arXiv:2601.03837v1 [math.MG] 7 Jan 2026

海森堡群中的低维一致可整性

¨KATRIN FASSLER、ANDREA PINAMONTI 和 KILIAN ZAMBANINI

Abstract. 在 Hahlomaa 早期结果的基础上，我们为海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 中的 k-正则集合提出了一种新的 Carleson 型条件，以确保其包含来自 $\mathbb{R}^k$ 子集的 Lipschitz 像的大块，其中 $1 \le k \le n$。我们的方法借助于 Bate、Hyde 和 Schul 最近引入的、基于赋范空间的电晕分解。与此同时，我们证明了 $\mathbb{H}^n$中低维集合的若干定量可整性概念之间的蕴含关系。

1. Introduction

本文研究次黎曼海森堡群 $\mathbb{H}^n$中 $1 \le k \le n$的一致 k-可整集合。关于 $\mathbb{H}^n$中（一致）可整性的定量多尺度研究，主要针对维数为 1 的集合（例如 [FFP07；Jui10；LS16a；LS16b；CL17；CLZ19；FO21；Li22；BLZ23]）或余维数为 1 的集合（例如 [MS17；NY18；CFO19；Rig19；FOR20；NY22；CLY22；CLY26；CLY25；Mer23；HJ25]）。一个值得注意的例外是 Hahlomaa 的预印本[Hah12], ，它为本研究提供了最初的推动力。另一方面，在抽象度量空间中，Bate、Hyde 和 Schul 的一项近期突破 [BHS23]为建立一种从 $\mathbb{R}^k$出发、通过 Lipschitz 像研究一致可整性的通用理论奠定了基础，其思想源自 David 和 Semmes 在欧几里得空间中的工作 [DS91；DS93]。

BPLI 的一个新充分条件。我们为 $\mathbb{H}^n$ 中的集合提出一个新的充分 Carleson 型条件，使其具有来自 $\mathbb{R}^k$ 的 Lipschitz 像的大块（BPLI），其中 $1 \le k \le n$；这将 [Hah12] 的结果作为推论。与此同时，我们引入基于水平平面的电晕分解，并将其与文献[FO20; DF22; BHS23]中的其他电晕分解概念联系起来。此外，我们运用一般度量空间理论 [BHS23]的部分成果，简化了 Hahlomaa 论文中的证明。这些结果为[BHS23] 中的结论补充了一系列具体例子，即非欧几里得空间 $(\mathbb{H}^n, d)$ 中的 k-正则集合，其中 $1 \le k \le n$，在这些情形下可以有意义地研究 BPLI 性质的刻画。每个 Lipschitz 函数 $f\colon A \subset \mathbb{R}^k \to (\mathbb{H}^n, d)$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上相对于欧几里得距离都是局部 Lipschitz 的，但只有相对于 $\mathbb{H}^n$ 上的次黎曼结构而言是水平的欧几里得Lipschitz 映射，才是 Heisenberg 度量下的 Lipschitz 映射 d [Mag10]。在这一框架下，我们找到了新的、适用于 BPLI 的 Carleson 测度充分条件；这些条件依赖于环境 $\mathbb{H}^n$ 的结构，且不包含在 [BHS23] 对 BPLI 的刻画之中。

定理 1.1. 设 $n \in \mathbb{N}$和 $k \in \{1, \dots, n\}$。若 $E \subset \mathbb{H}^n$是一个具有性质$E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)}, 2)$以及 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\nu_k})$的 k-正则集合，则 E具有 $\mathbb{R}^k$的子集的利普希茨像的大块。

日期：2026年1月8日。本研究始于 K.Z. 对于韦尔科斯基拉大学的一次访问，该访问部分由芬兰研究理事会的 352649号资助提供经费。K.F. 获得了芬兰科学院（现为芬兰研究理事会）的 321696号资助。A.P. 和 K.Z. 是意大利国家高等数学研究所（INdAM）数学分析、概率论及其应用国家研究组（GNAMPA）的成员，二人均获特伦托大学、MIUR-PRIN 2022项目次黎曼结构中的正则性问题 项目代码：2022F4F2LH以及 INdAM-GNAMPA 2025项目海森堡群中次黎曼超曲面的结构的支持，项目编号为 CUP ES324001950001。

将“Lipschitz”替换为“双Lipschitz”时，结论仍然成立。限制到 $k \leq n$是自然的，因为 $(\mathbb{H}^n, d)$ 在Federer意义下是纯 k-不可整流的，见 $k > n$ [AK00；Mag04]。在 $k > n$范围内，一致 k-可整流性应建立在内在Lipschitz图 [FSS07]之上，而非来自 $\mathbb{R}^k$的度量Lipschitz像；这不是本文探讨的方向。

定理 1.1 中的概念将在定义 3.1、3.2、3.9、3.15 和 3.19 中予以恰当介绍。此处我们仅指出，弱几何引理 WGL(β_∞,ν_k) 是一种量化方式：对于每个精度级别 $\varepsilon > 0$，集合 E 在所有以 E 为中心的球中，除去可能满足 Carleson 打包条件的一个球族外，都以尺度不变的方式与水平 k-平面保持 ε 接近。已知在欧几里得空间中，仅有弱几何引理甚至不足以推出可整流性 [DS91, §20]，因为它无法充分控制当尺度不断缩小时，点处的最佳逼近平面会旋转多少。在定理 1.1 的证明中，几何引理 GLem(β_1,π,$A(2n,k)$, 2) 使我们能够控制某些逼近水平 k-平面的旋转幅度。值得注意的是，不同于系数 β_∞,ν_k，对于 $x \in E$ 和 $r > 0$，β_1,π,$A(2n,k)$$(x, r)$-数仅衡量投影 $\pi(E \cap B(x, r)) \subset \mathbb{R}^{2n}$ 被任意仿射 k-平面在$\mathbb{R}^{2n}$ 中逼近得有多好；但事实证明，与 WGL(β_∞,ν_k) 假设结合起来，这已足够。

与文献中的几何引理的联系。 我们对定理 1.1 的证明仿照了 Hahlomaa的论文 [Hah12], , 其中在更强的假设下给出了该结果的一个版本。我们将其作为定理1.1的一个推论恢复如下：

推论 1.2 (Hahlomaa)。 设 $n \in \mathbb{N}$且 $k \in \{1, \dots, n\}$。如果 $E \subset \mathbb{H}^n$是一个 k-正则集合，满足 GLem(β_1, ν_k, 2)，那么 E具有 $\mathbb{R}^k$的利普希茨像的大块。

在第 4 节中，我们给出集合 $E \subset \mathbb{H}^1$ 的一个例子，以说明定理 1.1 中的假设严格弱于推论 1.2 中的假设。集合 E 是由 Juillet 在 [Jui10]中构造的可整流曲线 Γ 。Juillet 使用这个例子证明，对于 $\mathbb{H}^1$ 的一个子集，要使其包含于一条可整流曲线中，分析学家的旅行推销员定理意义下在 [FFP07] 中陈述的充分条件并非必要条件。为将此例应用于我们的语境，我们首先验证来自 [Jui10] 的曲线 Γ 事实上是 1-正则的。由 [Jui10] 容易看出，$\Gamma \notin$ GLem(β_∞,ν_1, 2)，也就是说，Γ 不满足关于 L^∞-基于水平 β-数的指数为 2 的几何引理；对于任意指数 $p < 4$，也可以构造类似的例子，参见 [Li22]。然而，这并不能先验地排除这样的可能性：Γ 可能满足推论 1.2 中那种关于 L^1-基于水平 β-数的相应几何引理，至少不能通过诸如 [DS91, (5.4)]这样的标准估计来排除。第 4 节的主要工作在于验证：曲线 Γ 无法由水平直线很好地逼近，以至于它甚至不满足 L^1-基于的几何引理 GLem(β_1,ν_1, 2)。另一方面，由 Li 的工作 [Li22] 的一个（定量化）结果可知，Γ满足我们定理 1.1 的假设。这个例子还表明，通过几何引理 GLem(β_1,ν_k, 2)（指数为 2）来刻画 BPLI，类似于欧几里得情形中的 [DS91], , 在 $\mathbb{H}^n$中不可能成立。

事实上，定理 1.1 部分源于这样一个目标：为 $\mathbb{H}^n$ 中的 BPLI 性质提供充分条件，并且这些条件可以通过假设现有文献中的某个几何引理来检验。我们给出两个这样的应用；第一个与分层ˆβ数 中的 [Li22],有关，第二个则与投影 ι数 中的 [FV25b]有关。

推论 1.3。 设 $n \in \mathbb{N}$和 $k \in \{1, \dots, n\}$。若 $E \subset \mathbb{H}^n$是一个 k-正则集合，且满足$E \in$ GLem($\widehat{\beta}_1$,ν_k, 4)，则 E包含 $\mathbb{R}^k$的利普希茨像的大块。

在 [Jui10] 中构造的曲线不满足推论 1.2中的假设，但满足推论 1.3中的假设。

定理 1.4。 存在一条1-正则曲线 $\Gamma \subset \mathbb{H}^1$，满足 $\Gamma \notin$ GLem(β_1, ν_1, 2)，但 $\Gamma \in$ GLem($\widehat{\beta}_1$, ν_1, 4).

The $\widehat{\beta}_1$, ν_k-数是基于 L^1 的版本，对应于 β-数；后者由 [Li22] 为任意卡诺群的子集所引入。本文中，Li 证明了以下旅行推销员定理。集合 E 位于一个步长为 $\mathbb{G}$、齐性维数为 s 的卡诺群中，当且仅当它包含在一条有限长度可整流曲线上

$$\operatorname{diam}(E) + \int_0^\infty \int_{\mathbb{G}} \hat{\beta}_E(x,r)^{2s}\, dx \frac{dr}{r^Q} < \infty.$$

推论 1.3 中的指数“4”在 $2s$ $\mathbb{G} = \mathbb{H}^n$的情形下对应于 [Li22]在 $\mathbb{H}^n$中将 $k = 1$ 推广到 $1 \le k \le n$的结果。推论 1.3 可以解释为 Li 的结果的定量版本的部分推广 $E \subset \mathbb{H}^n$ 。具体而言，具有 $E \in$ GLem(β_∞,ν_1, 4)的 1-正则集 $E \in$ 满足 GLem(β_1,ν_1, 4)，因而根据推论 1.3 具有 BPLI 性质。已知，在完备、倍增的拟凸度量空间中，每个 1-正则 BPLI 集合都包含于某个连通 1-正则集中，见 [FV25a，推论 4.6]。总之，每个具有 $E \in \mathbb{H}^n \backsim E \in$ GLem(β_∞,ν_1, 4)的 1-正则集都可以被某个 1-正则连通集 Γ覆盖。这一事实也可以利用 [Li22]，并结合 [FV25a 第 3]，节中的论证得到，但推论 1.3 提供了另一种方法，并且还能为 $k > 1$提供信息。

最后，我们提及定理 1.1 在第一作者与 Violo 于 [FV25b] 中引入的 ι_{1,ν_k}-数方面的一项应用。粗略地说，如果存在一个投影 P_V到某个水平k-平面 V，使得 P_V在 L^1-范数下于 $E \cap B(x,r)$ 上接近一个等距变换，则对于k-正则集合 E 在点 $x \in E$ 和尺度 $r > 0$处，这些系数很小；参见定义 3.9。特别地，如果 $\iota_{1,\nu_k}(x,r)$ 对于 E而言非常小，则在映射 P_V下， $E \cap B(x,r)$ 上的度量几乎等距于 $\mathbb{R}^k$ 上的欧几里得距离。

推论 1.5。设 $n \in \mathbb{N}$和 $k \in \{1,\dots,n\}$。如果 $E \subset \mathbb{H}^n$是一个 k-正则集合，并且$E \in$ GLem(ι_{1,ν_k}, 1)，那么 E具有 $\mathbb{R}^k$的利普希茨像的大块。

推论 1.5 对于 $k = 1$ 也可由 [FV25a, 定理 1.4] 推出，因为 ι_{1,ν_1}-数不小于 L^1型 Gromov-Hausdorff 数，而后者由 [FV25a]研究。尽管 [FV25a]的方法适用于更一般的度量空间，但它经由门格尔曲率，因此仅限于一维集合；相比之下，定理 1.1 通过电晕分解提供了一种方法，可将推论 1.5 推广至所有 $1 \le k \le n$。后者假设几何引理的指数为“1”，而非推论 1.3 中的“4”。形式上的原因可见命题 3.22，但鉴于 [Vio22; FV25a; FV25b]，，我们认为“1”实际上是最优的。

关于证明的几点说明。我们对定理 1.1的证明遵循 Hahlomaa 对推论 1.2的证明，而后者又以 David 和 Semmes 关于欧几里得空间的工作为蓝本 [DS91，（C3）⇒（C4）⇒（C6）]。这里我们着重介绍我们的方法中的主要新要素。

尽管 Hahlomaa 并未明确以这种形式表述，但他通过一个中间的电晕分解，利用 GLem(β_1, ν_k, 2) 推导出 k-正则集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 具有 BPLI 性质。粗略地说，这一条件意味着，可以将 E 上的二进立方体系统划分为一族坏立方体，其数量不多；剩余的好立方体则可进一步划分为由数量同样不多的树 $\mathcal{F}$ 组成的森林，使得从每棵树 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$的角度来看，集合 E都具有良好的逼近性质。我们定义由水平平面给出的电晕分解 (P-C)（定义 3.30），并调整 Hahlomaa 的证明，以验证对于 $1 \le k \le n$，在 $\mathbb{H}^n$ 中的 k-正则集合 E若满足 GLem(β_1,$_{\pi,A(2n,k)}$, 2) 和 WGL(β_∞,ν_k)，则满足 (P-C)（定理 5.1）。这一电晕分解在形式上强于 [Hah12]，中隐含包含的分解，而我们在引理 6.6 中验证了关键的逼近性质。引理 6.9 揭示了为何以 β_1、π、$_{A(2n,k)}$-数表示的较弱假设足以保证 (P-C)；而该引理如何用于控制 $\mathcal{F}$的某个子族中的树，也说明了这一点。这些树具有这样的性质：其中很大比例的极小立方体的子立方体，其最佳逼近水平平面相较于顶层立方体 Q的最佳逼近平面发生了显著旋转$\mathcal{S}$。旋转幅度与以下性质有关：

E 在投影 π 下的像： $\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\pi(z,t) = z$。这一观察使我们能够利用 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_1,\pi,A(2n,k), 2)$ 控制旋转。另一方面，单凭这一假设（或更强的条件 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_1,\pi,\nu_k, 2)$）并不能推出 BPLI；一个例子是竖直 t轴上的 1-正则子集，它在投影 π 下映为单点（例 5.2）。因此，我们需要 $\mathrm{WGL}(\beta_\infty,\nu_k)$ 来确保 E 先验上具有足够的水平性。

由 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_1,\pi,A(2n,k), 2)$ 和 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_\infty,\nu_k)$ 推得 E 满足电晕分解 (P-C) 后，我们本可以沿用 [Hah12] 中的方法得出定理 1.1。然而，为了强调最后这一步并不依赖于 $\mathbb{H}^n$ 的具体环境结构（这与证明的第一部分不同），我们转而应用 [BHS23] 中的结果。更确切地说，我们在引理 3.34 中指出，(P-C) 蕴含由赋范空间给出的冠分解（该概念由 [BHS23], 引入），随后定理 1.1 即可由 [BHS23, 定理 B] 推出。

与其他电晕分解的联系。 在引理 3.32–3.33 中，我们证明：

定理 1.6. 一个 k-正则集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ $(1 \le k \le n)$ 满足 *(P-C)*，当且仅当它具有由内在Lipschitz图构成的电晕分解 (ILG-C)。

(ILG-C) 性质是 David 和 Semmes 研究的电晕分解的一种变体[DS91], : 从每棵树 $\mathcal{S}$的角度来看，集合 E 可由一个内在*Lipschitz*图很好地逼近，且其内在 Lipschitz 常数很小（按照 Franchi、Serapioni 和 Serra Cassano 的定义 [Ser16]）。相比之下，(P-C) 及相关的赋范空间电晕分解，是通过映射性质而非集合逼近来定义的。借助 (P-C) 与 (ILG-C) 的等价性，我们通过 (P-C) 研究定理 1.1 的方法得出了若干具有独立意义的推论。这些推论可视为欧几里得一致可整性理论中经典结果的对应版本 [DS91]。

推论 1.7 （定理的推论 1.6 和 5.1）。 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{1,\dots,n\}$。若 $E \subset \mathbb{H}^n$是一个 k-正则集合，满足 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_1, \pi, A(2n,k), 2)$ 和 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_\infty, \nu_k)$，则 E存在由内在*Lipschitz*图构成的电晕分解。

推论 1.8 （定理的推论 1.6 和 [BHS23]）。 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{1,\dots,n\}$。若$E \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，且存在由内在*Lipschitz*图构成的电晕分解，则E 具有 利普希茨像的 $\mathbb{R}^k$。

(ILG-C) 性质可以视为针对一维水平子群上的内在Lipschitz函数所研究的电晕分解的一种集合论版本，见 $\mathbb{H}^n$[FO20; DF22]。在 [FO20, §3.1.1], 中，第一作者与 Orponen 证明了，对于 $n = 1$，此类内在Lipschitz函数可以分解为具有较小 Lipschitz 常数的内在Lipschitz函数所构成的电晕分解，并将这一结果用于证明某些奇异积分算子在 $\mathbb{H}^1$中的正则曲线上是 L^2-有界的。我们希望推论 1.7 能够应用于研究 $\mathbb{H}^n$ 中所有 $1 \le k \le n$的 k维奇异积分算子；更一般地说，我们希望本文能成为发展海森堡群中低维集合的定量（或一致）可整流性理论的一步。我们认为，这是应用并拓展 [BHS23], 中结果的自然背景，因为 $\mathbb{H}^n$ 中关于 $1 \le k \le n$的定性 k维可整流性已经有丰富的理论，参见例如 [MSS10; AM22]。

论文结构。 第2 节介绍海森堡群的标准记号和预备知识。第3 节概述海森堡群中低维集合的定量可求整流性已有及新提出的概念。特别地，我们引入几种不同版本的几何引理和电晕分解，并证明它们之间的蕴含关系。在第4节中，我们通过证明曲线 Γ 在 [Jui10] 中构造的曲线是 1-正则的，且满足 $\Gamma \notin \mathrm{GLem}(\beta_1, \nu_1, 2)$。在第5节中，基于第3节，我们说明定理 1.1 如何由一个关于水平平面电晕分解的中间结果推出，并

由此得出各项推论。最后，在第6节中，我们通过根据给定假设推导出电晕分解的存在性，完成定理1.1的证明。

2. 预备知识

2.1. 记号。 我们用 $a \lesssim b$ 表示存在一个绝对常数 $C > 0$，使得$a \le Cb$。写作 $a \lesssim_\lambda b$时，我们允许 C 依赖于 λ。如果 $a \lesssim b$ 且 $b \lesssim a$，我们记作 $a \sim b$。

2.2. 海森堡群。 我们回顾海森堡群的定义，并介绍与其水平结构相关的对象，这些对象对于研究低维子集至关重要。

定义 2.1（海森堡群）。第 n个海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 定义为集合 $\mathbb{R}^{2n+1}$，并配备群乘法

$$(z,t)\cdot(z',t') = (z+z', t+t'+\omega(z,z')) \quad \text{for } z,z'\in\mathbb{R}^{2n}, t,t'\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

其中

$$\omega(z,z') := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(z_i z'_{n+i} - z_{n+i}z'_i) \quad \text{for } z,z'\in\mathbb{R}^{2n}. \tag{2.2}$$

我们赋予 $\mathbb{H}^n$ 左不变向量场

$$X_i = \partial_{z_i} - \tfrac{1}{2}z_{n+i}\partial_t, \quad 1\le i\le n, \quad X_i = \partial_{z_i} + \tfrac{1}{2}z_{i-n}\partial_t, \quad n+1\le i\le 2n, \quad T = \partial_t.$$

这里，∂_{z_i} 和 ∂_t 表示 $\mathbb{R}^{2n+1}$中的坐标向量，可将它们视为作用于可微函数的算子。若 $[\cdot,\cdot]$ 表示向量场的李括号，则 $[X_i, X_{n+i}] = T$，而其他所有交换关系均为平凡的。因此，$\mathbb{H}^n$ 是一个二阶卡诺群。

定义 2.2。 若 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的向量是向量 $X_i(p)$、$1\le i\le 2n$的线性组合，则称该向量在 $p\in\mathbb{R}^{2n+1}$ 处是水平的 。海森堡群中的绝对连续曲线 γ 称为水平的，如果在几乎处处的点 t，其导数 $\gamma'(t)$在 $\gamma(t)$处是水平的。

对于每条绝对连续曲线 $\gamma_I:\ [a,b]\to\mathbb{R}^{2n}$，都可以找到 $\gamma_{2n+1}:\ [a,b]\to\mathbb{R}$，使得 $\gamma := (\gamma_I, \gamma_{2n+1}):\ [a,b]\to\mathbb{H}^n$ 是水平的。若给定 $\gamma_{2n+1}(a)$，则分量 γ_{2n+1}由水平性条件唯一确定，而 γ 称为 γ_I的水平提升。具体而言，对于 $n=1$，若曲线 γ_I 是闭合的，且 γ 是它的一条水平提升，那么高度的总变化 $\gamma_3(b) - \gamma_3(a)$等于 γ_I所围成的有向面积；例如参见 [CDPT07]。

定义 2.3. 向量子空间 $V\subset\mathbb{R}^{2n}$ 称为 各向同性的，如果 $\omega(z,z') = 0$ 对所有$z,z'\in V$成立，其中 $\omega:\ \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 是（2.2）中定义的形式。

对于 $1\le k\le n$，我们用 $\mathcal{V}_k^0$ 表示 k 维水平子群的族，它们属于 $\mathbb{H}^n$。每个 $V\in\mathcal{V}_k^0$ 都具有如下形式 $V = V_I\times\{0\}$，其中 V_I 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中一个 k 维各向同性子空间。

若子集 V 属于 $\mathbb{H}^n$，且可写为 $x\cdot V_0$，其中 $x\in\mathbb{H}^n$ 和 $V_0\in\mathcal{V}_k^0$ 满足相应条件，则称其为一个（仿射） k 维水平平面。我们用 $\mathcal{V}_k$ 表示 $\mathbb{H}^n$ 中所有仿射水平 k 维平面的集合。

族　　在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中任意仿射 k 维平面的族记为 $A(2n,k$　　$)$.

