从量化答案集程序中提取策略

Mart´ın Di´eguez IgorSt´ephan昂热大学，法国 昂热大学，法国
martin.dieguezlodeiro@univ-angers.fr igor.stephan@univ-angers.fr

量化答案集编程（QASP）通过允许对命题变量进行量化，扩展了答案集编程（ASP），其方式类似于量化布尔公式（QBF）。在本文中，我们将 QASP 公式的模型解释为策略，这些策略表示决策策略，用于确定在全称量化变量所设定的条件下应如何赋值存在量化变量。作为主要贡献，我们提出了一种基于平衡逻辑对一般 ASP 理论的语义、用于在 QASP 语义下提取策略的算法。

1 引言

答案集编程（ASP）源于逻辑编程，是一种用于非单调推理（NMR）和知识表示（KR）的形式化框架，可解决涉及组合搜索、优化和不确定性推理的复杂问题。在 ASP 中，问题被编码为一组逻辑规则，相应的模型（答案集）代表问题的解。除了传统的稳定模型语义外，答案集语义下还存在逻辑程序的其他解释，包括 Pearce 的平衡逻辑（EL）；它以单调基础和极小性条件来导出非单调性。平衡逻辑经过扩展，以增强其对时序推理或认知推理等问题的表达能力。对于命题理论，ASP 中的可满足性问题位于多项式层次的第二层（Σ_2^p） [19]。稳定—不稳定语义等方法通过将逻辑程序作为预言机集成进来，扩展了 ASP，使其能够解决超出这一层次的问题。

解决问题的第二种方法是 ASP(Q) 系统[1] [2], ，它扩展了 ASP 语法，加入了存在量词和全称量词，这些量词的作用域是程序的稳定模型，而非原子。在应用方面，ASP(Q) 已用于表示和解决图问题 [1], ，也用于认知逻辑编程 [10] 和论证 [9]。

在经典情形下，量化布尔公式 [5, 第 31] 章（QBF）通过引入二阶量化扩展了命题逻辑，使得表达复杂性类Σ_2^p之外的问题成为可能，因为 QBF 可满足性是 PSPACE 完全的 [22]。量化答案集编程（QASP） [20,11] 同样通过引入命题量词扩展 ASP，其方式与 QBF 类似。与 QBF 一样，存在量词和全称量词都作用于命题原子的真值。然而，关键区别在于语义：在 QASP 中，赋给原子的真值必须与程序的稳定模型一致。QASP程序有两种主要语义。在 Fandinno 等人提出的语义中 [11], ，通过向上下文添加公式¬¬p，强制原子 p 在稳定模型中为真。相比之下，在 Stephan 定义的语义中 [20], ，只需向上下文添加 p，就能使 p 为真。在判断原子在稳定模型中为假时，这两种语义的表现相同。在实现方面， [11] 中的语义由名为

[1]可从 https://www.mat.unical.it/ricca/downloads/qasp-0.1.2.jar 获取

M. Gebser、D. Inclezan、F. Ricca、M. Carro 和 M.
Truszczynski：第41届国际逻辑编程会议（ICLP 2025）
EPTCS439，2026年，第224–237页，doi:10.4204/EPTCS.439.16

qasp2qbf[2],的工具实现，该工具已用于解决合取规划问题。此外， [11, 附录 B] 表明，ASP(Q) 与 QASP 可以相互转换。

在 QASP 中，量化逻辑程序的解可以解释为具有完全信息的双人博弈。第一位玩家尝试构造 ASP 程序的稳定模型；当且仅当第一位玩家存在获胜策略时，该程序才被视为 QASP 问题的一个肯定实例。工具 qasp2qbf 将 QASP程序归约为量化布尔公式，然后将其交由量化布尔公式求解器来判定可满足性。如果量化布尔公式可满足，求解器会为初始块中的存在量词给出一个赋值。这意味着，对于以全称量词开头的 QASP程序，求解器只能报告可满足性状态，而无法给出具体策略。目前，该工具不支持构造这类双人博弈。相比之下， [20] 中的方法用 Skolem 函数替换存在量词， [4], 从而有效模拟存在玩家的选择。该方法能够计算所有满足 QASP程序的可能双人博弈。

本文从平衡逻辑（EL）的角度考察 [11] 和 [20] 语义。我们引入以下限制：不考虑特定的逻辑编程语言；相反，我们将任意逻辑编程规则 $H \leftarrow B$ 翻译为命题逻辑中的蕴涵 $B \rightarrow H$。默认否定（not）在命题逻辑中由否定符号（¬）替代，并且命题公式可以任意嵌套。此外，我们将任意命题公式[3] 视为量化布尔公式（QBF）的矩阵。

本文的第一项贡献是证明这两种语义并不等价。第二项贡献是将策略的概念从经典情形扩展到量化命题 G¨odel 逻辑 QG_3 [3], ，该逻辑为选择极小策略提供了单调基础。第三项贡献是开发出一种算法，以 QBF 作为输入，并计算在 [11]语义下满足该公式的策略集合。该算法在执行过程中结合了 QBF 和 QG_3-策略。

本文组织如下：第 2.1 节介绍量化布尔公式和策略的概念。第 2.2 节用 G¨odel 逻辑 G_3 加上极小性条件来形式化平衡逻辑，并证明若干有趣的性质。第 2.3 节介绍本文采用的两种 QASP 语义。第 3 节介绍 G_3 中命题量词的语义，以及 QG_3-策略的概念。在第 4 节中，我们提出一种基于平衡逻辑的算法，用于在 QASP 语义下从量化布尔公式中提取策略。最后，第 5 节总结全文并讨论未来工作。

2 背景

2.1 量化布尔公式与量化布尔公式策略

令变量集 VAR 为一个 （非空）原子集。前束范式量化布尔公式由以下文法生成 r:

$$\varphi, \psi \quad ::= \quad p \mid \bot \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \tag{1}$$

$$F \quad ::= \quad \varphi \mid \forall x\, F \mid \exists x\, F, \tag{2}$$

其中 p、x ∈ 变量集。必要时，我们通常采用省略括号的通用规则。语法 (1) 的第一部分生成命题公式，而 (2) 生成量词前缀。给定一个量化布尔公式 $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \varphi$ ，其中 $Q_i \in \{\forall, \exists\}$，且对于所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $x_i \in$ 变量集中的元素，记作 Qφ，我们将

[2]参见 https://github.com/potassco/qasp2qbf。[3]由于平衡逻辑允许解释任意（命题）公式。

称序列 $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n$ 为绑定子，并将无量词公式 φ 称为矩阵。符号 ε 表示空绑定词。对于语义，我们将经典解释定义为映射 mmm：变量集 $\mapsto \{0,1\}$。对于给定的命题变量 p，$\mathrm{mmm}(p) = 0$ 表示 p 为假；$\mathrm{mmm}(p) = 1$ 表示 p 为真。如果解释 mmm 对所有 p $\in$变量集都有定义，则称其为全的，否则称其为部分的。如果未明确指定，我们将假设 mmm 是全的。给定解释 mmm、x $\in$ 变量集以及 i $\in \{0,1\}$，我们将 mmm 中 x 的更新定义为

$$\boldsymbol{m}_i^x(p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} i & \text{if } p = x \\ \boldsymbol{m}(p) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

