化为 $\nu\colon C \to C$。 导子理想 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$ 是既为 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$ 的理想、又为 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$ 的理想层的最大理想层。它刻画了 C 不正规这一事实，并在描述 ω_C 中发挥着根本作用。存在如下关系

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} = \omega_C(\mathfrak{c}),$$

~这表明， ω_C 的截面对应于 C 上的亚纯微分，其主部被导子湮灭。在此背景下，留数平衡被由奇点类型决定的高阶线性约束所取代。

2.9. **总结**。 本节回顾的概念构成了本文的技术基础。它们为节点奇点和非节点奇点提供了统一的语言，并使我们能够将全局几何问题转化为奇点处精确的局部条件。在后续各节中，我们将运用这些预备知识来建立留数张成定理、平衡原理，并将其应用于变形理论和模空间。

3. Relative Adjunction and Residue Maps

设 $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ 是由光滑不可约基底 B参数化的次数为 $d \geq 4$ 的既约不可约平面曲线平坦族。假设每个纤维 $\mathcal{C}_b := \pi^{-1}(b)$都只有节点奇点，且节点数 δ 在 B上保持不变。特别地，该族是等奇异的。对于每个 $b \in B$，令 $\varphi_b\colon C_b \longrightarrow \mathcal{C}_b$ 表示该纤维的正规化。

引理 3.1 (相对伴随和留数映射)。 在上述情形下，空间$H^0(C_b, \omega_{C_b})$ 构成一个 B上的全纯向量丛 $\mathcal{H}$ 。对于每个节点$P_{i,b} \in \mathcal{C}_b$，存在一个典范定义的全纯截面

$$r_i \in \Gamma(B, \mathcal{H}^\vee),$$

其在 b处的取值是一个线性泛函

$$r_{i,b}\colon H^0(C_b, \omega_{C_b}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

它由取 C_b上$P_{i,b}$ 的原像处的留数给出。

证明。 我们将论证分为三个简短且相互独立的步骤。

步骤 *1*：霍奇丛的构造。由于 π 是平坦的，算术亏格 $p_a(\mathcal{C}_b)$ 与 b无关。因为节点的数量 δ 保持不变，几何亏格

$$g = p_a(\mathcal{C}_b) - \delta$$

在 B上保持不变。因此，正规化 C_b 是亏格为 g的光滑曲线，从而

$$\dim H^0(C_b, \omega_{C_b}) = g \quad \text{for all } b \in B.$$

对正规化族的相对对偶化层应用上同调与基变换可知，空间 $H^0(C_b, \omega_{C_b})$ 随 b全纯变化。因此，它们构成一个秩为g 的全纯向量丛

$$\mathcal{H} := \pi_*(\omega_{\mathcal{C}/B}^{\mathrm{norm}})$$

在 B上。

步骤 *2*：节点处的局部伴随。取一个节点 $P_{i,\,b} \in \mathcal{C}_b$。由于该族是等奇异的，缩小 B 后，可在 $\mathcal{X}$ 上取局部解析坐标 $(x,\ y,\ t)$，使得在$P_{i,\,b}$的邻域内，该族局部由下式定义

$$xy = t,$$

其中，t 是 B 上的一个局部坐标，并在 b处消失。正规化将节点替换为两个光滑点

$$Q_{i,b}^+,\ Q_{i,b}^- \in C_b,$$

对应于节点的两个分支。

截面 $\omega \in H^0(C_b,\ \omega_{C_b})$ 可与 $\mathcal{C}_b$ 上在节点处至多具有简单极点的亚纯微分对应。节点曲线的伴随公式蕴含留数条件

$$\mathrm{Res}_{Q_{i,b}^+}(\omega) + \mathrm{Res}_{Q_{i,b}^-}(\omega) = 0,$$

参见 [7, 第 III 章，§7]或 [12, 第 3]。

步骤 *3*：留数的定义与变化。留数和为零，因此可以定义一个线性泛函

$$r_{i,b}(\omega) := \operatorname{Res}_{Q_{i,b}^{+}}(\omega) = -\operatorname{Res}_{Q_{i,b}^{-}}(\omega),$$

它与两个分支的标记无关，因而是典范的。由于局部模型 $xy = t$ 关于参数 t 全纯地变化，相对微分的留数也随 b 全纯地变化。因此，映射 $b \mapsto r_{i,b}$ 定义了一个全纯截面

$$r_i \in \Gamma(B, \mathcal{H}^{\vee}).$$

□

推论 3.2 (等奇异变形的留数描述)。 沿用上述记号， π 的纤维在 $b \in B$ 处的等奇异变形空间的切空间，典范地同构于联合留数映射的核

$$H^0(C_b, \omega_{C_b}) \longrightarrow \mathbb{C}^{\delta}, \qquad \omega \longmapsto (r_{1,b}(\omega), \ldots, r_{\delta,b}(\omega)).$$

证明。无穷小等奇异变形恰好是保持每个节点的局部解析类型的一阶变形。根据对偶化层的伴随描述，这等价于要求相应微分在所有节点处的留数均为零。由留数泛函的定义，结论直接得出$r_{i,\ b}$；参见 [8,第 1 章，§4]或 [12, §3.4]。 □

备注 3.3。 留数映射在塞韦里簇和曲线模空间上的除子构造中，以及在研究典范线性系与伴随线性系的退化时，也发挥着核心作用。它们与高斯–马宁联络的相互作用为节点曲线的周期提供了微分约束；见 [7, 12]。

3.1. **–微分的定义与例子** *k*–**微分**。 相对伴随与留数构造确定了局部数据，精确描述了曲线族中微分在奇点和标记点附近的表现。这些局部描述自然引出了从普通微分到高阶对象的转变，即 k–微分，它们编码了具有指定重数的零点和极点。因此，我们转而定义k–微分，并通过基本例子阐明其几何意义。

定义 3.4 （光滑曲线上的k–微分）。 设 C 是一条光滑复代数曲线（等价地说，是一条紧黎曼曲面），并设 ω_C 表示其典范线丛。对于整数 $k \geq 1$， C 上的 k–微分 是典范丛的第 k 次张量幂的一个（亚纯）截面：

$$\eta \in H^0\big(C, \omega_C^{\otimes k}\big).$$

等价地，在 C 上的局部全纯坐标 z 中， k–微分可写成

$$\eta = f(z)\,(dz)^k,$$

其中 $f(z)$ 是一个亚纯函数。在点 $p \in C$ 处， η 的零点或极点的阶定义为 $f(z)$ 在 p 处的消失阶或极点阶。

注：3.5。对于 $k=1$， k–微分就是一个（亚纯）微分形式。当 $k=$ 为 2 时，便得到二次微分，它们在 Teichm¨uller 理论中发挥着核心作用。 k 的更高取值自然出现在平坦几何、霍奇理论以及退化的研究中。

3.2. k–奇异曲线上的微分。 设 C 是一条约化曲线（可能是奇异曲线），并令

$$\nu\colon \widetilde{C} \longrightarrow C$$

为其正规化。由于 C 可能是奇异的，其典范对象是对偶化层 ω_C，而 C 上的 k–微分定义为 $\omega_C^{\otimes k}$ 的一个截面。

具体而言， C 上的 k–微分等价地由一组定义在 C 的光滑分支上的亚纯$_\sim k$–微分给出，其主部在奇点的原像处满足相容条件（对于节点曲线，这些条件即为留数平衡条件）。

例 3.6. 设 C 是一条节点曲线，由两条光滑射影曲线 C_1 和 C_2 在一个点处粘合而成。更准确地说，设 $p_1 \in C_1$ 和 $p_2 \in C_2$ 是点，并构造节点曲线

$$C = C_1 \cup C_2/(p_1 \sim p_2).$$

X 的正规化为

$$\widetilde{C} = C_1 \sqcup C_2,$$

且该节点对应于这一对 $\{p_1, p_2\}$。

设 $k \geq 1$。 C 上的 k–微分由一对

$$(\eta_1, \eta_2), \qquad \eta_i \in H^0\big(C_i, \omega_{C_i}^{\otimes k}\big),$$

使得 η_1 和 η_2 分别可以在 p_1 和 p_2 处有极点，并满足以下相容条件：

（i）如果 $k=1$，则

$$\mathrm{Res}_{p_1}(\eta_1) + \mathrm{Res}_{p_2}(\eta_2) = 0;$$

（ii）对于一般的 k， η_1 在 p_1 处和 η_2 在 p_2 处的主部，通过节点局部模型所诱导的自然同构进行对应。

在 C_1 上的局部坐标 z_1 和 C_2 上的 z_2 中，若 $z_1(p_1) = z_2(p_2) = 0$，则该节点在解析意义下由 $z_1 z_2 = 0$ 建模。局部 k–微分具有如下形式

$$\eta_1 = f_1(z_1)\,(dz_1)^k, \qquad \eta_2 = f_2(z_2)\,(dz_2)^k,$$

且相容条件确保这一对定义了 $\omega_X^{\otimes k}$ 的整体截面。

注记 3.7。 对于节点曲线， k–微分可由正规化上的 k–微分以及每个节点处的显式匹配条件完全描述。这些条件推广了普通微分的留数消去条件（$k=1$），是留数平衡原理最简单的实例。

3.3. 节点曲线的等奇异族的相对留数张成。 令 $\mathcal{H}$表示 B 上的向量丛，其在点 $b \in B$ 上的纤维为空间 $H^0(C_b,\ \omega_{C_b})$。令

$$r_i \in \Gamma(B, \mathcal{H}^\vee)$$

为留数 与纤维的节点相关联的截面，如前所构造 y.

定理 3.8 (相对留数张成)。 假设对所有 $b \in B$，均有 $\delta \geq g = g(C_b)$ 。那么，对每个 $b \in B$，留数泛函

$$\{r_{1,b}, \ldots, r_{\delta,b}\} \subset H^0(C_b, \omega_{C_b})^\vee$$

张成对偶向量空间 $H^0(C_b, \omega_{C_b})^\vee$。

证明。 固定一点 $b \in B$，并设 $C = C_b$。令

$$\mathcal{N} = \{P_1, \ldots, P_\delta\}$$

为奇异曲线 $\mathcal{C}_b$的节点集合，并令

$$\{Q_i^+, Q_i^-\} \subset C$$

表示正规化映射下映到 P_i 的两个点。

典范形式与留数。 根据节点曲线的伴随公式，截面 $\omega \in H^0(C, \omega_C)$ 可视为 $\mathcal{C}_b$ 上的亚纯微分，在节点处至多有简单极点，并满足条件

$$\mathrm{Res}_{Q_i^+}(\omega) + \mathrm{Res}_{Q_i^-}(\omega) = 0 \quad \text{for all } i.$$

因此， ω 确定了一个留数向量

$$(r_{1,b}(\omega), \ldots, r_{\delta,b}(\omega)) \in \mathbb{C}^\delta,$$

它定义了一个线性映射

$$\mathrm{Res}_b \colon H^0(C, \omega_C) \longrightarrow \mathbb{C}^\delta, \qquad \omega \longmapsto (r_{1,b}(\omega), \ldots, r_{\delta,b}(\omega)).$$

留数映射的单射性。 我们断言 Res_b 是单射。事实上，假设$\omega \in H^0(C, \omega_C)$ 满足 $r_{i,b}(\omega) = 0$ 对所有 i 均成立。那么 ω 在任意节点处的留数均为零，因此相应的 $\mathcal{C}_b$ 上的微分没有极点。于是它下降为奇异曲线 $\mathcal{C}_b$上的全局正则微分。

由于 $\mathcal{C}_b$ 是不可约平面曲线，其对偶化层的次数为

$$\deg \omega_{\mathcal{C}_b} = 2g - 2 + 2\delta.$$

除非正则微分来自正规化且在节点处有极点，否则它在 $\mathcal{C}_b$ 上必恒等于零。因此 $\omega = 0$，从而 Res_b 是单射。

维数计数。 由于 $\dim\ H^0(C, \omega_C) = g$ 且 Res_b是单射，其像是 $\mathbb{C}^\delta$的一个 g维子空间。对偶化后，转置映射

$$\mathrm{Res}_b^\vee \colon (\mathbb{C}^\delta)^\vee \longrightarrow H^0(C, \omega_C)^\vee$$

是满射。根据构造，$\mathrm{Res}_b^\vee$ 的像恰好是留数泛函 $\{r_{1,b}, \ldots, r_{\delta,b}\}$的线性张成。因此，这些泛函张成 $H^0(C,\ \omega_C)^\vee$。

族中的一致性。上述论证完全是逐纤维的，仅取决于该族的等奇异节点结构。由于留数截面 r_i 随 b全纯变化，因此对所有 $b \in B$，张成性质均一致成立。□

注记 3.9。定理 3.8是一个具有若干重要推论的基本结构性结果。特别地，它表明，上的典范微分 C_b 完全由其在节点处的留数决定，从而给出了空间的显式线性描述 $H^0(C_b,\ \omega_{C_b})$。

4. Scheme-Theoretic Residues

设 $\pi:\ \mathcal{X} \to B$ 是一个平坦射影态射，其纤维 $\mathcal{C}_b = \pi^{-1}(b)$ 是次数为 $d \geq 4$ 且仅具有节点奇点的既约不可约平面曲线。假设：

（i） B 光滑且不可约；（ii）节点的数目 δ 在 B 上保持不变（等奇异性）；（iii） $\nu_b:\ C_b \to \mathcal{C}_b$ 表示正规化；（iv） $g = g(C_b)$ 是几何亏格，与 b 无关。

设 $\omega_{\mathcal{C}_b}$ 表示 $\mathcal{C}_b$的对偶化层，ω_{C_b} 表示光滑曲线C_b的典范层。

4.1. 留数的概形论构造。

4.1.1. 对偶化层与正规化。设 $\nu : C \to \mathcal{C}$ 是节点曲线 $\mathcal{C}$的正规化。存在一个典范的凝聚层正合序列

$$0 \longrightarrow \omega_{\mathcal{C}} \longrightarrow \nu_*\omega_C \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\delta} k(P_i) \longrightarrow 0,$$

其中 P_1，……，P_δ 是 $\mathcal{C}$ 的节点。

证明。这是对偶化复形理论中的一个标准结果。由于 $\mathcal{C}$ 只有普通双点，它是 Gorenstein 的，因此 $\omega_{\mathcal{C}}$ 是可逆层。

在节点 P 处局部解析地，$\mathcal{C}$ 由 Spec $k[x,y]/(xy)$ 给出，其正规化为$k[x] \oplus k[y]$。$k[x,y]/(xy)$ 的对偶化模嵌入各分支的对偶化模的直和中，且其余核典范地为一维，由留数类生成。将这些局部描述粘合起来即可得到该正合序列。□

4.1.2. 作为连接态射的留数映射。取整体截面得到一个长正合列

$$0 \to H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \to H^0(C, \omega_C) \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_{i=1}^{\delta} k \to H^1(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \to \cdots$$

根据 Cohen–Macaulay 曲线 $\mathcal{C}$上的塞尔对偶，

$$H^1(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \cong H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})^\vee \cong k.$$

因此，留数的秩至多为 $\delta - 1$，其像由坐标之和为零的向量组成。留数的第 i 个坐标恰好是概形论留数泛函

$$r_i : H^0(C, \omega_C) \to k.$$

相对留数张成定理的证明。

定理 4.1（概形论留数张成）。设 $\mathcal{C}$ 是一条次数为 $d \geq 4$ 、仅有节点奇点的既约不可约平面曲线，其节点数等于 δ。设 $\nu : C \to \mathcal{C}$ 是其亏格为 g 的正规化，并假设 $\delta \geq g$。则留数泛函 $\{r_1, \ldots, r_\delta\}$ 张成 $H^0(C, \omega_C)^\vee$。

证明。该映射

$$\mathrm{Res} : H^0(C, \omega_C) \longrightarrow k^\delta$$

是单射。事实上，若 $\omega \in H^0(C, \omega_C)$ 映为零，则它属于 $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ 的像。但由于 $\mathcal{C}$ 是一条不可约平面曲线，任何正则对偶化截面都必须恒等为零。因此 $\omega = 0$，进而 Res 将 $H^0(C, \omega_C)$ 识别为 g 维子空间 k^δ。取对偶后得到一个满射

$$(k^\delta)^\vee \twoheadrightarrow H^0(C, \omega_C)^\vee,$$

其像是留数泛函 r_i 的张成。由于 $\delta \geq g$，这个张成等于整个对偶空间（参见附录 B 中该证明的细节）□

4.2. 与 Petri 型定理的关系。

4.2.1. 节点曲线的 *Petri* 映射。对于一条光滑曲线 C，Petri 映射 i s

$$\mu_0 : H^0(C, L) \otimes H^0(C, \omega_C \otimes L^{-1}) \longrightarrow H^0(C, \omega_C).$$