定义 2.4（到水平子群的投影）。设 $V = V_I\times\{0\}\in\mathcal{V}_k^0$ 是 $\mathbb{H}^n$ 中一个 k 维水平子群，其中 V_I 是 $\mathbb{R}^{2n}$中的一个 k 维各向同性子空间。到 V 的水平投影 定义为

$$P_V:\mathbb{H}^n\to V, \quad P_V(z,t) := (\pi_{V_I}(z), 0),$$

其中 $\pi_{V_I}:\ \mathbb{R}^{2n}\to V_I$ 表示到 V_I 上的标准欧几里得正交投影。

由群运算的结构（2.1），很容易得出水平投影是群同态。关于这些映射及其在 $\mathbb{H}^n$上的几何测度论中的作用，更深入的讨论请参阅 [MSS10；BFMT12]。

定义 2.5（投影到仿射水平平面）。设 $V = x \cdot V_0 \in \mathcal{V}_k$ 是一个 k 维水平平面，且满足 $x \in \mathbb{H}^n$ 和 $V_0 \in \mathcal{V}_k^0$。则到 V 的水平投影定义为

$$P_V : \mathbb{H}^n \to V, \quad P_V(y) := x \cdot P_{V_0}(x^{-1} \cdot y).$$

仿射水平投影 P_V 定义良好，因为它不依赖于点 $x \in V$的具体选取；参见 [Hah12、§2] 或 [FV25b、§4.1。2] 有关这一性质及 P_V的其他性质。

引入其他类型的投影也很方便，我们可以称之为欧几里得坐标投影：若 $p = (z, t) \in \mathbb{H}^n$，则定义 $\pi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ 以及 $\pi_t : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi(p) = \pi(z, t) := z, \qquad \pi_t(p) = \pi_t(z, t) := t.$$

我们用 $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$（或简写为 $|\cdot|$）表示 $\mathbb{R}^m$ 上的欧几里得范数。对于任意 $z, z' \in \mathbb{R}^m$，欧几里得距离为$d_{\mathrm{Eucl}}(z, z') = |z - z'|$。在海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 中，我们令 $d(x, y) := \|y^{-1} \cdot x\|$表示由齐次$Kor\acute{}anyi$ 范数 诱导的$Kor\acute{}anyi$ 距离

$$\|(z, t)\| := \sqrt[4]{|z|^4_{\mathbb{R}^{2n}} + 16\, t^2}. \tag{2.3}$$

对于任意 $V \in \mathcal{V}_k$，水平投影 P_V关于 Kor´anyi 距离是 1-Lipschitz。此外，空间 (V, d) 与 $(\mathbb{R}^k, |\cdot|_{\mathbb{R}^k})$ 等距。对于 $s \geq 0$，我们将 $\mathcal{H}^s$ 记作关于 Kor´anyi 距离 d的s维豪斯多夫测度，它通过经典的 Carath´eodory 构造得到。关于 d_{Eucl} 的豪斯多夫测度记作 $\mathcal{H}^s_{\mathrm{Eucl}}$。空间 $(\mathbb{H}^n, d)$ 中以 $x \in \mathbb{H}^n$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的闭球记作 $B(x, r)$，而$B^m(z, r)$ 或 $B_{\mathrm{Eucl}}(z, r)$ 表示 $\mathbb{R}^m$中的欧几里得球。集合 $A \subset \mathbb{H}^n$ 关于 Kor´anyi 距离的直径记作 $\mathrm{diam}(A)$。

定义 2。 6. 线性映射 $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ 称为旋转，如果对所有 $z, z' \in \mathbb{R}^{2n}, t, t' \in \mathbb{R}$ ，

$$\begin{aligned} \pi_t(\varphi(z, t)) &= t, \\ \omega\left(\pi(\varphi(z, t)), \pi(\varphi(z', t'))\right) &= \omega(z, z'), \\ |\pi(\varphi(z, t)) - \pi(\varphi(z', t'))| &= |z - z'|. \end{aligned}$$

任意旋转都是群同态，并且相对于 d 的 $\mathbb{H}^n$是等距变换。此外，对于任意 $V, W \in \mathcal{V}_k$ 都存在一个旋转 φ 和一个点 $p \in \mathbb{H}^n$，使得 $W = p \cdot \varphi(V$。旋转恰好是那些在坐标中可表示为 $\varphi(z, t) = (Az, t)$且满足 $A \in SU(n)$的映射。更多细节请参见，例如 [BFMT12，第 2]

若 $V \in \mathcal{V}_k^0$ 是 k维水平子群，且 $\mathbb{H}^n$，则 V在 $\mathbb{H}^n$ 中的互补正交子群定义为 V 在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的（欧几里得）$(2n+1-k)$维正交补，它是 $\mathbb{H}^n$的正规子群。若 W 表示 V的互补正交子群，则定义 $P_W : \mathbb{H}^n \to W$为 $P_W(y) := (P_V(y))^{-1} \cdot y$。下一个定义出自 Franchi、Serapioni 和 Serra Cassano [FSS07; Ser16]。

定义 2.7（内在Lipschitz图）。设 $V \in \mathcal{V}_k^0$，并令 W 为相应的互补正交垂直子群。若存在 $L > 0$ 使得映射 $\phi : V \to W$ 被称为内在*Lipschitz*，则

$$\|P_W\left(\Phi(v')^{-1}\Phi(v)\right)\| \leq L\, \|P_V\left(\Phi(v')^{-1}\Phi(v)\right)\| \quad \text{for every } v, v' \in V, \tag{2.4}$$

其中 $\Phi : V \to \mathbb{H}^n$ 是与 ϕ相关联的图映射，定义为 $\Phi(v) := v \cdot \phi(v)$，对所有 $v \in V$成立。的内在 *Lipschitz* 常数定义为满足（2.4）的最佳常数 L。

集合 $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 k维内在*Lipschitz*图，对于 $1 \leq k \leq n$，如果存在$V \in \mathcal{V}_k^0$和一个内在 Lipschitz函数 $\phi : V \to W$，使得 $\Gamma = \Phi(V)$。

如果 V 是一个水平子群，其正交垂直子群为 W，且 $\phi: V \to W$ 如定义2.7所述为内在Lipschitz函数，那么相应的图映射 $\Phi: V \to \mathbb{H}^n$ 是度量Lipschitz的，因为对于所有 $v, v' \in V$ 都有

$$d(\Phi(v), \Phi(v')) \le \|P_V\left(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v)\right)\| + \|P_W\left(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v)\right)\| \le (1+L)\|P_V\left(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v)\right)\|$$
$$= (1+L)\|(v')^{-1} \cdot v\| = (1+L)d(v, v'). \tag{2.5}$$

我们还需要相反方向上的精确定量信息：已知图映射 $\Phi(v) = v \cdot \phi(v)$ 关于度量是 Lipschitz 的，且常数接近 1，我们便可推出函数 $\phi: V \to W$ 是内在Lipschitz 的，且常数较小。

命题 2.8。设 V 是 $\mathbb{H}^n$中的一个 k维水平子群，其互补正交子群为 W。令 $\Phi: V \to \mathbb{H}^n$ 表示与函数$\phi: V \to W$相关联的图映射。假设对于某个$0 < \eta \le 1$, Φ 关于 *Kor´anyi* 度量是$(1+\eta)$-*Lipschitz* 的。那么 ϕ 是内在*Lipschitz* 的，且其内在 *Lipschitz* 常数至多为 $6\sqrt[4]{\eta}$。 _

证明。考虑 $v, v' \in V$。根据我们的假设，

$$\|\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v)\| \le (1+\eta)\|(v')^{-1} \cdot v\| = (1+\eta)|\pi(v) - \pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}}, \tag{2.6}$$

我们的目标是证明

$$\|P_W(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))\| \le 6\sqrt[4]{\eta}\,\|P_V(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))\| = 6\sqrt[4]{\eta}\,|\pi(v) - \pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}}. \tag{2.7}$$

由（2.6），我们可以推出

$$\sqrt{|\pi(v) - \pi(v')|^2_{\mathbb{R}^{2n}} + |\pi(\phi(v)) - \pi(\phi(v'))|^2_{\mathbb{R}^{2n}}} = |\pi(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))|_{\mathbb{R}^{2n}} \le \|\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v)\|$$
$$\le (1+\eta)|\pi(v) - \pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}},$$

这意味着，两边平方并合并各项后，

$$|\pi(\phi(v)) - \pi(\phi(v'))|_{\mathbb{R}^{2n}} \le 2\sqrt{\eta}\,|\pi(v) - \pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}}. \tag{2.8}$$

再次由（2.6），可得

$$\sqrt[4]{|\pi(v) - \pi(v')|^4_{\mathbb{R}^{2n}} + 16|\pi_t(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))|^2} \le \|\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v)\| \le (1+\eta)|\pi(v) - \pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

与之前类似，这意味着

$$|\pi_t(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))| \le \sqrt{\eta}|\pi(v) - \pi(v')|^2_{\mathbb{R}^{2n}}. \tag{2.9}$$

现在记 $V = V_I \times \{0\}$，因此有 $W = V_I^{\perp} \times \mathbb{R}$，其中 V_I是 $\mathbb{R}^{2n}$的一个各向同性子空间。根据 P_V和 P_W的定义，可以明确写出

$$P_W(z,t) = (z - \pi_{V_I}(z), t - \omega(\pi_{V_1}(z), z)) = (\pi_{V_I^{\perp}}(z), t - \omega(\pi_{V_I}(z), \pi_{V_I^{\perp}}(z)))$$
$$= (\pi_{V_I^{\perp}}(z), t) \cdot (0, -\omega(\pi_{V_I}(z), \pi_{V_I^{\perp}}(z))),$$

其中 $\omega: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ 是群运算（2.1）中出现的形式。利用 P_W的这一表达式，根据三角不等式可得

$$\|P_W(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))\| \le \left\|\left(\pi(\phi(v)) - \pi(\phi(v')), \pi_t(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))\right)\right\| +$$
$$+ \left\|\left(0, -\omega(\pi(v) - \pi(v'), \pi(\phi(v)) - \pi(\phi(v')))\right)\right\|.$$

现在我们来估计右边的两项。

$$\left\|\left(\pi(\phi(v)) - \pi(\phi(v')), \pi_t(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))\right)\right\| \le |\pi(\phi(v)) - \pi(\phi(v'))|_{\mathbb{R}^{2n}} + 2\sqrt{|\pi_t(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))|}.$$

利用（2.8）和（2.9），我们推得

$$\left\|\left(\pi(\phi(v)) - \pi(\phi(v')), \pi_t(\Phi(v')^{-1} \cdot \Phi(v))\right)\right\| \le 4\sqrt[4]{\eta}|\pi(v) - \pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

关于另一项,

$$\begin{aligned}\big\|\big(0,-\omega(\pi(v)-\pi(v'),\pi(\phi(v))-\pi(\phi(v'))\big)\big\| &= 2\sqrt{|\omega(\pi(v)-\pi(v'),\pi(\phi(v))-\pi(\phi(v')))|}\\ &\le 2\sqrt{\frac{1}{2}|\pi(v)-\pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}}|\pi(\phi(v))-\pi(\phi(v'))|_{\mathbb{R}^{2n}}}\\ &\le 2\sqrt[4]{\eta}|\pi(v)-\pi(v')|_{\mathbb{R}^{2n}},\end{aligned}$$

这里用到了（2.8）以及简单不等式 $|\omega(z,z')| \le \frac{1}{2}|z|_{\mathbb{R}^{2n}}|z'|_{\mathbb{R}^{2n}}$ 对每个 z, $z' \in \mathbb{R}^{2n}$。结合前面的不等式，我们最终得到（2.7）。□

3. Quantitative notions of rectifiability for low-dimensional sets in $\mathbb{H}^n$

我们讨论一些定量条件，它们以多尺度方式表达低维集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 被 Lipschitz 像、内在Lipschitz图或水平平面等“良好”对象覆盖或逼近的程度。这一思想通过以下概念得以精确表达： 大块（第3.1节）、几何引理（第 3.2节）以及电晕分解（第3.3节），这些概念源自 David 和 Semmes 在欧几里得空间中的工作 [DS91；DS93]。这里我们介绍这些经典概念的新旧形式。

3.1. 利普希茨像的大块。

定义 3.1 （s-正则集合）. 设 $s > 0$。若集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是闭集，且存在常数 $C_E > 1$ 使得

$$C_E^{-1} r^s \le \mathcal{H}^s(E \cap B(x,r)) \le C_E r^s \quad \text{for every } x \in E,\ 0 < r \le \operatorname{diam}(E),\ r < \infty. \tag{3.1}$$

我们称集合 E 满足条件（ C_E 3.1）的最优常数为其正则常数。

定义 3.2. 设 $k \in \{1,\dots,n\}$。我们称一个 k-正则集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 具有来自 $\mathbb{R}^k$ 的子集的利普希茨像的大块（BPLI），如果存在常数 $c, L > 0$，使得对每个$x \in E$，满足 $0 < r <$ diam(E)的情形，都存在 $A \subset B^k(0,r)$以及一个 L-Lipschitz 函数 $f\colon A \to \mathbb{H}^n$，满足

$$\mathcal{H}^k\left(E \cap B(x,r) \cap f(A)\right) \ge c r^k. \tag{3.2}$$

文献中采用的定义略有不同，但在我们的设定下，它们最终都等价。首先，根据利普希茨延拓结果 [WY10]，，任意 Lipschitz 函数$f\colon A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{H}^n$ 都可以延拓到整个 $\mathbb{R}^k$ 上，并且 Lipschitz 常数可控。注意，只有当 $k \le n$ 时这才可行（见 [BF09]）。因此，考虑定义在 $B^k(0,r)$ 上或定义在 $\mathbb{R}^k$ 上的函数是等价的，并且可在（3.2）中将集合 $f(A)$ 替换为 $f(B^k(0,r))$。更值得注意的是，这又等价于要求 $f\colon A \subset B^k(0,r) \to \mathbb{H}^n$ 为双利普希茨映射的条件（见 [Sch09，推论 1.9]），如 [Hah12，定理 1.1]所述。特别地，定理 1.1 及其第 1 节中的推论，在将结论“利普希茨像的大块”替换为“ [Hah12，第1]页意义下的双利普希茨像的大块”后仍然成立；另见 [BHS23，§1.2]。我们决定采用定义 3.2，因为在 [BHS23]，中，BPLI 被作为度量空间上一致可整性的定义。

由于 Lipschitz 函数 $f\colon \mathbb{R}^k \to (\mathbb{H}^n, d)$ 在局部是欧几里得Lipschitz 的，而反过来则不成立，因此，证明集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 满足 BPLI 并非只是一个欧几里得结果。因此，如下文所述，要在 $\mathbb{H}^n$ 中给出 BPLI 的充分条件，就必须考虑水平结构，不能仅仅照搬 [DS91] 中的条件。

3.2. 几何引理。

对于任意 $E \subset \mathbb{H}^n$ 和 $x \in \mathbb{H}^n$，我们记

$$d(x,E) := \inf\{d(x,y) : y \in E\}$$

点 x 与集合 E 之间的距离。

定义 **定理 3.3.** 令 $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{H}^n, k \in \{1, \dots, n\}, p \geq 1, x \in \mathbb{H}^n, r > 0$。我们定义

$$\beta_{p,\mathcal{V}_k}(x,r) = \beta^E_{p,\mathcal{V}_k}(x,r) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \left(r^{-k} \int_{E \cap B(x,r)} \left(\frac{d(y,V)}{r} \right)^p d\mathcal{H}^k(y) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty$$

$$\beta_{\infty,\mathcal{V}_k}(x,r) = \beta^E_{\infty,\mathcal{V}_k}(x,r) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \sup_{y \in E \cap B(x,r)} \frac{d(y,V)}{r}.$$

定义 3.4. 设 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是 AD-k-正则的，$1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < +\infty$。我们称 E满足 q关于$\beta_{p,\mathcal{V}_k}$的-几何引理，并记作 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_{p,\mathcal{V}_k}, q)$，如果存在 $C > 0$，使得对每个 $R > 0$ 和每个 $x \in E$，都有

$$\int_0^R \int_{E \cap B(x,R)} \beta_{p,\mathcal{V}_k}(y,r)^q \, d\mathcal{H}^k(y) \frac{dr}{r} \leq C R^k. \tag{3.3}$$

条件（3.3）是表达集合 E 在大多数位置和尺度上都能被水平平面良好逼近的一种方式。这等价于说，$\beta_{p,\mathcal{V}_k}(y,r)^q d\mathcal{H}^k(y) \frac{dr}{r}$ 是定义在 $E \times \mathbb{R}^+$上的 Carleson测度。我们将使用的一些结果是以几何引理的不同版本表述的，因此这里回顾相关定义。几何引理不使用（3.3）中的二重积分，而是可以借助二进立方体系统来表述。

3.2.1. 二进立方体的 *Carleson* 条件。以下是 Christ 构造的一个特例 [Chr90]，并作了若干细微修改，将在下文说明。

定义与定理 3.5（二进立方体）。假设 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，正则常数为 C_E。那么存在常数 $\varrho \in (0, 1)$ 和 $D \in (1, \infty)$，它们仅依赖于 C_E 和 k，并且存在一个集族 $\mathcal{D} = \cup_{j \in \mathbb{J}} \mathcal{D}_j$，其中对每个 $j \in \mathbb{J}$，$\mathcal{D}_j$ 都是由两两不交的 Borel 集构成的族，并且

(1) 对每个 $j \in \mathbb{J}$，$E = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_j} Q$。(2) 若 Q_1，$Q_2 \in \mathcal{D}$ 且 $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$，则 $Q_1 \subseteq Q_2$ 或 $Q_2 \subset Q_1$。(3) 若 $j \in \mathbb{J}$ 且 $Q \in \mathcal{D}_j$，则 $\mathrm{diam}(Q) \leq D\varrho^j$。(4) 对每个 $j \in \mathbb{J}$ 和 $Q \in \mathcal{D}_j$，存在 $x_Q \in E$ 使得 $B(x_Q, D^{-1}\varrho^j) \cap E \subset Q$。(5) 对所有 $j \in \mathbb{J}$、$Q \in \mathcal{D}_j$、$\eta > 0$，$\mathcal{H}^k(\{x \in Q : \underline{d}(x, E \setminus Q) \leq \eta \varrho^j\}) \leq D\eta^{\frac{1}{D}} \mathcal{H}^k(Q)$。

这里，若 E 无界，则 $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$；而 $\mathbb{J} = \{j \in \mathbb{Z} : j \geq J_0\}$ 其中 $J_0 \in \mathbb{Z}$ 满足$\varrho^{J_0+1} \leq \mathrm{diam}(E) < \varrho^{J_0}$ 否则。

我们还定义

$$\mathcal{D}_{Q_0} := \{Q \in \mathcal{D} : Q \subset Q_0\}, \quad Q_0 \in \mathcal{D},$$

对于给定的常数 $\lambda > 1$，我们设

$$\lambda Q := \{x \in E : d(x, Q) \leq (\lambda - 1)\mathrm{diam}(Q)\}.$$

取足够大的 D，我们可以且将假设

$$D^{-1}\varrho^j \leq \mathrm{diam}(Q) \leq D\varrho^j \quad \text{and} \quad D^{-1}\varrho^{jk} \leq \mathcal{H}^k(Q) \leq D\varrho^{jk}, \quad Q \in \mathcal{D}_j, j \in \mathbb{J}, \tag{3.4}$$

参见 [Hah12, (14)] 或类似的推导可得 [FV25a, (2.8)]。若 $Q \in \mathcal{D}_j$ 对某个 $j \in \mathbb{J}$，我们用 $\mathcal{C}(Q)$ 表示 子立方体 的 Q，即 $\mathcal{C}(Q) := \{R \in \mathcal{D}_{j+1} : R \subset Q\}$。此外，对于$\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$，我们令 $\min(\mathcal{S})$ 表示集合 $\mathcal{S}$中关于包含关系极小的立方体族。

注 3.6。定义与定理3.5 中的立方体本质上与 [Hah12中的 (8)–(14)]相同，$\varrho = 1/\alpha$ 和 $\mathcal{D}_j$ 分别起到第“$-j$”代立方体的作用。主要区别在于，我们假设固定一代的立方体完全覆盖 E，而不只是除去一个 $\mathcal{H}^k$零测集。通过按照 [HM12第 4], 节所述修改 Christ 的原始构造，可以证明这类立方体的存在；另见 [BHS23, 引理 2.6。1]所得立方体不一定是开集，而是 Borel 集，这已足以进行 [Hah12]中的论证。

注 3.7. 给定满足定义与定理 3.5 中条件的二进立方体（其中 $\varrho \in (0, 1)$），总可以构造一个新的族，使其满足相同的性质，只需将“ϱ”替换为“$1/2$”，而某些常数可能依赖于 ϱ，参见 [HMMM17，命题 2.12] 的证明。由于原来的 ϱ 可以选取得仅依赖于 k 和 C_E，因此不失一般性，我们可以在定义与定理 3.5 中假设 $\varrho = 1/2$。特别地， $\mathbb{H}^n$ 中的所有 k-正则集都存在具备 [FV25a，定理与定义 2.5]所述性质的二进制系统。我们没有在定义与定理 3.5 中指定 ϱ的取值，以便采用更灵活的定义，从而能够应用文献中针对各种 ϱ取值给出的结果。

注记 3.8. BHS [BHS23] 中使用的二进制系统具备我们的定义和定理3.5所要求的全部性质。事实上， [BHS23引理 2.61] 还给出了关于立方体“中心”和常数取值的其他性质。这些性质在本文的大部分内容中都用不到，只有在应用 [BHS23定理 9.01], 时，我们才会将注意力限制在 [BHS23引理 2.61] 所述的二进制系统（根据注记 3.16，我们可以这样做）。

我们将比较针对不同系数函数的几何引理，这些函数现介绍如下。根据定义 2.3 ，我们回顾一下，$\mathcal{V}_k$ 表示所有水平 k-平面在 $\mathbb{H}^n$中的族，而$A(2n, k)$表示所有仿射 k-平面在 $\mathbb{R}^{2n}$中的格拉斯曼流形。

定义 3.9 （系数函数）。 设 $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $E \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，具有二进制系统 $\mathcal{D}$, $Q \in \mathcal{D}$, $p \geq 1$，以及 $\lambda > 1$。我们定义

- 这些水平 β-数

$$\beta_{p,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \left(\fint_{\lambda Q} \left(\frac{d(y, V)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} \right)^p d\mathcal{H}^k(y) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\beta_{\infty,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \sup_{y \in \lambda Q} \frac{d(y, V)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}$$

- 这些分层 β-数

$$\widehat{\beta}_{p,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \left(\left[\fint_{\lambda Q} \left(\tfrac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y), \pi(V))}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} \right)^p d\mathcal{H}^k(y) \right]^{\frac{2}{p}} + \left[\fint_{\lambda Q} \left(\tfrac{d(y, V)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} \right)^p d\mathcal{H}^k(y) \right]^{\frac{4}{p}} \right)^{\frac{1}{4}}, p < \infty,$$

$$\widehat{\beta}_{\infty,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \left(\sup_{y \in \lambda Q} \left[\frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y), \pi(V))}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} \right]^2 + \sup_{y \in \lambda Q} \left[\frac{d(y, V)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} \right]^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

- 这些水平投影 β-数

$$\beta_{p,\pi,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \left(\fint_{\lambda Q} \left(\frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y), \pi(V))}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} \right)^p d\mathcal{H}^k(y) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\beta_{\infty,\pi,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V \in \mathcal{V}_k} \sup_{y \in \lambda Q} \frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y), \pi(V))}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}$$

- 该投影 β-自然数集

$$\beta_{p,\pi,A(2n,k)}(\lambda Q) := \inf_{W \in A(2n,k)} \left(\fint_{\lambda Q} \left(\frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y), W)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} \right)^p d\mathcal{H}^k(y) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\beta_{\infty,\pi,A(2n,k)}(\lambda Q) := \inf_{W \in A(2n,k)} \sup_{y \in \lambda Q} \frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y), W)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}$$