此外，我们用 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示这样的（部分的）解释：对于所有 x $\in$ 变量集，$\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ 均未定义。任何解释 mmm 都可以通过以下满足关系扩展到任意公式 φ:

$$\boldsymbol{m}(\bot) = 0 \qquad \boldsymbol{m}(\varphi \wedge \psi) = \min\{\boldsymbol{m}(\varphi), \boldsymbol{m}(\psi)\} \qquad \boldsymbol{m}(\varphi \vee \psi) = \max\{\boldsymbol{m}(\varphi), \boldsymbol{m}(\psi)\}$$
$$\boldsymbol{m}(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{m}(\varphi) \le \boldsymbol{m}(\psi) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于理论 Γ，我们定义 $\mathrm{mmm}(\Gamma) = \min\{\mathrm{mmm}(\varphi) \mid \varphi \in \Gamma\}$。我们称解释 mmm 是公式 φ 的模型，当且仅当 $\mathrm{mmm}(\varphi) = 1$。

当量化布尔公式以 prenex normal form 给出时，可以用 QBF 策略来定义其语义。QBF 策略（或 [8] 中的策略）指一种策略或决策规则，用于规定如何为量化布尔公式中的变量赋予真值，以实现预期结果。由于量化布尔公式通过对命题变量进行二阶量化扩展了经典逻辑，策略可以表示一种系统化方法，根据量词结构决定变量的真值。

在布尔逻辑的上下文中，在公式 φ 中将命题变量 p 赋值为 1（分别为 0），等价于将 p 的所有出现替换为 $\top$（分别替换为 $\bot$）。遗憾的是，在多值逻辑 [16], 的上下文中，无法用同样的方法表示，因为其中存在无法用语言中的元素表示的真值。正如第 3 节所述，我们的 QBF 策略定义可以轻松推广到多值逻辑的情况。

定义1（QBF 策略 [8]）。绑定子 Q 的 QBF 策略集合 $\mathrm{TP}_{QBF}(Q)$ 递归定义如下：

$$\begin{aligned} TP_{QBF}(\varepsilon) &= \{\lambda\} \\ TP_{QBF}(\exists x_i \ldots Q_n x_n) &= \{v;\pi_{i+1} \mid v \in \{0,1\}, \pi_{i+1} \in TP_{QBF}(Q_{i+1}x_{i+1} \ldots Q_n x_n)\} \\ TP_{QBF}(\forall x_i \ldots Q_n x_n) &= \{[0 \to \pi_{i+1}^0 \mid 1 \to \pi_{i+1}^1] \mid \\ &\qquad \pi_{i+1}^0, \pi_{i+1}^1 \in TP_{QBF}(Q_{i+1}x_{i+1} \ldots Q_n x_n)\} \end{aligned}$$

其中，λ 表示空 QBF 策略。算子“;”表示 QBF 策略的顺序复合，而 $\{0,1\} \to \pi_{i+1}$ 表示从 x_i 的赋值到 $\{0,1\}$ 的取值的所有可能函数，这些函数将取值映射到 $\mathrm{TP}_{QBF}(Q_{i+1}x_{i+1} \ldots Q_n x_n)$ 中的 QBF 策略。

QBF 的满足基于配置这一概念。配置是结构 $\langle \mathrm{mmm}\pi \rangle$，其中 mmm 是一种部分经典解释，用于存储分析 QBF 策略 π时获得的不同赋值。给定 QBF $Q_1x1, \cdots, Q_nx_n\varphi$ 以及配置 $\langle \mathrm{mmm}\ \pi \rangle$，满足关系按以下情况定义：

- $\langle \boldsymbol{m}, \lambda \rangle \models \varphi$ if $\boldsymbol{m}(\varphi) = 1$

- $\langle mmm\pi\rangle \models \exists x Q_{i+1}x_{i+1}\cdots Q_n x_n\varphi$ 当存在某个 $v \in \{0,1\}, \pi = v;\pi'$ 且 $\langle mmmxv\ \pi'\rangle \models Q_{i+1}x_{i+1}\cdots Q_n x_n\varphi$。
- $\langle mmm\ \pi\rangle \models \forall x Q_{i+1}x_{i+1}\cdots Q_n x_n\varphi$ if $\pi = [0 \to \pi^0 \mid 1 \to \pi^1]$ 以及 $\langle mmmx_0、\ \pi^0\rangle \models Q_{i+1}x_{i+1}\cdots Q_n x_n\varphi$和 $\langle mmmx_1、\ \pi^1\rangle \models Q_{i+1}x_{i+1}\cdots Q_n x_n\varphi$。

定义 2. 如果一个 QBF 策略 π 满足量化布尔公式 $Q_1x_1、\cdots、Q_nx_n\varphi$，则称其为 QBF Q $\langle\varepsilon、\ \pi\rangle \models Q_1x_1、\cdots、Q_nx_n\varphi$。

示例 1. 考虑量化布尔公式 $\varphi = \forall x\ \exists z((z \to x) \wedge (z \vee \neg z))$。存在两个满足 φ 的 QBF 策略：$\pi_{(a)} = [0 \to 0;\ \lambda \mid 1 \to 0;\ \lambda]$和 $\pi_{(b)} = [0 \to 0;\ \lambda \mid 1 \to 1;\ \lambda]$，其树形表示如图 1 所示：



图 1：量化布尔公式 $\psi = \forall x \exists z\ ((z \to x) \wedge (z \vee \neg z))$ 的两种策略。

注意，由于 $z \vee \neg z$ 是重言式，φ 等价于 $\varphi = \forall x\ \exists z(z \to x)$。因此，很容易看出，如果 x 的取值为 0，我们就必须令 z 的取值为 0。相反，当 x 的取值为 1 时，无论 z 的真值如何，该量化公式都成立。

2.2 命题平衡逻辑

平衡逻辑与命题逻辑采用相同的语法。因此，公式由 (1) 中给出的文法生成。平衡逻辑的语义基于 Here-and-There [14, 12] (HT) 的（单调）逻辑，并结合一个引入非单调性的极小性标准。不过，为了便于讨论，我们给出一个等价定义，基于三值 G¨odel 逻辑 G_3 [12]。在此逻辑中，解释定义为三值映射 $mmm : VAR \mapsto \{0, \frac{1}{2}, 1\}$。与经典逻辑一样，给定 $p \in VAR$，$mmm(p) = 0$ 表示 p 为假；$mmm(p) = 1$ 表示 p 为真。此外，$mmm(p) = \frac{1}{2}$ 表示 p 默认情况下为真。给定一个解释 mmm、$x \in VAR$ 和 $i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$，更新的概念现按 (3) 定义，其特殊之处在于此时 $i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$。除蕴涵 $\varphi \to \psi$ 的解释方式外，语义与命题情形相同，其解释如下：

- $\boldsymbol{m}(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{m}(\varphi) \leq \boldsymbol{m}(\psi) \\ \boldsymbol{m}(\psi) & \text{otherwise.} \end{cases}$

注意，在 G_3 中（因此在经典逻辑中也是如此），$\neg\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \to \bot$。与经典情形一样，我们称 G_3 解释 mmm 为公式 φ 的模型，当且仅当 $mmm(\varphi) = 1$。

命题 1（[18]）。此处与彼处逻辑和 G¨odel G_3 等价。

给定一个解释 mmm 和 $\Sigma \subseteq$ 变量集，我们将解释 $crisp^{\boldsymbol{m}}_{\Sigma}$ [4] 定义为：若 $mmm(p) = \frac{1}{2}$ 且 $p \in \Sigma$，则 $crisp^{\boldsymbol{m}}_{\Sigma}(p) = 1$；否则 $crisp^{\boldsymbol{m}}_{\Sigma}(p) =$mmm(p)。为简单起见，我们将 $crisp^{\boldsymbol{m}}$ def= $crisp^{\boldsymbol{m}}_{VAR}$记作 crisp。命题 2. 对所有解释 mmm 和公式 φ，$crisp^{\boldsymbol{m}}(\varphi) \in \{0, 1\}$。