对于节点曲线 $\mathcal{C}$，典范形式由节点处的留数描述。留数张成定理表明，ω_C 完全由节点处的局部条件决定。

4.2.2. 通过留数证明 *Petri* 单射性。设 L 是 C 上的一个线丛，它是 $\mathcal{C}$ 上一个无挠秩一层的拉回。如果一个张量

$$\sum_j s_j \otimes t_j$$

属于 $\ker \mu_0$，那么对每个节点 P_i，

$$r_i\left(\sum_j s_j t_j\right) = 0.$$

由于留数张成 $H^0(C, \omega_C)^\vee$，这就迫使

$$\sum_j s_j t_j = 0.$$

在温和的假设下，这意味着所有 Petri关系都是平凡的，从而为节点平面曲线的正规化导出 Petri 型单射性结果。

4.3. 塞韦里簇的应用。 令 $V_{d,\delta} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$ 表示由次数为 d 且具有 δ 个节点的不可约平面曲线构成的塞韦里簇。在 $[\mathcal{C}] \in V_{d,\delta}$处的扎里斯基切空间适合于一个正合序列

$$0 \to T_{[\mathcal{C}]}V_{d,\delta} \to H^0(\mathcal{C}, \mathcal{N}_{\mathcal{C}/\mathbb{P}^2}) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{i=1}^{\delta} T^1_{P_i}.$$

由伴随公式和塞尔对偶， ∂ 的转置可识别为留数映射

$$H^0(C, \omega_C) \to k^\delta.$$

根据留数张成定理，当 $\delta \geq g$时，这个对偶映射是单射。因此， ∂ 是满射，并且

$$\dim T_{[\mathcal{C}]}V_{d,\delta} = \dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)| - \delta,$$

预期维数。由此可得以下推论：

推论 4.2. 如果 $\delta \geq g$，塞韦里簇$V_{d,\ \delta}$ 在 $[\mathcal{C}]$处光滑，且维数为预期维数。

4.4. 模空间的应用。 正规化映射诱导一个态射

$$\Phi \colon V_{d,\delta} \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

将有节点平面曲线 $\mathcal{C}$ 映射到其正规化 C的同构类。由于正规化具有函子性，且同构的节点曲线具有同构的正规化，因此该映射定义良好。关键问题是， Φ 是否为浸入映射，即其微分是否为单射。

到 V_{d}的切空间$_{\delta}$。 $\mathcal{C}$ 在平面内保持 δ 个节点的无穷小变形由下式描述

$$T_{[\mathcal{C}]}V_{d,\delta} \ \cong \ H^0(\mathcal{C}, \mathcal{N}_{\mathcal{C}/\mathbb{P}^2}(-\Delta)),$$

其中：

(i) $\mathcal{N}_{\mathcal{C}/\mathbb{P}^2}$ 是法层；(ii) Δ 是 δ 个节点所对应的约化子概形；(iii) 对 $(-\Delta)$ 进行扭积可确保这些节点保持为节点。

到 $\mathcal{M}_g$的切空间。 $\mathcal{M}_g$在 $[C]$ 处的扎里斯基切空间为 $T_{[C]}\mathcal{M}_g \ \cong \ H^1(C, \ T_C)$，其中 T_C 是 C 的切层。由塞尔对偶，

$$H^1(C, T_C)^\vee \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}).$$

正规化映射的微分

$$d\Phi \colon T_{[\mathcal{C}]}V_{d,\delta} \longrightarrow T_{[C]}\mathcal{M}_g$$

衡量 $\mathcal{C}$ 的无穷小变形如何改变其正规化的同构类。其核由那些对 $\mathcal{C}$ 的一阶变形构成，这些变形所诱导的C 变形是平凡的。这等价于说， $d\Phi$不是单射，当且仅当存在一个非零的 $\mathcal{C}$ 无穷小变形，不会改变 C的复结构。

对偶化 $d\Phi$后， $d\Phi$ 的单射性等价于下列映射的满射性

$$(d\Phi)^\vee \colon H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) \longrightarrow T_{[\mathcal{C}]}V_{d,\delta}^\vee.$$

关键观察是， $\mathcal{C}$ 的无穷小变形若使节点光滑化或移动节点，就会在 $H^0(C,\ \omega_C)$上产生留数型线性泛函。更准确地说：

(i) 每个节点 p_i of $\mathcal{C}$ 都确定一个概形论留数泛函

$$r_i\colon H^0(C,\omega_C)\to k.$$

(ii) 这些留数控制微分在变形下的行为。

留数张成定理指出：如果 $\delta\geq g$，那么留数泛函 $\{r_1,\dots,r_\delta\}$ 张成$H^0(C,\omega_C)^\vee$。由此可得

(a) $H^0(C,\omega_C)$上的任意线性泛函都是节点处留数的线性组合。(b) 因此， C 的任何无穷小变形都可通过节点处的行为检测出来。

现假设 $\delta\geq g$。并设$\xi\in T_{[C]}V_{d,\delta}$ 属于 $d\Phi$的核。那么 C 的诱导变形是平凡的。这意味着：

(i) 所有留数泛函 r_i 在相应的变形上都为零。(ii) 因此， $H^0(C,\omega_C)$上的每个线性泛函在其上都为零，因为留数张成对偶空间。

因此，变形 ξ 必为零。于是，

$$\ker(d\Phi)=0,$$

且微分 Φ 是单射。

几何推论。的单射性 $d\Phi$意味着：

(i) 映射$V_{d,\delta}\to\mathcal{M}_g$ 在每个满足 $\delta\geq g$的点处都是浸入。(ii) $V_{d,\delta}$ 的像的维数等于$\dim V_{d,\delta}$。(iii) 平面节点曲线族对光滑曲线模空间施加独立条件。

特别地，当 $\delta\geq g$时，节点平面曲线不可能以非预期的维数坍缩扫过模空间。因此，留数张成定理提供了一种上同调机制，表明节点提供了足够的局部数据来控制正规化的整体变形。这为塞韦里簇在 $\mathcal{M}_g$中的像带来了强有力的刚性结果。

5. Residues and Balancing Conditions in Tropical Geometry

目标是这一　　节旨在以精确而详尽的方式阐释以下论述：

退化代数曲线上的留数条件，是其对应热带曲线上的平衡条件的代数几何对应物；而留数张成则对应于热带雅可比簇的非退化性。

我们从代数退化出发，转向热带曲线，然后说明二者之间的精确对应关系。

退化为节点曲线。

设 $\pi : \mathscr{C} \to \Delta$ 是圆盘 Δ 上由光滑射影曲线组成的平坦族，其一般纤维光滑，特殊纤维为

$$\mathscr{C}_0 = \bigcup_{v \in V} C_v$$

一条约化节点曲线。假设：

(i) 每个 C_v 都光滑；(ii) $\mathscr{C}_0$ 的奇点
均为普通节点。

5.1. 对偶图。 我们为 $\mathscr{C}_0$ 关联一个对偶图 Γ，定义如下：

定义 5.1。 对偶图 Γ 具有：

(i) 对 $\mathscr{C}_0$ 的每个不可约分支设置一个顶点 v C_v；(ii) 对 $\mathscr{C}_0$ 的每个节点设置一条边 e，连接与该节点相交的两个分支所对应的顶点。

如果一个分支在某个节点处与自身相交，则对应的边是一个环。该图 Γ 是热带曲线的底层组合对象。

5.1.1. 从对偶图到热带曲线。 要得到一条热带曲线，需在 Γ 上赋予一种度量结构，即赋予边长。这些长度源自退化参数：若一个节点的局部形式为

$$xy = t^m,$$

那么对应的边就赋予长度 m。由此得到的对象是一个度量图，它恰好就是一条热带曲线。对此可作如下理解：

(a) 顶点对应于特殊纤维正规化后的不可约分支。(b) 边对应于节点（奇点）。(c) 热带曲线的亏格等于第一贝蒂数 $b_1(\Gamma)$，这与退化过程中的独立回路数相符。

5.2. 代数曲线上的留数。

节点处的留数。 设 $\nu : C^\nu \to \mathscr{C}_0$ 为正规化。对于连接分支C_v 和 C_w的节点 P，其原像由两个点组成

$$Q_{v,e} \in C_v, \qquad Q_{w,e} \in C_w.$$

设 ω 是正规化 C^ν 上的正则微分，允许在这些点有简单极点。对偶化条件表明：

$$\mathrm{Res}_{Q_{v,e}}(\omega) + \mathrm{Res}_{Q_{w,e}}(\omega) = 0. \tag{8}$$

这就是节点处的基本留数条件。

作为流的留数。固定边 e 从 v 到 w 的定向，并定义

$$r_e := \mathrm{Res}_{Q_{v,e}}(\omega) = -\mathrm{Res}_{Q_{w,e}}(\omega).$$

因此，每条边 e 都被赋予一个实数（或复数） r_e，可以将其视为沿该边的流。

5.3. 热带几何中的平衡条件。 在 Γ 上，热带1-形式是对每条有向边赋予一个数值 r_e，并在每个顶点处满足平衡条件。

定义 5.2 定义（平衡条件）。在顶点 v 处，平衡条件为

$$\sum_{e \ni v} \varepsilon(v,e)\, r_e = 0, \tag{9}$$

其中，若 e 的方向背离 v，则 $\varepsilon(v,e) = +1$；若其方向朝向 v，则为 -1。

这类赋值也称为图上的调和 1形式。

5.4. 留数蕴含平衡。 固定一个分支 C_v。由于 ω 是在 C_v 上仅在节点处有极点的亚纯微分，光滑曲线 C_v上的留数定理给出：

$$\sum_{e \ni v} \mathrm{Res}_{Q_{v,e}}(\omega) = 0.$$

根据 r_e 的定义重写，恰好得到顶点 v处的平衡条件（9）。因此，我们有以下等价性：

$$\text{Residue theorem on components} \iff \text{balancing condition at vertices.}$$

这正是留数条件作为热带平衡的代数类比的确切含义。

5.5. **留数张成与热带雅可比簇。**代数留数空间

$$\{r_e\}_{e \in E(\Gamma)}$$

满足所有平衡条件的空间，其维数等于正规化的亏格加上 Γ 的第一贝蒂数（参见附录 C）。留数张成意味着，$H^0(C^\nu,\ \omega_{C^\nu})$ 上的所有线性泛函都能由节点处的留数数据检测到。

5.6. 热带雅可比簇。 热带雅可比簇 Jac(Γ) 定义为

$$\mathrm{Jac}(\Gamma) = \frac{\{\text{harmonic 1-forms on } \Gamma\}^{\vee}}{\{\text{integer cycles}\}},$$

其维数等于 $b_1(\Gamma)$。热带雅可比簇的非退化性意味着调和1-形式能够区分各个圈，即流与圈之间的配对是非退化的。

注 5.3. 留数张成保证热带曲线能够捕捉退化代数曲线上微分的所有一阶信息。从这个意义上说，热带雅可比簇不仅仅是一个组合影子，更是经典雅可比簇忠实的线性化极限（更多详情见 [10] ）

注 5.4. 这种对应关系是对数几何和热带几何中诸多结果的基础，包括雅可比簇的忠实热带化、极限线性级数以及非阿基米德霍奇理论。

注 5.5. 局部—整体相容条件在几何中无处不在。在退化曲线上的亚纯微分研究中，我们会遇到这样一条局部要求：节点处两个分支上的留数必须相消。在热带几何中，人们在顶点处施加平衡条件。在图论中，人们要求顶点处满足流守恒。尽管这些条件出自不同的表述体系，它们表达的是同一个数学原理：全局留数定理等价于局部平衡条件。

5.7. 经典起源。 对于紧致连通黎曼曲面 X，经典留数定理指出，对任意亚纯 1-形式 ω，

$$\sum_{p \in X} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0.$$

当 X 退化为节点曲线时，这一全局陈述分解为来自不可约分支和节点的贡献。每个分支上的留数定理都要求每个节点的两个分支处的留数之和为零。

5.7.1. 代数几何：扭积微分与稳定微分。 在现代微分模空间理论中，尤其是在亚伯尔微分或 k-微分分层的紧化中，人们引入了定义在节点曲线上的亚纯微分，并规定其在节点处的行为。关键的相容性要求通常称为全局留数条件。

命题 5.6（全局与局部留数条件的等价性）。 设 C 是一个约化射影曲线，其奇点全为节点，并且

$$\nu \colon \widetilde{C} \longrightarrow C$$

~是其正规化。设 η 是 C 上的一个亚纯微分，在节点的原像处至多有简单极点。则以下两个陈述等价：

~(i) *(整体条件)* 在 C 的每个连通分支上， η在其所有极点处的留数之和为零。

(ii) *(局部条件)* 在每个节点 $p \in C$，若

$$\nu^{-1}(p) = \{p^+, p^-\},$$

then

$$\mathrm{res}_{p^+}(\eta) + \mathrm{res}_{p^-}(\eta) = 0.$$

证明。我们分别证明 $(i) \Rightarrow (ii)$ 和 $(ii) \Rightarrow (i)$，从而证明它们等价，并给出所有中间步骤。

正规化下节点的结构。设 $p \in C$ 是一个节点。根据节点奇点的定义，C 在 p处的完备局部环同构于

$$k[[x, y]]/(xy).$$

正规化将两个分支分开，因此

$$\nu^{-1}(p) = \{p^+, p^-\},$$

其中 p^+ 和 p^- 是 C 上的光滑点，分别位于 p处 C 的不同局部分支上。因此，η 上的亚纯微分 C 在 p^+ 和 p^-处至多有简单极点，并且留数定义良好。

证明 $(i) \Rightarrow (ii)$。假设整体条件 **(i)** 成立。固定一个节点 $p \in C$，并令 $\nu^{-1}(p) = \{p^+, p^-\}$。

考虑包含 p^+ 的 C 的连通分支 C_0。有两种情况：

- p^- 位于 C 的另一个连通分支上，
- p^- 位于同一个连通分支 C_0 上。

在这两种情况下，p^+ 都是 C_0 上 η 的一个极点。根据全局假设 **(i)**，η 在 C_0 上所有极点处的留数之和为零。对 C 的每个连通分支，进行相同的推理。

现在对 C 的所有连通分支上的全局留数等式求和。η 的每个极点在这个总和中恰好出现一次。由于所有分支上的全部留数之和为零，因此每个节点上方两个分支贡献的留数必然相互抵消。因此，

$$\mathrm{res}_{p^+}(\eta) + \mathrm{res}_{p^-}(\eta) = 0.$$

这就证明了局部条件 **(ii)**。

证明 $(ii) \Rightarrow (i)$。现在假设局部条件 **(ii)** 成立。固定 C 的一个连通分支 C_0。

η 在 C_0 上的极点恰好是位于 C 中属于 C_0 的节点上方的点。对于每个这样的节点 $p \in C$，同样有两种可能：

p^+ 或 p^- 中恰有一个位于 C_0 上。

- 两者 p^+ 和 p^- 都位于 C_0上。

~在第一种情况下，根据局部条件 (ii)， C_0 上该点的留数被另一个连通分支上的留数抵消。在第二种情况下，两个留数都~位于 C_0 上，并且根据同一条件，它们的和为零。

~因此，每个节点对 C_0上的留数之和的贡献均为零。对 C_0上的所有~极点求和，可得

$$\sum_{\substack{q\in\widetilde{C}_0\\ q \text{ pole of } \eta}} \operatorname{res}_q(\eta) = 0.$$

~由于 C_0 是任意的，整体条件 (i) 在{ }的每个连通分支上都成立

结论。 我们已证明，在正规化 C 的每个连通分支~上，留数之和整体为零，等价于在 C的每个节点处留数局部成对抵消。这就完成了等价性的证明。 □

5.8. **代数表述**。

节点的局部模型。 设 q_e 是 $\mathcal{C}$的一个节点。从解析角度看， q_e 的一个邻域同构于

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 0\},$$

其中两个分支分别由 $x = 0$ 和 $y = 0$给出。正规化映射 ν : $C \to \mathcal{C}$将这两个分支分开，得到两个光滑点 q_e^+和 q_e^-，它们分别位于分支 C_{v^+} 和C_{v^-}上。

的留数–微分。 设 η 是光滑曲线上的一个亚纯 k–微分，局部写作

$$\eta = f(z)(dz)^k.$$

若 η 在 $z = 0$处有一个 k 阶极点，其局部展开为

$$\eta = \left(\frac{a}{z^k} + \cdots\right)(dz)^k,$$

则称系数 a 为 η 在 $z = 0$处的留数。当 $k = 1$ 时，这一概念与通常的留数一致；它也是扭积微分和 k–微分理论中的标准概念。

定理5.7 （留数平衡原理）。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{C}$上的一条连通结点曲线，其对偶图为 Γ。对于每个顶点 $v \in V(\Gamma)$，记相应的不可约分支为 $\mathcal{C}_v$；对于每条边 $e \in E(\Gamma)$，记关联节点为 q_e，其分支为$q_e^+ \in \mathcal{C}_{v^+}$ 和$q_e^- \in \mathcal{C}_{v^-}$。

Let

$$\eta_v \in H^0\big(\mathcal{C}_v,\, \omega_{\mathcal{C}_v}^{\otimes k}(*D_v)\big)$$

是 $\mathcal{C}_v$上的一个亚纯 k微分，且只允许在标记点和节点的原像处有极点。则以下条件等价:

(i) 对每个 $v \in V(\Gamma)$,

$$\sum_{p\in\mathcal{C}_v} \operatorname{Res}_p(\eta_v) = 0;$$

(ii) 对每个节点 q_e,

$$\mathrm{Res}_{q_e^+}(\eta_{v^+}) + \mathrm{Res}_{q_e^-}(\eta_{v^-}) = 0.$$

证明。 首先假设 (i) 成立。固定一个节点 q_e ，其分支为 $q_e^+ \in \mathcal{C}_{v^+}$ 和 $q_e^- \in \mathcal{C}_{v^-}$，并选取 q_e 的一个足够小的解析邻域 U ，使其不与其他节点或标记点相交。在 U 上，微分 η_{v^+} 和 η_{v^-} 定义了一个亚纯 k微分，其极点仅位于 q_e的两个分支上。在 $\mathcal{C}_{v^+}$ 和 $\mathcal{C}_{v^-}$上应用全局留数条件，并注意到所有其余极点都位于 U之外，可知两个分支上的留数之和必须为零，从而证明 (ii)。

反过 来，假设 (ii) 在每个节点处都成立。固定一个顶点 $v \in V(\Gamma)$ ，并令

$$\nu_v \colon C_v \longrightarrow \mathcal{C}_v$$

为 $\mathcal{C}_v$的正规化。将 η_v 拉回到 C_v 后，得到一个亚纯 k微分，其极点恰好是 $\mathcal{C}_v$ 上的标记点以及与v相接的节点的原像 $q_e^{\pm} \in C_v$ 。由于 C_v 是一个光滑紧黎曼曲面，留数定理给出

$$\sum_{p \in C_v} \mathrm{Res}_p(\eta_v) = 0.$$

将此和写成对标记极点及节点原像求和，并利用留数的局部配平条件 (ii) 抵消来自节点的贡献，可得

$$\sum_{p \in \mathcal{C}_v} \mathrm{Res}_p(\eta_v) = 0.$$

由于 v 是任意的，全局留数条件在每个分支上都成立，从而证明了 (i)。□

注 5.8。 证明仅依赖经典留数定理和节点的局部解析结构，不需要全局平滑化或变形论证。

注 5.9。 当亚纯微分在节点曲线上逐分支定义时，必须在节点处施加相容性条件。最自然的表达方式是要求留数在局部配平。反过来，要求留数定理在每个分支上成立，恰好会推出这种局部配平。

6. An Explicit Examples of a Meromorphic k–Differentials

6.1. 一个亚纯 3 阶微分的具体示例。 我们给出一个具体示例，以说明亚纯三微分的概念以及节点曲线上的全局留数条件。在本例中，区分微分形式与典范丛的张量幂十分重要。在复曲线 C 上，3 阶微分 并不意味着三阶微分形式，因为 $\Omega^3_C = 0$。相反，亚纯三微分是 $\omega_C^{\otimes 3}$ 的亚纯截面，即典范丛的三重张量幂。

6.2. 曲线。 设 $C = C_1 \cup C_2$ 是一条连通结点曲线，其中 $C_1 \cong \mathbb{P}^1$ 与 $C_2 \cong \mathbb{P}^1$ 在单个节点 q 处横截相交。 C 的对偶图由两个顶点和连接它们的一条边组成。我们关注不可约分支 C_1。

6.3. $\mathbb{P}^1$ **上的**3**典范丛**。在 $\mathbb{P}^1$ 上有

$$\omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2), \qquad \omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes 3} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-6).$$

$\omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes 3}$ 的一个亚纯截面因此可以在局部写成有理函数乘以（dz）^{3}，其中 z是一个适当的坐标。

6.4. 微分的定义。固定 $C_1 \cong \mathbb{P}^1$ 上的一个仿射坐标 z，使得节点 q 对应于 $z = 0$，且点 $z = \infty$ 是光滑的。定义

$$\eta_1 := \frac{(dz)^3}{z^3}.$$

该表达式 定义了 $\omega_{C_1}^{\otimes 3}$ 的一个亚纯截面，其极点仅位于 $z = 0$ 和 $z = \infty$.

6.5. 局部行为与留数。在节点 $z = 0$附近，该微分具有形式$\eta_1 = z^{-3}$（dz）^{3}, ，这是一个三阶极点。根据{k} k微分的留数标准定义，在 $z = 0$ 处的留数为 $\mathrm{Res}_{z=0}$（η_1）$= 1$.

为分析无穷远点处的行为，引入坐标 $w = 1/z$。于是

$$dz = -\frac{dw}{w^2}, \qquad (dz)^3 = -\frac{(dw)^3}{w^6},$$

代入后得到

$$\eta_1 = -\frac{(dw)^3}{w^3}.$$

因此， $z = \infty$ 也是一个三阶极点，其留数为

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}(\eta_1) = -1.$$

6.6. 全局留数条件。 C_1 上的 η_1 的极点恰为节点 $z = 0$ 和点 $z = \infty$，其留数分别为 $+1$ 和 -1。因此,

$$\sum_{p \in C_1} \mathrm{Res}_p(\eta_1) = 1 + (-1) = 0,$$

且分支 C_1上满足全局留数条件。

6.7. 节点曲线上的诠释。因此，微分 η_1 是不可约分支 C_1 上的一个有效亚纯三微分，并且在节点处具有非零留数。为了在节点曲线 C 上得到一个全局亚纯三阶微分，必须在第二个分支 C_2 上赋予一个亚纯三微分，使其在节点处的留数等于 -1。这一选择确保节点的两个分支处的留数相互抵消，符合留数平衡原理。

总结。我们已明确构造出一个节点曲线 $C = C_1 \cup C_2$ 以及一个亚纯三微分

$$\eta_1 = \frac{(dz)^3}{z^3}$$

在 $C_1 \cong \mathbb{P}^1$ 上，计算其局部留数，并验证全局留数条件。此例具体展示了节点曲线上高阶微分的留数平衡。

6.8. **示例：整体构造与高阶微分**。 节点曲线示例的补全。 我们继续讨论节点曲线

$$C = C_1 \cup C_2, \qquad C_1 \cong \mathbb{P}^1, \quad C_2 \cong \mathbb{P}^1,$$

其中两个分支在单个节点 q 处横截相交。在分支 C_1 上，我们此前定义了亚纯三微分

$$\eta_1 = \frac{(dz)^3}{z^3},$$

其中 z 是分支 C_1 上的仿射坐标， $z = 0$ 对应于该节点。我们证明了 η_1 在该节点处的留数为 $+1$ ，在 $z = \infty$ 处的留数为 -1 。

现在我们在 C_2 上构造一个显式的亚纯三微分，使得这一对 (η_1, η_2) 定义了一个满足留数平衡条件的整体对象。

6.9. 一个亚纯3微分于 C_2。 选取仿射坐标 u于 $C_2 \cong \mathbb{P}^1$，使节点 q 对应于 $u = 0$ ，且 $u = \infty$ 是一个光滑点。定义

$$\eta_2 := -\frac{(du)^3}{u^3}.$$

与以往一样， η_2 是$\omega_{C_2}^{\otimes 3}$ 的亚纯截面，其极点仅位于 $u = 0$ 和 $u = \infty$.

在节点 $u = 0$ 附近，我们有

$$\eta_2 = -u^{-3}(du)^3,$$

这是一个三阶极点，留数为

$$\mathrm{Res}_{u=0}(\eta_2) = -1.$$

在 $u = \infty$处，引入坐标 $v = 1/u$ 可得

$$\eta_2 = \frac{(dv)^3}{v^3},$$

因此

$$\mathrm{Res}_{u=\infty}(\eta_2) = +1.$$

6.10. 留数平衡的验证。在节点 q 处，两个分支分别对应于$z=0$ 在 C_1 上和 $u=0$ 在 C_2 上。留数满足

$$\mathrm{Res}_{z=0}(\eta_1)+\mathrm{Res}_{u=0}(\eta_2)=1+(-1)=0.$$

因此，节点处满足局部留数平衡条件。此外，每个分支上的留数之和均为零:

$$\sum_{p\in C_1}\mathrm{Res}_p(\eta_1)=0,\qquad \sum_{p\in C_2}\mathrm{Res}_p(\eta_2)=0.$$

因此，按照留数平衡原理，数对 $(\eta_1,\ \eta_2)$ 在节点曲线 C 上定义了一个全局亚纯三阶微分。

6.11. 一般 k阶微分的类似例子。 上述构造可直接推广到任意整数 $k\geq 1$ 对应的亚纯 k 阶微分。

设 $C_1\cong\mathbb{P}^1$ 的仿射坐标为 z，并考虑

$$\eta_1^{(k)}:=\frac{(dz)^k}{z^k}.$$

由于

$$\omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes k}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2k),$$

表达式 $\eta_1^{(k)}$ 定义了$\omega_{C_1}^{\otimes k}$ 的一个亚纯截面，在 $z=0$ 和$z=\infty$处具有 k 阶极点。

在 $z=0$附近，局部形式

$$\eta_1^{(k)}=z^{-k}(dz)^k$$

表明节点处的留数为

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(\eta_1^{(k)}\right)=1.$$

转换到无穷远点附近的坐标 $w=1/z$ 后得到

$$\eta_1^{(k)}=(-1)^k\frac{(dw)^k}{w^k},$$

因此

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}\left(\eta_1^{(k)}\right)=(-1)^k.$$

特别地， C_1 上的全局留数条件得到满足。

在第二个分支 $C_2\cong\mathbb{P}^1$ 上，以仿射坐标 u 定义

$$\eta_2^{(k)}:=-\frac{(du)^k}{u^k}.$$

Then

$$\mathrm{Res}_{u=0}\left(\eta_2^{(k)}\right)=-1,\qquad \mathrm{Res}_{u=\infty}\left(\eta_2^{(k)}\right)=(-1)^{k+1}.$$

再次，节点处的留数相互抵消:

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(\eta_1^{(k)}\right)+\mathrm{Res}_{u=0}\left(\eta_2^{(k)}\right)=0,$$

并且每个分支上都满足全局留数条件。

结论。 这些构造为任意 $k \geq 1$ 提供了节点曲线上的亚纯 k–微分的显式族，阐明了每个不可约分支上的全局留数定理以及节点处的局部留数平衡条件。它们为高阶微分的退化和k–微分层的紧化提供了具体的局部模型。

6.12. 具有多个分支和多个节点的例子。 在本小节中，我们将前面的构造推广到具有任意数量分支和节点的节点曲线。目标是给出亚纯 k–微分的显式、可计算模型，以全局且直观的方式展示留数平衡。

6.13. 一般设定。 设 C 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的连通节点曲线，其对偶图为 Γ。我们假设每个不可约分支 C_v 都同构于 $\mathbb{P}^1$，节点与 Γ的边一一对应，并且在每个节点 q_e处，两个分支 C_{v^+} 和 C_{v^-} 横截相交。现在固定一个整数 $k \geq 1$。 C 上的亚纯 k–微分由以下一组数据给出

$$\eta = \{\eta_v\}_{v \in V(\Gamma)}, \qquad \eta_v \in H^0\big(C_v, \omega_{C_v}^{\otimes k}(*\{\text{nodes}\})\big)\,,$$

并满足每个节点处的留数平衡条件。

6.14. 节点处的局部模型。 设 q_e 是连接分支 C_{v^+} 和 C_{v^-}的一个节点。在 C_{v^+} 上选取局部坐标 z，并在 C_{v^-} 上选取局部坐标 u，使得 q_e 分别对应于 $z = 0$和 $u = 0$。

我们施加标准局部形式

$$\eta_{v^+} = a_e \frac{(dz)^k}{z^k}, \qquad \eta_{v^-} = -a_e \frac{(du)^k}{u^k},$$

其中 $a_e \in \mathbb{C}$ 是附着于边 e的参数。于是

$$\mathrm{Res}_{z=0}(\eta_{v^+}) = a_e, \qquad \mathrm{Res}_{u=0}(\eta_{v^-}) = -a_e,$$

因此， q_e 处的留数平衡条件自动成立。

6.15. **每个分支上的全局构造**。 固定一个顶点 $v \in V(\Gamma)$，并令 $C_v \cong \mathbb{P}^1$。令

$$\{q_{e_1}, \ldots, q_{e_m}\}$$

设为与 C_v相邻的节点。选取 C_v 上的仿射坐标 z，使这些节点对应于互不相同的点

$$z = z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C},$$

且 $z = \infty$ 是 C_v的光滑点。

定义

$$\eta_v := \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a_{e_i}}{(z - z_i)^k} \right) (dz)^k.$$

这个表达式定义了 $\omega_{C_v}^{\otimes k}$ 的亚纯截面，其在节点$z = z_i$ 处具有阶为 k 的极点，并且可能在 $z = \infty$处也有极点。

6.16. **留数与无穷远点**。在 $z = z_i$ 附近，我们有

$$\eta_v = a_{e_i} \frac{(dz)^k}{(z - z_i)^k} + (\text{holomorphic terms}),$$

从而

$$\text{Res}_{z=z_i}(\eta_v) = a_{e_i}.$$

为分析无穷远点处的行为，引入坐标 $w = 1/z$。直接计算可得

$$\eta_v = (-1)^k \left(\sum_{i=1}^{m} a_{e_i} \right) \frac{(dw)^k}{w^k} + (\text{lower order terms}).$$

因此， $z = \infty$ 是一个阶为 k 的极点，其留数为

$$\text{Res}_{z=\infty}(\eta_v) = (-1)^k \sum_{i=1}^{m} a_{e_i}.$$

6.17. **每个分支上的全局留数条件**。在 C_v 上的留数之和因此为

$$\sum_{p \in C_v} \text{Res}_p(\eta_v) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{e_i} \right) + (-1)^k \left(\sum_{i=1}^{m} a_{e_i} \right).$$

对于所有 k，此和恒等于零。因此，全局留数条件在每个不可约分支上都成立。

6.18. 拼接成全局微分。在每个分支 C_v 上重复上述构造，并在每个节点 q_e的两个分支上使用相同的参数 a_e （符号相反），即可得到一个全局亚纯 k–微分

$$\eta = \{\eta_v\}_{v \in V(\Gamma)}$$

定义在整个节点曲线 C上。根据构造:

(1) 每个节点处的留数相互抵消；(2) 每个分支上都满足全局留数条件；(3) 该构造对边参数 a_e呈线性依赖。

6.19. **对偶图示例**。

链。如果 Γ 是一条链，参数 a_e 沿链传播，并决定所有局部行为。由此得到的微分刻画了具有指定主部的微分的退化。

树。如果 Γ 是一棵树，参数 $\{a_e\}$ 彼此独立，且每一种赋值都会产生一个有效的全局亚纯 k–微分。

含环图。如果 Γ 含有圈，留数平衡不会施加额外约束，但整体几何可能会限制哪些微分可以作为光滑曲线的极限出现。

结论。 这些构造为任意组合类型的节点曲线上的亚纯k–微分提供了显式的坐标级模型。它们展示了节点处的局部主部与留数平衡如何逐个分支地完全决定整体行为。

6.20. **对偶图含圈的节点曲线的一个具体例子**。我们给出一个具体例子：一条连通节点曲线，其对偶图恰好包含一个圈。所有构造均逐行明确写出。

6.21. **曲线的定义**。令 $C := C_1 \cup C_2 \cup C_3$ 为定义如下的 $\mathbb{C}$ 上的射影曲线。

(1) 每个不可约分支 C_i 都与 $\mathbb{P}^1$ 同构。(2) 各分支两两相交于三个不同的节点：

$$q_{12} \in C_1 \cap C_2, \qquad q_{23} \in C_2 \cap C_3, \qquad q_{31} \in C_3 \cap C_1.$$

(3) 不存在其他交点。

每个交点都是横截的，因此 C 的所有奇点都是普通节点。曲线 C 连通，且恰有三个节点。

6.22. **节点处的局部坐标**。选择仿射坐标

$$z_i \colon C_i \setminus \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

使节点对应于以下各点：

Node	分支 坐标值	
q_{12}	C_1	$z_1 = 0$
q_{12}	C_2	$z_2 = 0$
q_{23}	C_2	$z_2 = 1$
q_{23}	C_3	$z_3 = 0$
q_{31}	C_3	$z_3 = 1$
q_{31}	C_1	$z_1 = 1$

每个 C_i 的其余点都是光滑的。

6.23. **验证 C 是节点曲线**。在每个节点 q_{ij}处，曲线在局部解析地与 $\{xy = 0\} \subset \mathbb{C}^2$同构，其中一个分支来自 C_i ，另一个分支来自 C_j。因此， C 的所有奇点都是普通双点，且 C 是节点曲线。对偶图 Γ 有三个顶点、三条边和一个简单圈。从图论角度看， Γ 是一个三角形。

6.24. **拓扑不变量**。设 $g(C)$表示 C的算术亏格。由于每个 C_i的亏格均为 0，且 Γ 有一个圈，因此我们有

$$g(C) = \sum_{i=1}^{3} g(C_i) + b_1(\Gamma) = 1,$$

其中 $b_1(\Gamma)$ 是 对偶图的第一贝蒂数。因此， C 的算术亏格为 1.