- 该投影 ι-自然数集

$$\iota_{p,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V\in\mathcal{V}_k}\left(\fint_{\lambda Q}\fint_{\lambda Q}\left(\frac{|d(x,y)-d(P_V(x),P_V(y))|}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\right)^p d\mathcal{H}^k(x)\,d\mathcal{H}^k(y)\right)^{\frac{1}{p}},\quad p<\infty,$$

$$\iota_{\infty,\mathcal{V}_k}(\lambda Q) := \inf_{V\in\mathcal{V}_k}\sup_{y\in\lambda Q}\frac{|d(x,y)-d(P_V(x),P_V(y))|}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}$$

注 3.10。函数 $h\in\{\beta,\beta,\beta_\pi,\iota\}$、$h:\ \mathcal{D}\to[0,\infty)$ 具有显然的对应形式$h:\ E\times[0,\infty)\to[0,\infty)$，其定义方式与定义 3.3 相同，只是使用球而非立方体。更准确地说，将 “ffl $_{\lambda Q}$” 替换为“$r^{-k}\int_{E\cap B(x,\,r)}$”，并将“diam($\lambda Q$)”替换为“$r$”。滥用记号，我们将这些函数的值记为 $h(y,\ r)$。

水平 β_∞-数在 $\mathbb{H}^n$ 中被引入，用于 $k=n=1$ 与旅行推销员定理相关的 [FFP07]；更高维的 L^1-变体由 Hahlomaa 使用[Hah12]。我们在此定义的分层 β-数受到 Li 对卡诺群中 [Li 22] 的定义 $p=\infty$的启发。投影 ι-数由第一作者与 Violo 在[FV25b]中引入。就我们所知，此前尚未使用过投影 β-数，我们将在下一条注记中对其进行讨论。

注 3.11. 水平投影 β-数 $\beta_{p,\pi,\mathcal{V}_k}$ 与分层的 β-数 $\beta_{p,\pi,\mathcal{V}_k}$ 以及水平 β-数 $\beta_{p,\mathcal{V}_k}$自然相关。由于对于任意 $V\in\mathcal{V}_k$，投影 $\pi(V)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$中的一个仿射各向同性子空间（即 $\pi(V)=z+W$，其中 $z\in\mathbb{R}^{2n}$和W 是 $\mathbb{R}^{2n}$中的一个各向同性子空间），反过来，$\mathbb{R}^{2n}$ 中任意一个 k维仿射各向同性子空间都可表示为某个 $V\in\mathcal{V}_k$ 的 $\pi(V)$，因此在定义 $\beta_{p,\pi,\mathcal{V}_k}$ 时，可以等价地考虑 $\mathbb{R}^{2n}$ 中维数为 k 的各向同性子空间，而不是仿射水平 k-平面的投影。由于投影 β-数是通过在所有 $W\in A(2n,k)$ 中取最小值来计算的，因此对于任意 $p\geq 1,\lambda>1$,

$$\beta_{p,\pi,A(2n,k)}(\lambda Q)\leq\beta_{p,\pi,\mathcal{V}_k}(\lambda Q).$$

接下来两个引理中陈述的性质，对定义 3.9中的所有系数函数也都成立；不过，这里我们只关注本文后续将用到的陈述。

引理 3.12。对于任意 x、y、$z\in\mathbb{H}^n$、$V\in\mathcal{V}_k$，均有

$$|\pi(x)-\pi(y)|=|\pi(z\cdot x)-\pi(z\cdot y)|,\quad d(P_V(x),P_V(y))=d(P_{z\cdot V}(z\cdot x),P_{z\cdot V}(z\cdot y)).$$

此外，若 $z\in\mathbb{H}^n$和 E是一个带有二进制系统 $\mathcal{D}$的 k-正则集合，则 $\{z\cdot Q\}$是 k-正则集合 $z\cdot E$的一个二进制系统；并且对所有 $p\in[1,\infty]$、$\lambda\geq 1$、$Q\in\mathcal{D}$，分别有与 E 和 $z\cdot E$相关联的系数函数之间的以下恒等式：

$$\widehat{\beta}_{p,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)=\widehat{\beta}_{p,\mathcal{V}_k}(\lambda(z\cdot Q)),\ \beta_{p,\pi,A(2n,k)}(\lambda Q)=\beta_{p,\pi,A(2n,k)}(\lambda(z\cdot Q)),\ \iota_{p,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)=\iota_{p,\mathcal{V}_k}(\lambda(z\cdot Q)).$$

证明。关于二进制系统的断言源于 d的左不变性。性质$|\pi(x)-\pi(y)|=|\pi(z\cdot x)-\pi(z\cdot y)|$可由群运算的结构以及欧几里得距离在平移下的不变性直接推出。结合 d 的左不变性及由此得到的 $\mathcal{H}^k$的左不变性，可知$\widehat{\ }$的左不变性性质，以及 β-数和 β_π-数的左不变性；同时注意到，对所有 $z\in\mathbb{H}^n$，均有 $\mathcal{V}_k=\{z\cdot V:\ V\in\mathcal{V}_k\}$，且对所有 $u\in\mathbb{R}^{2n}$，均有 $A(2n,\ k)=\{u+W:\ W\in A(2n,\ k)\}$。

对于第二个性质，回顾定义 2.5 可知，若 $V=q\cdot V_0$ 满足 V_0 各向同性，则$P_V(x)=q\cdot P_{V_0}(q^{-1}\cdot x)$. 这意味着 $P_{z\cdot V}(z\cdot x)=z\,q\cdot P_{V_0}(q^{-1}z^{-1}z\,x)=z\cdot P_V(x)$。特别地，我们得到

$$d(P_V(x),P_V(y))=d(z\cdot P_V(x),z\cdot P_V(y))=d(P_{z\cdot V}(z\cdot x),P_{z\cdot V}(z\cdot y)). \tag{3.5}$$

这个恒等式结合 d和 $\mathcal{H}^k$的左不变性性质，推出了所声称的 ι-数的左不变性性质。□

与引理的证明中类似的论证3.12 得出以下结果。

引理 3.13。 若 $\varphi\colon\ \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ 是一个旋转，且 E 是一个带有二进制系统 $\mathcal{D}$ 的 k-正则集合，那么 $\{\varphi(Q)\}$ 是 k-正则集合 $\varphi(E)$ 的一个二进制系统，并且对所有 $p \in [1,\infty]$、$\lambda \geq 1$、$Q \in \mathcal{D}$，有

$$\beta_{p,\pi,A(2n,k)}(\lambda Q) = \beta_{p,\pi,A(2n,k)}(\lambda \varphi(Q)).$$

引理 3.14。 设 $V = z \cdot V_0 \in \mathcal{V}_k$，其中 $z \in \mathbb{H}^n$ 且 $V_0 \in \mathcal{V}_k^0$。那么

$$d(P_V(x), P_V(y)) = d(P_{V_0}(x), P_{V_0}(y)), \quad x, y \in \mathbb{H}^n.$$

特别地，在 $\iota_{p,\mathcal{V}_k}$ 的定义中，我们可以将“$\mathcal{V}_k$”替换为“$\mathcal{V}_k^0$”，而不改变系数的取值。

证明。 由（3.5）、$V_0 = V_{0,I} \times \{0\}$ 是一个子群这一事实、群运算的结构以及欧几里得正交投影的线性性，可得

$$\begin{aligned} d(P_V(x), P_V(y)) &= d(P_{V_0}(z^{-1}x), P_{V_0}(z^{-1}y)) = |\pi_{V_{0,I}}(\pi(z^{-1}x)) - \pi_{V_{0,I}}(\pi(z^{-1}y))| \\ &= |\pi_{V_{0,I}}(\pi(x)) - \pi_{V_{0,I}}(\pi(y))| = d(P_{V_0}(x), P_{V_0}(y)). \end{aligned}$$ □

定义 3.15（几何引理）。 设 $n \in \mathbb{N}$，$k \in \{1,\dots,n\}$，且设 h 是定义 3.9中的一个系数函数。给定 $1 \leq q < +\infty$，一个 k-正则集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 及其二进制系统 $\mathcal{D}$ 和 $\lambda > 1$，若 E 满足关于 q的 h-几何引理，则称其 $E \in \mathrm{GLem}(h, q)$，即存在一个常数 C 使得

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}_{Q_0}} h(\lambda Q)^q \, \mathcal{H}^k(Q) \leq C \mathcal{H}^k(Q_0), \quad Q_0 \in \mathcal{D}. \tag{3.6}$$

下面给出几点说明：

注 3.16。 二进制系统并非唯一，但若 h是定义 3.15中的一个系数函数，且 E 对某个二进制系统 $\mathcal{D}$满足条件（3.6），那么对于所有 可能的此类系统，它都满足相同的条件（常数可能不同，但在定量上受控）。这一点已在 [FV25a注 2 中证明。16]对于满足定义和定理3.5 的性质且具有 $\varrho = 1/2$的二进制系统。对于任意 ϱ，其中 C 可能依赖于 ϱ，该结论可由 [HMMM17命题 2 的证明过程推出。12]。或者，也可以通过引理 3.18 中的积分刻画，验证几何引理是否成立并不取决于 E上所选的二进制系统。

注记 3.17。 对于 h （如定义 3.15 中所述），（3.6）的有效性（只需定量地改变常数“C”）与所选择的 $\lambda > 1$ 无关，见 [FV25a，注记 2。30]以及 [FV25a，引理 2。23]，该结论对 $K_0 > 1$ 按照原表述成立。

欧几里得空间中的标准 Jones 型 β-数的几何引理，可以等价地表述为满足 Carleson测度条件（其精神与定义 3.4 一致），也可以表述为满足离散条件（其精神与定义 3.15 一致）；例如，参见 [DS93 第20] 页中围绕（1.51）的评论。在我们的框架下，也可以进行类似的改写。

引理 3.18。 设 $n \in \mathbb{N}$，$k \in \{1,\dots,n\}$，$q \in [1,+\infty)$，并设 h 为定义 *3.9* 中的一个系数函数。则 k-正则集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 满足 $E \in \mathrm{GLem}(h, q)$（其含义见定义 *3.15*）当且仅当存在 $C > 0$，使得对任意 $R > 0$ 和 $x \in E$，均有

$$\int_0^R \int_{E \cap B(x,R)} h(y,r)^q \, d\mathcal{H}^k(y) \, \frac{dr}{r} \leq C R^k. \tag{3.7}$$

由于论证是标准的，我们仅简要说明证明。

证明。首先假设 E 满足（3.7）。令 $\mathcal{D}$ 为定义在 E上的二进制系统， $\lambda > 1$记作 $\mu = \mathcal{H}^k_{\llcorner} E$，并固定 $Q_0 \in \mathcal{D}$。令 j_0 满足 $Q_0 \in \mathcal{D}_{j_0}$。系数函数 h 具有以下关键性质：存在一个常数 $M > 1$，仅依赖于 C_E、 k和 λ，使得对所有 $Q \in \mathcal{D}_j$、 $Q \subset Q_0$，都有

$$h(\lambda Q) \le M h(y, Mr), \quad y \in B(x_Q, \varrho^j) \cap E,\ r \in [\varrho^j, \varrho^{j-1}]. \tag{3.8}$$

此外，且 t he k-正则性允许我们如下估计二进立方体上的和：

$$\begin{aligned}\sum_{Q \in \mathcal{D}_{Q_0}} h(\lambda Q)^q \mu(Q) &\lesssim \sum_{j \ge j_0} \int_{\varrho^j}^{\varrho^{j-1}} \sum_{Q \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_{Q_0}} \int_{B(x_Q, \varrho^j)} h(y, Mr)^q \, d\mu(y) \, \frac{dr}{r} \\ &= \sum_{j \ge j_0} \int_{\varrho^j}^{\varrho^{j-1}} \int_{B(x_{Q_0}, C_1 \varrho^{j_0})} h(y, Mr)^q \sum_{Q \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_{Q_0}} \chi_{B(x_Q, \varrho^j)}(y) \, d\mu(y) \, \frac{dr}{r}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中，最后一步使用了如下事实：存在一个仅依赖于 C_E 和 k 的常数 $C_1 > 1$，使得对所有 $Q \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_{Q_0}$， $B(x_Q, \varrho^j) \subset B(x_{Q_0}, C_1 \varrho^{j_0})$。根据二进制系统的性质（定义与定理 3.5），对于 Q、 $Q' \in \mathcal{D}_j$，我们有 $d(x_Q, x_{Q'}) \ge D^{-1} \varrho^j$ 。 E 的 k-正则性与标准的体积计数论证随后推出，对所有 $y \in E$， $\operatorname{card}(Q \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_{Q_0} : y \in B(x_Q, \varrho^j)) \lesssim 1$ 。这最终可以将 (3.9) 估计为

$$\int_0^{\varrho^{j_0 - 1}} \int_{B(x_{Q_0}, C_1 \varrho^{j_0})} h(y, Mr)^q \, d\mu(y) \, \frac{dr}{r},$$

由此 $E \in \mathrm{GLem}(h, q)$ 得出（对 r 作变量替换后），因为 Q_0 是任意选取的。这里， $\mathrm{GLem}(h, q)$ 中的常数取决于 (3.7) 中的常数 C ，也可能取决于 C_E、 k 和 λ。

反过来，假设 $E \in \mathrm{GLem}(h, q)$ 按定义 3.15 的含义成立。令$\mathcal{D}$ 为 E 上的一个二进制系统，取 $x \in E$ 和 $R > 0$。令 $j_0 \in \mathbb{Z}$ 满足 $\varrho^{j_0} \le R < \varrho^{j_0 - 1}$。我们先写出

$$\int_0^R \int_{B(x,R)} h(y, r)^q \, d\mu(y) \, \frac{dr}{r} \sim \sum_{j \ge j_0} \int_{\varrho^j}^{\varrho^{j-1}} \int_{B(x,R)} h(y, \varrho^{j-1})^q \, d\mu(y) \, \frac{dr}{r}, \tag{3.10}$$

这里我们用到了：对于 $r \in [\varrho^j, \varrho^{j-1}]$，由于 E 的 k-正则性， $h(y, r) \lesssim h(y, \varrho^{j-1})$。此外，存在 $Q_0 \in \mathcal{D}$ 使得 $B(x, R) \subset K Q_0$，其中 $R \sim \operatorname{diam}(Q_0)$，且 K 仅取决于 k 和 C_E，参见例如 [FV25a, (2.9)]。我们用来自第 j_0 代的 Q_0 个立方体 Q_0（即 $m \lesssim 1$ 个立方体 $Q_{0,1}, \dots, Q_{0,m}$）覆盖 KQ_0，如 [FV25a, (2.12)] 所示。将球与立方体的角色互换，可得到一个类似于 (3.8) 的不等式；再结合假设 $E \in \mathrm{GLem}(h, q)$（以及注 3.17），最终可将 (3.10) 中的表达式界为 $\mu(Q_{0,1}) + \cdots + \mu(Q_{0,m})$，从而完成证明。□

定义 3.19 (弱几何引理)。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{1, \dots, n\}$。给定一个 k-正则集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 及其二进制系统 $\mathcal{D}$ 和 h 定义 3.9 中的一个系数函数，称 E 满足相对于 的弱几何引理 h，记作 $E \in \mathrm{WGL}(h)$，如果对每个 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda > 1$，存在一个常数 $C = C(\varepsilon, \lambda)$ 使得

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}_{Q_0}, h(\lambda Q) > \varepsilon} \mathcal{H}^k(Q) \le C(\varepsilon, \lambda) \mathcal{H}^k(Q_0), \quad Q_0 \in \mathcal{D}. \tag{3.11}$$

注 3.20. 显然，如果 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是 k-正则的，则对于任意 $q \in [1, +\infty$，蕴含关系 $E \in \mathrm{Glem}(h, q) \Rightarrow E \in \mathrm{WGL}(h)$ 成立。反向蕴含一般并不成立。关于欧几里得 $\mathbb{R}^2$中的一个例子，参见 [DS91，第 20] 节。通过将 $\mathbb{R}^2$ 等距嵌入到 $\mathbb{H}^2$中，并使用[FV25b，引理 4.38]，，还可得到一个集合 $E \subset \mathbb{H}^2$ 的例子，该集合满足 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_\infty, \nu_1)$，但对于 $q = 2$，却有 $E \notin \mathrm{Glem}(\beta_\infty, \nu_1, q)$。此外，由于 [DS91 第 20] 节中的例子并非

欧几里得可整流 $\mathbb{R}^2$，集合 $E \subset \mathbb{H}^2$ 并非欧几里得可整流，因此尤其不可能按照定义 3.2 的意义具有 BPLI。

在 $\mathbb{H}^1$ 中给出了一个例子，该例满足 WGL(β_{∞,ν_1})（因为它满足指数为 4 的强几何引理），但不满足 $\Gamma \notin$ GLem(β_{∞,ν_1}, q)，其中 $q = 2$ 所对应的曲线 Γ 见第4节。

注记3.21. 定义3.19 中的弱几何引理也可以等价地表述为 Carleson 集条件，与几何引理允许在引理3.18中作出相应改述类似；例如参见 [BHS23，引理 2.6。5]。这也表明，弱几何引理是否成立并不取决于二进制系统的具体选择 $\mathcal{D}$。

接下来 讨论定义3.9中函数的几何引理之间的关系 .

命题 3.22。 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{1, \dots, n\}$。假设 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，且 $\mathcal{D}$ 是 E 上的一个二进制系统。那么，对于 $\lambda \geq 1$，有：

$$\widehat{\beta}_{1,\nu_k}(\lambda Q)^4 \lesssim_\lambda \iota_{1,\nu_k}(\lambda Q), \quad Q \in \mathcal{D}.$$

特别地，若 $E \in \mathrm{GLem}(\iota_{1,\nu_k}, 1)$，则 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\nu_k}, 4)$。

证明。 设 E 是带有二进制系统 $\mathcal{D}$的 k-正则空间。为简便起见，记 $\mu := \mathcal{H}^k \llcorner E$。固定$\varepsilon > 0$。那么，根据 $\iota_{1,\nu_k}(\lambda Q)$ 的定义，存在 $V \in \mathcal{V}_k$ 使得

$$⨍_{\lambda Q}⨍_{\lambda Q} \frac{|d(x,y) - d(P_V(x), P_V(y))|}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\, d\mu(x)\, d\mu(y) < \iota_{1,\nu_k}(\lambda Q) + \varepsilon.$$

因此，至少存在一个点 $z_0 \in \lambda Q$ 使得

$$⨍_{\lambda Q} \frac{|d(z_0,y) - d(P_V(z_0), P_V(y))|}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\, d\mu(y) < \iota_{1,\nu_k}(\lambda Q) + \varepsilon. \tag{3.12}$$

根据引理 3.12只需证明 $\widehat{\beta}_{1,\nu_k}(\lambda[z_0^{-1} \cdot Q])^4 \lesssim \iota_{1,\nu_k}(\lambda[z_0^{-1} \cdot Q])$，因此不失一般性，以下假设 $z_0 = 0$。此外，根据引理 3.14，可假设 $V = V_I \times \{0\} \in \mathcal{V}_k^0$。在此情形下 $P_V(y) = (\pi_{V_I}(\pi(y)), 0)$。那么对每个 $y \in \lambda Q$

$$\begin{aligned}
|d(z_0,y) - |\pi_{V_I}(\pi(z_0)) - \pi_{V_I}(\pi(y))|| &= \|y\| - |\pi_{V_I}(\pi(y))| \\
&\geq |\pi(y)| - |\pi_{V_I}(\pi(y))| \\
&= \frac{|\pi(y)|^2 - |\pi_{V_I}(\pi(y))|^2}{|\pi(y)| + |\pi_{V_I}(\pi(y))|} = \frac{|\pi_{V_I^\perp}(\pi(y))|^2}{|\pi(y)| + |\pi_{V_I}(\pi(y))|} \geq \frac{|\pi_{V_I^\perp}(\pi(y))|^2}{2\operatorname{diam}(\lambda Q)} \\
&= \frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y), V_I)^2}{2\operatorname{diam}(\lambda Q)}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

这个估计将用于定义$\widehat{\beta}_{1,\nu_k}(\lambda Q)$时出现的两个加项之一。对于另一个加项，我们使用类似的估计。

记 $a := \|y\|$ 和 $b := |\pi_{V_I}(\pi(y))|$，我们有

$$|d(z_0,y) - |\pi_{V_I}(\pi(z_0)) - \pi_{V_I}(\pi(y))|| = a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3} \gtrsim \frac{a^4 - b^4}{\operatorname{diam}(\lambda Q)^3}.$$

Here

$$\begin{aligned}
a^4 - b^4 &= |\pi(y)|^4 + 16\pi_t(y)^2 - |\pi_{V_I}(\pi(y))|^4 \\
&= (|\pi_{V_I}(\pi(y))|^2 + |\pi_{V_I^\perp}(\pi(y))|^2)^2 + 16\pi_t(y)^2 - |\pi_{V_I}(\pi(y))|^4 \\
&= |\pi_{V_I^\perp}(\pi(y))|^4 + 2|\pi_{V_I}(\pi(y))|^2 |\pi_{V_I^\perp}(\pi(y))|^2 + 16\pi_t(y)^2 \\
&\gtrsim \|P_V(y)^{-1} \cdot y\|^4 \geq d(y,V)^4,
\end{aligned}$$

这里我们用到了以下事实:

$$\begin{aligned}\|P_V(y)^{-1}\cdot y\|^4 &= |\pi(P_V(y)^{-1}\cdot y)|^4 + 16(\pi_t(P_V(y)^{-1}\cdot y))^2\\ &= |\pi_{V_I^{\perp}}(\pi(y))|^4 + 16(\pi_t(y)-\omega(\pi_{V_I}(\pi(y)),\pi(y)))^2\\ &\le |\pi_{V_I^{\perp}}(\pi(y))|^4 + 32\pi_t(y)^2 + 8|\pi_{V_I}(\pi(y))|^2|\pi_{V_I^{\perp}}(\pi(y))|^2,\end{aligned}$$

其中 ω 是群运算（2.1）中出现的形式。因此

$$|d(z_0,y)-|\pi_{V_I}(\pi(z_0))-\pi_{V_I}(\pi(z))|| \gtrsim \frac{d(y,V)^4}{\operatorname{diam}(\lambda Q)^3}. \tag{3.14}$$

最后结合（3.13）和（3.14），我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{d(z_0,y)-|\pi_{V_I}(\pi(z_0))-\pi_{V_I}(\pi(y))|}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{d(z_0,y)-|\pi_{V_I}(\pi(z_0))-\pi_{V_I}(\pi(y))|}{\operatorname{diam}(\lambda Q)} + \frac{1}{2}\frac{d(z_0,y)-|\pi_{V_I}(\pi(z_0))-\pi_{V_I}(\pi(y))|}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\\ &\gtrsim \frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y),V_I)^2}{\operatorname{diam}(\lambda Q)^2} + \frac{d(y,V)^4}{\operatorname{diam}(\lambda Q)^4}.\end{aligned}$$

回顾 $\widehat{\beta}$ 的定义，并分别对 $\varphi(x)=x^2$ 和 $\varphi(x)=x^4$ 应用詹森不等式，我们可推得

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^4 &\le \fint_{\lambda Q}\frac{\operatorname{dist}_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y),V_I)^2}{\operatorname{diam}(\lambda Q)^2} + \frac{d(y,V)^4}{\operatorname{diam}(\lambda Q)^4}\,d\mu(y)\\ &\lesssim \fint_{\lambda Q}\frac{|d(z_0,y)-|\pi_{V_I}(\pi(z_0))-\pi_{V_I}(\pi(y))||}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}d\mu(y) \overset{(3.12)}{\le} \iota_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得结论。 □