[4]“清晰”一词源自模糊逻辑领域，用来表示“经典解释”。

命题 3（持久性）。对于所有公式 φ以及所有解释 mmm，(1) $\mathrm{mmm}(\varphi) \neq 0$ 蕴含 $\mathrm{crisp}^{m}(\varphi) = 1$，且 (2) $\mathrm{mmm}(\varphi) = 0$ 蕴含 $\mathrm{crisp}^{m}(\varphi) = 0$。

推论 4. 对于所有公式 φ和解释 mmm，$\mathrm{mmm}(\neg\varphi) = 1$ 当且仅当清晰$^{m}(\varphi) = 0$。

命题 2 指出，清晰解释可以视为经典解释。对于变量集 $\Sigma \subseteq \mathrm{VAR}$，我们可以通过以下方式关联两个解释 mmm 和 mmm′：

- $\mathrm{mmm} \sim_{\Sigma} \mathrm{mmm}'$ 当且仅当对于所有 $p \in \Sigma$，$\mathrm{mmm}(p) = \mathrm{mmm}'(p)$。
- $\mathrm{mmm} \preceq_{\Sigma} \mathrm{mmm}'$ 当且仅当 $\mathrm{crisp}_{\mathrm{mmm}} \subseteq_{\Sigma} \mathrm{crisp}_{\mathrm{mmm}'}$，且对于所有 $p \in \Sigma$，$\mathrm{mmm}(p) \leq \mathrm{mmm}'(p)$。
- $\mathrm{mmm} \prec_{\Sigma} \mathrm{mmm}'$ 当且仅当 $\mathrm{mmm} \preceq_{\Sigma} \mathrm{mmm}'$ 且 not $\mathrm{mmm} \sim_{\Sigma} \mathrm{mmm}'$。

当 $\Sigma =$ 变量集 时，上述关系中的后缀 Σ 将从上下文中省略。

定义 3（均衡模型）。如果一个解释 mmm 满足以下条件，我们就称 mmm 为命题公式 φ的均衡模型：

(1) $\mathrm{mmm} =$ 清晰$^{m}_{\mathrm{VAR}}$，即 mmm 是一个经典模型。(2) mmm 是 $\preceq_{\mathrm{VAR}}$-极小的，即不存在满足 $\mathrm{mmm}'(\varphi) = 1$ 的 $\mathrm{mmm}' \prec_{\mathrm{VAR}} \mathrm{mmm}$。

例 2（续例 1）。考虑公式 $\varphi = ((z \rightarrow x) \wedge (z \vee \neg z))$。该程序对应于逻辑程序 { x :- z. {z}. }，它有两个答案集：/0 和 {x, z}。下方列出了包含 φ的所有可能 G_3-解释的三值真值表。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
z	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\mathrm{mmm}_i(\varphi)$	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1

可以验证，mmm_1, mmm_4, mmm_7 和 mmm_9 是 φ的模型。此外，mmm_1, mmm_7 和 mmm_9 是清晰的，因此它们是可能成为均衡模型的候选者。mmm_1 和 mmm_9 都是 $\preceq$-极小的，因此它们是均衡模型，分别对应答案集 /0 和 {x, z}。相反，可以验证 $\mathrm{mmm}_4 \prec \mathrm{mmm}_7$, ，所以 mmm_7 不是均衡模型。以下命题表明，形式为 $\neg x$（分别为 $\neg\neg x$）的公式，其中 $x \in$变量集，可用于选出 x 为假（分别为真）的均衡模型。

命题5。设 Γ 是一个命题理论，x 是一个命题变量。对于所有 G_3-解释 mmm，mmm 是 $\Gamma \cup \{\neg\neg x\}$ 的均衡模型，当且仅当 mmm 是 Γ 的均衡模型且 $\mathrm{mmm}(x) = 1$。

命题6. 设 Γ 是一个命题理论，x 是一个命题变量。对于所有 G_3-解释 mmm，mmm 是 $\Gamma \cup \{\neg x\}$ 的均衡模型，当且仅当 mmm 是 Γ 的均衡模型，且 $\mathrm{mmm}(x) = 0$。

最后值得指出的是，平衡逻辑与答案集语义是一致的。

定理7（[18]）。任意命题理论的均衡模型与答案集之间存在双射。

2.3 量化答案集程序

本节介绍 [20] 和 [11]中发表的语义。不过，与之不同的是，我们允许将任意命题公式（或理论）作为量化布尔公式的矩阵。 [11] 中定义的语义面向答案集语义下的可满足性，下面将给出其定义。

定义 4（引自 [11]）。如果逻辑程序 P 存在答案集，则称其为可满足。QASP程序 Q P 的可满足性定义如下：

1. ∃x P 可满足，当且仅当 P∪{¬¬x} 或 P ∪{¬x} 可满足。 2. ∀x P 可满足，当且仅当 P∪{¬¬x} 和 P ∪{¬x} 都可满足。 3. ∃xQ P 可满足，当且仅当 Q (P ∪{¬¬x}) 或 Q (P ∪{¬x}) 可满足。 4. ∀xQ P 可满足，当且仅当 Q (P ∪{¬¬x}) 和 Q (P ∪{¬x}) 都可满足。

通过对每个量化变量 x，将 ¬¬x（分别为 ¬x）添加到 P 中，来检验量化变量的可满足性。根据命题6和命题5，这些公式允许选取 P 的均衡模型，使其中的命题变量以正向或负向出现。此外，它们还证明了以下复杂性结果。

定义 5（来自 [20]）。如果逻辑程序 P 有一个答案集，则称其为可满足的。QASP程序 Q P 的可满足性定义如下：

1. ∃x P 可满足，当且仅当 P∪{x} 或 P ∪{¬x} 可满足。2. ∀x P 可满足，当且仅当 P∪{x} 和 P ∪{¬x} 均可满足。3. ∃xQ P 可满足，当且仅当 Q (P ∪{x}) 或 Q (P ∪{¬x}) 可满足。4. ∀xQ P 可满足，当且仅当 Q (P ∪{x}) 和 Q (P ∪{¬x}) 均可满足。

St´ephan 的语义与 Fandinno 等人的不同之处，在于变量在答案集中被强制为真的方式。在 [20]中，通过将 x 直接加入上下文，强制变量 x 变为真。因此，x 直接为真。而在 [11] 中，则是通过将 ¬¬x 加入上下文来强制 x 变为真。根据命题5，任何均衡模型都必须满足 x。因此，x 的真值必须能够从程序本身推导出来。以下命题可用于说明定义 4 的语义弱于定义 5 的语义。

命题8。对于所有理论 Γ，对于所有 x ∈变量集，以及所有解释 mmm，如果 mmm 是 Γ∪{¬¬x} 的均衡模型，那么 mmm 也是 Γ∪{x} 的均衡模型。

推论 9。若量化理论 QΓ 在定义 4 下可满足，则其在定义 5 下也可满足。

Lemma 10。定义 4 和定义 5 中提出的语义并不等价 .