6.25.**几何解释**。 曲线 C 可以视为一条光滑椭圆曲线退化为由三个有理分支组成的圈。这类曲线自然地出现在：

(1) 模空间 $\mathcal{M}_1$的边界中，(2) 椭圆曲线的稳定约化中，(3) 微分形式层的紧化中。

总结。 我们明确构造了：一条连通节点曲线 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$，其每个 $C_i \cong \mathbb{P}^1$，并且恰有三个节点，算术亏格为 1。其对偶图 Γ 包含一个圈。这个例子给出了一个节点曲线的典范模型，其对偶图恰好包含一个圈。

6.26. **循环节点曲线上的显式亚纯 k微分**。我们在节点曲线 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$、和 $C_i \cong \mathbb{P}^1$上构造显式亚纯 微分，其中各分支两两相交于节点

$$q_{12} \in C_1 \cap C_2, \qquad q_{23} \in C_2 \cap C_3, \qquad q_{31} \in C_3 \cap C_1.$$

C 的对偶图是一个单圈。

6.27. **坐标的选取**。在 $C_i \cong \mathbb{P}^1$ 上选取仿射坐标 z_i，使得：

$$\begin{aligned} q_{12} &: z_1 = 0 \text{ on } C_1, \quad z_2 = 0 \text{ on } C_2, \\ q_{23} &: z_2 = 1 \text{ on } C_2, \quad z_3 = 0 \text{ on } C_3, \\ q_{31} &: z_3 = 1 \text{ on } C_3, \quad z_1 = 1 \text{ on } C_1, \end{aligned}$$

并且对每个 i， $z_i = \infty$ 都是 C_i 的光滑点。

6.28。**节点处 k 微分的局部模型**。固定复数

$$a_{12},\ a_{23},\ a_{31} \in \mathbb{C},$$

每个节点对应一个。在连接 C_i 和 C_j 的节点处，我们规定标准局部形式

$$\eta_i = a_{ij}\,\frac{(dz_i)^k}{(z_i - z_{ij})^k}, \qquad \eta_j = -a_{ij}\,\frac{(dz_j)^k}{(z_j - z_{ji})^k},$$

其中 z_{ij} （分别为 z_{ji}）表示该节点在 C_i （分别在 C_j）上的坐标值。这确保了

$$\mathrm{Res}_{q_{ij}}(\eta_i) = a_{ij}, \qquad \mathrm{Res}_{q_{ij}}(\eta_j) = -a_{ij},$$

因此，每个节点处的留数平衡条件都会自动成立。

6.29. **每个分支上的微分的定义**。 使用上述参数，在每个分支上定义亚纯 k–微分:

$$\eta_1 := \left(\frac{a_{12}}{z_1^k} + \frac{a_{31}}{(z_1-1)^k}\right)(dz_1)^k,$$
$$\eta_2 := \left(\frac{-a_{12}}{z_2^k} + \frac{a_{23}}{(z_2-1)^k}\right)(dz_2)^k,$$
$$\eta_3 := \left(\frac{-a_{23}}{z_3^k} + \frac{-a_{31}}{(z_3-1)^k}\right)(dz_3)^k.$$

每个 η_i 都是 $\omega_{C_i}^{\otimes k}$ 的亚纯截面，其极点恰好是 C_i 上的节点处的 k 阶极点，也可能在无穷远点处有极点。

6.30. **节点处的留数**。 由构造可知，节点处的留数为:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{q_{12}}(\eta_1) = a_{12}, \quad && \mathrm{Res}_{q_{12}}(\eta_2) = -a_{12},\\
&\mathrm{Res}_{q_{23}}(\eta_2) = a_{23}, && \mathrm{Res}_{q_{23}}(\eta_3) = -a_{23},\\
&\mathrm{Res}_{q_{31}}(\eta_3) = -a_{31}, && \mathrm{Res}_{q_{31}}(\eta_1) = a_{31}.
\end{aligned}$$

因此，每个节点处都满足局部留数平衡条件。

6.31. **无穷远点处的行为与全局留数条件**。 我们分析η_i 在 $z_i = \infty$处的行为。令 $w_i = 1/z_i$ 为无穷远点附近的局部坐标。直接计算可得

$$\eta_i = (-1)^k \left(\sum_{\text{nodes } q\subset C_i} \mathrm{Res}_q(\eta_i)\right)\frac{(dw_i)^k}{w_i^k} + (\text{lower order terms}).$$

因此， $z_i = \infty$ 是一个 k 阶极点，其留数为

$$\mathrm{Res}_{z_i=\infty}(\eta_i) = (-1)^k \sum_{\text{nodes } q\subset C_i} \mathrm{Res}_q(\eta_i).$$

因此，每个分支上的留数之和满足

$$\sum_{p\in C_i} \mathrm{Res}_p(\eta_i) = 0, \qquad i = 1,2,3,$$

并且每个不可约分支上都满足全局留数条件。

6.32. **全局解释**。 这一族

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

在节点曲线 C 上定义了一个亚纯 k–微分。以这种方式构造的这类微分空间自然由三元组 $(a_{12}, a_{23}, a_{31}) \in \mathbb{C}^3$ 参数化。

对偶图中圈的存在并不妨碍满足留数平衡的亚纯k微分存在，但在退化过程中，它对于确定哪些此类微分是光滑 $differentials$ 的极限起着关键作用。

结论。 我们明确构造了定义在一条对偶图含有一个圈的节点曲线上的亚纯 k微分，验证了每个节点处的留数平衡，并检查了每个分支上的全局留数条件。这些例子为算术亏格为一的曲线上高阶微分的退化提供了具体的局部模型。

6.33. **亚纯3微分的尖点示例**。我们给出一个简洁且自成一体的例子，展示一条仅有一个尖点奇异性的曲线上的亚纯三微分，适合收录于期刊论文中。

*Exa*示例 6.1（尖点三次曲线）。设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 为由 b 定义的平面三次曲线 y

$$C: \quad y^2 = x^3.$$

曲线 C 不可约，并且在 $(x, y) = (0,0)$ 处有唯一的奇点，该点是一个尖点。 C 的算术亏格为 $p_a(C) = 1$。

Let

$$\nu \colon \widetilde{C} \longrightarrow C$$

设 ~为 C的正规化。那么 $C \cong \mathbb{P}^1$，且在仿射坐标中，正规化映射由下式给出

$$x = t^2, \qquad y = t^3.$$

~尖点的原像是单点 $t = 0 \in C$。

对偶化层。 由于 C 是奇异的，其典范丛由对偶化层 ω_C 取代。对于具有 δ–不变量 $\delta = 1$ 的单分支奇点，有如下标准描述

$$\omega_C \;\cong\; \nu_*(\omega_{\mathbb{P}^1}(2 \cdot 0)) \,.$$

因此，在坐标为 t 的 $\mathbb{P}^1$ 仿射图上， ω_C 的一个局部生成元为

$$\omega = \frac{dt}{t^2}.$$

（更多细节请参见附录 G。）

亚纯 3–微分。 取三重张量幂，得到

$$\omega_C^{\otimes 3} \;\cong\; \nu_*\big(\omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes 3}(6 \cdot 0)\big) \,.$$

相应地，生成元 ω 的立方定义了一个亚纯三微分

$$\eta := \omega^{\otimes 3} = \frac{(dt)^3}{t^6}.$$

~此表达式在 $t = 0$ 处有一个六阶极点，在 C 上的其他地方全纯。

尖点处的留数。 对于局部写成如下形式的 a k–微分

$$\eta = \left(a_{-k} t^{-k} + a_{-(k-1)} t^{-(k-1)} + \cdots\right) (dt)^k,$$

留数定义为 $\operatorname{Res}(\eta) = a_{-k}$。 在当前情况下，

$$\eta = t^{-6} (dt)^3$$

没有 t^{-3} 项。因此， η 在尖点处的留数为零：

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{cusp}}(\eta) = 0.$$

备注。

(1) 极点阶数 6 是最大值，且等于 $2k\delta$ ，其中 $k = 3$ 和 $\delta = 1$。(2) 与节点奇点不同，尖点只有一个分支，因此不存在留数平衡条件。(3) 此例说明，尖点曲线上的 k-微分如何通过正规化和对偶化层得到自然描述。

6.34. **一个具有非零 3-留数的尖点例子**。我们明确构造一条只有一个尖点的曲线上的亚纯 3-微分，其 3-留数非零。所有步骤均详细列出，并经过仔细论证。

1. 尖点曲线。设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 为由 C 定义的平面三次曲线： $y^2 = x^3$. 曲线 C 不可约，且在 (0，0) 处有唯一一个奇点，该点为尖点。其算术亏格为 $p_a(C) = 1$.

2. 正规化。设 $\nu : \widetilde{C} \longrightarrow C$ 为正规化映射。于是 $\widetilde{C} \cong \mathbb{P}^1$，在仿射图表 $\widetilde{C} \setminus \{\infty\}$ 上，正规化映射由 $x = t^2$ 给出；而 $y = t^3$，其中 t 是 $\mathbb{P}^1$上的仿射坐标。尖点上方唯一的点是 $t = 0$。

3. 对偶化层。由于 C 是奇异的，其典范丛由对偶化层 ω_C取代。对于具有 δ–不变量 $\delta = 1$的单分支奇点，有如下标准描述

$$\omega_C \;\cong\; \nu_*\big(\omega_{\mathbb{P}^1}(2 \cdot 0)\big)\,.$$

因此，三重张量幂满足

$$\omega_C^{\otimes 3} \;\cong\; \nu_*\big(\omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes 3}(6 \cdot 0)\big)\,.$$

因此， C 上的 3–微分对应于 $\omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes 3}$ 的一个亚纯截面，它在 $t = 0$ 处至多有 6 阶极点，且没有其他极点。

4. 亚纯 3–微分的定义。考虑 $\mathbb{P}^1$ 上的亚纯 3–微分 $\widetilde{\eta} := (dt)^{3}_{t^3}$. 。该微分在 $t = 0$处恰有 3 阶极点，且在 $\mathbb{P}^1$上没有其他极点。由于 $3 \le 6$，我们有

$$\widetilde{\eta} \;\in\; H^0\big(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}^{\otimes 3}(6 \cdot 0)\big)\,,$$

因此， $\widetilde{\eta}$ 通过推前定义了 $\omega_C^{\otimes 3}$ 的一个整体截面。

5. 诱导的3–微分于 C。定义 $\eta := \nu_*(\widetilde{\eta}) \;\in\; H^0(C,\ \omega_C^{\otimes 3})$。根据构造，$\eta$ 是 C上的亚纯三微分，在 C的光滑轨迹上全纯，并且在尖点处有一个极点。

6. 尖点附近的局部形式。在尖点附近，使用正规化坐标 t， η 的局部表达式为

$$\widetilde{\eta} = t^{-3}(dt)^3.$$

该极点阶数严格小于对偶化层所规定的最大允许阶数 6，因此 η 是 $\omega_C^{\otimes 3}$ 的有效截面。

7. 3–微分的留数定义。对于局部写成如下形式的 k–微分

$$\eta = \left(a_{-k}t^{-k} + a_{-(k-1)}t^{-(k-1)} + \cdots\right)(dt)^k,$$

其留数定义为

$$\mathrm{Res}(\eta) := a_{-k}.$$

这推广了通常对 1–形式所定义的留数概念。

8. 留数的计算。在我们的例子中， $\widetilde{\eta} = {}^{(dt)}{}_{t^3}{}^{3} = t^{-3}(dt)^3$. 与一般形式比较可知， $a_{-3} = 1$. 因此， η 在尖点处的留数为

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{cusp}}(\eta) = 1.$$

9. 备注。

(1) 尖点奇点只有一个分支，因此不存在留数平衡条件。(2) 与示例 $\eta = (dt)^3/t^6$ 不同，当前微分的 3-留数非零。(3) 这类微分自然会作为退化过程中光滑三微分的极限出现。

结论。 我们构造了尖点曲线上的一个显式亚纯三微分，其尖点处的留数非零：$\mathrm{Res}_{\mathrm{cusp}}(\eta) = 1$. 这个例子表明，尖点奇点允许高阶微分具有真正的留数数据，即使没有施加平衡条件。

6.35. **对数微分示例**。

例 6.2（带尖点的对数阿贝尔微分）。 设 (X, M_X) 是一条底层曲线带有尖点的对数曲线。考虑一个对数阿贝尔微分 $\eta \in H^0(X, \omega_X(\log D))$）。

在尖点附近的局部区域， η 具有如下形式

$$\eta = a\frac{dt}{t}.$$

几何解释。

(i) 系数 a 是对数留数。(ii) 尖点处只有一个分支。(iii) 不存在局部平衡条件。

整体约束。 对数留数定理意味着，所有边界点（节点和尖点）处的对数留数之和必须为零。

概念性解释。

(i) 节点会强制留数发生局部抵消 。(ii) 尖点表现为源或汇 ，且没有平衡配对项。(iii) 平衡条件不成立会阻碍整体对象的存在。

尖点。 对于尖点三次曲线 $X : y^2 = x^3$， 对偶化层 ω_X 的一个局部生成元是$\omega = \dfrac{dx}{y}$ ，而在正规化之后，它变为 $\omega = \dfrac{2\,dt}{t^2}$.

对偶化层的一般定义。 设 C 是约化曲线（可能有奇点）。对偶化层 ω_C 由以下事实刻画：

(i) 若 C 光滑，则 $\omega_C = \Omega^1_C$。(ii) 若 C 有奇点，则 ω_C 是正则微分层，即正规化上的亚纯1-形式，并且在奇点处满足留数条件。

对于平面曲线奇点，我们现在使用一种明确的代数描述。

对偶化层的平面曲线公式。 设 $C \subset \mathbb{A}^2$ 是由单个方程 $f(x, y) = 0$. 定义的平面曲线

引理 6.3 (标准公式)。 若 C 是约化平面曲线，则对偶化层 ω_C局部由以下元素生成

$$\omega_C = \left\langle \frac{dx}{\partial f/\partial y} \right\rangle = \left\langle -\frac{dy}{\partial f/\partial x} \right\rangle .$$

注 6.4。 这个公式由格罗滕迪克对偶性推出，可见于关于对偶化层和平面曲线奇点的标准参考文献。

公式在尖点三次曲线中的应用。 考虑 $f(x,\ y) = y^2 - x^3$. 计算偏导数： $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$. 由引理 6.3， 的一个生成元是 ω_C 是 $\omega = \dfrac{dx}{2y}$.相差一个非零常数因子（这不会影响线丛），它与 $\omega = dx$. 这就解释了第一个相等。y

正规化与参数 t。 正规化映射 $\nu : C \to C$ 由 $x = t^2$ 和 $y = t^3$， 给出，其中 $C \cong \mathbb{A}^1$ 的坐标为 t。计算： $dx = 2t\,dt$， 以及 $y = t^3$. 之后

代入 $\omega = \frac{dx}{y}$，得到 $\nu^*\omega = \frac{2t\,dt}{t^3} = \frac{2\,dt}{t^2}$. 因此，在正规化上：

$$\omega = \frac{2\,dt}{t^2}.$$

这就完成了第二个等式的推导。因此，在尖点附近，$\omega = \frac{dx}{}$ 是对偶化层的典范生成元y。

概念性解释。对于光滑点，ω_C 由全纯 1-形式构成；对于节点，正则微分在各分支上具有相反的留数；对于尖点，正则微分则只有一个对数极点。因此，$\frac{dt}{t}$ 的出现并非偶然：尖点的表现类似于对数边界点。

7. Residue Balancing with Arbitrary Singularities

当除子只有节点奇点时，留数映射有一种特别直观的描述，而由此产生的霍奇理论贡献可以通过局部正规交叉模型加以控制。这种简洁性使我们能够将留数直接关联到全局变形数据，并得出清晰的秩结论。

存在高阶奇点时，情况会变得更加微妙。奇点的局部结构会给留数带来额外的修正项，这反映了正规交叉条件的失效以及非平凡局部上同调的出现。因此，从节点过渡到高阶奇点需要对局部到整体的相互作用进行更精细的分析；不过，节点情形仍可作为指导模型，帮助我们理解留数如何变形，以及其霍奇理论行为如何改变。

在节点情形中，每个奇点恰有两个光滑分支，且曲线在局部解析同构于 $xy = 0.$。这种简单的正规交叉结构保证了两个关键事实：

(1) 每个分支上的留数都有定义且为简单留数；(2) 节点附近的对偶化层由两个分支上具有相反留数的简单极点刻画。

因此，局部平衡条件

$$\mathrm{Res}_{q_e^+}(\eta_{v^+}) + \mathrm{Res}_{q_e^-}(\eta_{v^-}) = 0$$

与微分下降为对偶化层的整体截面这一条件完全等价。

For 对于尖点，如果只考虑简单留数，这种等价性就不再成立。

尖点会出现什么问题。设 $p \in C$ 为一个尖点，例如在解析上由 $y^2 = x^3$.~给出。于是正规化映射 $\nu\colon C \to C$ 在 p上方只有一个分支。因此，

(i) 没有第二个分支可用于平衡留数；(ii) 单极点处留数的经典概念并不充分；(iii) 对偶化层允许出现高阶极点，而其主部受到导子理想的约束。

因此，节点处朴素的局部平衡条件在尖点处没有直接对应的形式。

~恰当的替代方案：导子层级平衡。设 $\nu\colon\ C \to C$ 是一条具有任意奇点的约化曲线 C 的正规化，且 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$ 是导子理想。对偶化层满足

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} \ = \ \omega_C(\mathfrak{c}),$$

~而 ω_C 的整体截面对应于 C 上的亚纯微分，其奇点上方各点处的主部被导子消去。

由此得到留数平衡的正确推广。

7.1. **具有任意奇点时的留数平衡**。我们先给出定义：

定义 7.1（导子理想）。 C 的导子理想 是最大的理想层 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$，它同时也是 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$ 的理想。等价地， $\mathfrak{c}$ 是 $\mathcal{O}_C$-模 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}/\mathcal{O}_C$ 的湮灭子。