命题 3.23。设 $n\in\mathbb{N}$ 和 $k\in\{1,\dots,n\}$。假设 $E\subset\mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，且$\mathcal{D}$ 是 E 上的一个二进制系统。那么对于 $\lambda\ge 1$，我们有

$$\beta_{1,\pi,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^2+\beta_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^4 \le \widehat{\beta}_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^4, \quad Q\in\mathcal{D}. \tag{3.15}$$

此外 $\widehat{\ }$，若 $E\in\mathbf{GLem}(\beta_{1,\mathcal{V}_k},4)$，则 $E\in\mathbf{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)},2)$ 且 $E\in\mathbf{WGL}(\beta_{\infty,\mathcal{V}_k})$。

证明。回顾定义3.9 可知

$$\widehat{\beta}_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^4 = \inf_{V\in\mathcal{V}_k}\left\{\left[\fint_{\lambda Q}\frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y),\pi(V))}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\,d\mathcal{H}^k(y)\right]^2+\left[\fint_{\lambda Q}\frac{d(y,V)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\,d\mathcal{H}^k(y)\right]^4\right\},$$

$\widehat{\ }$这立即推出（3.15）。显然，这也表明，若 $E\in\mathbf{GLem}(\beta_{1,\mathcal{V}_k},4)$，则$E\in\mathbf{GLem}(\beta_{1,\pi,\mathcal{V}_k},2)$ 且 $E\in\mathbf{GLem}(\beta_{1,\mathcal{V}_k},4)$。由于 $\beta_{1,\pi,A(2n,k)}\le\beta_{1,\pi,\mathcal{V}_k}$由注记 3.11，这也推出 $E\in\mathbf{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)},2)$。

要完成命题的证明，还需证明 $E\in\mathrm{GLem}(\beta_{1,\mathcal{V}_k},4)$ 推出$E\in\mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\mathcal{V}_k})$。这可由欧几里得空间中的相同论证得到，该论证不受可积指数的影响；参见 [DS91，第27] 页，或 [DS93，第27]页。 □

命题 3.24. 设 $n\in\mathbb{N}$ 和 $k\in\{1,\dots,n\}$。假设 $E\subset\mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，且 $\mathcal{D}$ 是 E 上的二进制系统。那么，对于 $\lambda\ge 1$，我们有:

$$\widehat{\beta}_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^4 \lesssim \beta_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^2, \quad Q\in\mathcal{D}. \tag{3.16}$$

$\widehat{\ }$特别地，如果 $E\in\mathrm{GLem}(\beta_{1,\mathcal{V}_k},2)$，那么 $E\in\mathrm{GLem}(\beta_{1,\mathcal{V}_k},4)$。

证明。 回顾 $d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(x)\ \pi(y)) \le d(x,y)$ 对所有 $x,y \in \mathbb{H}^n$, 由定义3.9 可直接得出，因为

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{1,\mathcal{V}_k}(\lambda Q)^4 &= \inf_{V\in\mathcal{V}_k}\left\{\left[\fint_{\lambda Q}\frac{d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y),\pi(V))}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\,d\mathcal{H}^k(y)\right]^2+\left[\fint_{\lambda Q}\frac{d(y,V)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\,d\mathcal{H}^k(y)\right]^4\right\}\\ &\le \inf_{V\in\mathcal{V}_k}\left\{2\left[\fint_{\lambda Q}\frac{d(y,V)}{\operatorname{diam}(\lambda Q)}\,d\mathcal{H}^k(y)\right]^2\right\}.\end{aligned}$$ □

3.2.2. 多分辨率族。

定义 3.25 （二进网和多分辨率族）。 [Sch07; Jui10]给定 $E \subset \mathbb{H}^n$紧致集合，一个二进网在 E 是由 $\Delta = (\Delta_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ 个 E 的子集组成的集合，满足

(i) $\Delta_j \subset \Delta_{j+1}$ 对每个 $j \in \mathbb{Z}$; (ii) 如果 $x_1,\ x_2 \in \Delta_j$，那么 $x_1 = x_2$或 $d(x_1,\ x_2) > 2^{-j}$; (iii) 如果 $y \in E$ 且 $j \in \mathbb{Z}$，则存在 $x \in \Delta_j$ 使得 $d(y,\ x) \le 2^{-j}$。

对于固定的二进网 $(\Delta_j)_j$ 在 E 中， $1 \le p \le +\infty$ 和 $d \in \mathbb{N}$，另令

$$B^{\Delta}_{p,d}(E) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j}\sum_{x\in\Delta_j}\beta^2_{p,\mathcal{V}_d}(x, A\,2^{-j}), \tag{3.17}$$

其中某个常数为 $A > 1$。相应的多分辨率族 是如下集合

$$\mathcal{G} := \{B(x, A\,2^{-j}) : x \in \Delta_j,\ j \in \mathbb{Z}\}.$$

在第 4 节中，我们需要以下关于几何引理与定义 $k = 1$中的多分辨率族之间的联系（其中 $k = 1$）：$k = 1$定义 3.25。

引理 3.26。 若 $E \subset \mathbb{H}^n$ 有界且为 k-正则，并满足 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_{p,\mathcal{V}_k}, 2)$，则对 E 中的每个二进网，都有 $B^{\Delta}_{p,k}(E) < \infty$。

证明是标准的，因此我们只简述思路。设 $\mathcal{D}$ 是定义 3.5 中的二进立方体系。回顾注 3.7，可不妨设条件对 $\varrho = 1/2$ 成立，从而代数为 j 的立方体满足 $\operatorname{diam}(Q) \sim 2^{-j}$。引理 3.26 的思路是为每个 $B \in \mathcal{G}$ （如定义 3.25 中所述）指定一个立方体 $Q_B \in \mathcal{D}$，使得对于某个与 B 无关的常数， $B \cap E \subset KQ_B$ 成立，然后用对应的 KQ_B 的数量来界定 B 的 β-数量。同一个 $Q \in \mathcal{D}$ 可能作为多个 $B \in \mathcal{G}$ 的 $Q = Q_B$ 出现，但可以利用 E 的 k-正则性以及二进网 Δ 的性质 (ii) 控制这种重数。于是，利用假设的几何引理即可得到所需结论。根据引理 3.18，我们也可以等价地考虑其关于二进立方体或二重积分的版本。

3.3. **电晕分解**。 本节中，我们为 k-正则集合在 $\mathbb{H}^n$上定义不同版本的电晕分解。所有这些分解都基于冠状分解这一概念，它是对 David 和 Semmes [DS93, (3.14)-(3.18)]中原始定义的改编。

定义 3.27 （冠状分解）。 设 $n \in \mathbb{N}$、 $k \in \{1,\dots,n\}$ 和 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是带有二进制系统 $\mathcal{D}$的 k-正则集合。对于 E，其常数为 $C > 0$ 的一个冠状分解 是将二进立方体分解为好集合 $\mathcal{G}$ 和坏集合 $\mathcal{B}$，并满足以下性质:

- 对每个 $R \in \mathcal{D}$
$$\sum_{Q\in\mathcal{B},Q\subseteq R}\mathcal{H}^k(Q) \le C\mathcal{H}^k(R);$$
- 良好集合 $\mathcal{G}$ 可以划分为由互不相交的树 $\mathcal{S}$ （也称为停时区域）组成的族 $\mathcal{F}$，使得:

– 每个 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ 都是相干的：它有一个（唯一的）极大元，记为 $Q(\mathcal{S})$，包含 $\mathcal{S}$ 的所有其他元素作为子集；并且具有如下性质：如果 $Q \in \mathcal{S}, Q' \in \mathcal{D}$ 且 $Q \subseteq Q' \subseteq Q(\mathcal{S})$，那么 $Q' \in \mathcal{S}$；最后还满足：如果 $Q \in \mathcal{S}$，那么 Q 的所有子立方体要么都属于 $\mathcal{S}$，要么一个也不属于；– 对于每个 $R \in \mathcal{D}$

$$\sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{F}, Q(\mathcal{S})\subseteq R} \mathcal{H}^k(Q(\mathcal{S})) \leq C\mathcal{H}^k(R). \tag{3.18}$$

如果树 $\mathcal{S}$ 满足 E 在每个 $Q \in \mathcal{S}$的尺度和位置上都具有良好的（逼近）性质，那么冠状分解 E 就很有用。因此，我们称存在具有相应性质的电晕分解。与欧几里得情形一样（[DS91，第20]页或 [DS93，第58]页），此类分解是否存在应与定义中所选的具体二进制系统无关，不过我们不需要这一事实。

我们为正则子集 $E \subset \mathbb{H}^n$引入三种电晕分解的定义。第一种是通过常数较小的内在Lipschitz图进行的电晕分解，其灵感来自 $\mathbb{R}^n$ 中的经典电晕分解定义（见 [DS93，定义 3.19] 或 [DS91]）。它还与通过常数较小的内在Lipschitz函数对内在Lipschitz函数进行的电晕分解有关；该分解在 $k = n = 1$ 中为 [FO21], 建立，其动机是将其应用于正则曲线上的奇异积分算子。此外，它也是 [BHHLN22]中研究的一般电晕分解的一个实例。根据 [BHHLN22, 定理 1.1], ，具有 (ILG-C) 的集合因此具有内在Lipschitz图的大块平方（定义见 [BHHLN22，定义 2.11]）。

定义 3.28（由内在Lipschitz图作电晕分解（ILG-C））。设 $n \in \mathbb{N}$、$k \in \{1, \dots, n\}$ 和 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是 k-正则的。若对于每个 $\eta > 0$，都存在常数 $C = C(\eta) > 0$，使得 E 存在常数为 C 的冠状分解 $\mathcal{D} = \mathcal{G} \dot\cup \mathcal{B}$，并且对每个 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，都存在一个 k 维内在Lipschitz图 $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{S}}$，其内在 Lipschitz 常数不超过 η，满足对所有 $Q \in \mathcal{S}$，均有

$$\operatorname{dist}(x, \Gamma) \leq \eta \operatorname{diam}(Q) \quad \text{if } x \in E, \operatorname{dist}(x, Q) \leq \operatorname{diam}(Q). \tag{3.19}$$

注3.29。我们需要对 (ILG-C) 作一项改进：对于某个常数 $N > 1$，可以在定义3.28中将“$d(x, Q) \leq \operatorname{diam}(Q)$”替换为“$d(x, Q) \leq N\operatorname{diam}(Q)$”，并允许冠状分解中的常数 $C = C(\eta, N)$ 也依赖于 N。这乍看是一个更强的条件，但实际上这两个版本是等价的。在欧几里得情形下，这一点见 [DS91，第 20], 页；另见 [DS93，引理 3.31], 。证明并未用到欧几里得空间的任何性质，而是完全依赖于二进制族和冠状分解的公理性质；证明概要见 [DS91；DS93]。

下一个版本的电晕分解受 [Hah12 引理 4 的启发。3]此处及下文中，K_0 是一个固定常数，其取值将足够大，并依赖于 k 和C_E，如 [Hah12第4]页所述。我们还假设至少有 $K_0 \geq 2$。

定义 3.30（由水平平面构成的电晕分解（P-C））。设 $n \in \mathbb{N}$、$k \in \{1, \dots, n\}$ 和 $E \subset \mathbb{H}^n$ 均为 k-正则。若对于每个 $\eta > 0$，都存在常数 $C = C(\eta) > 0$，使得 E 存在常数为 C 的电晕分解 $\mathcal{D} = \mathcal{G} \dot\cup \mathcal{B}$，且对每个 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，都存在一个仿射水平平面 $V_{\mathcal{S}}$，满足：只要以如下方式选取 x，$y \in K_0 Q(\mathcal{S})$，使得 $d(x, y) > \eta \min\{h_{\mathcal{S}}(x) \; h_{\mathcal{S}}(y)\}$，那么

$$d(x, y) \leq (1 + 2\eta) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(y)), \tag{3.20}$$

其中

$$h_{\mathcal{S}}(x) := \inf\{d(x, Q) + \operatorname{diam}(Q) : Q \in \mathcal{S}\}.$$

Hahlomaa 使用了一个与 (P-C) 类似的条件，但其中 (3.20) 只要求对 $d(x,y) > D^{-2}\min\{h_{\mathcal{S}}(x)\ h_{\mathcal{S}}(y)\}$ 成立，且对应的常数 D 依赖于 k 以及 E 的 Ahlfors 正则性常数。然而，检查 [Hah12] 中的证明可知，事实上，即使在我们对 E 采用较弱的 Carleson 型假设时，仍可得到 (P-C)；参见引理6.6的证明。(P-C) 条件更便于与文献中的其他电晕分解进行比较。

我们考虑的第三类电晕分解是由 Bate、Hyde 和 Schul 引入的赋范空间电晕分解 [BHS23, 定义 6.4.1、6.4。2]在度量空间中：

定义3.31 （由赋范空间给出的冠分解（N-C））。设 $n \in \mathbb{N}$、$k \in \{1,\dots,n\}$ 和 $E \subset \mathbb{H}^n$ 为 k-正则。我们称 $E \subset \mathbb{H}^n$ 具有一个由赋范空间给出的冠分解（N-C），其常数为 Λ_1，$\Lambda_2 \geq 1$ 若对于每个 $\eta > 0$，存在 $C = C(\eta) > 0$，使得E 具有一个冠状分解 $\mathcal{D} = \mathcal{G} \dot\cup \mathcal{B}$，其常数为 C；其中，对于每个 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，存在 $\mathbb{R}^k$ 上的一个范数$\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$、一个点 $y_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^k$ 以及一个映射 $\varphi_{\mathcal{S}}\colon 3B_{Q(\mathcal{S})} \to B_{\|\cdot\|_{\mathcal{S}}}(y_{\mathcal{S}}, 3\mathrm{diam}(Q(\mathcal{S})))$，使得若$Q \in \mathcal{S}$和 $x,\ y \in 3B_Q$ 满足 $d(x,\ y) \geq \eta\mathrm{diam}(Q)$，则

$$\frac{1}{\Lambda_1} d(x,y) \leq \|\varphi_{\mathcal{S}}(y) - \varphi_{\mathcal{S}}(x)\|_{\mathcal{S}} \leq \Lambda_2 d(x,y),$$

其中 B_Q 定义为 d 的定义见 [BHS23],，而 $B_{\|\cdot\|_{\mathcal{S}}}$ 表示相对于范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ 的球 .

在接下来的引理 3.32–3.34中，我们讨论定义 3.28 (ILG-C)、3.30(P-C) 和 3.31(N-C) 中所述不同冠状分解之间的关系。

引理 3.32. 设 $n \in \mathbb{N}$、$k \in \{1,\dots,n\}$ 和 $E \subset \mathbb{H}^n$ 为 k-正则。若 E 满足 *(P-C)*，则也满足 *(ILG-C)*。

证明。固定 $\eta > 0$。我们将找到 $\vartheta = \vartheta(\eta) = \vartheta(\eta,\ K_0,\ k,\ C_E) > 0$ 充分小，并取参数 ϑ_{K_0} 应用 (P-C)。设 $\mathcal{D} = \mathcal{G} \dot\cup \mathcal{B}$ 为应用 (P-C) 得到的冠状分解，其中将“η”替换为“ϑ_{K_0}”；这也将作为 (ILG-C) 的冠状分解。我们只需验证存在符合 (3.19) 的内在Lipschitz图。

令 $\mathcal{F}$ 为与冠状分解相关联的树森林，并固定 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$。对于每个$x,\ y \in K_0Q(\mathcal{S})$，满足 $x \neq y$，记 $Q_{x,\ y}$ 为 $\mathcal{S}$ 中满足 $x,\ y \in K_0Q_{x,\ y}$ 的最小立方体（按直径计）。（虽然固定一代中 $\mathcal{S}$ 的立方体两两不相交，但K_0倍扩大的立方体通常并不互不相交，因此 $Q_{x,\ y}$ 的选取未必唯一，不过任意一个满足条件的选取都可以。此外，假设 $x,\ y \in K_0Q(\mathcal{S})$ 可确保至少存在一个具有所需性质的立方体。）

我们进行一项受 [BHS23 第 6.4 条注记启发的构造。3]令 $\mathcal{N}$ 为 $K_0Q(\mathcal{S})$ 中具有以下性质 $(\mathbf{P})$ 的一个集合：若 $x,\ y \in \mathcal{N}$ 互不相同，则 $d(x,\ y) \geq \vartheta$ 直径$(Q_{x,\ y})$，且$\mathcal{N}$ 是按以下意义的 极大集合：在保持分离条件的同时，无法向 $\mathcal{N}$ 中添加任何元素。由佐恩引理可知，$\mathcal{N}$ 的存在性得到保证。

我们声称，只要将 $\vartheta = \vartheta(\eta)$取得足够小，那么对每个 $x \in K_0Q(\mathcal{S})$以及任意满足 $x \in K_0Q$的立方体 $Q \in \mathcal{S}$，都存在 $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$使得 $d(x,\ x_{\mathcal{N}}) \leq \eta\,\mathrm{diam}(Q)$。事实上，令$x \in K_0Q$，其中 $Q \in \mathcal{S}$，并反设

$$d(x,y) > \eta\,\mathrm{diam}(Q) \quad \text{for every } y \in \mathcal{N}. \tag{3.21}$$

特别地，$x \notin \mathcal{N}$。如果我们证明 $\mathcal{N} \cup \{x\}$ 仍满足$(\mathbf{P})$中的分离性质，那么根据 $\mathcal{N}$的极大性即可得出结论。换言之，对于固定的 $y \in \mathcal{N}$，我们要证明$d(x,\ y) \geq \vartheta\mathrm{diam}(Q_{x,\ y})$。令 $R \in \mathcal{S}$ 为 Q 的最小祖先，使得

$$\mathrm{diam}(R) \geq \frac{1}{K_0 - 1} d(x,y) + \mathrm{diam}(Q). \tag{3.22}$$

如果在 $\mathcal{S}$ 中不存在这样的祖先，则令 $R = Q(\mathcal{S})$。在第一种情况下，我们有

$$d(y,R) \leq d(y,Q) \leq d(x,y) + d(x,Q) \leq d(x,y) + (K_0 - 1)\mathrm{diam}(Q) \leq (K_0 - 1)\mathrm{diam}(R).$$

这意味着 $y \in K_0 R$。在 $R = Q(\mathcal{S})$ 的情形下，同样的结论也成立，因为显然$y \in K_0 Q(\mathcal{S}) = K_0 R$。又由于 $x \in K_0 R$，我们得到 $\operatorname{diam}(R) \geq \operatorname{diam}(Q_{x,y})$，这是由$Q_{x,y}$的选取所致。接着，根据 R 的极小性、二进立方体的性质（见（3.4）和定义3.5），以及我们的反设（3.21），可以估计得到

$$D^{-2}\varrho \operatorname{diam}(R) \leq \tfrac{1}{K_0-1} d(x,y) + \operatorname{diam}(Q) \overset{(3.21)}{\leq} \tfrac{1}{K_0-1} d(x,y) + \tfrac{1}{\eta} d(x,y) = \left(\tfrac{1}{K_0-1} + \tfrac{1}{\eta}\right) d(x,y).$$

即使在我们找不到满足条件的祖先（3.22）的情况下，这一点仍然成立，因为在这种情况下

$$D^{-2}\varrho \operatorname{diam}(R) \leq \operatorname{diam}(R) \leq \frac{1}{K_0 - 1} d(x,y) + \operatorname{diam}(Q).$$

因此我们得到

$$d(x,y) \geq \frac{D^{-2}\varrho}{\frac{1}{K_0-1} + \frac{1}{\eta}} \operatorname{diam}(R)$$

并且，取

$$\vartheta \leq \frac{D^{-2}\varrho}{\frac{1}{K_0-1} + \frac{1}{\eta}} \ (\lesssim_{k, C_E} \eta), \tag{3.23}$$

最终得到

$$d(x,y) \geq \vartheta \operatorname{diam}(R) \geq \vartheta \operatorname{diam}(Q_{x,y})$$

并且该断言得证。现在，根据 $\mathcal{N}$ 的构造，对于任意 x，$y \in \mathcal{N}$，我们知道

$$d(x,y) \geq \vartheta \operatorname{diam}(Q_{x,y}) \geq \tfrac{\vartheta}{K_0} h_{\mathcal{S}}(x) \geq \tfrac{\vartheta}{K_0} \min\{h_{\mathcal{S}}(x), h_{\mathcal{S}}(y)\}.$$

第二个不等式由以下事实得出：$x \in K_0 Q_{x,y}$，因此 $h_{\mathcal{S}}(x) \leq d(x, Q_{x,y}) + $直径$(Q_{x,y}) \leq (K_0 - 1)$直径$(Q_{x,y}) + $直径$(Q_{x,y}) = K_0$直径$(Q_{x,y})$. 将 (P-C) 应用于 $\frac{\vartheta}{K_0}$，可推得存在一个仿射水平平面 $V_{\mathcal{S}}$，使得 —

$$d(x,y) \leq (1 + 2\tfrac{\vartheta}{K_0}) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(y)), \quad x, y \in \mathcal{N}. \tag{3.24}$$

根据引理 3.14，不失一般性，我们可以假设 $V_{\mathcal{S}}$ 是一个水平子群。条件 (3.24) 意味着水平投影 $P_{V_{\mathcal{S}}}|_{\mathcal{N}}$ 是单射。因此，存在一个定义良好的映射 $\Phi_{\mathcal{S}} := (P_{V_{\mathcal{S}}}|_{\mathcal{N}})^{-1}\colon P_{V_{\mathcal{S}}}(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$，它将 $P_{V_{\mathcal{S}}}(x) \mapsto x$，且 $\mathcal{N} = \Phi_{\mathcal{S}}(P_{V_{\mathcal{S}}}(\mathcal{N}))$ 是 $P_{V_{\mathcal{S}}}(\mathcal{N}) \subset V_{\mathcal{S}}$上的一个内蕴图。更确切地说，由$P_{V_{\mathcal{S}}}|_{\mathcal{N}}$的单射性可知，对于每个 $v \in P_{V_{\mathcal{S}}}(\mathcal{N})$，互补正交子群 W中都存在唯一的 $\varphi_{\mathcal{S}}(v)$，使得 $v \cdot \varphi_{\mathcal{S}}(v) \in \mathcal{N}$。于是，$\Phi_{\mathcal{S}}$是 $\varphi_{\mathcal{S}}$的图映射；由 (3.24) 可知，后者是内在Lipschitz的，且内在 Lipschitz 常数为 $\lesssim \sqrt[4]{\vartheta}$（见命题 2.8）。因此，由 (3.23)，$\varphi_{\mathcal{S}}$ 的内在 Lipschitz 常数可由 $\lesssim_{k, C_E} \sqrt[4]{\eta}$控制。根据[DF22], ，我们可以将 $\varphi_{\mathcal{S}}$ 延拓到整个空间 $V_{\mathcal{S}}$，并控制其 Lipschitz 常数。令 $\Gamma_{\mathcal{S}}$为相应的内在Lipschitz图。

现在令 $Q \in \mathcal{S}$ 和 $x \in E$ 满足 $d(x, Q) \leq$ 直径(Q)。那么 $x \in K_0 Q$，并且根据前面的断言，存在 $x_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$满足 $d(x, y) \leq \eta$直径(Q)。因此

$$d(x, \Gamma_{\mathcal{S}}) \leq d(x, \mathcal{N}) \leq d(x, x_{\mathcal{N}}) \leq \eta \operatorname{diam}(Q). \tag{3.25}$$