证明。考虑以下量化命题理论：

$$\forall x \exists y \exists z \underbrace{\{z \to x, \neg z \to y, \neg y \to z\}}_{\Gamma} \tag{4}$$

Γ 的答案集为 {x,z} 和 {y}。从可满足性的角度来看，以下示例对于这两个定义都是可满足的：读者可以验证，图 2a 中的策略符合定义 4 和定义 5 的语义。然而，如果我们计算与 (4) 相关联的所有可能策略，就会发现图 2b 中的策略符合定义 5 的语义，但不符合定义 4 的语义。请注意，图 2b 中的策略会导致对答案集 {x,y}进行求值，而它并不是 Γ的答案集。由于 (4) 中的第一个量词是全称量词，系统 asp2qbf 只能给出可满足的回答，却无法提供更多信息来帮助我们确定图 2b 中的策略并非由定义 4 的语义生成。

□

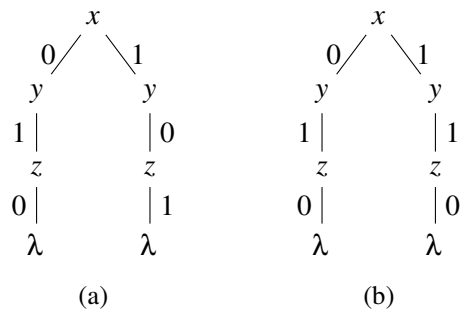


图 2：量化理论 (4) 的两个策略。

3 QG_3策略

首先，我们在 G_3的上下文中解释二阶量词：给定一个 G_3 解释 mmm，量词的语义定义为

$$\boldsymbol{m}(\forall x\varphi) = \min\left\{\boldsymbol{m}_i^x(\varphi) \mid i \in \{0,\frac{1}{2},1\}\right\} \qquad \boldsymbol{m}(\exists x\varphi) = \max\left\{\boldsymbol{m}_i^x(\varphi) \mid i \in \{0,\frac{1}{2},1\}\right\}.$$

由此得到的逻辑称为量化 G_3 （QG_3），并遵循 [3]。我们将 QBF 策略的概念扩展到 QG_3 的情形。

定义 6（QG_3-策略）。绑定子 Q 的 $\overline{Q}G_3$-策略集合 $TP^{QG3}(Q)$ 递归定义如下：

$$\begin{aligned}
TP_{QG3}(\varepsilon) &= \{\lambda\}\\
TP_{QG3}(\exists x_i \ldots Q_n x_n) &= \{v;\pi_{i+1} \mid v \in \{0,\frac{1}{2},1\}, \pi_{i+1} \in TP_{QG3}(Q_{i+1}x_{i+1}\ldots Q_n x_n)\}\\
TP_{QG3}(\forall x_i \ldots Q_n x_n) &= \{[0 \to \pi_{i+1}^0 \mid \frac{1}{2} \to \pi_{i+1}^{\frac{1}{2}} \mid 1 \to \pi_{i+1}^1] \mid\\
&\qquad \pi_{i+1}^0, \pi_{i+1}^{\frac{1}{2}}, \pi_{i+1}^1 \in TP_{QG3}(Q_{i+1}x_{i+1}\ldots Q_n x_n)\}.
\end{aligned}$$

算子";"表示 QG_3-策略的顺序复合，而 $\{0,\frac{1}{2},1\} \to \pi_{i+1}$ 指从 x_i 的赋值到 $\{0,\frac{1}{2},1\}$ 的取值的所有可能函数，这些函数取值于 $TP^{QG3}(Q_{i+1}x_{i+1}\ldots Q_n x_n)$ 中的 QG_3-策略。若 G_3 解释 mmm 相对于绑定子 Q 属于某个 QG_3-策略 π（记作 $\text{mmm} \in_{\overline{Q}} \pi$），则：

1) $\boldsymbol{m} \in_{\exists x\overline{Q}} \{v;\pi\}$ *if* $\boldsymbol{m}(x) = v$ *and* $\boldsymbol{m} \in_{\overline{Q}} \pi$

2) $\boldsymbol{m} \in_{\forall x\overline{Q}} [0 \to \pi^0 \mid \frac{1}{2} \to \pi^{\frac{1}{2}} \mid 1 \to \pi^1]$ *if* $\boldsymbol{m}(x) = v$ *and* $\boldsymbol{m} \in_{\overline{Q}} \pi^v$.

进一步地，若 G_3解释 mmm 处于配置 $\langle \text{mmm}', \pi\rangle$（相对于绑定子 Q），$\text{mm}\overline{\text{m}} \in_{\overline{Q}} \langle \text{mmm}', \pi\rangle$则可用符号表示为 $\text{mmm} \in_{\overline{Q}} \pi$且 $\text{mmm} \ \text{VAR}\backslash\text{VAR}(\overline{Q})\ \text{mmm}'$。

在 QG_3, a 中，配置仍然是一个结构 $\langle \text{mmm}\ \pi\rangle$，但现在 mmm 是一个部分的 G_3 解释，用于存储在分析 QG_3-策略 π期间获得的不同赋值。给定一个量化布尔公式 $Q_1x1,\cdots,Q_n x_n \varphi$ 和一个配置 $\langle \text{mmm}\ \pi\rangle$，满足关系定义如下：

- $\langle \boldsymbol{m}, \lambda\rangle \models \varphi$ if $\boldsymbol{m}(\varphi) = 1$
- $\langle \boldsymbol{m}, \pi\rangle \models \exists x Q_{i+1}x_{i+1}\cdots Q_n x_n \varphi$ if for some $v \in \{0,\frac{1}{2},1\}$, $\pi = v;\pi'$ and $\langle \boldsymbol{m}_v^x, \pi'\rangle \models Q_{i+1}x_{i+1}\cdots Q_n x_n \varphi$

- $\langle mmm\ \pi\rangle \models \forall x Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$ 当且仅当 $\pi = [0 \to \pi^0 \mid \frac{1}{2} \to \pi^{\frac{1}{2}} \mid 1 \to \pi^1]$，并且 $\langle mmm\ x_0, \pi^0\rangle \models Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$、$\langle mmm\ x_1, \pi^{\frac{1}{2}}\rangle \models Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$ 以及 $\langle mmm\ x_1, \pi^1\rangle \models Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$。2

定义 7. 若 QG_3-策略 π 满足量化布尔公式 $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\varphi$ if $\langle \varepsilon, \pi\rangle \models Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\varphi$，则称其满足该公式。示例 3（续例 2）。考虑公式 $\psi = \forall x \exists z\ ((z \to x) \wedge (z \vee \neg z))$。满足 ψ 的两个 QG_3-策略为 $\pi_{(a)} = [0 \to 0;\ \lambda \mid \frac{1}{2} \to 0;\ \lambda \mid 1 \to 0;\ \lambda]$ and $\pi_{(b)} = [0 \to 0; \lambda \mid \frac{1}{2} \to 0;\ \lambda \mid 1 \to 1; \lambda]$，其树形表示如图 3 所示。

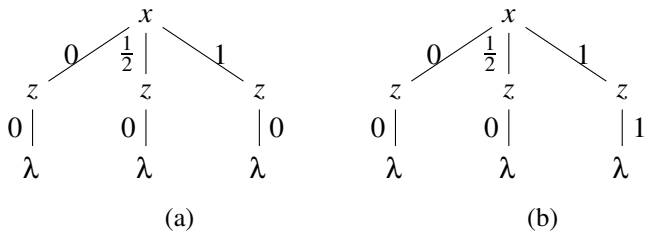


图 3：满足量化布尔公式 $\psi = \forall x \exists z\ ((z \to x) \wedge (z \vee \neg z))$ 的两个 QG_3-策略。