当给定的曲线含有任意奇点时，我们有如下定理：

定理 7.2（具有任意奇点时的留数平衡）。 设 C 是 $\mathbb{C}$ 上的一条连通约化曲线，可能具有尖点或更一般的奇点，并设

$$\nu\colon \widetilde{C} \longrightarrow C$$

~ 是其正规化。对于位于 C 的某个奇点上方的每个点 $p \in C$，令 η_p 表示在 p 处亚纯 k–微分的主部。

一组 $\{\eta_p\}$ 能够下降为对偶化层 ω_C 的整体截面，当且仅当对于每个奇点 $x \in C$，位于 x 上方各局部分支所诱导的留数之和，按相应的导子重数加权后为零。

~证明。 令 $\nu\colon\ C \to C$ 为约化曲线 C的正规化。对偶化层 ω_C定义为表示 C的格罗滕迪克对偶的凝聚层。在约化曲线上，对偶化层的一个基本性质是存在一个自然嵌入

$$\omega_C \hookrightarrow \nu_*\omega_{\widetilde{C}},$$

它在 C的奇异轨迹之外是同构。因此， ω_C~的任意截面都可以视为光滑曲线 C上的亚纯微分，但须在位于 C奇点上方的点处满足额外的相容条件。

C 与其正规化之间的差异由导子理想来衡量。令~$\mathcal{O}_C$ 和 $\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$ 分别表示 C 和 C的结构层。导子理想$\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$ 定义为

$$\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_{\mathcal{O}_C}\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}/\mathcal{O}_C\big),$$

并且也可以等价地描述为 $\mathcal{O}_C$ 中同时也是 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$的理想的最大理想。直观来说，导子记录了 C 上的函数必须消失到何种阶，才能提升为正规化上的正则函数。

固定一个奇点 $x \in C$，令

$$\nu^{-1}(x) = \{p_1, \dots, p_r\}$$

$\widetilde{}$为位于 x之上的 C 中的点集，它们对应于 C 在 x处的局部分支。记$\widetilde{\mathcal{O}}_{C,x}$ 为 C 在 x处的局部环，并记$\mathcal{O}_{\widetilde{C}_{p_i},p_i}$ 为 C 在 p_i处的局部环。根据对偶化层的局部描述，

$$\omega_{C,x} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{C,x}}\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C},x}, \omega_{\widetilde{C},x}\big),$$

$\widetilde{}$其中 $\omega_{\widetilde{C}}$ 是光滑曲线 C上的典范丛。因此， ω_C 在 x处的局部截面对应于一个取值于 $\omega_{\widetilde{C}}$中的 $\mathcal{O}_{C,x}$–线性泛函，该泛函定义在 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C},x}$ 上。

现在考虑 $\{\eta_{p_i}\}$ 在$\widetilde{}$ $\widetilde{}$点处的亚纯 k–微分的主部集合 $p_i \in C$。这样的集合确定了 C 上的一个亚纯微分 η，其极点完全支撑在 C的奇异轨迹的原像上。问题在于刻画 η何时属于 ω_C在包含 $\omega_C \subset \nu_*\omega_{\widetilde{C}}$ 下的像，也就是说，何时 η下降为 ω_C的一个整体截面。

格罗滕迪克对偶为这一下降提供了一个具体判据。微分 η通过留数配对在 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C},x}$ 上定义了一个泛函；当且仅当对于每个局部函数 $f \in \mathcal{O}_{C,x}$，该泛函是 $\mathcal{O}_{C,x}$–线性的，才有

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Res}_{p_i}\big(f \cdot \eta\big) = 0.$$

这一条件确保乘以 f 可以移到配对之外，这恰好是使 η 定义 ω_C的一个截面所需的条件。

此时，导子理想自然地进入讨论。任意函数 $f \in \mathcal{O}_{C,x}$ 拉回到每个分支 $\mathcal{O}_{\widetilde{C},p_i}$ 上，都会成为一个阶至少为 c_i的函数，其中 c_i 表示对应于 p_i的分支的导子指数。因此，在计算 $f \cdot \eta$的留数时，只有 η 的首项会有贡献，而这些贡献按相应的导子重数加权。于是，上述留数条件等价于下面这个加权留数关系

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \mathrm{Res}_{p_i}(\eta) = 0.$$

若对每个奇点 $x \in C$，这些留数的加权和都为零，则对所有 $f \in \mathcal{O}_{C,\,x}$，留数配对条件均成立，因此 η 定义了 ω_C的一个截面。反过来，若η 下降为 ω_C的一个截面，则对所有局部函数，留数配对都必须为零；特别是对导子理想的生成元也如此，这就推出了上述加权留数条件。由此得到所述等价性，并完成证明。□

注记 7.3。该定理表明，对于具有任意奇点的曲线，必须通过引入导子权重来细化经典留数平衡条件。当所有导子权重都等于 1 时，对应于节点的情形，此时恢复通常的留数消去条件。

几何与解析解释。

(i) 对于节点，导子条件恰好化为经典要求：两个留数相互抵消。(ii) 对于尖点，该条件变为对标准化参数中 t^{-1} 的系数的留数施加消失约束，并对高阶项施加额外约束。(iii) 因此，尖点贡献的是内部平衡条件，而非成对条件。

与热带几何的关系。 在热带几何中，对应高价点或奇异点的顶点带有权重，并施加涉及所有 关联边的平衡条件。尖点对应于具有非平凡亏格或自相互作用的顶点，其平衡涉及内部约束，而非边间消去。

导子加权留数条件正是这一现象的代数类比。

结论。

(1) 原始的留数平衡定理对于节点曲线完全正确。(2) 对于带有尖点或更严重奇点的曲线，必须将节点上的平衡替换为正规化上的导子层级平衡。(3) 经此修改后，该定理仍然成立，并继续表达最大变分和全局留数平衡。

注7.4。从概念上说，节点曲线恰好是留数平衡纯粹由成对条件构成的曲线。更复杂的奇点则会引入由对偶化层编码的高阶平衡约束。

概念意义。导子加权留数条件表达了将局部亚纯微分粘合成全局对偶化截面时所遇到的精确障碍。它是以下内容的正确推广：

(1) 光滑黎曼曲面上的留数定理；(2) 节点处的留数
抵消；(3) 热带几何中的平衡条件。

注记 7.5。 从这一视角来看，留数平衡并非临时拼凑的条件，而是对偶理论的结构性结果。导子记录了奇点的严重程度，而加权留数和则精确记录了亚纯微分未能在全局下降的程度。

8. Examples: Node、 Cusp和 and Tacnode

本节通过三个具体的局部例子说明导子层级平衡。在每个例子中，我们都会描述正规化、计算导子、分析正规化上的亚纯微分，并精确说明导子条件如何刻画那些能够下降到奇异曲线的对偶化层的亚纯微分。

例*1*：一个节点。令 $C = \mathrm{Spec}\ A$，并令 $A = k[x,y]/(xy)$，为原点处节点曲线的局部环。其正规化为 $X = \mathrm{Spec}\, B$，并且 $B = k[u] \oplus k[v]$，通过 $x = u, y = 0$ 对应第一分支，通过 $x = 0, y = v$ 对应第二分支。导子为

$$\mathfrak{c} = (x,y) \subset A,$$

这对应于节点处的极大理想。在包含 $A \hookrightarrow B$下，此理想映射为 $(u) \oplus (v)$。

~在 C 上，一个在节点原像处可能有极点的亚纯微分具有如下形式

$$\eta = \left(a\,\frac{du}{u} + \text{holomorphic}\right) \oplus \left(b\,\frac{dv}{v} + \text{holomorphic}\right),$$

其中 $a,\ b \in k$。

导子 条件。当且仅当乘以 $\mathfrak{c}$ 会消去主部 if

$$a + b = 0.$$

这正是节点处经典的留数平衡条件。

结论。因此，在节点情形中，导子层级平衡与逐节点留数平衡一致，并且恰好消去一个自由度，从而得到最大变分。

例*2*：尖点。设 $C = \text{谱}\, A$，且 $A = k[x,y]/(y^2 - x^3)$，为原点处尖点曲线的局部环。其正规化为 $C = \text{谱}\, k[t]$，其中 $x = t^2$，并且 $y = t^3$. 可计算其导子

$$\mathfrak{c} = (x,y) \subset A,$$

~这在 $k[t]$中对应理想 (t^2)。在 X 上、于 $t = 0$ 处有极点的一般亚纯微分为

$$\eta = \left(\frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \text{holomorphic}\right) dt, \qquad a, b \in k.$$

导子条件。</style}乘以 $\mathfrak{c} = (t^2)$ 会消去主部，当且仅当 $t^{-2}dt$ 的系数为零。因此 $a = 0$，而 $t^{-1}dt$ 项是允许的。

解释。仅凭留数无法检测下降障碍：项 $t^{-2}dt$的留数为零，但并不下降到 C。导子恰好消除这一项，而不会消除更多内容。

结论。导子层级平衡恰好去除了不下降的主部，保留了正确的维数，因而体现了最大变分；相比之下，仅凭留数 van-ishingalone 是不够的。

例 *3*：二重点。令 $C =$ 谱 A，其中 $A = k[x,y]/(y^2 - x^4)$，为尖点曲线的局部环。其正规化有两个分支：

$$\widetilde{C} = \mathrm{Spec}(k[t] \oplus k[s]), \qquad x = t^2 = s^2, \quad y = t^4 = -s^4.$$

导子为

$$\mathfrak{c} = (x^2, y) \subset A,$$

它在正规化中的像为 $(t^4) \oplus (s^4)$。在二重点原像处有极点的亚纯微分具有如下形式

$$\eta = \left(\frac{a_1}{t^3} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t} + \text{holomorphic}\right) dt \ \oplus \ \left(\frac{b_1}{s^3} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s} + \text{holomorphic}\right) ds.$$

导子条件。乘以$(t^4) \oplus (s^4)$会消去所有 ≤ 3 阶主部。因此，所有 t^{-3}，t^{-2} 和 s^{-3}，s^{-2} 阶项都必须消失，而简单极点仍受一个线性关系约束。

解释。与节点情形不同，高阶主部会阻碍下降。导子恰好消去这些部分，同时保留恰当数量的自由度。

结论。二重点表明，导子层级平衡通过纳入高阶数据，将留数平衡推广开来，从而恢复最大变分。

总体结论。 这些例子表明：

(1) 对于节点，导子重现经典留数平衡；(2) 对于尖点，它能检测到留数无法揭示的高阶障碍；(3) 对于二重点，它能同时控制多个分支和高阶极点。

在所有情况下，导子层级平衡恰好移除了无法下降的主部，并保留最大变分。

8.1. 向具有多个奇点的射影曲线整体化。 在本小节中，我们将全局理论重新表述为由定义、引理、命题和定理组成的精确公理化结构。我们的目标是将局部导子层级分析整体化到任意约化射影曲线，并证明导子为对偶化微分提供了完备且统一的下降判据。

全局设定。

定义 8.1（全局几何数据）。 设 k 为一个代数闭域，设 X 为 $\widetilde{}$ 上的约化射影曲线。记 $\nu\colon C \longrightarrow C$ 为正规化态射。我们将 $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset C$ 记为 C 的奇点所成的有限集合。对于每个 $x_i \in \Sigma$，我们将 $\nu^{-1}(x_i) = \{p_{i1}, \ldots, p_{in_i}\}$ 记为 C 中位于 x_i 之上的点集。

引理 8.2（导子的支集与分解）。 导子理想 $\mathfrak{c}$ 恰好支集于奇异轨迹 Σ 上。此外，它分解为

$$\mathfrak{c} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{c}_{x_i},$$

其中 $\mathfrak{c}_{x_i}$ 表示奇点 x_i处的 $\mathfrak{c}$ 的茎。

证明。 由于 ν 在 C的光滑轨迹上是同构，因此在 Σ之外有 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} = \mathcal{O}_C$ ，所以商 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}/\mathcal{O}_C$在那里消失。因此，导子支撑在 Σ上。该分解源于 Σ是有限的，且 $\mathfrak{c}$ 是按茎层地定义的这一事实。□

正规化上的亚纯微分。

定义 8.3（极点受控的亚纯微分）。 令 $\omega_{\widetilde{C}}$ 表示光滑曲线 C的典范线丛。定义有效除子

$$D := \nu^{-1}(\Sigma) = \sum_{i,j} p_{ij}.$$

~层 $\omega_{\widetilde{C}}(D)$由 C上的亚纯微分构成，它们在 D之外正则，并且在点 p_{ij}处至多有有限阶极点。

注记 8.4. 在每个点 p_{ij} 的局部，$\omega_{\widetilde{C}}(D)$ 的截面都存在洛朗展开，其有限主部由 p_{ij} 处的局部参数决定。

8.2. **导子的局部到整体条件**。

~**定义 8.5 (**导子的局部湮灭**).** 设 $\eta \in H^0(C, \omega_{\widetilde{C}}(D))$。我们称 η 在 $x_i \in \Sigma$ 处满足局部导子条件，如果对于每个 $f \in \mathfrak{c}_{x_i}$，乘积 $f \cdot \eta$ 在任意点 $p_{ij} \in \nu^{-1}(x_i)$ 都没有极点。

引理 8.6 (与主部湮灭的等价性**).** 设 $x_i \in \Sigma$ 是一个奇点，并设 $\nu^{-1}(x_i) = \{p_{i1}, \ldots, p_{in_i}\}$.。对于截面 $\eta \in H^0\left(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)\right)$，以下条件等价：

(i) 对每个 $f \in \mathfrak{c}_{x_i}$，乘积 $f \cdot \eta$ 在任意点 p_{ij} 都没有极点。*(ii)* 对每个 j，η 在 p_{ij} 处的主部被 $\mathfrak{c}_{x_i}$ 消去。

证明。 我们逐步证明这种等价性。

~分支处的局部结构。 固定一个分支 $p_{ij} \in \nu^{-1}(x_i)$。由于 C 光滑，局部环$\mathcal{O}_{\widetilde{C},\, p_{ij}}$ 是一个离散赋值环。取 p_{ij} 处的局部参数 t_{ij} 。那么，在 p_{ij} 附近的任意亚纯微分 η 都可以唯一地写成

$$\eta = \left(\sum_{m=-M}^{\infty} a_m t_{ij}^m \right) dt_{ij}, \qquad a_m \in k,$$

对于某个整数 $M \geq 0$。

主部的定义。 主部的 η 在 p_{ij} 是有限和

$$\mathrm{pp}_{p_{ij}}(\eta) = \left(\sum_{m=-M}^{-1} a_m t_{ij}^m \right) dt_{ij}.$$

微分 η 在 p_{ij} 处正则，当且仅当 $\mathrm{pp}^{p_{ij}}(\eta) = 0$。

导子的作用。 设 $f \in \mathfrak{c}_{x_i}$。 根据导子的定义， f 同时作用于 x_i 上方的所有分支，因此作用于每个局部环 $\mathcal{O}_{\tilde{C},\, p_{ij}}$。 相乘得到

$$f \cdot \eta = \left(\sum_{m=-M}^{\infty} f a_m t_{ij}^m \right) dt_{ij}.$$

由 *(i)* 推出 *(ii)*。 假设条件 (i) 成立。那么对每个 $f \in \mathfrak{c}_{x_i}$，乘积 $f \cdot \eta$ 在 p_{ij} 处没有极点。这意味着 $f \cdot \eta$ 的展开式中 t_{ij} 的所有负次幂都消失。等价地，

$$f a_m = 0 \qquad \text{for all } m < 0.$$

因此， f 消去主部 $\mathrm{pp}^{p_{ij}}(\eta)$ 中出现的每个系数。由于这对所有 $f \in \mathfrak{c}_{x_i}$ 都成立，主部被 $\mathfrak{c}_{x_i}$ 消去。因此 (ii) 成立。

由 *(ii)* 推出 *(i)*。 反过来，假设条件 (ii) 成立。那么对每个 j 以及每个 $f \in \mathfrak{c}_{x_i}$，都有

$$f a_m = 0 \qquad \text{for all } m < 0.$$

因此， $f \cdot \eta$ 在 p_{ij} 处的展开式不含 t_{ij} 的负幂，所以 $f \cdot \eta$ 在 p_{ij} 处是正则的。由于这对 x_i 上方的每个分支 p_{ij} 都成立，乘积 $f \cdot \eta$ 沿 $\nu^{-1}(x_i)$ 没有极点。因此 (i) 成立。

结论。 我们已经证明，条件 (i) 和 (ii) 彼此蕴含。因此， x_i 处的局部导子条件等价于茎 $\mathfrak{c}_{x_i}$ 湮灭 p_{ij} 处 η 的主部。□

定义 8.7 （全局导子条件）。 截面 $\eta \in H^0(C,\ \omega_{\tilde{C}}(D))$ 满足全局导子条件，如果它在每个奇异点 $x_i \in \Sigma$ 处都满足局部导子条件。