这证明所选的冠状分解满足 (ILG-C) 中要求的条件。确切地说，我们构造的内蕴图的内在 Lipschitz 常数可能没有界于 η；但这并无妨，因为该常数受 η控制，也就是说，当 $\eta \to 0$ 时它趋于 0。因此，如果需要，我们可以在一开始就将 $\vartheta(\eta)$ 取得更小，从而使 $\Gamma_{\mathcal{S}}$ 的内在 Lipschitz 常数小于 η，同时仍满足（3.25）。□

接下来，我们考虑引理 3.32中蕴含关系的逆命题。

引理 3.33。设 $n \in \mathbb{N}$、$k \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $E \subset \mathbb{H}^n$ 均为 k-正则。若 E 满足 *(ILG-C)*，则也满足 *(P-C)*。

证明。固定 $\eta > 0$。我们的目标是验证该参数满足 (P-C) 的条件。求出满足以下条件的 $0 < \overline{\eta} \le \eta$：

$$\frac{1+\overline{\eta}^2}{1-6\,\overline{\eta}^2 D^2 \varrho^{-1} - 6\overline{\eta}} \le 1 + 2\eta. \tag{3.26}$$

现在应用参数为 η^2 的 (ILG-C)，并找到相应的冠状分解 $\mathcal{D} = \mathcal{G} \cup \mathcal{B}$，其森林为 $\mathcal{F}$，常数为 $C = C(\eta^2) = C(\eta, k, C_E)$。唯一需要验证的性质是：对于每个 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，都存在一个仿射水平平面 $V_{\mathcal{S}}$，使得当 $x, y \in K_0 Q(\mathcal{S})$ 的选取满足 $d(x, y) > \eta \min\{h_{\mathcal{S}}(x), h_{\mathcal{S}}(y)\}$ 时，

$$d(x,y) \le (1+2\eta) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(y)). \tag{3.27}$$

固定 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$。我们取利普希茨图 $\Gamma_{\mathcal{S}}$ 的定义域作为仿射水平平面 $V_{\mathcal{S}}$；根据 (ILG-C) 性质，该图与 $\mathcal{S}$ 相关联。现在设 x、$y \in K_0 Q(\mathcal{S})$ 满足 $d(x, y) > \eta \min\{h_{\mathcal{S}}(x), h_{\mathcal{S}}(y)\}$。不失一般性，假设 $\min\{h_{\mathcal{S}}(x), h_{\mathcal{S}}(y)\} = h_{\mathcal{S}}(x)$。根据 $h_{\mathcal{S}}$ 的定义，存在一个立方体 $Q \in \mathcal{S}$，使得 $d(x, y) > \eta(\operatorname{diam}(Q) + d(x, Q))$。现在考虑满足 $\operatorname{diam}(K_0 R) \ge d(x, y)$ 的最小立方体 $R \supset Q$、$R \in \mathcal{S}$。这样的立方体存在，因为 $\operatorname{diam}(K_0 Q(\mathcal{S})) \ge d(x, y)$。那么有两种可能：

- 若存在一个包含 Q 的 $\widehat{R}$ 的子立方体 R，则由 R 的极小性以及二进立方体的性质，

$$\frac{\operatorname{diam}(R)}{D^2 \varrho^{-1}} \le \operatorname{diam}(\widehat{R}) \le \operatorname{diam}(K_0 \widehat{R}) < d(x,y),$$

  因此，$\operatorname{diam}(R) \le D^2 \varrho^{-1} d(x, y)$;
- 若不存在包含 Q 的 R 的子立方体，则这意味着 $R = Q$。因此

$$\overline{\eta} \operatorname{diam}(R) \le \eta \operatorname{diam}(R) = \eta \operatorname{diam}(Q) \le \eta\,(\operatorname{diam}(Q) + d(x, Q)) < d(x,y),$$

  which gives $\operatorname{diam}(R) \le \overline{\eta}^{-1} d(x,y)$.

无论哪种情况，我们都有 $\operatorname{diam}(R) \le (D^2 \varrho^{-1} + \overline{\eta}^{-1}) d(x, y)$。

此外，$d(x, R) \le d(x, Q) < \eta^{-1} d(x, y) \le \eta^{-1} \operatorname{diam}(K_0 R) \le 2\eta^{-1} K_0 \operatorname{diam}(R)$。类似地，由三角不等式，$d(y, R) \le d(x, y) + d(x, R) \le (\eta^{-1}+1) \operatorname{diam}(K_0 R) \le 2(\eta^{-1}+1) K_0 \operatorname{diam}(R)$。因此，我们可以应用 (ILG-C)（对常数 $N = 2(\eta^{-1}+1)K_0$ 采用注3.29中的改进），得到

$$d(x, \Gamma_{\mathcal{S}}) \le \overline{\eta}^2 \operatorname{diam}(R) \quad \text{and} \quad d(y, \Gamma_{\mathcal{S}}) \le \overline{\eta}^2 \operatorname{diam}(R) \tag{3.28}$$

因为 $d(x, R) \le N$直径(R)，且 $d(y, R) \le N$直径(R)。

现在设 x_Γ 和 y_Γ 是 $\Gamma_{\mathcal{S}}$ 上的两个点，分别实现 $d(x, \Gamma_{\mathcal{S}})$ 和 $d(y, \Gamma_{\mathcal{S}})$。由于 $\Gamma_{\mathcal{S}}$ 是一个常数小于 η^2 的内在Lipschitz图，由图映射的度量利普希茨连续性（2.5）可得

$$d(x_\Gamma, y_\Gamma) \le (1+\overline{\eta}^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x_\Gamma), P_{V_{\mathcal{S}}}(y_\Gamma)). \tag{3.29}$$

因此，若 η 足够小，则由（3.28）、（3.29）以及 $P_{V_{\mathcal{S}}}$ 的1-利普希茨性质可得

$$\begin{aligned}
d(x, y) &\le d(x, x_\Gamma) + d(x_\Gamma, y_\Gamma) + d(y, y_\Gamma) \le (1+\eta^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x_\Gamma), P_{V_{\mathcal{S}}}(y_\Gamma)) + 2\eta^2 \text{直径}(R) \\
&\le (1+\overline{\eta}^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(y)) + (1+\overline{\eta}^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(x_\Gamma)) + (1+\overline{\eta}^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(y), P_{V_{\mathcal{S}}}(y_\Gamma)) \\
&\quad + 2\overline{\eta}^2 \operatorname{diam}(R) \\
&\le (1+\overline{\eta}^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(y)) + (1+\overline{\eta}^2) d(x, x_\Gamma) + (1+\overline{\eta}^2) d(y, y_\Gamma) + 2\overline{\eta}^2 \operatorname{diam}(R) \\
&\le (1+\overline{\eta}^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(y)) + 6\overline{\eta}^2 \operatorname{diam}(R) \\
&\le (1+\overline{\eta}^2) d(P_{V_{\mathcal{S}}}(x), P_{V_{\mathcal{S}}}(y)) + 6\overline{\eta}^2 (D^2 \varrho^{-1} + \overline{\eta}^{-1}) d(x, y).
\end{aligned}$$

如果 η 足够小，通过将最后一项吸收到不等式左端，并利用（3.26），我们得到所需估计（3.27）。□

如果集合 E admits 通过水平平面 (P-C) 进行电晕分解，那么根据定义，对于每棵树 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，都存在一个水平投影，将其限制在立方体 $Q \in \mathcal{S}$ 上时具有接近 1 的双 Lipschitz 常数。自然地，这意味着一个类似的条件，只需将“接近 1”替换为某个确定的常数。

引理 3.34. 设 $n \in \mathbb{N}$、 $k \in \{1, \dots, n\}$和 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是 k-正则的。若 E满足 *(P-C)*，则对于任意 $L > 1$，也满足 *(N-C)*，其常数为 $\Lambda_1 = L$ 和 $\Lambda_2 = 1$ 。

证明。 设 $n \in \mathbb{N}$、 $k \in \{1, \dots, n\}$和 $E \subset \mathbb{H}^n$是 k-正则的。设 $L > 1$。若 E满足 (P-C)，那么对于任意充分小的 η，由 (3.20) 可得

$$d(x, y) \leq L d(P_{V_S}(x), P_{V_S}(y)) \tag{3.30}$$

只要 x、 $y \in 3B_Q$ 满足 $d(x, y) \geq \eta$直径(Q)。于是 E 满足 (N-C) 的条件，其中 $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$ 是配备诱导距离的 V_S(如定义 3.30所述)， $\varphi_{\mathcal{S}}$是到 V_S的投影映射， $\Lambda_1 = L$ 且 $\Lambda_2 = 1$。请注意，(N-C) 定义中的常数“C”也可以依赖于 $\Lambda_1 = L$。 □

4. An elaboration on Juillet's construction

本节的目标是利用 Juillet 提出的构造证明定理 1.4。在 [Jui10], 中，作者构造了一条 Lipschitz 曲线 $\omega : [0, 1] \to \mathbb{H}^1$ ，其关联的 β_{∞,ν_1}- 数列不是平方可和的，从而为 $\mathbb{H}^1$ 中的经典旅行推销员问题（指数为 2）提供了一个反例。这表明， [FFP07] 中提出的条件并非紧集 $E \subset \mathbb{H}^1$ 包含于一条可整流曲线中的必要条件。曲线 ω 是通过对一条 Lipschitz 曲线 $\omega^{\mathbb{C}} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ 作水平提升得到的，其构造需要用折线作一致逼近。令 Γ 表示曲线 ω 的支撑集。[FV25b 的命题 4.37] 指出， $\Gamma \notin$ GLem(β_{∞,ν_1}, 2)，但这并不能先验排除 Γ 满足 GLem(β_{p,ν_1}, 2) 且指数为某个 $p < \infty$ 的可能性。为了表明我们的主要结果定理 1.1 的假设严格弱于 Hahlomaa 在 [Hah12], 中使用的假设，我们旨在证明 Γ 是 $(\mathbb{H}^1, d)\widehat{}$ 中的一个 1-正则集（定理 4.2），满足 $\Gamma \notin$ GLem(β_{1,ν_1}, 2)（定理 4.4），即使 $\Gamma \in$ GLem(β_{1,ν_1}, 4)（定理$\widehat{}$4.5）。根据命题 3.24，反向蕴含 GLem(β_{1,ν_1}, 2) $\Rightarrow$ GLem(β_{1,ν_1}, 4) 始终成立。

与本文其余部分一样，我们在此使用科尔尼度量 d。在 [Jui10], 中则使用次黎曼距离，但由于这两种度量双 Lipschitz 等价，因此这一变化无关紧要。

我们回顾如下定义，它可以在任意度量空间中给出。

定义 4.1。 设 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}^1$ 是一条（连续）曲线。若 d 表示科尔尼距离，则 γ 在 $(\mathbb{H}^1, d)$ 中的长度 定义为

$$\ell_d(\gamma) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(s_{i-1}), \gamma(s_i)) : a = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = b \right\}.$$

若 γ 是一条水平曲线，则其长度 $\ell_d(\gamma)$ 与其投影 的欧几里得 长度 $\pi \circ \gamma$ 在 $\mathbb{R}^2$ (参见 [HZ15，命题 1。1] 有关次黎曼距离下的类似结论， d_{cc}以及 [LN18，下文命题 6。2], [Hak20，引理 5。1] 或 [KN10，命题 2。1] 有关不等式 $d \leq d_{cc}$）。

现在回顾定理 ω 中迹为 Γ 的曲线构造1.4的主要步骤，因为我们将在论证中用到这些步骤（有关构造的更多细节，参见 [Jui10]）。令

$$\vartheta_n := \frac{C_0}{n} \tag{4.1}$$

为一个角度序列，其中常数 C_0 选取得足够小（我们将假设 $C_0 \leq 0.2$如原始构造中所述，并指出所有对 C_0 提出额外要求的地方）。首先定义平面曲线 $\mathbb{R}^2$中的一个序列 $(\omega_n^{\mathbb{C}})_{n\in\mathbb{N}}$。曲线$\omega_0^{\mathbb{C}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ 就是连接点 $(-1,\ 0)$ 和 $(1,\ 0)$ 的线段的常速参数化。每条曲线 $\omega_n^{\mathbb{C}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ 都是一条折线，由 4^n 条长度相同的线段组成，长度为 l_n，并以恒定速度参数化。归纳地，曲线$\omega_{n+1}^{\mathbb{C}}$ 由 $\omega_n^{\mathbb{C}}$ 得到：将 $\omega_n^{\mathbb{C}}$ 中的每条线段替换为一条多边形曲线（保持相同的起点和终点），该曲线由四条长度为 $l_{n+1} = {}_4{}^{l_n}{}_{\text{余弦}\,\vartheta_{n+1}}$ 的新线段组成，并与原线段形成角度 ϑ_{n+1}。

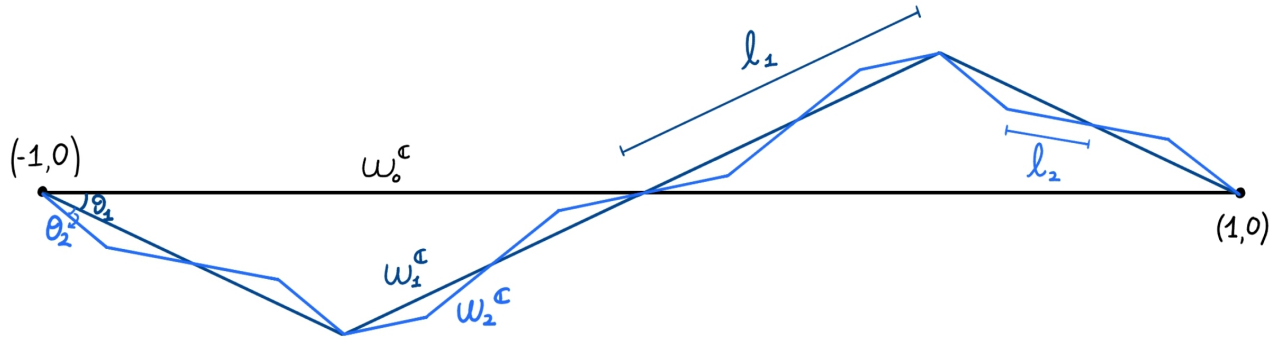


FIGURE 1. 曲线 ω 的构造

注意，根据构造，

$$2 \cdot 4^{-n} \leq l_n \leq 2^{-n+1} \text{ for every } n \geq 0. \tag{4.2}$$

Jui10 [Jui10，命题 3.1 和引理 3.2] 曲线序列 $(\omega_n^{\mathbb{C}})_n$一致收敛到一条长度为 $\omega^{\mathbb{C}}$ 的 Lipschitz 曲线，$L \leq 2.4$其参数化方式仍为恒定速度。事实上，[Jui10，引理 3.2]的证明表明

$$L \leq 2 \cdot \exp(0.08) \leq 2.2. \tag{4.3}$$

此外

$$L = \lim_{n\to\infty} 4^n l_n = \sup_n 4^n l_n, \tag{4.4}$$

其中 $4^n l_n$ 表示曲线 $\omega_n^{\mathbb{C}}$ 的长度。

最后，令 $\omega\colon [0,1] \to \mathbb{H}^1$ 为曲线 $\omega^{\mathbb{C}}$ 从 $(-1, 0, 0)$ 出发的水平提升。我们将从同一点出发的 $\omega_n^{\mathbb{C}}$ 的水平提升记为 ω_n。注意，曲线 ω 的海森堡长度仍为 L，而曲线 ω_n 的海森堡长度为 $4^n l_n$。根据 [Jui10，引理 3.3]，对每个 $n \leq m$，曲线 ω_n 和 ω_m 在形如 $\frac{\sigma}{4^n}$ 的每个参数点处重合，其中 $\sigma = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 4^n$：对于曲线 $\omega_n^{\mathbb{C}}$ 和 $\omega_m^{\mathbb{C}}$，这一点显而易见；对于提升后的曲线，这一点同样成立，因为 $\omega_n^{\mathbb{C}}$ 和 $\omega_m^{\mathbb{C}}$ 在区间 $[\frac{\sigma}{4^n}, \frac{\sigma+1}{4^n}]$ 上围成的有向面积相同；请回顾定义 2.2 下方的注释。此外，$\omega_n \to \omega$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。[Jui10]，中并未明确说明这一点，但根据一致收敛 $\omega_n^{\mathbb{C}} \to \omega^{\mathbb{C}}$、$\omega_n$ 的水平性以及导数一致有界 $|\dot{\omega}_n^{\mathbb{C}}| \leq L_n \leq L$，可由阿泽拉–阿斯科利定理推出。将 ω 的支撑集记为 Γ，我们的主要目标现在是证明 $\Gamma \notin \mathrm{GLem}(\beta_1, \nu_1, 2)$，见定理 4.4。

我们首先证明 ω 是单射：同样的论证也用于证明$\Gamma = \omega([0,1])$的 1-正则性（相对于 $\mathbb{H}^1$中的 Kor´anyi 距离）：

定理 m 4.2. 曲线 $\omega^{\mathbb{C}}$（因此 ω 也）是单射的，并且 Γ 在 $(\mathbb{H}^1, d)$ 中是 *1*-正则的。

证明。 单射性的证明依赖于以下断言：

断言。设 $p=\omega^{\mathbb{C}}(\sigma/4^n)$，其中某个 $\sigma=0,\mathbf{1},\dots,4^n$。那么

$$B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\setminus\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)=\emptyset. \tag{4.5}$$

现在假设该断言成立，并证明 $\omega^{\mathbb{C}}$ 是单射的。设 $0\le a<b\le 1$，并选取 $n\in\mathbb{N}$,$\sigma=0,\mathbf{1},\dots,4^n$，使得

$$\left|a-\frac{\sigma}{4^n}\right|\le\frac{1}{2\cdot 4^n} \tag{4.6}$$

and

$$\left|b-\frac{\sigma}{4^n}\right|>\frac{1}{4^n}. \tag{4.7}$$

这总是可能的，因为可以将 n 选得足够大，使得

$$|a-b|>\frac{3}{2\cdot 4^n}$$

随后选取 $\sigma=0,1,\dots,4^n$ 使得（4.6）成立。由三角不等式，（4.7）也成立。由（4.6）可得

$$\left|\omega^{\mathbb{C}}(a)-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{\sigma}{4^n}\right)\right|\le L\left|a-\frac{\sigma}{4^n}\right|\le L\,\frac{1}{2\cdot 4^n}\overset{(4.3)}{\le}\frac{2.4}{2\cdot 4^n}=0.6\frac{2}{4^n}\overset{(4.2)}{\le}0.6\,l_n. \tag{4.8}$$

因此 $\omega^{\mathbb{C}}(a)\in B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)$。另一方面，（4.7）意味着 $b\in[0,1]\setminus[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}]$。因此，该断言蕴含 $\omega^{\mathbb{C}}(b)\notin B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)$，特别地，我们推出 $\omega^{\mathbb{C}}(a)\neq\omega^{\mathbb{C}}(b)$，从而证明了 (以及显然的 ω) 的单射性。

假设该断言成立，我们现在证明 $\omega([0,1])$ 是 1-正则的。现在固定 $x=(z,\ t)\in\omega([0,1])$ 和 $r>0$。为了证明上 1-正则性，我们可以假设 $r<1/20$，否则可使用简单估计

$$\mathcal{H}^1\left(B(x,r)\cap\omega\left([0,1]\right)\right)\le L\le 20L\,r.$$

对于 $r<1/20$，选取 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $l_{n+1}/40\le r<l_n/40$。由 $\omega^{\mathbb{C}}$ 的 L-Lipschitz 连续性，存在 $\sigma=0,\ \mathbf{1},\ \dots 4^n$ 使得 $|z-p|\le\frac{L}{2\cdot 4^n}$，其中 $p=\omega^{\mathbb{C}}(\sigma/4^n)$。特别地，

$$|z-p|\le\frac{L}{2\cdot 4^n}\overset{(4.3)}{\le}\frac{2.2}{2\cdot 4^n}=\frac{11}{20}\frac{2}{4^n}\overset{(4.2)}{\le}\frac{11}{20}l_n.$$

因此，若 $z'\in B_{\mathrm{Eucl}}(z,\ r)$，则

$$|z'-p|\le|z'-z|+|z-p|\le r+\tfrac{11}{20}l_n\le\left(\tfrac{1}{40}+\tfrac{11}{20}\right)l_n\le 0.6\,l_n.$$

这就证明了 $B_{\mathrm{Eucl}}(z,\ r)\subseteq B_{\mathrm{Eucl}}(p,\ 0.6\,l_n)$。此外，(4.5) 蕴含

$$B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\right)\subseteq\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right). \tag{4.9}$$

综上所述，这表明

$$\begin{aligned}\pi\left(B(x,r)\right)\cap\pi\left(\omega([0,1])\right)&=\pi\left(B(x,r)\right)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\right)=B_{\mathrm{Eucl}}(z,r)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\right)\\&=B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\right)\overset{(4.9)}{=}\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right).\end{aligned}$$

因此，$\pi(B(x,\ r)\cap\omega([0,1]))\subset\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)$。$\omega^{\mathbb{C}}$ 的单射性进而意味着

$$B(x,r)\cap\omega([0,1])\subset\omega\left(\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right). \tag{4.10}$$

此外，b　由 L的-Lipschitz 连续性 $\omega^{\mathbb{C}}$ 以及与（4.8）中相同的估计，我们得到

$$\mathcal{H}^1_{\mathrm{Eucl}}\left(\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\right)\le L\,\frac{2}{4^n}\overset{(4.2),(4.3)}{\le}2.4\,l_n. \tag{4.11}$$

其上 1-正则性 $\omega([0,1])$ 随即成立，因为根据（4.10）以及曲线 ω 的水平性，

$$\mathcal{H}^1(B(x,r)\cap\omega([0,1]))\le\mathcal{H}^1\left(\omega\left(\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\right)=\mathcal{H}^1_{\mathrm{Eucl}}\left(\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\right)$$
$$\overset{(4.11)}{\le}2.4\cdot4\cdot40\,r.$$

$\omega([0,1])$ 的下正则性显而易见，因为它是一个连通集。 □

断言 (4.5) 的证明。 我们通过对 n 归纳来证明该断言。首先证明当 $n=1$ 时结论成立。由于 $\omega^{\mathbb{C}}$ 是 L-Lipschitz 的，因此 $\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\setminus\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)$ 位于 $\frac{L}{16}$ 的 -邻域内 —

$$E:=\left\{\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{\tau}{16}\right):\tau=0,\dots,4\sigma-4\ \text{ or }\ \tau=4\sigma+4,\dots,16\right\}.$$

因此，如果 $q\in\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\setminus\left[\frac{\sigma-1}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)$，那么存在 $\bar q\in E$使得 $|q-\bar q|\le\frac{L}{16}$。接着 —

$$\left|q-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{\sigma}{4}\right)\right|\ge\left|\bar q-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{\sigma}{4}\right)\right|-|q-\bar q|\ge l_1-\frac{L}{16}\ge l_1-\frac{2.4}{16}. \tag{4.12}$$

这里我们利用了以下事实：$\left|\bar q-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{\sigma}{4}\right)\right|\ge l_1$：只要在（ C_0（因此角度 ϑ_1）足够小，则（4.1）中的常数 $0\le t_1<t_2<t_3\le16$ 取为自然数，就有

$$\left|\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_1}{16}\right)-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_2}{16}\right)\right|\le(t_2-t_1)\ell_2 \tag{4.13}$$
$$\overset{(4.1)}{\le}(1+t_2-t_1)\cdot\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)\ell_2$$
$$\le(t_3-t_1)\cdot\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)\ell_2\le\left|\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_1}{16}\right)-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_3}{16}\right)\right|.$$