下面的引理表明，对于一个没有自由变量的量化布尔公式 $Q\varphi$，其在 QG_3-语义下的可满足性仅取决于 φ 中的变量（即在 φ 中出现、但未在 Q 中出现的变量）。引理 11. 设 $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\varphi$ 是一个量化布尔公式，且 $VAR(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，mmm 是一个 G_3 解释。$\langle \varepsilon, \pi\rangle \models Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\varphi$ 当且仅当 $\langle mmm\ \pi\rangle \models Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\varphi$。

命题公式 φ 的极小（或均衡）模型概念依赖于解释之间所诱导的偏序 $\trianglelefteq$。对于量化布尔公式，命题变量的真值由量词的解释确定。因此，其答案集以均衡配置的形式表示，定义如下。

定义 8（均衡配置）。给定一个量化布尔公式 $Q\varphi$ 和一个配置 $\langle mmm\ \pi\rangle$，我们递归地定义 $\langle mmm\pi\rangle$ 是均衡配置的概念如下：

- 如果 $Q\varphi$ 没有量词，那么当且仅当 $\pi = \lambda$ 且 mmm 是 φ的均衡模型时，$\langle mmm\ \pi\rangle$ 是 $Q\varphi$ 的均衡配置。
- 如果 $Q\varphi$ 的形式为 $\exists x Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q n x n \varphi$，那么当以下两项均成立时，$\langle mmm\ \pi\rangle$ 是 $\overline{Q}\varphi$ 的均衡配置：1）$\pi = v; \pi'$其中 $v \in \{0, 1\}$；2）$\langle mmmxv\ \pi'\rangle$ 是 $Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q n x n \varphi$的均衡配置。
- 如果 $\overline{Q}\varphi$ 的形式为 $\forall x Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q n\ x n \varphi$，那么当$\pi = [0 \to \pi^0 \mid 1 \to \pi^1]$且以下两项均成立时，$\langle mmm\ \pi\rangle$ 是 $Q\varphi$ 的均衡配置：1）$\langle mmmx_0, \pi^0\rangle$ 是 $Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q n x n \varphi$的均衡配置；2）$\langle mmmx_1, \pi^1\rangle$ 是 $Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q n x n \varphi$的均衡配置。

如果量化布尔公式 $Q\varphi$ 存在一个均衡配置 $\langle mmm\ \pi\rangle$，则称 QBF 策略 π 是该公式的均衡策略 φ。

4 均衡策略算法

我们提出了一种算法，根据上一节中的均衡策略计算量化布尔公式的 QBF 策略。我们的算法使用配置 $\langle mmm\ \pi\rangle$，其中 mmm 是 G_3 解释，π 是 QBF 策略，而不是 G_3 策略，以便计算均衡策略。为此，我们对量化布尔公式的满足关系进行如下修改（情况 1 2 从量词语义中删除，但不从 G_3 中的解释 mmm 中删除）：

- $\langle mmm\ \lambda\rangle \models \varphi$ 如果 $mmm(\varphi) = 1$
- $\langle mmm\ \pi\rangle \models \exists x Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$ 如果 1) $\pi = v;\ \pi'$，其中 $v \in \{0,1\}$ 且 2) $\langle mmm_{xv}\ \pi'\rangle \models Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$
- $\langle mmm\ \pi\rangle \models \forall x Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$ 如果 $\pi = [0 \to \pi^0 \mid 1 \to \pi^1]$ 且两者都满足 1) $\langle mmm_{x_0},\ \pi^0\rangle \models Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$ 且 2) $\langle mmm_{x_1},\ \pi^1\rangle \models Q_{i+1} x_{i+1} \cdots Q_n x_n \varphi$。

我们的算法借助一种名为 Θ-pair 的新结构实现了最小化。该结构捕获了一些（潜在的）子策略，以及那些可能通过最小化删除某些清晰模型（进而也删除某些潜在策略）的非清晰模型：

定义 9（由解释 mmm 条件化的 $\Theta^{\varphi}_{\exists}$ Q 对）。设 Q 为绑定子，φ 为无量词公式。由解释 mmm 条件化的 $\Theta^{\varphi}_{\exists}$ Q 对是一个对 (T, HC)，由一组 QBF 策略 $T \subset T\ P_{QBF}(Q)$ 组成，满足对于所有 $\pi \in T$，$\langle mmm\ \pi\rangle \models Q\varphi$；以及一组 的非清晰模型 HC，满足对于所有 $mmm' \in HC$，mmm'，$VAR(\varphi)\backslash VAR(\overline{Q})$ mmm 且 $mmm' \not\sim_{VAR(\overline{Q})} mmm$。

下面的例子说明了我们用于 QASP 的量词消去算法在基本情形 $Q = \exists z$ 和 $Q = \forall z$ 下的处理方式。

例 4（例 2 续）。设 $\varphi = ((z \to x) \wedge (z \vee \neg z))$ 为例 4 中的公式。我们考虑形如 Qx Qz 的绑定子，这表示变量 x 在 z 之前消去。在这种情况下，我们假设在消去过程中，x 已经（预先）赋有一个值。如果 $Qz = \exists z$，我们将按如下方式推理：

- 由于 $\langle mmm_1,\ \lambda\rangle \models \varphi$ 且 $mmm_2(\varphi) = mmm_3(\varphi) = 0$ 因此 $\langle \varepsilon x_0, 0; \lambda\rangle \models \exists z\varphi$ 且 $(T^{\exists} z_0,\ HC^{\exists} z_0) = (\{0; \lambda\}, /0)$ 是一个由 εx_0 条件化的 $\Theta^{\varphi}_{\exists}$ z-对；
- 由于 $mmm_5(\varphi) = mmm_6(\varphi) = \frac{1}{2}$ 且 $mmm_4(\varphi) = 1$ 并且 mmm_4 是 φ 的非清晰模型，因此 $(T^{\exists} z_{12}, HC^{\exists} z_{12}) = (/0, \{mmm_4\})$ 是一个由 εx_{12} 条件化的 $\Theta^{\varphi}_{\exists}$ z-对；
- 由于 $\langle mmm_7,\ \lambda\rangle \models \varphi$ 且 $\langle mmm_9,\ \lambda\rangle \models \varphi$ 且 $mmm_8(\varphi) = \frac{1}{2}$ 因此 $\langle \varepsilon x_1, 0; \lambda\rangle \models \exists z\varphi$ 且 $\langle \varepsilon x_1, 1; \lambda\rangle \models \exists z\varphi$ 且 $(T^{\exists} z_1, HC^{\exists} z_1) = (\{0; \lambda, 1; \lambda\}, /0)$ 是一个由 εx_1 条件化的 $\Theta^{\varphi}_{\exists}$ z- 对。

如果改为 $Qz = \forall z$，我们得到

- 由于 $mmm_3(\varphi) = 0$ 且 $mmm_2(\varphi) = 0$ 那么 $(T^{\forall} z_0,\ HC^{\forall} z_0) = (/0, /0)$ 是一个由 εx_0 条件化的 $\Theta^{\varphi}_{\forall}$ z-对；
- 由于 $mmm_4(\varphi) = 1$ 且 mmm_4 是一个非清晰解释，因此 $(T^{\forall_{z_{12}}},\ HC^{\forall_{z_{12}}}) = (/0,\ \{mmm_4\})$ 是一个 $\Theta^{\varphi}_{\forall z}$-对，由 ε_{x_1}；
- 由于 $\langle mmm_7,\ \lambda\rangle \models \varphi$ 且 $\langle mmm_9,\ \lambda\rangle \models \varphi$ 并且 $mmm_8(\varphi) = \frac{1}{2}$ 那么 $\langle \varepsilon x_1, [0 \to \lambda \mid 1 \to \lambda]\rangle \models \forall z\varphi$ 且 $(T^{\forall} z_1,\ HC^{\forall} z_1) = (\{[0 \to \lambda \mid 1 \to \lambda]\}, /0)$ 是一个由 εx_1 条件化的 $\Theta^{\varphi}_{\forall}$ z-对。