8.3. 全局对偶与精确下降。

定理 8.8 （正规化的格罗滕迪克对偶）。 存在层 $\nu_* \omega_{\tilde{C}} \cong \omega_C$（$\mathfrak{c}$）的典范同构，其中 ω_C 表示 C 的对偶化层。

命题 8.9 (整体截面的刻画)。 取整体截面得到相等式

$$H^0(C, \omega_C) = \left\{ \eta \in H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) \;\middle|\; \eta \textit{ satisfies the global conductor condition} \right\}.$$

证明。 我们通过详细证明两个包含关系来证明该相等式。

正规化的格罗滕迪克对偶。 根据有限态射 ν 的格罗滕迪克对偶，有一个层的典范同构

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} \;\cong\; \omega_C(\mathfrak{c}) = \omega_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathfrak{c}.$$

取整体截面可得

$$H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}) \;\cong\; H^0(C, \omega_C(\mathfrak{c})).$$

I ~含极点的层的包含。 在 C 上有一个层的自然嵌入 ,

$$\omega_{\widetilde{C}} \hookrightarrow \omega_{\widetilde{C}}(D),$$

这对应于允许沿着 D 出现极点。通过 ν 推前，我们得到一个包含

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} \hookrightarrow \nu_*\omega_{\widetilde{C}}(D).$$

() 的描述$\nu_*\omega_{\widetilde{C}}(D)$。 $\nu_*\omega_{\widetilde{C}}(D)$ 在开集 $U \subset C$ 上的局部截面是 $\nu^{-1}(U)$ 上的亚纯微分，它在 $\nu^{-1}(\Sigma)$ 之外正则，并且在位于 C 的奇点上方的点处有有限阶极点。

导子扭曲的解释。根据定义，

$$\omega_C(\mathfrak{c}) = \{\alpha \in \omega_C \otimes_{\mathcal{O}_C} K(C) \mid f \cdot \alpha \in \omega_C \text{ for all } f \in \mathfrak{c}\},$$

其中， $K(C)$ 表示 C 的全商环。因此， $\omega_C(\mathfrak{c})$ 的一个截面是一个亚纯对偶化微分，其极点受到在 $\mathfrak{c}$ 下湮灭的控制。

包含“$\subseteq$”。令 $\xi \in H^0(C,\ \omega_C)$。将 ξ 视为 $\omega_X(\mathfrak{c})$ 的一个截面，格罗滕迪克对偶给出一个相应的截面

$$\eta \in H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}).$$

~由于 $\omega_{\widetilde{C}} \subset \omega_{\widetilde{C}}(D)$，我们可以将 η 视为 $H^0(C,\ \omega_{\widetilde{C}}(D))$ 的一个元素。由于 η 在 C 的任意点处都没有极点~，因此它在每个奇点处都显然满足局部导子条件。因此

$$\eta \in \left\{ \eta \in H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) \;\middle|\; \eta \text{ satisfies the global conductor condition} \right\}.$$

~包含“$\supseteq$”。反过来，设 $\eta \in H^0(C,\ \omega_{\widetilde{C}}(D))$ 满足全局导子条件。根据定义，对于每个 $f \in \mathfrak{c}$，乘积 $f \cdot \eta$ 沿 $\nu^{-1}(\Sigma)$ 都没有极点。因此，

$$f \cdot \eta \in H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}) \qquad \text{for all } f \in \mathfrak{c}.$$

将其推前到 C，这意味着 η 定义了 $\omega_C(\mathfrak{c})$ 的一个截面。由于导子是 $\mathcal{O}_C$ 的理想，消去所有主部可确保 η 唯一地下降为一个整体截面

$$\xi \in H^0(C, \omega_C).$$

两个空间相等。 根据上文的论证，我们证明了这两个集合~互相包含。因此，它们作为 $H^0(C, \omega_{\widetilde{C}}(D))$ 的子集是相等的。

结论。 正规化上的亚纯微分能够下降为 C 对偶化层的整体截面，当且仅当其在奇点上方所有分支处的主部均被导子消去。这就证明了所述刻画。 □

我们证明了，根据格罗滕迪克对偶， ω_C 的一个截面对应于$\omega_{\widetilde{C}}$的一个截面，其极点受导子控制。 $\mathfrak{c}$ 消去所有主$\widetilde{}$部分的条件，恰好是从 C 下降到 C的判据。

8.4. **精确维数计数**。

$\widetilde{}$**命题 8.10** （维数平衡）。 向量空间 H^0（$C,\omega_{\widetilde{C}}$（D）的维数为

$$h^0(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{C}}(D)) = h^0(C,\omega_C) + (\textit{total number of local polar degrees of freedom}).$$

证明。 我们通过详细的整体—局部分析来证明该命题。

化归为短正合序列。 根据除子 D的定义，在 C上有如下自然的层短$\widetilde{}$正合序列：

$$0 \longrightarrow \omega_{\widetilde{C}} \longrightarrow \omega_{\widetilde{C}}(D) \longrightarrow \omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D \longrightarrow 0.$$

商层 $\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D$是一个天穹层，其支集为有限点集 p_{ij}。

取整体截面。取整体截面得到一个长正合列：

$$0 \longrightarrow H^0(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{C}}) \longrightarrow H^0(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{C}}(D)) \longrightarrow H^0\big(D,\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D\big) \longrightarrow H^1(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{C}}) \longrightarrow \cdots$$

最后一项的消失 $\widetilde{}$。由于 C 是光滑射影曲线，塞尔对偶给出

$$H^1(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{X}}) \cong H^0(\widetilde{C},\mathcal{O}_{\widetilde{C}})^\vee.$$

$\widetilde{}$由于 C 是连通的射影对象，

$$\dim H^0(\widetilde{C},\mathcal{O}_{\widetilde{C}}) = 1,$$

$\widetilde{}$因此 $H^1(C,\omega_{\widetilde{C}})$ 是一维的。然而，连接同态

$$H^0\big(D,\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D\big) \longrightarrow H^1(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{C}})$$

由于 $\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D$的支撑维数为零，因此它消失了。由此，我们得到一个短正合序列

$$0 \longrightarrow H^0(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{C}}) \longrightarrow H^0(\widetilde{C},\omega_{\widetilde{C}}(D)) \longrightarrow H^0\big(D,\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D\big) \longrightarrow 0.$$

商空间的解释。向量空间

$$H^0\big(D,\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D\big)$$

分解为所有点 $p_{ij} \in D$ 上的直和：

$$H^0\big(D,\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_D\big) = \bigoplus_{i,j} H^0\Big(p_{ij},\omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_{p_{ij}}\Big).$$

每个直和项参数化了点 p_{ij} 处亚纯微分的可能主部。

局部极点自由度。在每个分支 p_{ij}处，的维数

$$H^0\Big(p_{ij}, \omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_{p_{ij}}\Big)$$

等于该分支上允许的独立极点系数的数量。这些系数组成一个有限维向量空间，其维数仅取决于奇点 x_i 的局部几何以及 p_{ij}处 D 的重数。

根据定义，对所有 $i,\ j$ 上的这些维数求和，恰好得到局部极点自由度总数。

正规化上的维数计数。由步骤 3 中的短正合序列可得

$$h^0\Big(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)\Big) = h^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}) + \sum_{i,j} \dim H^0\Big(p_{ij}, \omega_{\widetilde{C}}(D)\big|_{p_{ij}}\Big)\,.$$

与 C上的对偶化层比较。根据正规化的格罗滕迪克对偶，

$$H^0(C, \omega_C) \cong H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}})$$

因为 $\omega_{\widetilde{C}}$ 由在奇异轨迹上方没有极点的微分组成。将这一相等代入前一个公式，得到

$$h^0\Big(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)\Big) = h^0(C, \omega_C) + (\text{total number of local polar degrees of freedom}).$$

结论。 允许沿 D 出现极点，使整体微分空间的维数恰好增加局部极点参数之和，并且在此阶段不会出现整体约束。这证明了所述的维数平衡。

□

定理 8.11（导子约束的正合性）。整体导子条件恰好施加必要数量的独立线性约束，将$\sim H^0$（C,$\omega_{\widetilde{C}}$（D））降至 H^0（C,ω_C）。特别地，

$$\dim H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) - (\textit{number of conductor conditions}) = \dim H^0(C, \omega_C).$$

不会出现额外约束，也不会失去任何可容许截面。

更确切地说，下面我们将证明导子约束的独立性与正合性，以及它们与留数和 δ-不变量的关系。

定理 8.12（导子约束的独立性与正合性）。 设 C 是一条约化射影曲线，设 ν: $C \longrightarrow C$ 是其正规化，设 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$ 是导子理想，且设 $D = \nu^{-1}(\Sigma)$ 是支撑在奇异轨迹原像上的除子。则施加于 $H^0(C, \omega_{\widetilde{C}}(D))$ 上的整体导子条件彼此独立且正合。更确切地说，这些条件切出一个与 $H^0(C, \omega_C)$ 典范同构的线性子空间，且独立条件的数量等于局部极点自由度的总数。

证明。 我们将按一系列明确的步骤进行。

极部数据的局部分解。 由于 D 支撑在有限多个点上，商

$$\omega_{\widetilde{C}}(D)/\omega_{\widetilde{C}}$$

是一个支撑在 D上的天穹层。取整体截面后得到直和分解

$$H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) = H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}) \oplus \bigoplus_{i,j} P_{ij},$$

其中，每个 P_{ij} 都是分支 p_{ij}处亚纯微分主部所构成的有限维向量空间。

局部导子约束。 固定一个奇点 $x_i \in \Sigma$。茎 $\mathfrak{c}_{x_i}$ 同时作用于所有分支 $\{p_{i1}, \ldots, p_{in_i}\}$。 x_i处的局部导子条件要求

$$\mathfrak{c}_{x_i} \cdot \mathrm{pp}_{p_{ij}}(\eta) = 0 \qquad \text{for all } j.$$

这定义了一个线性子空间

$$P_i^{\mathrm{adm}} \subset \bigoplus_{j=1}^{n_i} P_{ij}$$

由 x_i 处的可容许极性数据组成。

奇点之间的独立性。由于导子分解为

$$\mathfrak{c} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{c}_{x_i},$$

并且由于极性空间 $P_i := \bigoplus_j P_{ij}$ 支持在不同的点上，不同奇点处的导子条件涉及步骤 1 中直和分解的互不相交的直和项。因此，在不同奇点处施加的线性约束彼此独立。

精确性 约束的根据正规化的格罗滕迪克对偶，我们有

$$H^0(C, \omega_C) \cong \left\{ \eta \in H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) \;\middle|\; \eta \text{ satisfies all conductor conditions} \right\}.$$

将维数与维度平衡命题进行比较可知，独立线性导体约束的数量恰好为

$$\sum_{i,j} \dim P_{ij}.$$

因此，除了导子施加的约束外，不存在其他关系，也没有任何允许的截面被排除。这就证明了精确性。□

定理 8.13（与留数和 δ-不变量的关系）。沿用上文的记号，设 $x \in \Sigma$ 是 C 的一个奇点，其分支为 $\nu^{-1}(x) = \{p_1, \ldots, p_n\}$。则：

(1) x 处的导子条件推广了节点处的经典留数平衡条件。*(2)* x 处局部导子约束的独立总数等于该奇点的 δ-不变量 δ_x。

证明。我们再次分步进行。

~光滑点处的留数。在 C 的光滑点处，亚纯微分有定义良好的留数。对于具有两个分支 p_1，p_2 的节点，经典下降条件为

$$\operatorname{res}_{p_1}(\eta) + \operatorname{res}_{p_2}(\eta) = 0.$$

作为导子特例的节点。对于节点，导子理想是奇点的极大理想。导子对主部的湮灭迫使留数之和为零。因此，在这种情况下，留数平衡恰好就是导子条件。

高阶奇点。对于一般奇点，每个分支上都可能出现高阶极点。导子条件不仅消去留数，还会消去所有妨碍微分形式下降的高阶极部系数。留数平衡只是更大线性条件系统中最低阶的部分。

δ不变量作为维数度量。根据定义，

$$\delta_x = \dim_k \left((\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{C}})_x / \mathcal{O}_{C,x} \right).$$

对偶性将该空间与妨碍微分形式下降的局部极部障碍空间对应起来。因此，δ_x 恰好计数x处独立线性导子约束的数量。

全局求和。对所有奇点求和，

$$\sum_{x \in \Sigma} \delta_x = \dim H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) - \dim H^0(C, \omega_C),$$

其中 m 恰好对应于导子条件所导致的维数下降。 □

8.5. **整体情形下的最大变分。**

定理 8.14 (极大变分的保持**)。** 设 C 是一条具有有限个任意类型奇点的约化射影曲线 $\widetilde{}$，设 $\nu\colon\ C \longrightarrow C$ 为其正规化，设 $\lrcorner\mathfrak{c}$ 为导子理想，并设 $D = \nu^{-1}(\Sigma)$ 为 C 上支撑于奇异轨迹原像的除子。则施加于不同奇点处的导子条件彼此独立且相容。因此，整体对偶微分的最大变分在整体化下得以保持。

证明。

最大变分的含义。 最大变分意味着，正规化上的可容许亚纯微分空间的维数恰好等于 dim $H^0(C,\ \omega_C)$，因此，除了下降到C所需的线性约束外，不会引入任何非预期的线性约束。

亚纯微分的整体空间。 允许沿 D有极点后，我们得到有限维向量空间

$$H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)),$$

它分解为

$$H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}) \ \oplus \bigoplus_{x_i \in \Sigma} \left(\bigoplus_{p_{ij} \in \nu^{-1}(x_i)} P_{ij} \right),$$

其中每个 P_{ij} 都是分支 p_{ij}处的主部空间。

导子约束的局部性质。导子理想分解为

$$\mathfrak{c} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{c}_{x_i},$$

其中 $\mathfrak{c}_{x_i}$ 支撑在奇点 x_i处。在 x_i 处的局部导子条件只涉及位于 x_i 上方的主部空间 $\{P_{ij}\}_j$，而不涉及任何其他奇点上方的极部数据。

约束的独立性。 由于对应于不同奇点的主部空间位于彼此不相交的直和项中，

$$\bigoplus_{x_i \in \Sigma} \ \bigoplus_{p_{ij} \in \nu^{-1}(x_i)} P_{ij},$$

由 $\mathfrak{c}_{x_i}$ 和 $\mathfrak{c}_{x_k}$ 针对 $i \neq k$ 施加的线性条件作用于互不相交的向量子空间。因此，不同奇点处的导子约束线性独立。

约束的相容性。 每个局部导子条件都确保相应的极部数据消灭该奇点处的下降障碍。由于导子定义为各局部茎的交，同时满足所有局部条件等价于满足全局导子条件。各局部条件彼此不矛盾，因此约束系统是相容的。

精确性与维数比较。 根据维数平衡命题，我们有

$$\dim H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) = \dim H^0(C, \omega_C) + \sum_{x_i \in \Sigma} \delta_{x_i},$$

其中 δ_{x_i} 是奇点 x_i的 δ-不变量。根据导子约束的正合性，由 $\mathfrak{c}$ 施加的独立线性条件总数恰好为

$$\sum_{x_i \in \Sigma} \delta_{x_i}.$$

对偶化空间的恢复。 施加所有导子约束后，从$\sim H^0(C, \omega_{\tilde{C}}(D))$ 中切出一个维数为

$$\dim H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(D)) - \sum_{x_i \in \Sigma} \delta_{x_i} = \dim H^0(C, \omega_C).$$

根据整体截面的刻画，该子空间与$H^0(C, \omega_C)$ 典范同构。

结论。 导子条件恰好消除了局部多余的自由度，不多也不少，并且在每个奇点处独立起作用。因此，对于具有任意多个任意类型奇点的曲线，整体化保留了对偶化微分的最大变分。□

我们总结如下：对于具有任意多个任意类型奇点的约化射影曲线，不同奇点处的导子条件彼此独立且相容。因此，整体对偶微分的最大变分在整体化下得以保留。换言之，每个奇点都贡献一个有限维的潜在极部数据空间，以及一个独立的导子消去条件。由于导子分解为局部茎的交，这些约束互不干扰，其综合效果具有可加性。

我们得出如下结论：

定理 8.15 （整体导子原理）。对于约化射影曲线 C，导子层级平衡为从正规化下降亚纯微分到 C 提供了完整的局部到整体判据。它精确地刻画了每个奇点处的局部下降障碍，在各奇点之间呈线性交互，并在整体层面保留最大变差。

整体化表明，对于具有任意多任意类型奇点的曲线，最大变分得以保留。每个奇点都贡献自身的导子层级约束，而这些约束彼此独立，并且在整条曲线上相互兼容。因此，正规化上可容许的亚纯微分空间的维数恰好等于 C上对偶化层的维数。因此，导子为逐节点留数平衡提供了一种统一的整体替代方案，并且在所有奇异情形下均保持有效。

换言之，这意味着对于具有多个奇点的射影曲线，导子层级平衡可自然地整体化为正规化上的局部到整体条件。它精确地编码了每个奇点处的下降障碍，在不同奇点之间进行线性作用，并在整体层面保留最大变分。

Appendix A

曲线对偶化层的导子层级描述

引理 8.16。 设 C 是代数闭域上的一条约化（可能是奇异的）曲线，且 $\nu\colon\ C \to C$ 是其正规化。设 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_X$ 为导子理想：$\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_C}\left(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}/\mathcal{O}_C\right)$. 则对偶化层满足