最后一个不等式成立，因为如果 ϑ_1 和 ϑ_2 取得足够小，那么将 $\omega_2^{\mathbb{C}}$投影到 $\omega^{\mathbb{C}}(0)$ 与 $\omega^{\mathbb{C}}(1)$ 之间的线段上，会以如下意义保持顺序：若 $\tau<\tau'$，则第一坐标满足 $(\omega_2)_1^{\mathbb{C}}(\tau/16)<(\omega_2)_1^{\mathbb{C}}(\tau'/16)$，此外，$\omega_2^{\mathbb{C}}$中的各条线段投影后所得区间的长度至少为 $\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)\ell_2$。

由于 $\vartheta_n\le\vartheta_1$，与（4.13）类似的结论也适用于未来各代的“包”，即 $\left|\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_1}{4^n}\right)-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_2}{4^n}\right)\right|\le\left|\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_1}{4^n}\right)-\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{t_3}{4^n}\right)\right|$ 对每个 $n\ge2$ 以及 $0\le\varrho\le t_1<t_2<t_3\le16$（$\varrho+1$），当 $\varrho=0,1,\dots,4^{n-2}-1$。回到（4.12），由构造可知 $l_1\ge\frac12$，因此 $l_1-\frac{2.4}{16}\ge0.7l_1>0.6\,l_1$。由此得出 $q\notin B_{\mathrm{Eucl}}(\omega^{\mathbb{C}}(\sigma/4),0.6l_1)$，证毕。

现在我们来处理归纳步骤。设 $p=\omega^{\mathbb{C}}(\sigma/4^n)$，其中 $\sigma=0,1,\dots,4^n$。根据 σ 的取值，我们分两种情况讨论。若 $\sigma=4\sigma_0$，其中 $\sigma_0=0,1,\dots,4^{n-1}$，则可写作$p=\omega^{\mathbb{C}}(\sigma_0/4^{n-1})$。由归纳假设，显然 $B_{\mathrm{Eucl}}(p,\,0.6\,l_n)\subset B_{\mathrm{Eucl}}(p,\,0.6\,l_{n-1})$，因此我们得到

$$B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\setminus\left[\frac{\sigma_0-1}{4^{n-1}},\frac{\sigma_0+1}{4^{n-1}}\right]\right)=\emptyset.$$

注意到 $\left[\frac{\sigma_0-1}{4^{n-1}},\frac{\sigma_0+1}{4^{n-1}}\right]=\left[\frac{\sigma-4}{4^n},\frac{\sigma+4}{4^n}\right]$：因此我们只需证明

$$\begin{cases}B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma-4}{4^n},\frac{\sigma-1}{4^n}\right]\right)=\emptyset\\ B_{\mathrm{Eucl}}(p,0.6\,l_n)\cap\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma+1}{4^n},\frac{\sigma+4}{4^n}\right]\right)=\emptyset.\end{cases}$$

这些性质可以完全按照 $n=1$ 情形中的相同论证来证明，将l_1 替换为 l_n ，并将 16 替换为 4^{n+1}，使用 $l_n \geq 2/4^n$ （4.2）中的关系。

如果 $\sigma \in \{0,1,\dots,4^n\}$ in $p=\omega^{\mathbb{C}}(\sigma/4^n)$ 不是 4 的整数倍，则选取 σ_0 =0，1，..... 4^{n-1}，使得 $\frac{\sigma_0}{4^{n-1}} < \frac{\sigma}{4^n} < \frac{\sigma_0+1}{4^{n-1}}$. 特别地，$\sigma \in \{4\sigma_0+1, 4\sigma_0+2, 4\sigma_0+3\}$。我们现在的目标是证明

$$B_{\mathrm{Eucl}}(p, 0.6\, l_n) \cap \omega^{\mathbb{C}}\left([0,1] \setminus \left[\frac{\sigma_0}{4^{n-1}}, \frac{\sigma_0+1}{4^{n-1}}\right]\right) = \emptyset. \tag{4.14}$$

一旦完成这一步，我们再次按照前一种情形中的论证即可得出结论。令$p_0 := \omega^{\mathbb{C}}(\frac{\sigma_0}{4^{n-1}})$ 和 $p_1 := \omega^{\mathbb{C}}(\frac{\sigma_0+1}{4^{n-1}})$。我们首先证明

$$B_{\mathrm{Eucl}}(p, 0.6\, l_n) \subseteq B_{\mathrm{Eucl}}(p_0, 0.6\, l_{n-1}) \cup B_{\mathrm{Eucl}}(p_1, 0.6\, l_{n-1}). \tag{4.15}$$

例如，假设 $\sigma = 4\sigma_0+1$。那么，如果 $q \in B_{\mathrm{Eucl}}(p,\ 0.6\, l_n)$,

$$|q-p_0| \leq |q-p| + |p-p_0| \leq 0.6\, l_n + l_n = 1.6\, \frac{l_{n-1}}{4\cos\vartheta_n} < 0.6\, l_{n-1}.$$

若反之 $\sigma = 4\sigma_0+3$，则我们以同样的方式论证，只需用 p_1 替代 p_0。因此，只剩下讨论 $\sigma = 4\sigma_0+2$ 的情形。在这种情况下， $|p_0-p| = |p_1-p| = l_{n-1}/2$。考虑 $q \in B_{\mathrm{Eucl}}(p,\ 0.6\, l_n)$, 并假设例如 $|q-p_0| \leq |q-p_1|$ （另一种情况类似）。根据勾股定理

$$|q-p_0| \leq \sqrt{(0.5\, l_{n-1})^2 + (0.6\, l_n)^2} = \left(0.25 + \frac{0.36}{16\cos^2\vartheta_n}\right)^{\frac{1}{2}} l_{n-1} \leq 0.6\, l_{n-1},$$

证明（4.15）。现在，我们通过证明（4.14）来完成论证。

令 $q \in B_{\mathrm{Eucl}}(p,\ 0.6\, l_n)$。由（4.15），$q \in B_{\mathrm{Eucl}}(p_i,\ 0.6\, l_{n-1})$, 其中 $i \in \{0,1\}$。不失一般性，设 $i=0$。于是，由归纳假设，$q \notin \omega^{\mathbb{C}}([0,1]\setminus[\frac{\sigma_0-1}{4^{n-1}}, \frac{\sigma_0+1}{4^{n-1}}])$。为了证明（4.14），接下来需要证明 $q \notin \omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma_0-1}{4^{n-1}}, \frac{\sigma_0}{4^{n-1}}\right]\right)$。这可通过与前面类似的论证得到：由于 $\omega^{\mathbb{C}}$ 是 L-Lipschitz， $\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma_0-1}{4^{n-1}}, \frac{\sigma_0}{4^{n-1}}\right]\right)$ 位于 $\frac{L}{4^{n+1}}$-邻域内

$$E_0 := \left\{\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{16\sigma_0-16}{4^{n+1}}\right), \omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{16\sigma_0-15}{4^{n+1}}\right), \dots, \omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{16\sigma_0}{4^{n+1}}\right)\right\}.$$

用反证法，假设对于某个 $s \in [\frac{\sigma_0-1}{4^{n-1}}, \frac{\sigma_0}{4^{n-1}}]$，有 $q = \omega^{\mathbb{C}}(s)$。那么存在 $\bar{q} \in E_0$使得 $|q-\bar{q}| \leq \frac{L}{4^{n+1}}$。因此

$$|q-p| \geq |p-\bar{q}| - |q-\bar{q}| \geq l_n - \frac{L}{4^{n+1}} \geq l_n - \frac{2.4}{4^{n+1}}. \tag{4.16}$$

事实 $|p-\bar{q}| \geq l_n$ 可由 (4.12) 后的类似观察得出，只要 C_0 取得足够小。然而，以前我们只需考虑一个“组”中的点，现在则需要对两个连续的“组”得出相同结论。为此，我们还利用了以下事实： $\omega^{\mathbb{C}}_{n-1}$ 的两个连续线段之间的角度总是大于 $\pi - 2\vartheta_1$，通过选取 C_0 足够小，可以使其非常接近 π ； 回顾 (4.1)。

由于 $l_n \geq 2\cdot 4^{-n}$，可得 $l_n - \frac{2.4}{4^{n+1}} \geq 0.7\, l_n > 0.6\, l_n$，由 (4.16) 可推出$q \notin B_{\mathrm{Eucl}}(p,\ 0.6\, l_n)$，矛盾。 □

接下来，我们旨在证明， $\Gamma = \omega([0,1])$ 无法被水平直线充分逼近，因此不满足 GLem(β_1, ν_1, 2)。为此，我们将使用以下关于 $\mathbb{H}^1$ 中两点之间距离的标准估计，该估计以这两点投影之间的欧几里得距离，以及连接它们的任意水平曲线所围成的面积为依据。

引理 4.3。 设 $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{H}^1$ 是一条连接 $p_1=\gamma(a)$ 与 $p_2=\gamma(b)$的水平曲线。那么

$$d(p_1,p_2)\lesssim |\pi(p_1)-\pi(p_2)|+\sqrt{|A_\gamma|}, \tag{4.17}$$

其中， A_γ 表示由曲线 $\pi\circ\gamma$ 与连接 $\pi\left(p_2\right)$ 和 $\pi\left(p_1\right)$ 的线段共同围成的代数面积。

证明。 由于不等式（4.17）两边在左平移下均不变，不妨设 $p_1=\gamma(a)=0$。由于

$$d(\gamma(b),0)\lesssim |\pi(\gamma(b))|+\sqrt{|\gamma_3(b)|}$$

并且，由于 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 的水平性，几乎处处有 $\dot\gamma_3=\frac{1}{2}(\gamma_1\dot\gamma_2-\gamma_2\dot\gamma_1$，故结论成立，参见 [CDPT07, (2.22)] 或 [Jui10, (1.1)]。 □

定理 4.4. $\Gamma\notin \mathrm{GLem}(\beta_{1,\mathcal{V}_1},2)$。

证明。 我们将证明

$$B^{\Delta}_{1,1}(\Gamma):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-k}\sum_{x\in\Delta_k}\beta_{1,\mathcal{V}_1}(x,A\,2^{-k})^2=+\infty, \tag{4.18}$$

其中 $\Delta=(\Delta_k)_k$ 是一个二进网，且 $B^{\Delta}_{1,1}$ 按（3.17）中的定义定义，所用常数为 $A\geq 5$；参见 [Jui10, （0.1）]。于是结论由引理3.26推出。注意，选择指标 k 是为了使记号与 [Jui10] 中的记号统一，不应将其与 Γ的维数混淆，后者为 1。为了验证（4.18），我们需要分别为 $\mathrm{card}(\Delta_k)$ 和 $\beta_{1,\mathcal{V}_1}(x,A\,2^{-k})$、 $x\in\Delta_k$给出合适的下界。

文献 [Jui10, §4] 中证明了 $\mathrm{card}(\Delta_k)\geq 2^k$, $k\in\mathbb{N}$。此外，文献 [Jui10, （4.1）], 中推导出了 $\beta_{\infty,\mathcal{V}_1}(x,A\,2^{-k})$ 的一个下界。我们需要验证 $\beta_{1,\mathcal{V}_1}(x,A\,2^{-k})$ 的类似下界，这需要更精细的分析：我们必须证明， $\Gamma\cap B(x,A\,2^{-k})$ 不仅在一个点处，而且在一个具有较大 $\mathcal{H}^1$-测度的点集上，都与任意水平直线保持较大距离。

在 [Jui10, 第 4] 中证明了，取 $n=\lceil k/2\rceil$, 对于每个 $x\in\Delta_k$ 都存在$\sigma\in\{0,1,\dots,4^n-1\}$ 使得

$$\omega\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\subseteq B(x,A\,2^{-k}). \tag{4.19}$$

然而，以下结论也成立：

$$\mathcal{H}^1(\Gamma\cap B(x,A\,2^{-k}))\lesssim\mathcal{H}^1\left(\omega\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\right). \tag{4.20}$$

事实上，一方面，根据定理 4.2 中确立的 Γ 的 1-正则性， $\mathcal{H}^1(\Gamma\cap B(x,A\,2^{-k}))\lesssim 2^{-k}$。另一方面，由于 $\pi\colon(\mathbb{H}^1,d)\to(\mathbb{R}^2,d_e)$, $\pi(x,y,t):=(x,y)$ 是一个 1-利普希茨映射，根据 ω 的构造，我们可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1\left(\omega\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\right)&\geq\mathcal{H}^1_{\mathrm{Eucl}}\left(\pi\left(\omega\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\right)\right)\\&=\mathcal{H}^1_{\mathrm{Eucl}}\left(\omega^{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)\right)\\&=\frac{1}{4^n}\mathcal{H}^1_{\mathrm{Eucl}}\left(\omega^{\mathbb{C}}\left([0,1]\right)\right)\sim 2^{-k}.\end{aligned}$$

因此可得（4.20）。回顾（4.1）之后所述曲线的构造。按照 [Jui10], 中的做法，我们利用 $\omega\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)$ 的相似变换对其进行缩放 $\mathbb{H}^1$ （见 [Jui10, 第 1 节。3]），从而得到另一条水平曲线 Γ_n， 它经过由 $\Lambda_{\vartheta_{n+1}}$ 给出的子集(4.21

$$\left\{(-1,0,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\tan\vartheta_{n+1}}{2},\frac{\tan\vartheta_{n+1}}{4}\right),\left(0,0,\frac{\tan\vartheta_{n+1}}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\tan\vartheta_{n+1}}{2},\frac{\tan\vartheta_{n+1}}{4}\right),(1,0,0)\right\}$$

并且与由 Γ得到的曲线重合，只是使用的角度序列为 $(\vartheta_{n+m})_{m\geq 1}$。$\Gamma_n$ 与 $\omega\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)$ 之间的缩放因子为 $l_n/2$。记 $\vartheta\equiv\vartheta_{n+1}$，~~并令~~

$$D^1_\vartheta := \inf_{\ell\in\mathcal{V}_1} \fint_{\Gamma_n} d(y,\ell)\,d\mathcal{H}^1(y).$$

简单计算可得

$$\begin{aligned}\beta^\Gamma_{1,\mathcal{V}_1}(x,A\,2^{-k}) &\sim \frac{1}{2^{-k}}\inf_{\ell\in\mathcal{V}_1}\fint_{\Gamma\cap B(x,A\,2^{-k})} d(y,\ell)\,d\mathcal{H}^1(y)\\ &\overset{(4.19),(4.20)}{\gtrsim} \frac{1}{2^{-k}}\inf_{\ell\in\mathcal{V}_1}\fint_{\omega\left(\left[\frac{\sigma}{4^n},\frac{\sigma+1}{4^n}\right]\right)} d(y,\ell)\,d\mathcal{H}^1(y)\\ &= \frac{1}{2^{-k}}\frac{l_n}{2}D^1_\vartheta \gtrsim D^1_\vartheta.\end{aligned}$$

其中我们使用了 Γ的 1-正则性、（4.19）和（4.20）、距离不变性以及 $l_n\geq 4^{-n}\gtrsim 2^{-k}$这一事实，回忆（4.2）。

为了得出（4.18），我们需要对 D^1_ϑ给出一个足够大的下界，这正是下面断言的内容。

断言 1： $D^1_\vartheta\gtrsim\sqrt{\vartheta}$。

假设断言 1 成立，我们现在可以推出

$$B^\Delta_{1,1}(\Gamma) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k}\sum_{x\in\Delta_k}\beta_{1,\mathcal{V}_1}(x,A\,2^{-k})^2 \gtrsim \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\,2^k\,(D^1_\vartheta)^2 \gtrsim \sum_{k\in\mathbb{N}}\vartheta_{\lceil k/2\rceil+1} \overset{(4.1)}{\sim} \sum_{k\in\mathbb{N}}\tfrac{1}{\lceil k/2\rceil+1} = +\infty.$$

~~剩下的就是证明断言 1，可以表述如下：存在一个常数 $K>0$（不依赖于 n，尤其不依赖于 $\vartheta=\vartheta_{n+1}$），使得对所有 $\ell\in\mathcal{V}_1$，都有

$$\fint_{\Gamma_n} d(y,\ell)\,d\mathcal{H}^1(y)\geq \widetilde{K}\sqrt{\vartheta}.$$

根据 [Jui10，命题 4.1]，存在一个常数 $K>0$，使得对任意 $\ell\in\mathcal{V}_1$ 和任意 $0<n\in\mathbb{N}$，都存在 $\bar{y}\in\Lambda_\vartheta$（其中 Λ_ϑ 如 (4.21) 中所定义），满足$d(\bar{y},\ell)\geq K\sqrt{\vartheta}$。令 $0<n\in\mathbb{N}$ 和 $\ell\in\mathcal{V}_1$。我们要证明，存在一个子集 $N\subseteq\Gamma_n$，满足 $\mathcal{H}^1(N)\geq c\,\mathcal{H}^1(\Gamma_n)$，其中常数 c 不依赖于 ϑ 和 ℓ，使得

$$d(y,\ell)\geq\frac{K}{4}\sqrt{\vartheta}\quad\text{for every } y\in N. \tag{4.22}$$

若此事可行，则通过简单的估计即可得出结论：

$$\begin{aligned}\fint_{\Gamma_n} d(y,\ell)\,d\mathcal{H}^1(y) &= \frac{1}{\mathcal{H}^1(\Gamma_n)}\int_{\Gamma_n} d(y,\ell)\,d\mathcal{H}^1(y)\geq\frac{1}{\mathcal{H}^1(\Gamma_n)}\int_N d(y,\ell)\,d\mathcal{H}^1(y)\\ &\geq\frac{c}{\mathcal{H}^1(N)}\int_N\frac{K}{4}\sqrt{\vartheta}\,d\mathcal{H}^1(y)=\frac{cK}{4}\sqrt{\vartheta}=:\widetilde{K}\sqrt{\vartheta}.\end{aligned}$$

因此，接下来只需构造具有上述性质的集合 N。

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，令$\Gamma_{n,\,1}$为按 $\mathbb{H}^1\equiv\mathbb{R}^3$ 的第一坐标递增顺序连接 Λ_ϑ中各点的多边形曲线（注意不要与 Γ的缩放副本 Γ_n 混淆）。注意，$\Gamma_{n,\,1}$ 是一条水平曲线。现在我们证明，存在一个子集$M\subseteq\Gamma_{n,\,1}$，满足 $\mathcal{H}^1(M)\geq c'\mathcal{H}^1(\Gamma_{n,\,1})$，并且

$$d(y,\ell)\geq\frac{K}{2}\sqrt{\vartheta}\quad\text{for every } y\in M. \tag{4.23}$$

然后，我们将在 Γ_n上构造相应的集合 N。

为定义集合 $M\subset\Gamma_{n,\,1}$，我们采用 [Jui10]中的思想。我们将 Λ_ϑ

按照上述相同的顺序记为 $\{A, B, C, D, E\}$。（我们回想一下，“A”在（4.18）中也曾表示一个常数，但下文中不应造成混淆。）根据平面角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$（$\ell^{\mathbb{C}}$ 与直线 $B^{\mathbb{C}}D^{\mathbb{C}}$ 之间）的大小，我们分三种情形讨论，其中 $\ell^{\mathbb{C}}$，$B^{\mathbb{C}}$，$D^{\mathbb{C}}$ 分别是固定水平直线 ℓ 及点 B，$D \in \mathbb{H}^1$ 在投影 π 下的像，见图 2。

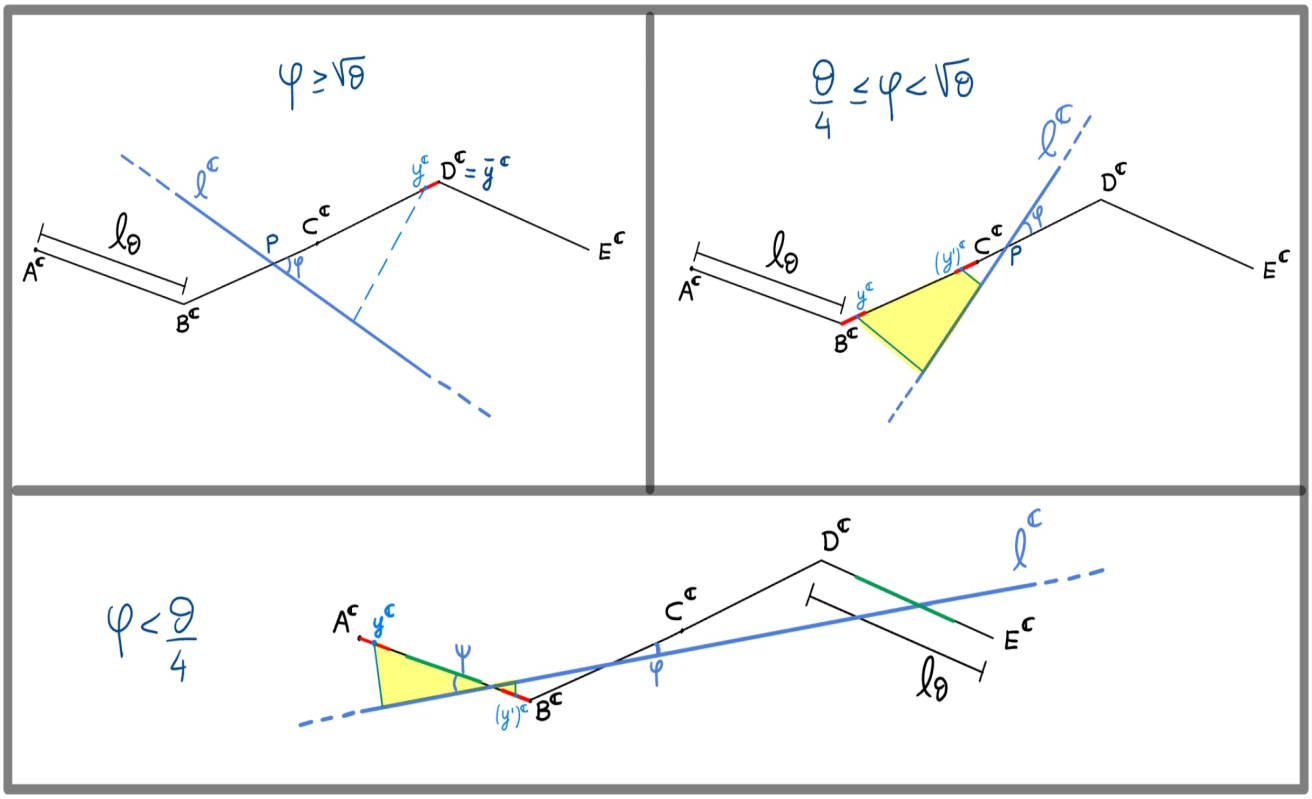


FIGURE 2. 下文描述的三种情形

- 若 $\varphi \geq \sqrt{\vartheta}$，则 $\ell^{\mathbb{C}}$ 与 $B^{\mathbb{C}}D^{\mathbb{C}}$ 相交于唯一一点 P。于是我们可以选取

$$\bar{y} = \begin{cases} D & \text{if } d_{\mathrm{Eucl}}(P, D^{\mathbb{C}}) \geq d_{\mathrm{Eucl}}(P, B^{\mathbb{C}}) \\ B & \text{if } d_{\mathrm{Eucl}}(P, D^{\mathbb{C}}) < d_{\mathrm{Eucl}}(P, B^{\mathbb{C}}) \end{cases}$$