我们提出的算法名为 QEM，见算法1，是一种从最外层量词到最内层量词进行消去的量词消去算法。每次调用时，QEM算法都会构造一个以 mmm 为条件的 Θ^{φ}_{Q}-对作为输出。初始调用 QEM(Q φ,ε) 的输出是一个以 ε、(T,HC) 为条件的 Θ^{φ}_{Q}-对，其中 T 是 Qφ 的均衡策略集合。

QEM算法中存在量词（第 4 至 6 行）和全称量词（第 9至 13 行）的基本情形，将定义 8 应用于仅有一个后续量词的绑定子，并对量化变量严格施加极小性条件：

- 如果 $\langle mmm\ \pi\rangle$ 是 $\exists x\varphi$ 的均衡配置，那么 $\pi = v; \lambda$ 其中
  1. $v = 0$ 和 $mmm^{x}_{v}(\varphi) = 1$ 或

2. $v = 1$ and $\boldsymbol{m}^x_v(\varphi) = 1$ and $\boldsymbol{m}^x_{\frac{1}{2}}(\varphi) \leq 1$.

- 如果 $\langle \mathrm{mmm}\ \pi\rangle$ 是 $\forall x\varphi$ 的均衡配置，那么 $\pi = [0 \to \lambda \mid 1 \to \lambda]$ 与

1. $\mathrm{mmm}^x_0(\varphi) = 1$ 和 2. $\mathrm{mmm}^x_1(\varphi) = 1$ 和 $\mathrm{mmm}^x_{\frac{1}{2}}(\varphi) \leq 1$.[2]

均衡配置不能仅根据解释 mmm 来构造。显然，定义 8 的第一项施加了一个更全局的条件：给定一个量化公式 $Q\varphi$和一个 $Q\varphi$的均衡配置 $\langle \mathrm{mmm}\,\pi\rangle$，每个 $\mathrm{mmm}' \in_{\overline{Q}} \langle \mathrm{mmm}\ \pi\rangle$ 都是 φ的均衡模型。由于解释 mmm 的更新所决定的 Θ^{φ}_{Q}-对的非清晰部分，我们的算法满足这一条件。

例 5（例 4 续）。$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^x_1, 0;\ \lambda\rangle \models \exists z\varphi$ 但 $\mathrm{mmm}_7 \in_{\exists z} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^x_1, 0;\ \lambda\rangle$ 并且 $\mathrm{mmm}_4 \lhd \mathrm{mmm}_7, \mathrm{mmm}_4$ 是 φ 的一个非清晰模型，属于 $(\{0;\lambda\}, \{\mathrm{mmm}_4\})$ 的非清晰部分，即由 $\boldsymbol{\varepsilon}^x_{\frac{1}{2}}$ 决定的 $\Theta^{\varphi}_{\exists}$ z-对。因此 mmm_7 不是一个均衡模型，并且 $\langle \boldsymbol{\varepsilon}, 1;\ 0;\ \lambda\rangle \not\models \exists x\exists z\varphi$。

我们定义两个新的算子：用于 $\exists$量词的 $\mathrm{mc}_{\exists}$ 算子和用于 $\forall$量词的 $\mathrm{mc}_{\forall}$ 算子。消去量词 Qx 后，它们将分别由 mmm^x_0、$\mathrm{mmm}^x_{\frac{1}{2}}$ 和 mmm^x_1条件化的 Θ^{φ}_{Q}-对 (T_0, HC_0)、$(T^{\frac{1}{2}}, HC^{\frac{1}{2}})$ 和 (T_1, HC_1) 合并为由 mmm 条件化的新的 Θ^{φ}_{QxQ}-对。

定义 10（$\mathrm{mc}_{\exists}$ 算子）。设 Q 是一个绑定子，φ 是一个无量词公式，且 $x \in \mathrm{VAR}(\varphi) \setminus \mathrm{VAR}(Q)$。设 (T_0, HC_0)、$(T^{\frac{1}{2}}, HC^{\frac{1}{2}})$ 和 (T_1, HC_1) 是一些由解释分别 mmm^x_0、$\mathrm{mmm}^x_{\frac{1}{2}}$和 mmm^x_1条件化的 $\Theta_{\overline{Q}}$-对。$\mathrm{mc}_{\exists}$算子定义如下：$\mathrm{mc}_{\exists}(x, (T_0, HC_0), (T^{\frac{1}{2}}, HC^{\frac{1}{2}}), (T_1, HC_1)) = (T_{\exists x}, HC_{\exists x})$，其中

$$
\begin{aligned}
T_{\exists x} &= \{0;\pi \mid \pi \in T_0\} \\
&\cup \{1;\pi \mid \pi \in T_1,\ \boldsymbol{m}_1 \in_{\overline{Q}} \pi,\ \boldsymbol{m}_1 \triangleq_{\mathrm{VAR}(\varphi)\setminus\mathrm{VAR}(\exists x\overline{Q})} \boldsymbol{m}, \\
&\qquad \textit{there is no } \boldsymbol{m}' \in HC_{\frac{1}{2}} \textit{ s.t. } \boldsymbol{m}' \lhd \boldsymbol{m}_1 \textit{ and} \qquad (5) \\
&\qquad \textit{there is no } \pi' \in T_{\frac{1}{2}} \textit{ s.t. } \boldsymbol{m}_1 \in_{\overline{Q}} \pi'\} \qquad (6) \\
HC_{\exists x} &= \{\boldsymbol{m}' \mid \pi \in T_{\frac{1}{2}} \textit{ and } \boldsymbol{m}' \in_{\overline{Q}} \pi\} \cup \bigcup_{i\in\{0,\frac{1}{2},1\}} HC_i
\end{aligned}
$$

根据定义 9 和 $\lhd$ 的定义，如果 $\pi \in T_0$，则 $0;\pi \in T_{\exists x}$。如果存在一个 mmm' 使得 (5) 成立，或者 π' 满足 (6)，那么 mmm 不再是 $\trianglelefteq$- 极小的，并且 $\langle \mathrm{mmm}, 1;\pi\rangle$ 不可能是均衡配置；否则，$1;\pi \in T_{\exists x}$。

示例 6（例 4 续）。给定量化布尔公式 $\exists x\exists z\varphi$，应用于 x 的 $\mathrm{mc}_{\exists}$ 返回

$$mc_{\exists}(x, (T_0^{\exists z}, HC_0^{\exists z}), (T_{\frac{1}{2}}^{\exists z}, HC_{\frac{1}{2}}^{\exists z}), (T_1^{\exists z}, HC_1^{\exists z})) = (\{0;0;\lambda, 1;1;\lambda\}, \{\boldsymbol{m}_4\}).$$

$\mathrm{mc}_{\forall}$ 算子与 $\mathrm{mc}_{\exists}$ 算子类似。区别在于，$\mathrm{mc}_{\forall}$ 算子同时满足关于 T_0 和 T_1 的两个条件。