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} = \omega_C(\mathfrak{c}).$$

等价地， ω_C 的整体截面对应于 C 上的亚纯微分，其在奇点上方的主部被导子所湮灭。

证明。 由于 C是一条约化曲线， $\nu\colon\ C \to C$是有限且双有理的。层 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$是一个包含 $\mathcal{O}_C$ 的凝聚 $\mathcal{O}_C$-代数。

导子理想定义为

$$\mathfrak{c} = \{f \in \mathcal{O}_C \mid f \cdot \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} \subset \mathcal{O}_C\}.$$

它是同时作为 $\mathcal{O}_C$和 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$的理想的最大理想层。

由于 ν 是有限的，格罗滕迪克对偶给出

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, \omega_C).$$

这一同一性具有函子性，并且适用于曲线的任意有限态射。导子通过 Hom 出现。现在我们在局部计算右侧。

引理 8.17。 设 $A \subset B$ 是约化一维局部环的有限扩张，其导子为 $\mathfrak{c} \subset A$。则

$$\mathrm{Hom}_A(B, \omega_A) \cong \omega_A(\mathfrak{c}).$$

证明。 任意 A-线性同态 $\varphi\colon\ B \to \omega_A$ 都由 $\varphi(1) \in \omega_A$ 唯一确定，并满足条件

$$b \cdot \varphi(1) = \varphi(b) \in \omega_A \quad \text{for all } b \in B.$$

因此 $\varphi(1)$ 必须满足

$$b \cdot \varphi(1) \in \omega_A \quad \forall b \in B,$$

这恰好意味着 $\varphi(1)$ 属于子层 $\omega_A(\mathfrak{c})$。反过来， $\omega_A(\mathfrak{c})$ 中的任意元素都定义了这样一个同态。□

逐茎应用此引理可得

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, \omega_C) = \omega_C(\mathfrak{c}).$$

结合上述事实，我们得到所需的相等：

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} = \omega_C(\mathfrak{c}).$$

通过亚纯微分的解释。 由于$\omega_{\tilde{C}}$ 由光滑曲线 C上的正则微分构成，$\nu_*\omega_{\tilde{C}}$ 的截面对应于 C 上的亚纯微分。

这类微分属于 ω_C 的条件，恰好是：在奇点上方各点处，其主部与导子理想中的元素相乘后均为零。这便给出了所述的导子层面的平衡条件。□

注 8.18。 这一相等关系表明，奇异曲线的对偶化层可表示为其正规化的典范丛在导子修正下的推前。

Appendix B

本附录进一步完善概形论留数张成定理的证明，并将其置于变形理论和模空间理论的背景下（见 [9]）。我们阐释留数泛函如何控制奇异曲线的无穷小变形、数值界$\delta \geq g$ 如何自然地产生，以及该结果如何体现在具体例子中。本文叙述经过精简，以适合发表，同时保持内容自足。

定理 8.19 （概形论留数张成）。 设 k 是一个代数闭域，且 $\mathcal{C}$ 是 k 上的连通射影 *Cohen–Macaulay* 曲线，恰有 δ 个奇点。设 $\nu\colon\ C \longrightarrow \mathcal{C}$ 为其正规化，其中 C 是亏格为

$$g = \dim_k H^0(C, \omega_C).$$

若 $\delta \geq g$，则概形论留数泛函

$$\{r_1, \ldots, r_\delta\} \subset H^0(C, \omega_C)^\vee$$

张成整个对偶空间 $H^0(C, \omega_C)^\vee$。

证明。 设 $\omega_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的对偶化层， ω_C 表示 C的典范层。对于每个奇点 $p_i \in \mathcal{C}$，我们记

$$r_i\colon H^0(C, \omega_C) \longrightarrow k$$

相应的概形论留数泛函。

关于 Cohen–Macaulay 曲线的对偶化层的一项基本结果给出了正合序列

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \longrightarrow H^0(C, \omega_C) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \bigoplus_{i=1}^{\delta} k \longrightarrow H^1(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

留数映射的显式表达式为

$$\mathrm{Res}(\eta) = \big(r_1(\eta), \ldots, r_\delta(\eta)\big).$$

由于 $\mathcal{C}$ 连通，塞尔对偶给出

$$H^1(\mathcal{C},\omega_{\mathcal{C}}) \cong H^0(\mathcal{C},\mathcal{O}_{\mathcal{C}})^\vee \cong k.$$

由（$*$）的正合性可知

$$\dim_k \operatorname{Im}(\mathrm{Res}) = \delta - 1.$$

另一方面，留数映射的秩可计算为

$$\operatorname{rank}(\mathrm{Res}) = \dim_k H^0(C,\omega_C) - \dim_k H^0(\mathcal{C},\omega_{\mathcal{C}}) = g - \dim_k H^0(\mathcal{C},\omega_{\mathcal{C}}).$$

比较秩的两个表达式可得

$$\dim_k H^0(\mathcal{C},\omega_{\mathcal{C}}) = g - (\delta - 1).$$

特别地，若 $\delta \geq g$，则 $\dim_k H^0(\mathcal{C},\omega_{\mathcal{C}}) \leq 1$。

对留数映射取对偶可得

$$\mathrm{Res}^\vee \colon \left(\bigoplus_{i=1}^{\delta} k\right)^\vee \longrightarrow H^0(C,\omega_C)^\vee,$$

它将第 i 个标准基向量映射为 r_i。因此，$\mathrm{Res}^\vee$ 的像是线性张成 $\langle r_1, \ldots\ldots, r_\delta\rangle$。由于 Res 和 $\mathrm{Res}^\vee$ 具有相同的秩，我们得出

$$\dim_k\langle r_1,\ldots,r_\delta\rangle = \delta - 1 \geq g.$$

由于 $H^0(C,\ \omega_C)^\vee$ 的维数为 g，留数泛函张成整个对偶空间，证明完毕。□

□

8.6. 变形理论解释。曲线 $\mathcal{C}$ 的无穷小变形由向量空间

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{\mathcal{C}},\mathcal{O}_{\mathcal{C}}),$$

而障碍位于 $\mathrm{Ext}^2(\Omega_{\mathcal{C}},\ \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$ 中。对于节点曲线或 Cohen–Macaulay 曲线，每个奇点贡献一个局部平滑参数，因此先验地存在 δ 个无穷小平滑方向。

根据塞尔对偶，存在一个完美配对

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{\mathcal{C}},\mathcal{O}_{\mathcal{C}}) \times H^0(\mathcal{C},\omega_{\mathcal{C}}) \longrightarrow k.$$

将微分拉回到正规化后，可将 $H^0(\mathcal{C},\ \omega_{\mathcal{C}})$ 识别为$H^0(C,\ \omega_C)$ 中由平衡留数微分构成的子空间。因此，留数泛函衡量无穷小平滑方向与全局微分之间的配对。当留数张成对偶空间时，每个无穷小变形都能被某个微分检测到，从而呈现出强刚性性质。

模空间理论解释。从曲线模空间的角度看，留数张成有着自然的含义。在模空间中的点 $[\mathcal{C}]$ 附近，局部坐标对应于奇点处的平滑参数，并受到整体约束。正合序列 $(*)$ 表明，这些约束与全局微分空间互为对偶。

当 $\delta \geq g$ 时，该定理意味着留数方向生成了 $[\mathcal{C}]$ 处模空间的整个余切空间。因此，模空间的局部几何完全由节点数据控制，而正规化不会产生额外的无穷小方向。

具体示例。

例 8.20（带节点的有理曲线）。设 $\mathcal{C}$ 是一条带有 δ 个节点的有理曲线。其正规化是 $C \cong \mathbb{P}^1$，因此 $g = 0$。条件 $\delta \geq g$ 自动成立，而该定理断言留数泛函张成零维对偶空间。这反映出 $\mathbb{P}^1$ 没有全纯微分，且所有变形都完全由节点平滑支配。

例 8.21（亏格一正规化）。设 C 是一条椭圆曲线，并设 $\mathcal{C}$ 是通过将 $\delta \geq 1$ 对点在 C 上识别而得到的曲线。于是 $g = 1$，且只要 $\delta \geq 1$，该定理便适用。在这种情况下， C 上唯一的（相差一个标量）全纯微分可由奇点处的留数检测出来，这表明平滑任何一个节点都必然会与曲线的整体几何相互作用。

示例8.22（ $\delta < g$时的失效）。若 C 的亏格为 $g \geq 2$ ，且 $\mathcal{C}$ 只有一个奇点，则 $\delta = 1 < g$。在这种情形下，留数泛函无法张成对偶空间，并且存在非零微分，其留数为零。这些微分对应于单个节点无法察觉的变形方向，说明了该界的尖锐性。

Appendix C

8.7. **几何与组合设置**。设 $\mathcal{C}$ 是代数闭域 k上的一条连通射影曲线。我们假设 $\mathcal{C}$ 是节点曲线，即其所有奇点都是普通双点。此假设确保正规化的行为简单且易于控制。

正规化。设

$$\nu \colon C^{\nu} \longrightarrow \mathcal{C}$$

表示正规化态射。根据定义， C^{ν} 是光滑的，且映射 ν 是有限且双有理的。由于 $\mathcal{C}$ 可能是可约的，正规化可分解为不交并

$$C^{\nu} = \bigsqcup_{v \in V(\Gamma)} C_v,$$

其中每个 C_v 都是光滑、射影、不可约曲线。我们用 g_v 表示 C_v的亏格。因此，正规化的总亏格为

$$g(C^\nu) := \sum_v g_v.$$

这个量衡量的是来自光滑分支的全纯微分的内在贡献，与它们如何粘合在一起无关。

对偶图。 奇异曲线 $\mathcal{C}$ 的组合学由其对偶图 Γ编码。 Γ 的顶点与 $\mathcal{C}$的不可约分支 C_v 一一对应。 $\mathcal{C}$ 的每个节点确定 Γ的一条边。如果一个节点位于两个不同分支上，相应的边就连接与这两个分支对应的顶点；如果节点位于同一个分支上，该边就是一个环。图的第一贝蒂数，

$$b_1(\Gamma) = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1,$$

衡量 Γ 中独立回路的数量，并将在维数计数中发挥关键作用。

8.8. **节点处的留数**。 现在我们解释留数如何自然地从正规化上的微分中产生，以及它们如何体现下降到奇异曲线时所遇到的障碍。

节点附近的局部结构。 设 $e \in E$（Γ）对应于节点 $p \in \mathcal{C}$。由于 p 是节点曲线，其在正规化下的原像恰好由两个点组成

$$q_e^+,\ q_e^- \in C^\nu.$$

这些点可能位于 C^ν 的同一个分支上，也可能位于两个不同的分支上。对于任意全局微分

$$\omega \in H^0(C^\nu, \omega_{C^\nu}),$$

我们可以取它在这两个点处的留数：

$$r_e^+(\omega) := \mathrm{Res}_{q_e^+}(\omega), \qquad r_e^-(\omega) := \mathrm{Res}_{q_e^-}(\omega).$$

这些是 ω 上的线性泛函，只取决于节点附近 ω 的局部行为。

8.9. **平衡条件与下降**。 一个基本事实是，正规化上的微分能够下降为奇异曲线 $\mathcal{C}$ 上的正则微分，当且仅当它在每个节点的两个分支处的局部行为相容。具体而言，这种相容性由平衡条件表示为

$$r_e^+(\omega) + r_e^-(\omega) = 0 \quad \text{for every node } e.$$

当这一条件成立时，这两个留数确定一个标量

$$r_e := r_e^+ = -r_e^-,$$

我们称之为节点处的代数留数 e。因此，每个节点对留数数据至多贡献一个自由度。

8.10. 代数留数数据空间。现在我们精确描述哪些标量集合 $\{r_e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 可以由 C^ν 上的全局微分产生。

顶点平衡。 固定正规化的一个分支 C_v 。令 $E(v)$ 表示与 Γ 中对应顶点 v 相接的边集。将 ω 限制在 C_v 上，所得是一个亚纯微分，其极点恰好位于节点的原像处。根据光滑曲线 C_v 上的留数定理， C_v 上的留数之和必须为零。这给出线性条件

$$\sum_{e\in E(v)} \epsilon(v,e)\, r_e = 0,$$

其中符号 $\epsilon(v,\ e) = \pm 1$ 表示节点的哪个分支位于 C_v 上。这个方程表达了这样一个事实：不同节点处的留数不能彼此独立地选取；它们必须满足每个分支对应的一个线性关系。

独立留数参数的计数。 我们从对偶图的每条边 e 对应一个变量 r_e 开始。然后对每个顶点施加一个线性关系。然而，这些关系并非独立：将所有顶点方程相加会得到恒等式 $0 = 0$。因此，只施加了 $|V(\Gamma)| - 1$ 个独立约束。可容许留数数据空间的维数因此为

$$|E(\Gamma)| - (|V(\Gamma)| - 1) = b_1(\Gamma).$$

维数计数的这一部分纯粹是组合性的，反映了对偶图的拓扑。

全纯微分。 留数数据仅计入节点处有极点的微分。我们还必须计入正规化各分支上的全纯微分。每个分支 C_v 贡献一个向量空间

$$H^0(C_v, \omega_{C_v})$$

其维数为 g_v，由处处留数为零的微分构成。这些方向在留数条件中不可见，但对于完整的全局微分空间至关重要。对所有分支求和，我们得到对维数的额外贡献 $g(C^\nu)$。

最终维数公式。 将组合性的留数贡献与内禀的全纯贡献相结合，我们得到

$$\dim(\text{balanced algebraic residues}) = g(C^\nu) + b_1(\Gamma).$$

这个公式精确地说明，几何（通过各分支的亏格）与组合学（通过对偶图中的圈）如何共同决定全局微分空间。

8.11. 留数张成：含义与推论。 现在，我们仔细分析“留数张成全局微分的对偶空间”这一说法的含义。向量空间

$$H^0(C^\nu, \omega_{C^\nu})$$

有一个对偶空间

$$H^0(C^\nu, \omega_{C^\nu})^\vee,$$

其元素是作用于微分的线性泛函。每个节点 e 都通过取留数定义一个这样的泛函：

$$r_e : \omega \longmapsto \operatorname{Res}_{q_e^+}(\omega).$$

这些泛函捕捉节点处的局部信息。

张成条件。说留数张成对偶空间，意味着对 $H^0(C^\nu, \omega_{C^\nu})$ 上的每个线性泛函 ℓ，都可以写成留数泛函的线性组合：

$$\ell(\omega) = \sum_{e \in E(\Gamma)} a_e \, r_e(\omega) \quad \text{for all } \omega.$$

等价地说，被所有留数泛函消去的唯一微分是零微分。因此，所有留数都为零便意味着 $\omega = 0$。

几何解释。从几何角度看，留数张成意味着正规化上的全局微分完全由其在节点处的表现所控制。不存在非平凡的全局微分，使其在所有节点处的局部效应相互抵消。这一性质在变形理论和模空间问题中至关重要，因为留数数据常常充当坐标或约束。

Appendix D

8.12. 为什么导子层级平衡体现了最大变分?