在这种情况下，我们令

$$M := \{y \in C\bar{y} : d(y, \bar{y}) \leq l_\vartheta/10\},$$

其中 l_ϑ 是 Λ_ϑ 中两个相邻点之间的距离（同时也是 $\mathbb{R}^2$ 上对应投影之间的欧几里得距离）。

注意，$\mathcal{H}^1(M) = \frac{1}{40}\mathcal{H}^1(\Gamma_{n,1})$。此外，若 $y \in M$，由简单的三角学可得

$$d(y, \ell) \geq d_{\mathrm{Eucl}}(y^{\mathbb{C}}, \ell^{\mathbb{C}}) = d_{\mathrm{Eucl}}(P, y^{\mathbb{C}}) \sin\varphi \geq \frac{1}{2} l_\vartheta \sin\sqrt{\vartheta},$$

由 K 在 [Jui10 中的命题 4，1]，可知其大于 $\frac{1}{2}K\sqrt{\vartheta}$。

- 如果 $\frac{\vartheta}{4} \leq \varphi < \sqrt{\vartheta}$，那么线 $\ell^{\mathbb{C}}$ 至少不与线段 $B^{\mathbb{C}}C^{\mathbb{C}}$ 或 $C^{\mathbb{C}}D^{\mathbb{C}}$ 中的一条相交。不失一般性，我们可以假设 $\ell^{\mathbb{C}}$ 与 $B^{\mathbb{C}}C^{\mathbb{C}}$ 不相交。对于每个 $y \in BC$，我们令 y' 为 BC 上唯一满足 $d(y, B) = d(y', C)$ 的点。这也意味着

$$d_{\mathrm{Eucl}}(y^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}}) = d(y, B) = d(y', C) = d_{\mathrm{Eucl}}((y')^{\mathbb{C}}, C^{\mathbb{C}}).$$

现在固定满足 $d(y,B) \le l_\vartheta/10$ 的 $y \in BC$，并考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的欧几里得梯形 T，其顶点为点 $y^{\mathbb{C}}$、$(y')^{\mathbb{C}}$ 以及它们在 $\ell^{\mathbb{C}}$ 上对应的投影。于是，经过初等几何计算可得

$$\text{Area}\,(T) \ge \frac{1}{8} l_\vartheta^2 \sin\varphi\cos\varphi,$$

由此，仿照 [Jui10] 中命题 4.1 的证明可得 $\sqrt{\text{面积}\,(T)} \ge \frac{\sqrt{\vartheta}}{8\sqrt{\pi}}$.应用 [Jui10 引理 2。5]（特别是参见该证明的第二行），根据 y 和 y' 位于同一条水平直线 BC这一事实，我们推得

$$d(y,\ell) + d(y',\ell) \ge \sqrt{\text{Area}\,(T)} \ge \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sqrt{\vartheta}.$$

因此，存在一点 $p = p(y) \in \{y, y'\}$ 使得

$$d(p,\ell) \ge \sqrt{\text{Area}\,(T)} \ge \frac{1}{16\sqrt{\pi}}\sqrt{\vartheta} \ge \frac{K}{2}\sqrt{\vartheta}, \tag{4.24}$$

通过选择 $K \le \frac{1}{8\sqrt{\pi}}$ 若定义

$$M := \{p(y) : y \in BC,\, d(y,B) \le l_\vartheta/10\},$$

那么 $\mathcal{H}^1(M) = \frac{1}{10} l_\vartheta = \frac{1}{40}\mathcal{H}^1(\Gamma_{n,\,1})$ 并且，根据 (4.24)，$d(p,\ \ell) \ge \frac{K}{2}\sqrt{\vartheta}$对每个 $p \in M$均成立。

- 若 $\varphi < \frac{\vartheta}{4}$，则根据 [Jui10，引理 4.2]，，直线 $\ell^{\mathbb{C}}$不可能同时与 $A^{\mathbb{C}}B^{\mathbb{C}}$ 和 $D^{\mathbb{C}}E^{\mathbb{C}}$的中心线段相交。举例来说，假设 $\ell^{\mathbb{C}}$ 不与 $A^{\mathbb{C}}B^{\mathbb{C}}$的中心线段相交。令 ψ 为 $\ell^{\mathbb{C}}$ 与直线 $A^{\mathbb{C}}B^{\mathbb{C}}$ 之间的正角：Juillet 已证明 $\frac{7\vartheta}{4} \le \psi \le \frac{\pi}{4}$。令 P 为直线 $A^{\mathbb{C}}B^{\mathbb{C}}$ 与 $\ell^{\mathbb{C}}$ 的交点，并举例假设 d欧几里得$(P, B^{\mathbb{C}}) \le d$欧几里得$(P, A^{\mathbb{C}})$。与前一种情形类似，对每个 $y \in AB$，令 y' 表示同一线段上满足 $d(y,A) = d(y',B)$ 的唯一一点。固定满足 $d(y, A) \le l_\vartheta/10$的 $y \in AB$，并令 T 为 $\mathbb{R}^2$ 中的欧几里得梯形，其顶点为点 $y^{\mathbb{C}}$、$(y')^{\mathbb{C}}$ 及它们在 $\ell^{\mathbb{C}}$上的投影。这个梯形可能会自相交。因此，沿用 Juillet 的相同策略，并利用 $d(y^{\mathbb{C}}, A^{\mathbb{C}}) = d(y,A) \le l_\vartheta/10$这一事实，可以估计其代数面积：

$$\begin{aligned}\text{Area}\,(T) &\ge \left(\frac{3}{4}l_\vartheta - \frac{1}{10}l_\vartheta\right)^2 \frac{\sin(2\psi)}{4} - \left(\frac{1}{4}l_\vartheta\right)^2 \frac{\sin(2\psi)}{4} \\ &= \frac{9}{25} l_\vartheta^2 \frac{\sin 2\psi}{4} \ge \frac{9}{400}\sin 2\psi \ge \frac{1}{4\cdot 32}\sin(2\psi).\end{aligned}$$

因此，使用与 [Jui10]中相同的估计，$\sqrt{\text{面积}\,(T)} \ge \frac{1}{2}\sqrt{\vartheta}\,\frac{7}{32\pi}$。应用同一篇论文中的引理 2.5，我们得出与 $\frac{\vartheta}{4} \le \varphi < \sqrt{\vartheta}$情形完全相同的结论。

总之，我们找到了一个集合 $M \subset \Gamma_{n,1}$，满足 $\mathcal{H}^1(M) \gtrsim \mathcal{H}^1(\Gamma_{n,1})$，且具有 (4.23) 中所要求的性质。现在我们利用 M 构造所需的集合 $N \subset \Gamma_n$，使其满足 $\mathcal{H}^1(N) \gtrsim \mathcal{H}^1(\Gamma_n)$，并具有性质 (4.22)。首先，我们需要引入一些记号。设 $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{H}^1$ 是从点 A出发的 Γ_n 的等速参数化。特别地，若 $\Psi : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{H}^1$表示将 $\omega([\frac{\sigma}{4^n}, \frac{\sigma+1}{4^n}])$ 映射到 Γ_n的相似变换，则 $\gamma_n(s) = (\Psi \circ \omega)(\frac{\sigma+s}{4^n})$。我们还定义 $\gamma_{n,i} : [0,1] \to \mathbb{H}^1$，其中 $i \in \mathbb{N}$，如下：

$$\gamma_{n,i}(s) := (\Psi \circ \omega_{n+i})\left(\frac{\sigma+s}{4^n}\right),$$

使得 $\Gamma_{n,i}$ 是 $\gamma_{n,i}$的支撑集。注意，$\gamma_{n,i}$ 和 γ_n 是水平曲线。具体而言，$\gamma_{n,1}\colon [0,1]\to\mathbb{H}^1$ 结果是从 A出发的 $\Gamma_{n,1}$ 的恒定速度参数化。若$y\in\Gamma_n$，我们将 $\Gamma_{n,i}$ 上对应于 y的点记作 $y_{(i)}$，也就是说

$$y_{(i)} := \gamma_{n,i}(\gamma_n^{-1}(y)). \tag{4.25}$$

回顾一下，ω (因此 γ_n) 根据定理 4.2是单射。我们的目标现在是估计 Γ_n 与 $\Gamma_{n、1}$之间的距离。更确切地说，对于固定的 $y\in\Gamma_n$，我们要估计 d(y、$y_{(1)}$)。回顾一下，$\gamma_{n、i}\to\gamma_n$ 一致地成立（因为 ω_n 和 ω也具有同样的性质），因此特别地，当 $i\to\infty$时，$y_{(i)}\to y$。因此

$$d(y,y_{(1)})\le\sum_{i=1}^{+\infty} d(y_{(i+1)},y_{(i)}).$$

右侧各项可借助以下结果进行估计

断言 2： 存在一个绝对常数 $C>0$，使得对每个 $0<i\in\mathbb{N}$ 和 $y\in\Gamma_n$，若 $d=d_{y,\ i}$ 定义为

$$\bar d := \bar d_{y,i} := \min\left\{\left|\gamma_n^{-1}(y)-\frac{\tau}{4^i}\right| : \tau=0,1,\dots,4^i\right\}, \tag{4.26}$$

那么 $d(y_{(i+1)}、\ y_{(i)})\le C\sqrt{\vartheta}\,\bar d\,L$，其中 L 是 $\omega^{\mathbb{C}}$ (以及 ω) 的长度，而 $y_{(i)}$、$y_{(i+1)}$ 与 (4.25) 中相同。特别地，有

$$d(y_{(i+1)},y_{(i)})\le\frac{C}{2^i}\sqrt{\vartheta}.$$

¯现在我们假设断言 2成立，并完成证明。选取 $i\ge 1$ 使得

$$\sum_{i>\bar i}^{+\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{K}{8\,C} \tag{4.27}$$

其中 K 和 C 如上所述。再固定 $0<\delta<\frac{1}{10}$，使其足够小，以满足 $\delta\,C\,L\le 3K/8$。定义 $F\subset\Gamma_n$ 为

$$F := \left\{ y\in\Gamma_n : |\gamma_n^{-1}(y)-\bar s|\le\delta\left(\frac14\right)^{\bar i} \text{ for some } \bar s\in\left\{0,\frac14,\frac12,\frac34,1\right\}\right\}.$$

若 $y\in F$和 $i\le\bar i$，则可得 $\bar d_{y,i}\le\delta\left(\frac14\right)^{\bar i}$。因此，由断言 2及最后的估计可得，

$$\begin{aligned} d(y,y_{(1)})\le\sum_{i=1}^{+\infty} d(y_{(i+1)},y_{(i)}) &= \sum_{i=1}^{\bar i} d(y_{(i+1)},y_{(i)}) + \sum_{i>\bar i}^{+\infty} d(y_{(i+1)},y_{(i)}) \\ &\le \sum_{i=1}^{\bar i} C\sqrt{\vartheta}\,\delta\left(\frac14\right)^{\bar i} L + \sum_{i>\bar i}^{+\infty} C\sqrt{\vartheta}\frac{1}{2^i} \\ &\le C\sqrt{\vartheta}\,L\,\delta\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac14\right)^i\right) + C\sqrt{\vartheta}\sum_{i>\bar i}^{+\infty}\frac{1}{2^i} \\ &\overset{(4.27)}{\le} \frac{3K}{8}\sqrt{\vartheta}\,\frac13 + C\sqrt{\vartheta}\frac{K}{8C} = \frac{K}{4}\sqrt{\vartheta}. \end{aligned}$$

最后，利用具有性质（ M 4.23）的集合，我们定义 $N\subset\Gamma_n$ 为

$$N := \{y\in F : y_{(1)}\in M\}.$$

然后，将前面的估计与（4.23）结合可得，对于每个 $y \in N$ 以及每个$\ell \in \mathcal{V}_1$,

$$d(y,\ell) \geq d(y_{(1)},\ell) - d(y,y_{(1)}) \geq \frac{K}{2}\sqrt{\vartheta} - \frac{K}{4}\sqrt{\vartheta} = \frac{K}{4}\sqrt{\vartheta},$$

如（4.22）所要求的。我们还需要证明，对于某个常数 c， $\mathcal{H}^1(N) \geq c\,\mathcal{H}^1(\Gamma_n)$。首先，根据定义，显然 $\gamma_n^{-1}(F)$ 与 $[0,1]$ 内 $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ 的 $\delta\left(\frac{1}{4}\right)^{\bar{i}}$-邻域重合。此外，注意，在下文讨论的三种情形中构造的集合 $M \subset \Gamma_{n,1}$（4.23）包含在线段中，并且还具有如下性质：对于每个 $\varepsilon < l_\vartheta/10$, M 都包含一个点，该点到线段两个端点之一的距离恰好为 ε （参见 M 的构造）。由于 $\gamma_{n,1}$ 以恒定速度参数化 $\Gamma_{n,1}$ ，因此 $\gamma_{n\,1,}^{-1}(M)$ 也具有相同的性质：存在 $\tau \in \{0,1,2,3\}$，使得对于每个 $\varepsilon < 1/40$，都存在 $s \in \gamma_{n\,1,}^{-1}(M)$，满足 $\left|s - \frac{\tau}{4}\right| = \varepsilon$ 或 $\left|s - \frac{\tau+1}{4}\right| = \varepsilon$。

由于 $\gamma_n^{-1}(N) = \gamma_n^{-1}(F) \cap \gamma_{n\,1,}^{-1}(M)$，由前述说明可推得

$$\mathcal{L}^1(\gamma_n^{-1}(N)) \geq \delta\left(\frac{1}{4}\right)^{\bar{i}}.$$

最后，由于 γ_n 以恒定速度参数化 Γ_n ，我们得出

$$\mathcal{H}^1(N) \geq \delta\left(\frac{1}{4}\right)^{\bar{i}} \mathcal{H}^1(\Gamma_n).$$

至此，断言 1 的证明完成，除断言 2 的证明外。为了完成定理 4.4的证明，尚需证明断言 2 成立。注意，断言的最后一部分可由以下事实推出：$\bar{d}\,L \leq \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4^i}\right) \cdot 4 \leq \frac{1}{2^i}$对每个 $0 < i \in \mathbb{N}$均成立。因此，要证明断言 2，只需证明对于 $y \in \overline{\Gamma}_n$ 和 $0 < i \in \mathbb{N}$,

$$d(y_{(i+1)}, y_{(i)}) \leq C\sqrt{\vartheta}\,\bar{d}\,L. \tag{4.28}$$

为了计算这个距离，我们使用引理 4.3。设 $\bar{\tau}$ 为定义（4.26）中达到 $\bar{d} = \bar{d}_{y\text{的最小值的取值},\,i}$。曲线 $\gamma_{n,\,i}$ 与 $\gamma_{n,\,i+1}$ 在 $\frac{\bar{\tau}}{4^i}$处重合：这由以下事实可知：

$$\gamma_{n,i}\left(\frac{\bar{\tau}}{4^i}\right) = \Psi\left(\omega_{n+i}\left(\frac{4^i\sigma + \bar{\tau}}{4^{n+i}}\right)\right) = \Psi\left(\omega_{n+i+1}\left(\frac{4^i\sigma + \bar{\tau}}{4^{n+i}}\right)\right) = \gamma_{n,i+1}\left(\frac{\bar{\tau}}{4^i}\right),$$

因为 ω_{n+i} 和 ω_{n+i+1} 在 $\frac{1}{4^{n+i}}$的整数倍处重合。

如果 $\gamma_n^{-1}(y) \geq \frac{\bar{\tau}}{4^i}$，则选择$\varrho := \bar{\tau}$；而如果 $\gamma_n^{-1}(y) \leq \frac{\bar{\tau}}{4^i}$，则选择 $\varrho := \bar{\tau} - 1$。注意，集合 $\gamma_{n,\,i}([\frac{\varrho}{4^i}, \frac{\varrho+1}{4^i}])$ 是一条以恒定速度参数化的水平线段。集合 $\gamma_{n,\,i+1}([\frac{\varrho}{4^i}, \frac{\varrho+1}{4^i}])$则是一条多边形曲线（同样以恒定速度参数化），其在 $\mathbb{R}^2$ 上的投影与 $\gamma_{n,\,i}([\frac{\varrho}{4^i}, \frac{\varrho+1}{4^i}])$ 的投影一起形成两个全等的等腰三角形，底角等于 $\overline{\vartheta}_{n+i+1}$ （见图 3）。由于两条曲线都以恒定速度参数化，线段 $\pi(y_{(i)})\ \pi(y_{(i+1)})$ 垂直于 $\pi(\gamma_{n,\,i}([\frac{\varrho}{4^i}, \frac{\varrho+1}{4^i}]))$。

初等计算表明

$$\begin{aligned} d_e(\pi(y_{(i)}), \pi(y_{(i+1)})) &\leq d_e\left(\pi\left(\gamma_{n,i}\left(\bar{\tau}/4^i\right)\right), \pi(y_{(i)})\right) \tan\vartheta_{n+i+1} \\ &\leq \bar{d}\;\ell_d(\Gamma_{n,i}) \tan\vartheta \\ &\leq \bar{d}\,L\,2\vartheta \leq \bar{d}\,L\sqrt{\vartheta}. \end{aligned}$$

在之前的估计中，我们用到了以下事实： $\vartheta_{n+i+1} \leq \vartheta \equiv \vartheta_{n+1} \leq 1/4$，以及以下性质：$\Gamma_{n,\,i}$ 以恒定速度参数化，且不等式 $\ell_d(\Gamma_{n,\,i}) \leq \ell_d(\Gamma_n) \leq L$ （这是因为 $\ell_d(\Gamma_n) = \sup_i \ell_d(\Gamma_{n,\,i})$，如式（4.4）所示；还用到了 $\vartheta_{n+j} \leq \vartheta_j$ 对 $j \geq 1$成立这一事实）。

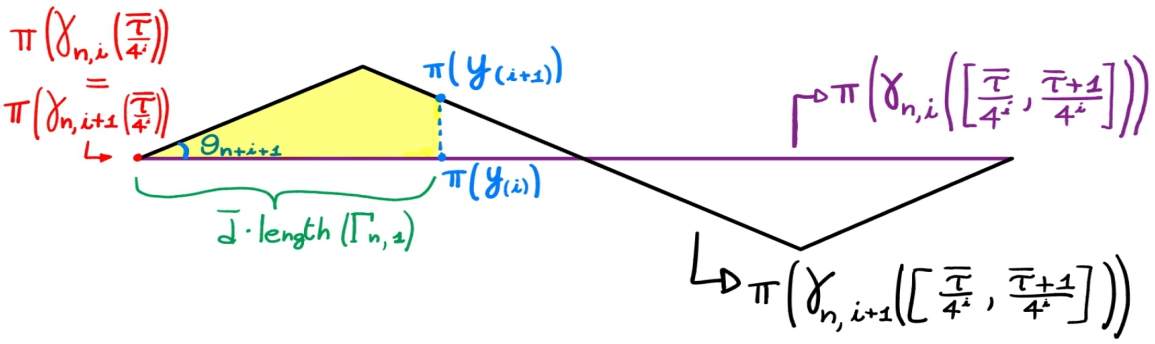


FIGURE 3. 曲线 $\pi \circ \gamma_{n,i}$ 和 $\pi \circ \gamma_{n,i+1}$ 的一部分。

同理，计算由连接 $\pi(y_{(i)})$、$\pi(\gamma_{n,\,i}(\bar\tau/4^i))$、$\pi(y_{(i+1)})$的（三条或四条）线段围成的面积 A，即沿着 $\pi(\Gamma_{n,\,i})$、$\pi(\Gamma_{n,\,i+1})$ 和 $\pi(y_{(i+1)})\pi(y_{(i)})$ 行进，可得

$$\begin{aligned} A &\le \frac{1}{2} d_{\mathrm{Eucl}}\left(\pi\left(\gamma_{n,i}\left(\bar\tau/4^i\right)\right), \pi(y_{(i)})\right)^2 \tan\vartheta_{n+i+1} \\ &\le \frac{1}{2}\bar d^2 \ell_d^2(\Gamma_{n,i}) \tan\vartheta \\ &\le \frac{1}{2}\bar d^2 L^2\, 2\vartheta = \bar d^2 L^2 \vartheta. \end{aligned}$$

应用引理 4.3，由于 $\gamma_{n,i}(\bar\tau/4^i) = \gamma_{n,i+1}(\bar\tau/4^i)$，我们得到

$$d(y_{(i)}, y_{(i+1)}) \lesssim d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(y_{(i)}), \pi(y_{(i+1)})) + \sqrt{A} \lesssim \bar d\, L\sqrt{\vartheta}$$

所需 于 (4.28) 中，并由此完成断言 2 的证明，进而完成定理 4.4 的证明 . □

定理 4.5。 $\Gamma \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\nu_1},4)$。

证明。 根据 [Li22，定理 1。5], 若 $E \subset \mathbb{H}^1$ 且 Γ_E 是任意一条包含 E的曲线，则

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{H}^1} \widehat{\beta}_{\infty,\nu_1}(x,r)^4 \, dx \, \frac{dr}{r^4} \lesssim \mathcal{H}^1(\Gamma_E),$$

其中， β-数指的是 E 中的那些数。随后，运用一个标准论证，将这一性质应用于 1-正则曲线 Γ 上的二进立方体，即可推出 $\Gamma \in \mathrm{GLem}(\beta_{\infty,\,\nu_1},\, 4)$，例如可借助 [FV25a，推论 3.2]。另见 [CL17，命题 3.1] 的证明。 最后， $\Gamma \in \mathrm{GLem}(\beta_{\infty,\,\nu_1},\, 4)$ 蕴含 $\Gamma \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\,\nu_1},\, 4)$。□

5. SUFFICIENT CONDITIONS FOR UNIFORM RECTIFIABILITY

本节将建立若干充分条件，以确保 k-正则集合 $E \subset \mathbb{H}^n$ 具有利普希茨像的大块，其中像来自 $\mathbb{R}^k$的子集，且 $1 \le k \le n$。根据引理 3.18，下述各项中的所有几何引理都可以等价地表述为关于二进立方体的离散求和，或关于点和尺度的二重积分。我们回顾定理 1.1的陈述：

k 中的 $\mathbb{H}^n$ 内的 $1 \le k \le n$ 正则集合，若满足几何引理 $\mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)},2)$ 和弱几何引理 $\mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\nu_k})$，则具有 BPLI。

定理 1.1 证明的核心是以下结果。

定理 5.1. 设 $n \in \mathbb{N}$和 $k \in \{1,\dots,n\}$。若 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，满足 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)}, 2)$ 以及 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\nu_k})$，则 E具有一个由水平平面构成的电晕分解 ***(P-C)***。

定理 5.1 得以确立后，定理1.1 便可由 Bate、Hyde 和 Schul[BHS23] 结合第 3.3 节关于不同电晕分解的结果得出。

定理 *1.1* 在假设定理*5.1*成立的条件下的证明。 根据定理 5.1，如果 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是 k-正则的，并且具有$E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)}, 2)$ 和 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\nu_k})$，则其具有 (P-C)。由引理 3.34可知，$E$ 具有由赋范空间给出的冠分解。 [BHS23，定理 B] 表明， E 具有 BPLI 性质。 □