定义 11（$\mathrm{mc}_{\forall}$ 算子）。设 Q 是一个绑定子，φ 是一个无量词公式，且 $x \in \mathrm{VAR}(\varphi) \setminus \mathrm{VAR}(Q)$。设 (T_0, HC_0)、$(T^{\frac{1}{2}}, HC^{\frac{1}{2}})$ 和 (T_1, HC_1) 是由解释分别条件化的某些 $\Theta_{\overline{Q}}$-对

mmm_0^x、$\mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x$和 mmm_1^x。$\mathrm{mc}_\forall$算子定义如下：$\mathrm{mc}_\forall(x, (T_0, HC_0)$、$(T_{\frac{1}{2}}, HC_{\frac{1}{2}})$、$(T_1, HC_1)) = (T_{\forall x}, HC_{\forall x})$，其中

$$\begin{aligned} T_{\forall x} \quad = \quad & \{[0 \to \pi_0 \mid 1 \to \pi_1] \mid \pi_0 \in T_0,\ \pi_1 \in T_1, \\ & \boldsymbol{m}_1 \in_{\overline{Q}} \pi_1,\ \boldsymbol{m}_1 \triangleq_{\mathtt{VAR}(\varphi)\setminus\mathtt{VAR}(\forall x\overline{Q})} \boldsymbol{m}, \\ & \textit{there is no } \boldsymbol{m}' \in HC_{\frac{1}{2}} \textit{ s.t. } \boldsymbol{m}' \lhd \boldsymbol{m}_1 \textit{ and} \\ & \textit{there is no } \pi' \in T_{\frac{1}{2}} \textit{ s.t. } \boldsymbol{m}_1 \in_{\overline{Q}} \pi'\} \end{aligned}$$

并且 $\mathrm{HC}_{\forall x}$ 定义为 $\mathrm{HC}_{\exists x}$。

示例7（续例 4）。给定 $\varphi = ((z \to x) \wedge (z \vee \neg z))$，我们得出，对于公式 $(\forall x \exists z \varphi)$，

$$mc_\forall(x, (T_0^{\exists z}, HC_0^{\exists z}), (T_{\frac{1}{2}}^{\exists z}, HC_{\frac{1}{2}}^{\exists z}), (T_1^{\exists z}, HC_1^{\exists z})) = (\{[0 \to 0; \lambda \mid 1 \to 1; \lambda]\}, \{\boldsymbol{m}_4\}).$$

算法1：QEM

输入：一个非空绑定子 Q、一个命题公式 φ和一个 G_3 解释 mmm。输出：一个由 mmm 条件化的Θ_{Q}^{φ}对

$\mathrm{T}_x \leftarrow /0$;
$\mathrm{HC}_x \leftarrow /0$;
若 $\overline{Q} = \exists x$ 则
  若 $\mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x(\varphi) = 1$ 则 $\mathrm{HC}_x \leftarrow \mathrm{HC}_x \cup \{\mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x\}$;
  若 $\mathrm{mmm}_0^x(\varphi) = 1$ 则 $\mathrm{T}_x \leftarrow \mathrm{T}_x \cup \{0; \lambda\}$;
  若 $\mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x(\varphi) \le \frac{1}{2}$ 且 $\mathrm{mmm}_1^x(\varphi) = 1$ 则 $\mathrm{T}_x \leftarrow \mathrm{T}_x \cup \{1; \lambda\}$;
  返回 (T_x, HC_x);
如果 $\overline{Q} = \forall x$ 那么
  如果 $\mathrm{mmm}_0^x(\varphi) = 1$ 且 $\mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x(\varphi) \le \frac{1}{2}$ 且 $\mathrm{mmm}_1^x(\varphi) = 1$ 则返回 $(\{[0 \to \lambda \mid 1 \to \lambda]\}, /0)$;
  如果 $\mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x(\varphi) = 1$ 则 $\mathrm{HC}_x \leftarrow \mathrm{HC}_x \cup \{\mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x\}$;
  如果 $\mathrm{mmm}_0^x(\varphi) = 1$ 且 mmm_0^x 不清晰，则 $\mathrm{HC}_x \leftarrow \mathrm{HC}_x \cup \{\mathrm{mmm}_0^x\}$;
  如果 $\mathrm{mmm}_1^x(\varphi) = 1$ 且 mmm_1^x 不清晰，则 $\mathrm{HC}_x \leftarrow \mathrm{HC}_x \cup \{\mathrm{mmm}_1^x\}$;
  返回 (/0, HC_x);
若 $\overline{Q} = Q x Q'$ 则
  $(\mathrm{T}_0, \mathrm{HC}_0) = \mathrm{QEM}(Q', \overline{\varphi, \mathrm{mmm}_0^x})$;
  $(\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}, \mathrm{HC}_{\frac{1}{2}}) = \mathrm{QEM}(Q', \overline{\varphi, \mathrm{mmm}_{\frac{1}{2}}^x})$;
  $(\mathrm{T}_1, \mathrm{HC}_1) = \mathrm{QEM}(Q', \overline{\varphi, \mathrm{mmm}_1^x})$;
  若 $Q = \exists$则返回 $\mathrm{mc}_\exists(x, (\mathrm{T}_0, \mathrm{HC}_0), (\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}, \mathrm{HC}_{\frac{1}{2}}), (\mathrm{T}_1, \mathrm{HC}_1))$;
  否则返回 $\mathrm{mc}_\forall(x, (\mathrm{T}_0, \mathrm{HC}_0), (\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}, \mathrm{HC}_{\frac{1}{2}}), (\mathrm{T}_1, \mathrm{HC}_1))$;

定理 12. 给定量化布尔公式 $\overline{Q}\varphi$ 和一个 G_3 解释 mmm，QEM($Q\ \overline{\varphi}$,mmm) 计算由 mmm 条件化的 Qφ 均衡策略集。

E例8（例6和例7续）。对于 $\varphi = ((z \to x) \wedge (z \vee \neg z))$，我们有：

1. $\exists x \exists z \varphi$ 有两个均衡策略：0；0；λ 和 1；1；λ。读者可以验证，公式$\exists z \exists x \varphi$具有相同的均衡策略。这个结果是意料之中的，因为与量化布尔公式一样，同一块中的两个量词（因此类型相同）可以互换顺序，而不影响可满足性。2. $\forall x \exists z \varphi$ 有均衡策略 $[0 \to 0;\ \lambda \mid 1 \to 1;\ \lambda]$。在这种情况下，公式 $\forall z \exists x \varphi$ 具有相同的均衡策略。然而，与量化布尔公式一样，这并非普遍成立。3. 最后，读者可以验证，公式 $\exists x \forall z \varphi$、$\exists z \forall x \varphi$、$\forall z \forall x \varphi$ 和 $\forall x \forall z \varphi$没有均衡策略。