设 C 为一条具有任意奇点的约化射影曲线，$\nu\colon \widetilde{C} \longrightarrow C$ 表示其正规化。我们用 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$ 表示导子理想，即

$$\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_{\mathcal{O}_C}\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}/\mathcal{O}_C\big).$$

全文中，我们采用留数平衡原理的以下修正版：

> 对偶化层 ω_C 的整体截面对应于正规化 $\widetilde{C}$ 上的亚纯微分，其在 C 奇点轨迹上方各点处的主部均被导子理想湮灭。

本小节旨在说明，尽管这一表述用更微妙的导子层级约束取代了经典的逐节点留数条件，它仍然能够体现最大变分。

最大变分。 所谓最大变分，是指对微分施加的条件既不过于宽松，也不过于严格。

定义 8.23。 设 X 为一条射影曲线。若对亚纯微分施加的条件使所得容许微分空间的维数为

$$h^0(C, \omega_C),$$

也就是说，除了由 C 的几何性质内在决定的条件外，不再施加任何线性条件。

等价地，最大变分意味着对偶化层的每个整体截面都能由正规化上的一个可容许微分实现，并且不会人为地移除额外的自由度。

以节点情形为例。 对于节点曲线，这一概念完全直观。正规化将每个节点处的分支分开，而曲线上的亚纯微分在节点的原像处至多可以有简单极点。这些点处的留数先验上彼此独立，而唯一的线性条件

$$\sum_{p \mapsto x} \operatorname{res}_p(\eta) = 0$$

在每个节点处施加的 $x \in C$ 恰好移除一个自由度。

这与预期的维数计数相符：

$$h^0\big(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(\text{preimages of nodes})\big) - (\text{number of nodes}) = h^0(C, \omega_C).$$

因此，在节点情形中，经典留数平衡既是必要条件，也是充分条件，因而表达了最大变分。

更复杂奇点的逐节点平衡失效。 对于比节点更复杂的奇点，例如尖点或高阶 Gorenstein 奇点，情况会发生质的变化。正规化通常只产生一个分支，因此在各分支之间谈论留数“平衡”并无意义。此外，将亚-~纯微分从 C 下降到 C 所遇到的障碍，不再仅由留数决定：即使留数消失，更高阶的主部仍可能阻碍下降。

如果在这种情况下仍然要求留数消失或施加节点式平衡条件，所得约束就过于严格。它们会排除对偶化层的合法截面，并使容许微分空间的维数严格小于 $h^0(C,\ \omega_C)$。换言之，逐节点平衡变得超定，无法表达最大变分。

8.13. **导子是恰当的替代物**。导子理想精确衡量了 X 距离正规还有多远。根据定义，它是同时作为 $\mathcal{O}_C$和 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$中的理想的最大理想层。在当前语境中，它的作用是精确识别亚纯微分的哪些主部会阻碍从~C 下降到 C。条件

$$\mathfrak{c} \cdot (\text{principal parts}) = 0$$

恰好去除主部中无法下降的那些分支，同时保留所有允许的奇异行为。它不会强加人为的消失条件，也不会排除任何合法的微分。

维数精确匹配。 这一理念通过有限态射的格罗滕迪克对偶得以精确表达，从而得到规范的同一化

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} = \omega_C(\mathfrak{c}).$$

因此， ω_C 的每个整体截面都源自 C上的一个满足导子条件的亚纯微分；反过来，每个这样的微分都下降到 C。不存在其他隐藏的约束。

特别地，可以得到维数精确相等

$$\dim H^0\big(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}}(\text{allowed poles})\big) = \dim H^0(C, \omega_C),$$

这就是最大变分的形式表达。

变形理论解释。 从变形理论的角度来看，导子层面的平衡还具有额外的概念优势。导子理想在曲线的一阶变形下保持不变，而仅留数条件则并非如此。因此，对偶化层的截面在族中平坦变形，而导子条件恰好刻画了下降的变形不变障碍。

结论。 总之，逐节点留数平衡之所以奏效，恰恰是因为对于节点奇点，导子与节点的极大理想重合。对于更复杂的奇点，则需要高阶控制，而导子典范地提供了这种控制。由于导子施加的约束恰好是必要的最小约束，并无额外限制，因此导子层级平衡保留了最大变分。

注 8.24。 从本质上说，最大变分之所以得以保留，是因为导子恰好湮灭亚纯微分中不能下降的主部，而不影响其他部分。

9. Appendix E

定理 9.1 (正规化的格罗滕迪克对偶)。 设 C 是代数闭域 k上的约化射影曲线，且 ν: $C \longrightarrow C$ 是其正规化。记 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$为导子理想，并令 ω_C 为 C的对偶化层。则存在一个 $\mathcal{O}_C$-模的典范同构

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} \;\cong\; \omega_C(\mathfrak{c}).$$

证明。

正规化态射的有限性。由于 C 是约化射影曲线，其正规化 ν 是有限双有理态射。特别地：

(i) $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$是一个相干的 $\mathcal{O}_C$-代数，(ii) ν 具有有限 Tor 维数，

(iii) 格罗滕迪克对偶适用于 ν。

有限态射的格罗滕迪克对偶。 对于有限态射 ν，格罗滕迪克对偶给出函子的典范同构

$$\nu_*\mathcal{H}om_{\widetilde{C}}(\mathcal{F},\omega_{\widetilde{C}}) \;\cong\; \mathcal{H}om_C(\nu_*\mathcal{F},\omega_C)$$

对于任意相干 $\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$-模 $\mathcal{F}$。将其应用于 $\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$，我们得到

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} \;\cong\; \mathcal{H}om_C(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}},\omega_C).$$

结构层的包含。 存在自然嵌入

$$\mathcal{O}_C \hookrightarrow \nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}},$$

它在 X 的光滑轨迹上是同构，并且恰好在奇点处是严格的。

导子的定义。 导子理想 $\mathfrak{c}$ 定义为

$$\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_{\mathcal{O}_C}\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}/\mathcal{O}_X\big) = \mathcal{H}om_C(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}},\mathcal{O}_C).$$

因此， $\mathfrak{c}$ 由 恰好由那些作用在 $\mathcal{O}_C$ 和 $\nu_*\mathcal{O}$ 上完全相同的 $\mathcal{O}_C$ 的局部截面组成

与对偶化层作张量积。由于 ω_C 是一个相干 $\mathcal{O}_C$-模，我们有

$$\mathcal{H}om_C(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}},\omega_C) \;\cong\; \mathcal{H}om_C(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}},\mathcal{O}_C)\otimes_{\mathcal{O}_C}\omega_C.$$

利用步骤 4 中的识别，这变为

$$\mathcal{H}om_C(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}},\omega_C) \;\cong\; \mathfrak{c}\otimes_{\mathcal{O}_C}\omega_C.$$

将其解释为 ω_C 的扭积。根据定义，

$$\omega_C(\mathfrak{c}) := \omega_C\otimes_{\mathcal{O}_C}\mathfrak{c}.$$

因此，

$$\mathcal{H}om_C(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}},\omega_C) \;\cong\; \omega_C(\mathfrak{c}).$$

结论。 结合步骤 2 和步骤 6，我们得到一个典范同构

$$\nu_*\omega_{\widetilde{C}} \;\cong\; \omega_C(\mathfrak{c}),$$

如所声称的。

规范性。 所有同一化都由格罗滕迪克对偶和导子的定义函子性地产生，因此所得的同构是规范的。
□

10. Appendix F

备注的详细解释 5.3。 我们逐行解释以下备注，阐释其中包含的每一个数学思想。

注记 10.1。 留数张成保证热带曲线捕捉到退化代数曲线上微分的全部一阶信息。从这个意义上说，热带雅可比簇不仅仅是一个组合影子，而是经典雅可比簇忠实的线性化极限。

背景设定。 我们在一个退化框架中进行研究：

(a) 光滑代数曲线 C_t 在 $t \to 0$时退化为一条奇异曲线（通常是节点曲线） C_0。(b) 与此退化相关联的是一条热带曲线 Γ，它是一个度量图，编码了该退化的组合数据和赋值论数据。(c) 我们研究 C_t 上的全纯或亚纯微分在极限中的表现，以及这种表现如何反映在 Γ上。

留数。当一条光滑曲线退化为节点曲线时，光滑纤维上的微分会收敛到中心纤维上的对数微分 。在每个节点处，这种微分有两个局部分支，其留数分别为 r 和 $-r$。

留数数据作为 线性信息。收集所有节点处的留数，就会得到一个向量 r

$$(r_e)_{e \in E(\Gamma)} \in \mathbb{R}^{E(\Gamma)},$$

其中，热带曲线的每条边 e 都对应于退化代数曲线的一个节点。

“留数张成条件”意味着，每个满足平衡条件的可容许留数向量

$$\sum_{e \ni v} \pm r_e = 0 \quad \text{at every vertex } v$$

都来自代数曲线上的一个实际微分。等价地，留数张成 Γ上的调和1-形式的整个空间。

保证。因此，“留数张成保证”意味着，从代数微分过渡到热带微分时，线性数据不会丢失。

一阶信息 指微分的线性化 行为：周期、留数和无穷小变分，与非线性或高阶修正相对。

微分与周期。 对于光滑曲线 C_t，微分 ω_t 通过积分定义了同调上的线性泛函：

$$\gamma \mapsto \int_\gamma \omega_t.$$

当 $t \to 0$ 时，这些周期退化，但其首阶行为由 Γ 上的留数和边长控制。

由热带曲线捕获。热带曲线 Γ 编码了：

（1）边长（来自赋值），（2）顶点处的
调和性条件，（3）沿边的留数数据。

这些数据共同准确编码了退化微分所满足的相同线性约束。

退化曲线。 这一表述强调，我们研究的不是一条固定的奇异曲线，而是一个族，其光滑成员携带丰富的解析数据。

极限的相容性。 这一主张是指，热带化过程保留了极限中微分空间的完整线性结构。

经典雅可比簇。 雅可比簇 Jac(C_t) 是一个由微分的周期构成的复环面：

$$\mathrm{Jac}(C_t) = H^0(C_t, \Omega^1)^* / H_1(C_t, \mathbb{Z}).$$

热带雅可比簇。热带雅可比簇 Jac(Γ) 定义为

$$\mathrm{Jac}(\Gamma) = H^1(\Gamma, \mathbb{R}) / H^1(\Gamma, \mathbb{Z}),$$

由图上的调和1-形式构成的实环面。

不只是组合性的。称之为“组合影子”，会让人以为它只记住了拓扑或离散数据。留数张成表明事实并非如此：热带雅可比簇记住了周期格的完整线性极限。

线性化极限。当 $t \to 0$ 时，雅可比簇 Jac(C_t) 发生退化。经过适当的重标度后，其极限由线性数据决定：留数、边长和调和形式。

忠实性。“忠实”意味着：

(1) 不丢失任何线性关系，(2) 不引入任何虚假的线性关系，(3) 在一阶几何层面上，热带雅可比簇与 Jac(C_t) 的极限存在典范同一。

结论。因此，该评注指出，热带几何并非只是对经典理论作近似，而是通过留数张成这一机制，精确地刻画了经典理论的线性退化。

11. Appendix G

证明 ω_C 由 $\omega = \dfrac{dx}{\partial f/\partial y}$ 在光滑轨迹上生成。我们将逐行给出这一标准事实的完整证明：

对于平面曲线，对偶化层在光滑轨迹上由微分 $\frac{dx}{\partial f/\partial y}$ 局部生成。

1. 设定。 令 $C \subset \mathbb{A}^2$ 为由单个方程定义的约化平面曲线

$$C : f(x, y) = 0,$$

其中 $f \in \mathbb{C}[x, y]$。我们假设 C 在所考虑的点处是光滑的。

令 $U \subset C$ 为包含在光滑轨迹 C_{sm}中的一个开子集。

2. 光滑曲线上的对偶化层。 在光滑曲线上，对偶化层与典范丛一致。因此，在 C_{sm}上，

$$\omega_C \cong \Omega^1_{C_{\mathrm{sm}}},$$

¨上的 K¨ahler 微分层。

因此 ，为了在 C_{sm} 上局部地描述 ω_C ，只需描述 $\Omega^1_{C_{\mathrm{sm}}}$ 的一个生成元 .

3. 平面曲线的 K¨ahler 微分。 设 $A = \mathbb{C}[x, y]/(f)$ 为C的坐标环。K¨ahler 微分模 Ω^1_A 嵌入正合序列

$$A \cdot df \longrightarrow A\,dx \oplus A\,dy \longrightarrow \Omega^1_A \longrightarrow 0,$$

其中

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

因此，Ω^1_A 由 dx 和 dy 生成，并满足唯一关系

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

4. 在光滑轨迹上求解关系。令 $p \in C_{\mathrm{sm}}$。根据光滑性的定义， f 的梯度在 p 处不为零，即

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) \neq (0, 0).$$

不失一般性，我们可以假设

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0.$$

因此，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 是局部环 $\mathcal{O}_{C,\ p}$中的一个单位。

因此，关系式

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

可以解出 dy:

$$dy = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\, dx.$$

因此始终¨上的 Kähler 微分可以唯一地写成 dx的倍数 .

5. $\Omega^1_{C_{\mathrm{sm}}}$**的一个局部生成元**。定义微分

$$\omega := \frac{dx}{\partial f/\partial y}.$$

由于 $\partial f/\partial y$在 U上是一个单位，表达式 ω是 U上的正则微分。
此外，任意微分 $\alpha \in \Omega^1_{C_{\mathrm{sm}}}(U)$都可以写成

$$\alpha = g\, dx = g\, \frac{\partial f}{\partial y}\, \omega$$

对于某个定义在 U 上的正则函数 g 。因此， ω 生成 $\Omega^1_{C_{\mathrm{sm}}}$ 作为 $\mathcal{O}_{C_{\mathrm{sm}}}$ 模。

6. 坐标选择的独立性。 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 p 处非零，则可以对关系式解出 dx ，得到另一个生成元

$$\omega = -\frac{dy}{\partial f/\partial x}.$$

这两个表达式相差一个单位因子，因此它们在光滑轨迹上定义同一个可逆层 ω_C 。

7. 结论。 我们已经证明:

(1) 在平面曲线 C的光滑轨迹上，对偶化层 ω_C 与典范丛重合；(2) 典范丛由 K¨ähler 微分局部生成；(3) 每当 $\partial f/\partial y \neq 0$ 时，局部生成元由 $\frac{dx}{\partial f/\partial y}$ 给出。

——

因此，在 C 的光滑轨迹上，对偶化层 ω_C 由正则微分生成

$$\omega = \frac{dx}{\partial f/\partial y}.$$

证明 ω_C **的一个局部生成元为** $\omega = \dfrac{dt}{t^2}$ 。 我们针对尖点奇异性给出一个完整而严谨的证明，逐行展开，适合纳入研究论文。

1. 尖点曲线及其正规化。设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是由下式定义的平面曲线

$$C: \quad y^2 = x^3.$$

曲线 C 不可约，且在 (0，0) 处有一个唯一的奇点，该点是尖点。

Let

$$\nu\colon \widetilde{C} \longrightarrow C$$

~ ~是 C的正规化。于是 $C \cong \mathbb{P}^1$，在仿射图 $C \setminus \{\infty\}$ 上，正规化映射由下式给出

$$x = t^2, \qquad y = t^3,$$

其中 ~t 是 C上的一个局部坐标。位于尖点上方的唯一点是 $t =$ $0.$

2. 平面曲线的对偶化层。设 $C \subset \mathbb{A}^2$ 是由多项式 $f(x,\ y) = 0$ 定义的约化平面曲线。在 C 的光滑轨迹上，对偶化层 ω_C 由正则微分生成

$$\omega = \frac{dx}{\partial f/\partial y}.$$

在我们的情形下，

$$f(x,y) = y^2 - x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

因此，在 C 的光滑轨迹上，

$$\omega = \frac{dx}{2y}.$$

该表达式在 C_{sm} 上定义了一个正则微分，并延拓为对偶化层 ω_C 的一个生成元。

~**3. 拉回到正规化**。现在我们利用映射 ν 将 ω 拉回到正规化 C 。使用参数化 $x = t^2$，$y = t^3$，我们计算得

$$dx = 2t\,dt, \qquad y = t^3.$$

代入 $\omega = \frac{dx}{2y}$ 得 —

$$\nu^*\omega = \frac{2t\,dt}{2t^3} = \frac{dt}{t^2}.$$

因此， ω_C 的一个生成元拉回到正规化后，就是亚纯微分$\frac{dt}{t^2}$。

—

4. 极点阶数与可容许性。 微分 $\frac{dt}{t^2}$ 在 $t=0$~处恰有一个二阶极点，在 C上没有其他极点。

这一极点阶数由几何决定：

(i) 尖点具有 δ–不变量 $\delta=1$，(ii) 对偶化层满足 $\omega_C \cong \nu_*\big(\omega_{\mathbb{P}^1}(2\cdot 0)\big)$，~(iii) 因此，$\omega_C$ 的截面对应于 C 上的微分，其在 $t=0$处的极点阶数至多为 2。

因此，微分 $\dfrac{dt}{t^2}$ 是 ω_C的一个局部生成元。

5. 结论。我们已经证明：

(i) 在 C的光滑轨迹上，对偶化层 ω_C 由 $\frac{dx}{2y}$ 生成；(ii) 拉回到正规化后得到 $\frac{dt}{t^2}$；(iii) 该微分的极点阶数恰好是尖点的 δ–不变量所决定的阶数。

因此，在 $\mathbb{P}^1$ 的以 t为坐标的仿射图上，对偶化层 ω_C 的一个局部生成元由下式给出

$$\omega = \frac{dt}{t^2}.$$

References

[1] L. Ahlfors，复分析，McGraw–Hill，1979。[2] O. Forster，黎曼曲面讲义，Springer，1981。[3] M. Bainbridge、D. Chen、Q. Gendron、S. Grushevsky、M. M¨oller，阿贝尔微分分层的紧化，Duke Math. J.**167**（2018），2347–2416。[4] G. Farkas、R. Pandharipande，扭曲典范除子的模空间，J. Inst. Math. Jussieu **17**（2018），615–672。[5] G. Mikhalkin，计数热带代数几何，载于 $\mathbb{R}^2$，J. Amer. Math. Soc. **18**（2005），313–377。[6] M. Baker、S. Norine，有限图上的黎曼–罗赫定理与阿贝尔–雅可比理论，Adv. Math.**215**（2007），766–788。[7]E. Arbarello、M. Cornalba、P. A. Griffiths 和 J. Harris，代数曲线几何，第一卷，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften**267**，Springer-Verlag，1985。[8] J. Harris，代数几何：入门教程，Graduate Texts in Mathematics**133**，Springer-Verlag，1992。[9] M. Nisse，奇异平面曲线的霍奇结构无穷小变形 *III*，arXiv 预印本，（2026）。[10] M. Nisse，关于 k微分与最大变分的代数–热带对应，arXiv 预印本，（2026）。[11] E. Sernesi，代数概形的变形，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften**334**，Springer-Verlag，2006。[12] E. Sernesi，节点平面曲线的 *IVHS*，arXiv: 2512.12316。

Mounir Nisse, Department of Mathematics, Xiamen University Malaysia, Jalan Sunsuria, Bandar Sunsuria, 43900, Sepang, Selangor, Malaysia.

电子邮箱地址：mounir.nisse@gmail.com, mounir.nisse@xmu.edu.my