算法1 计算与一个均衡模型相关联的所有均衡策略。下面对我们的算法作一些说明。基本情况 $\exists x\ \varphi$ 和 $\forall x\ \varphi$ 仅考虑满足 φ且不能仅通过最小化 x 的真值而被舍弃的全 G_3 解释。此外，满足 φ的非全解释不会提供任何均衡策略，但会被保留，因为它们可用于排除其他解释。对于归纳步骤，算子 $\mathrm{mc}_{\exists}$ （分别为 $\mathrm{mc}_{\forall}$）应用最小化条件（定义 10.（$T_{\exists x}$）（分别为定义 11.（$T_{\forall x}$））），以舍弃相对于定义 3 而言并非最小的均衡策略。此外，还会保留可能用于舍弃全模型的候选解释，以便进行进一步测试。为保持规整性，在 $T^{\downarrow}_{\frac{1}{2}}$’ 中，量化布尔公式策略由非清晰模型构建；当然，所有这些模型都可以放入非清晰模型集合 $HC^{\downarrow}_{\frac{1}{2}}$，并将 $T^{\downarrow}_{\frac{1}{2}}$ 留空。为简单起见，非清晰模型集合并未得到最优管理，但可以使用关系 $\trianglelefteq$ 仅保留其中的最小元素。Prolog 原型可访问 https://leria-info.univ-angers.fr/~igor. stephan/Research/EQUILIBRIUM_POLICIES/equilibrium_policies.html。

5 结论与未来工作

本文研究了 [20, 11], 中定义的量化答案集编程（QASP），其中命题量化应用于命题变量。我们证明，文中提及的两种语义并不等价。我们还研究了在 [11], 语义下的策略生成问题 [8] ，并提出一种算法，用于计算与量化布尔公式相关的所有极小策略。我们的方法以量化命题 G_3 [3] 作为单调基底，并借鉴平衡逻辑中的思想来实现极小性。该算法已在 Prolog 原型中实现，可用于对真实示例进行实践评估。未来，我们计划探索以下方向：

1. St´ephan 语义：将命题量化解释为稳定模- 型上的滤子 [11] 与 ASP 相一致，但限制了玩家显式选择真值赋值。St´ephan 的方法允许此类操作；我们旨在进一步探索其在知识表示中的潜力。2. 算法改进：当前算法穷举所有情况，其中包括可能存在冗余的情况。我们计划首先研究该算法的复杂度（本文未对此进行考察），并研究框架的形式性质，以简化和优化该过程。3. QBF 的句法子片段：鉴于 QASP可满足性为 PSPACE 完全 [11], ，我们希望借鉴 [21, 17] 的见解，确定可能带来更低复杂度的句法限制。4. 在双人博弈中的应用：QASP 已被应用于对双人博弈进行建模 [13]。我们计划在这一背景下应用策略提取算法，从可满足性检查进一步拓展到识别具体策略。

参考文献

[1] G. Amendola、B. Cuteri、F. Ricca 和 M. Truszczynski（2022）：使用 ASP(Q) 求解多项式层次中的问题。载于 G. Gottlob、D. Inclezan 和 M. Maratea（编）：第十六届国际逻辑编程与非单调推理会议论文集（LPNMR'22），《计算机科学讲义》13416，Springer-Verlag，第 373–386 页，doi:10.1007/978-3-031-15707-3_29。[2] G. Amendola、F. Ricca 和 M. Truszczynski（2019）：超越 NP：对答案集进行量化。《逻辑编程理论与实践》19(5-6)，第 705–721 页，doi:10.1017/S1471068419000140。[3] M. Baaz、A. Ciabattoni 和 R. Zach（2000）：量化命题 G¨odel 逻辑。载于：第七届程序设计与自动推理逻辑国际会议论文集（LPAR），《计算机科学讲义》1955，Springer，第 240–256 页，doi:10.1007/3-540-44404-1_16。[4] M. Benedetti（2005）：sKizzo：用于评估和验证量化布尔公式的套件。载于：第二十届自动演绎国际会议论文集（CADE'05），第 369–376 页，doi:10.1007/11532231_27。[5] A. Biere、M. Heule、H. van Maaren 和 T. Walsh（编）（2021）：可满足性手册。《人工智能与应用前沿》336，IOS Press，doi:10.3233/FAIA336。[6] B. Bogaerts、T. Janhunen 和 S. Tasharrofi（2016）：稳定—不稳定语义：使用正规逻辑程序超越 NP。《逻辑编程理论与实践》16(5-6)，第 570–586 页，doi:10.1017/S1471068416000387。[7] G. Brewka、T. Eiter 和 M. Truszczy´nski（2011）：答案集编程概览。《ACM 通讯》54(12)，第 92–103 页，doi:10.1145/2043174.2043195。[8] S. Coste-Marquis、H. Fargier、J. Lang、D. Le Berre 和 P. Marquis（2006）：表示量化布尔公式的策略。载于 P. Doherty、J. Mylopoulos 和 C. Welty（编）：第十届知识表示与推理原则国际会议论文集（KR'06），AAAI Press，第 286–297 页。[9] W. Faber（2024）：使用带量词的答案集编程求解论证问题：初步报告。载于：第四十届逻辑编程国际会议研讨会论文集（ICLP-WS），CEURWorkshopProceedings3799。[10] W. Faber 和 M. Morak（2023）：通过带量词的答案集编程评估认识逻辑程序。载于：第三十七届 AAAI 人工智能会议，第 6322–6329 页，doi:10.1609/AAAI.V37I5.25778。[11] J. Fandinno、F. Laferriere、J. Romero、T. Schaub 和 T. Son（2021）：在量化答案集编程中规划不完备信息。《逻辑编程理论与实践》21(5)，第 663–679 页，doi:10.1017/S1471068421000259。[12] K. G¨odel（1932）：直觉主义命题演算。《维也纳科学院通报》，第 65–66 页。[13] Y. He、A. Saffidine 和 M. Thielscher（2024）：使用量化布尔公式求解器在通用博弈中求解双人博弈。载于：第二十三届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（AAMAS），IFAAMAS，第 807–815 页，doi:10.5555/3635637.3662934。[14] A. Heyting（1930）：直觉主义逻辑的形式规则。载于：柏林普鲁士科学院会议报告，柏林德国科学院，第 42–56 页。[15] V. Lifschitz（2010）：稳定模型的十三种定义。载于：《逻辑与计算领域：献给 Yuri Gurevich 七十寿辰的论文集》，Springer，第 488–503 页，doi:10.1007/ 978-3-642-15025-8 24。_[16] G. Malinowski（1993）：多值逻辑。《牛津逻辑指南》，牛津大学出版社、Clarendon Press，doi:10.1093/oso/9780198537878.001.0001。[17] N. Oijid（2024）：有界度量化布尔公式与位置博弈。CoRR，doi:10.48550/ARXIV.2411. 10093。

[18] D. Pearce（2006）：平衡逻辑。《数学与人工智能年刊》47(1-2)，第 3–41 页，doi:10.1007/S10472-006-9028-Z。[19] D. Pearce、H. Tompits 和 S. Woltran（2001）：平衡逻辑与嵌套表达式逻辑程序的编码。载于：第十届葡萄牙人工智能会议（EPIA'01）论文集，《计算机科学讲义》2258，Springer-Verlag，第 306–320 页，doi:10.1007/ 3-540-45329-6 31。_[20] I. St´ephan（2014）：QASP ou la programmation par ensembles r´eponses quantifi´ee。载于：第十九届全国模式识别与人工智能会议（RFIA）论文集。可访问：https://hal.science/hal-00989206v1/document。法语。[21] I. St´ephan 和 B. Da Mota（2009）：QBF 证书与编译的统一框架。载于：第三届印度逻辑及其应用会议（ICLA）论文集，《计算机科学讲义》5378，Springer，第 210–223 页，doi:10.1007/978-3-540-92701-3_15。[22] L.J. Stockmeyer 和 A.R. Meyer（1973）：需要指数时间求解的字问题。载于：第五届 ACM 计算理论研讨会（STOC）论文集，第 1–9 页，doi:10.1145/800125.804029。