定理5.1 的证明推迟到下一节。这里我们仅讨论定理 1.1 和 5.1中的假设，并推导引言中陈述的推论。首先，很明显，单独的弱几何引理 WGL(β_{∞,ν_k}) 并不蕴含 k-正则集合在 $\mathbb{H}^n$ ($1 \leq k \leq n$) 中具有 BPLI 性质；例如参见备注 3.20。此外，如下例所示，像定理1.1的陈述中那样，仅对 β_π-数施加一个可求和条件，也不足以证明 BPLI。

例 *5.2*（仅有 β_π-数条件并不意味着 *BPLI*）。令 $K \subset [0,1]$ 为豪斯多夫维数为 $1/2$的标准康托尔中三分之一集。集合 $E = \{(0,t) : t \in K\} \subset \mathbb{H}^1$在海森堡距离下是 *1*-正则的。由于 $\pi(E) = \{0\}$ 完全包含于 $\mathbb{R}^2$的任意 *1* 维子空间中，相关的 β_1、π、ν_k-数（因而 β_1、π、$A(2n,k)$-数也）恒等于零。然而， E 不可能具有 *BPLI*；因为如果具有，那么它将包含于某条正则曲线中（[*FV25a*，推论 *4.6*]），而 [*LS16b*]（采用与定理 *4.5* 的证明中类似的论证）将由此推出 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_{\infty,\nu_1}, 4)$。但这是不可能的，因为 E 无法被水平直线良好逼近。事实上，对于每个 $x \in E$ 和 $0 < r < \mathrm{diam}(E)$，集合 $E \cap B(x,r)$在竖直 t-轴上包含两个（实际上是许多个）彼此海森堡距离为 $\gtrsim r$ 的点。这意味着，对于下确界 $\beta_{\infty,\nu_1}(x,r)$中考虑的任意水平直线 $V \in \mathcal{V}_1$， $E \cap B(x,r)$中至少存在一个点，其与V的距离为 $\gtrsim r$。因此，对于 $x \in E$, $0 < r < \mathrm{diam}(E)$，$\beta_{\infty,\nu_1}(x,r) \gtrsim 1$。

如引言中所述，定理1.1 导出了若干与现有文献相关的推论。特别是，对于 k-正则集合，其在 $\mathbb{H}^n$ 中的一致可整性，可以由以下几何引理推得：这些引理分别以 Hahlomaa 的水平 β-数 [Hah12], Li 的分层β-数 [Li22], ，或由第一作者与 Violo 引入的 ι-数 [FV25a。

推论的证明 *1.2* ($\mathrm{GLem}(\beta_{1,\nu_k}, 2)$ 蕴含 *BPLI*）。由定理 1.1 结合命题 3.23和 3.24即可得到。□

推论的证明 *1.3* ($\mathrm{GLem}(\beta_{1,\nu_k}, 4)$ 蕴含 *BPLI*）。由定理 1.1 结合命题3.23即可得到。□

推论的证明 *1.5* ($\mathrm{GLem}(\iota_{1,\nu_k}, 1)$ 蕴含 *BPLI*）。由定理 1.1 结合命题3.22 和 3.23即可得到。□

通过 (P-C) 与 (ILG-C) 的等价性，我们还可以从 [BHS23] 得到 (ILG-C) 蕴含 BPLI，这与 David 和 Semmes 在欧几里得空间中证明的一个蕴含关系相呼应 [DS91]。

推论的证明*1.8* （*(ILG-C)* 蕴含 *BPLI*）。根据引理 3.33，如果 E 满足 (ILG-C)，那么它也满足 (P-C)。由引理 3.34 和 [BHS23，定理 B]即可得到所需结果。□

6. Proof of the corona decomposition

在本节中，我们重新讨论电晕分解，并证明定理5.1。构造电晕分解的一般过程概述于 [DS91，第19]。我们将紧密遵循 Hahlomaa 的证明 [Hah12，第 5-17], ，而该证明又深受 David 和 Semmes 为满足几何引理 GLem(β_1, 2) 的欧几里得空间中的集合所提出的电晕分解原始构造的启发。我们的任务是验证所有证明步骤都可以继续进行

，尽管我们采用了严格较弱的假设 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\ \pi,\ A(2n,k)},$ 2) 和 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\ \nu_k})$ 。对于与 [Hah12]有所不同的部分，我们将详细阐述论证 [Hah12], 。对于证明中沿用 [DS91]标准欧几里得构造的部分，如果可以通过直接计算验证，或其推导与标准欧几里得构造相同，我们将省略细节。证明的结构如下：

6.1 定理 5.16.2 为好立方体指定平面6.3 构建冠状分解6.4 通过水平平面验证电晕分解 (P-C)

Hahlomaa 并未明确以电晕分解的形式陈述其证明的结论，但我们决定这样做，原因有二：首先，可以直接从通过水平平面的电晕分解 (P-C) 推导出通过赋范空间的电晕分解 (N-C)，从而能够应用 Bate、Hyde 和 Schul 的最新结果 [BHS23]。其次，正如我们在引理 3.32 和引理3.33 中所证明的，(P-C) 等价于通过内在利普希茨图的电晕分解 (ILG-C)，因此定理 5.1可以被视为 David 和 Semmes 证明几何引理蕴含通过利普希茨图得到电晕分解这一结论在海森堡群中的对应版本；回顾推论1.7。

推论 *1.7* 的($\mathrm{Glem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)},$ 2) 和 $\mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\nu_k})$ 蕴含 (ILG-C)) 的证明。这直接由定理 5.1 和引理 3.32 得出。 □

6.1. 定理 5.1 的证明的预备知识。设 $E \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 k-正则集合，满足$E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,\ A(2n,k)},$ 2)，且 $E \in \mathrm{WGL}(\beta_{\infty,\nu_k})$。令 C_E 表示 E的正则常数。我们还采用记号 $\mu := \mathcal{H}^k|_E$。给定 $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_k$，我们将角度定义为 V_1 与 V_2之间的

$$\angle(V_1, V_2) := \min\{C \geq 1 : d(x, y) \leq C d(P_{V_2}(x), P_{V_2}(y)) \text{ for all } x, y \in V_1\}. \tag{6.1}$$

注 6.1. 这是 [Hah12, p.4], 中使用的定义，我们在此采用该定义，以便于将证明中的某些论证与 [Hah12]中的相应论证进行比较。然而，这个角度定义不同于 [DS91; DS93; FV25b]中使用的定义。值得注意的是，根据式 (6.1)，$\angle(V_1, V_2)$ =1 对于 $V_1 = V_2$ 成立（而按照所引文献中的定义，该角度为 0）。此外，例如，若 V_1, V_2 是经过原点且夹角为 δ的两条水平直线，则在定义 (6.1) 下，对于较小的 δ，$\angle(V_1, V_2) \sim 1 + \frac{\delta^2}{2}$。

注记 6.2. 正如 [Hah12 的引理 2 所证明的，3], 角度 $\angle(V_1, V_2)$ 只需考虑 V_1 和 V_2 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的投影即可计算：

$$\angle(V_1, V_2) = \min\{C \geq 1 : |x - y| \leq C|\pi_{\pi(V_2)}(x) - \pi_{\pi(V_2)}(y)| \text{ for all } x, y \in \pi(V_1)\}.$$

这将在引理 6.7 和引理 6.10 的证明中应用。尽管定义并未以对称形式表述，但不难看出，V_1 和 V_2 可以互换。

如果 $A \subset \mathbb{H}^n$ 和 $r > 0$ 我们将用 $A(r)$ 表示 A 的 r-邻域，其定义为

$$A(r) := \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, A) \leq r\}.$$

我们将证明存在一个常数 $\eta_0 > 0$，它仅依赖于 k 和 C_E，使得 E对所有 3.30 (P-C) 中的 $0 < \eta < \eta_0$ （因而，事后对所有的$\eta > 0$）都满足定义 **3.30 (P-C) 的条件。以下所有常数都可能依赖于 k 和 k-正则常数C_E ，而 E 对此不再另行说明。**

(1) 常数 $K_0 > 1$ 将取足够大的值，具体见第6.4.3 – 6.4.4节。(2) 常数 $0 < \eta \leq \eta_0$ 将取足够小的值，见第6.4.2 – 6.4.4节。(3) 常数 $K > 1$ 将取足够大的值，具体取值取决于 K_0 和 η；参见引理6.6的证明以及第6.4.2 节和第6.4.4节。

(4) 最后，常数 $0 < \varepsilon < 1$ 将取足够小的值，具体取值取决于 η 和 K，具体说明见第 6.2节、引理6.6的证明，以及第6.4.2 节和6.4.4节。

常数 K 和 ε 将用于定义参数 η下冠状分解中的好立方体，因此允许它们依赖于 η。

我们固定 $0 < \eta < \eta_0$，并旨在证明 E 满足关于该常数的 (P-C) 条件。也就是说，我们必须证明 E 存在一个冠状分解（其常数为 $C = C(\eta)$，且依赖于 η），使得投影条件 (3.20) 对参数 η成立。

6.2. **为好立方体指定平面**。设 $\mathcal{D}$ 是 E 上任意但固定的二进制系统。我们定义一个“好族” $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{D}$，使得每个 $Q \in \mathcal{G}_1$ 都能被一个水平平面良好逼近。更准确地说，对于固定的参数 $\varepsilon > 0$、$K > 1$（稍后将适当确定），我们令

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1(\varepsilon, K) := \{Q \in \mathcal{D} : KQ \subset V(\varepsilon^2 \text{diam}(Q)) \text{ for some } V \in \mathcal{V}_k\}.$$

对于每个 $Q \in \mathcal{G}_1$，我们随后固定 $V_Q \in \mathcal{V}_k$，使其为一个仿射水平 k 维平面，并满足性质 $KQ \subset V_Q(\varepsilon^2$直径$(Q))$。假设 $E \in \text{WGL}(\beta_\infty, \nu_k)$ 蕴含剩余立方体 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{G}_1$ 的 Carleson 打包条件（在 [Hah12，第 5] 页中，这是由假设 $E \in \text{GLem}(\beta_1, \nu_k,$ 2) 推得的）。

引理 6.3. 存在一个常数 $C = C(\varepsilon, K)$ 使得

$$\sum_{Q \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{G}_1,\, Q \subset R} \mu(Q) \le C\mu(R), \quad R \in \mathcal{D}. \tag{6.2}$$

如果好立方体 $Q \in \mathcal{G}_1$ 能够被某个 水平平面 $V \in \mathcal{V}_k$很好地逼近，那么该平面 V 与 V_Q的角度必须很小，具体如下引理所述。

引理 6.4. 若 $Q \in \mathcal{G}_1$ 与 $V \in \mathcal{V}_k$ 满足 $Q \subset V(2K\varepsilon^2$直径$(Q))$，则 $\angle(V_Q, V) \le 1 + \varepsilon$。

这是 [Hah12，引理 3。2], 只要选取 ε 足够小，使其取值依赖于 K。请记住备注 6.1 关于角度的定义；从思想上看，这与 [DS91，引理 5。13] 中的欧几里得情形类似，不过指数方面的结论较弱，ε。引理 6.4将在第 6.4.2 节中用于构造一个 Lipschitz 函数 g：$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$ 针对我们将在下文构造的冠状分解中的每棵树 $\mathcal{S}$。

6.3. 构建冠状分解。现在我们描述如何构建冠状分解 $\mathcal{D} = \mathcal{G} \cup \mathcal{B}$。具体做法与 [Hah12, p.6–7] 完全相同，取参数 $\delta = \eta$（原始的欧几里得构造另见 [DS91, 第7] 节）。读者可以认为，好立方体 $\mathcal{G}$ 就是第 6.2 节中的族 $\mathcal{G}_1$。当 E 有界时，这一点确实成立；而当 E 无界时，则选取一个族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1$，以运行类似于 [DS91, p.38] 的适当局部化论证。族 $\mathcal{G}$ 仍满足 (6.2)，随后被划分为一个森林 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathcal{G})$，由互不相交的树 $\mathcal{S}$ 构成，并以如下方式构造，使其满足以下性质：

(1) 每个 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ 都有一个极大元（相对于包含关系），记为 $Q(\mathcal{S})$；(2) 若 $Q \in \mathcal{S}$、$R \in \mathcal{D}$ 满足 $Q \subset R \subset Q(\mathcal{S})$，则 $R \in \mathcal{S}$；(3) 对每个 $Q \in \mathcal{S}$，$\angle(V_Q, V_{Q(\mathcal{S})}) \le 1 + \eta$；(4) 若 $Q \in \mathcal{S}$、$\mathcal{C}(Q) \subset \mathcal{G}$，且对所有 $R \in \mathcal{C}(Q)$，$\angle(V_R, V_{Q(\mathcal{S})}) \le 1 + \eta$，则 $\mathcal{C}(Q) \subset \mathcal{S}$；(5) 若 $Q \in \mathcal{S}$，则 $Q \in \min(\mathcal{S})$ 当且仅当 $\mathcal{C}(Q) \setminus \mathcal{G} \neq \emptyset$（“$Q$ 至少有一个坏子项”），或者存在 $R \in \mathcal{C}(Q)$ 使得 $\angle(V_R, V_{Q(\mathcal{S})}) > 1 + \eta$（“$Q$ 至少有一个子项 R，且 V_R 与 $V_{Q(\mathcal{S})}$ 之间存在大角度”）。

森林 $\mathcal{F}$ 进一步细分为 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$，其中 $\mathcal{F}_i$ 的定义条件是根据树 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_i$ 的极小立方体（相对于包含关系）的性质来表述的。特别地，对于给定的树 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，我们定义

$$m_1(\mathcal{S}) := \{Q \in \min(\mathcal{S}) : \mathcal{C}(Q) \setminus \mathcal{G} \neq \emptyset\},$$
$$m_2(\mathcal{S}) := \min(\mathcal{S}) \setminus m_1(\mathcal{S}).$$

接着，我们将森林 $\mathcal{F}$ 划分如下

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ \mathcal{S} \in \mathcal{F} : \mu\left(\bigcup_{Q \in m_1(\mathcal{S})} Q \right) \geq \mu(Q(\mathcal{S}))/4 \right\},$$
$$\mathcal{F}_2 := \left\{ \mathcal{S} \in \mathcal{F} : \mu\left(Q(\mathcal{S}) \setminus \bigcup_{Q \in \min(\mathcal{S})} Q \right) \geq \mu(Q(\mathcal{S}))/4 \right\},$$
$$\mathcal{F}_3 := \left\{ \mathcal{S} \in \mathcal{F} : \mu\left(\bigcup_{Q \in m_2(\mathcal{S})} Q \right) \geq \mu(Q(\mathcal{S}))/2 \right\}.$$

虽然定义有所不同，但其思想与相应欧氏证明中使用的定义类似 [DS91，第39]。这是因为，若 $Q \in m_2(\mathcal{S})$，则存在$R \in \mathcal{C}(Q)$，使得 $\angle(V_R, V_{Q(\mathcal{S})}) > 1 + \eta$。容易看出，对于 $Q(\mathcal{S})$，极大立方体 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ 满足 Carleson 打包条件。这正是 [Hah12，引理 42],的结论，其证明完全基于公理，在我们的情形下可原样适用，另见 [DS91，第 39 页，引理 7。4]具体而言，结果如下：

引理 6.5. 存在一个常数 $C = C(\varepsilon, K)$ 使得

$$\sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2,\, Q(\mathcal{S}) \subset R} \mu(Q(\mathcal{S})) \leq C\mu(R), \quad R \in \mathcal{D}.$$

关键在于为剩余的树证明相应的 Carleson 打包条件 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_3$。正是在这一陈述的证明中（该陈述对应于 [Hah12,(19)], ），我们的假设“$E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)}$,2)”才最终变得相关。这就是第 6.4 节的背景，该节构成了证明的核心。更确切地说，我们的证明与 Hahlomaa 的证明之间的主要差异将出现在第 6.4.3 节。

6.4. 通过水平平面验证电晕分解（P-C）。 我们据此得出 E 具有如下的水平平面电晕分解：

6.4.1 第一步：投影在顶层立方体上近似为双Lipschitz6.4.2 第二步：将 Lipschitz 函数 $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$ 与一棵树 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$6.4.3 第三步：将 $\beta_{1,\pi}$ 上的估计从 E 向下推进至 g6.4.4 第四步：根据上方的 $\mu(Q(\mathcal{S}))$，用 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_3$ 的 $\beta_{1,\pi,A(2n,k)}$-数对其进行界定6.4.5 第五步：树的顶层立方体满足 Carleson 打包条件 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_3$

6.4.1. 步骤 *1*：在顶层立方体上，投影近似为双*Lipschitz*映射。
在此步骤中，我们验证按水平平面进行的电晕分解定义中的性质（3.20）（P-C）。若 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ 按第 6.3 节中的方法构造，回顾

$$h_{\mathcal{S}}(x) := \inf\{d(x, Q) + \mathrm{diam}(Q) : Q \in \mathcal{S}\}. \tag{6.3}$$

这一步的核心结果如下（参见 [DS91，引理 84]有关其欧几里得对应结果）。

引理 6.6. 取 K 充分大（取决于 K_0 和 η），并取 ε 充分小（取决于 η），则第 6.3 节中构造的树具有以下性质。若 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ 且 $x, y \in K_0 Q(\mathcal{S})$，其中 $d(x,y) > \eta \min\{h_{\mathcal{S}}(x)\ h_{\mathcal{S}}(y)\}$，则

$$d(x,y) \le (1+2\eta) d(P_{V_{Q(\mathcal{S})}}(x), P_{V_{Q(\mathcal{S})}}(y)).$$

证明。我们沿用 [Hah12引理 4 中给出的证明，3] 其中 $\alpha = 1/\varrho$需注意我们对 $d(x,y)$ 的假设较弱。令 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，令 x，$y \in K_0 Q(\mathcal{S})$，并不妨假设$d(x,y) > \eta\, h_{\mathcal{S}}(x)$。于是存在 $Q \in \mathcal{S}$使得

$$d(x,y) > \eta(d(x,Q) + \operatorname{diam}(Q)).$$

令 $R \in \mathcal{S}$ 为满足 $Q \subset R$ 且 $\operatorname{diam}(K_0 R) \ge d(x,y)$ 的极小立方体。注意，这样的立方体确实存在，因为根据假设，$\operatorname{diam}(K_0 Q(\mathcal{S})) \ge d(x,y)$。于是我们有以下性质：

$$d(y,R) \le d(x,y) + d(x,R) \le d(x,y) + d(x,Q) < d(x,y) + \eta^{-1} d(x,y); \tag{6.4}$$

$$\operatorname{diam}(R) \le (D^2 \varrho^{-1} + \eta^{-1}) d(x,y). \tag{6.5}$$

性质（6.5）可由以下方式推得：若 $Q = R$，则

$$\operatorname{diam}(R) = \operatorname{diam}(Q) < \eta^{-1} d(x,y) < (D^2\varrho^{-1} + \eta^{-1})\, d(x,y).$$

若 $R \ne Q$，则存在 R，它是 R 的子立方体，且包含 Q。然后，根据二进立方体的性质，见（3.4），$\operatorname{diam}(R) \le D^2 \varrho^{-1} \operatorname{diam}(\widehat{R})$。因此，利用 R的极小性假设，可得

$$\operatorname{diam}(R) \le D^2\varrho^{-1} \operatorname{diam}(\widehat{R}) \le D^2\varrho^{-1} \operatorname{diam}(K_0 \widehat{R}) \le D^2\varrho^{-1}\, d(x,y) \le (D^2\varrho^{-1} + \eta^{-1})\, d(x,y).$$

根据（6.4）以及直径$(K_0 R) \le 2K_0$直径(R), 我们得到

$$\begin{aligned} d(y,R) &\le (1+\eta^{-1})\, d(x,y) \le (1+\eta^{-1}) \operatorname{diam}(K_0 R) \le 2K_0(1+\eta^{-1}) \operatorname{diam}(R), \\ d(x,R) &\le d(x,Q) \le \eta^{-1} d(x,y) \le \cdots \le 2K_0(1+\eta^{-1}) \operatorname{diam}(R). \end{aligned}$$

因此，选取仅依赖于 K_0 和 η 的足够大的 K（特别是 $K \ge 2K_0(1+\eta^{-1})+1$），我们得到 x, $y \in KR$。回想一下，R 可由水平平面 $V_R \in \mathcal{V}_k$ 良好逼近，因此 $x, y \in V_R$(直径(R))。设 z, $w \in V_R$ 为实现 $d(x,z) = d(x, V_R)$ 和$d(y,w) = d(y, V_R)$ 的点，并记 $P := P_{V_{Q(\mathcal{S})}}$。根据前面的观察，我们得到$d(x,z) \le \varepsilon^2$直径$(R)$，以及 $d(y,w) \le \varepsilon^2$直径(R)。此外，由森林 $\mathcal{F}$ 的构造中的性质 (3)，我们可以假设 $d(z,w) \le (1+\eta)\, d(P(z)\ P(w))$。结合前面的估计，利用三角不等式以及 P 的 1-Lipschitz 连续性，

$$\begin{aligned} d(P(x),P(y)) &\ge d(P(z),P(w)) - d(P(x),P(z)) - d(P(y),P(w)) \\ &\ge d(P(z),P(w)) - d(x,z) - d(y,w) \\ &\ge (1+\eta)^{-1}\, d(z,w) - 2\varepsilon^2 \operatorname{diam}(R) \\ &\ge (1+\eta)^{-1}(d(x,y) - 2\varepsilon^2 \operatorname{diam}(R)) - 2\varepsilon^2 \operatorname{diam}(R) \\ &\overset{(6.5)}{\ge} ((1+\eta)^{-1} - 4\varepsilon^2(D^2\varrho^{-1} + \eta^{-1}))d(x,y) \\ &\ge (1+2\eta)^{-1} d(x,y), \end{aligned}$$

其中，若选择的 $\varepsilon > 0$ 足够小（取决于 η），则最后一个估计成立。 □

引理 6.6证明完毕后，得到基于水平平面的电晕分解所需的最后一步，是证明这些树满足 Carleson 打包条件 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_3$。其余步骤的内容如下。

6.4.2. 第二步：将 *Lipschitz* 函数 $g\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$ 与树 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$关联起来。
在这一步中，我们遵循 [Hah12，第 5]节：论证无需修改，但为了方便读者并明确后续步骤中将使用的记号，我们在此重述。该构造依赖于 [DS91，第 8]节中的经典欧几里得论证。我们强调一个或许令人意外的事实：构造电晕分解时，只需构造良好的 Lipschitz 函数 $g\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$，而不必构造 Lipschitz 函数 $g\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{H}^n$。这正是定理 5.1 中只需对 投影 β-数假设几何引理的根本原因。

固定 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$，并假设经过平移和旋转 $\mathbb{H}^n$ （它们都是等距变换）后，不失一般性地有 $V_{Q(\mathcal{S})} = \{x \in \mathbb{H}^n\colon\ x_i = 0$ 对所有 $i > k\}$成立。这里，旋转 的定义见定义 2.6。我们的目标是构造一个（欧几里得）Lipschitz 函数 $g\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$，其 Lipschitz 常数由$\sqrt{\eta}$控制，并且其图在与立方体 $\pi(K_0 Q(\mathcal{S}))$ 相关的尺度上能很好地逼近 $Q \in \mathcal{S}$；精确表述见引理 6.7 。

对于这一构造，我们令 $P\colon\ \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^k$ 为到前 k个坐标的投影，即 $P(x) := (x_1, \dots, x_k)$。将 $V_{Q(\mathcal{S})} \equiv \mathbb{R}^k$视为同一对象后，我们可以把 P看作水平投影$P_{V_{Q(\mathcal{S})}}$。我们还记 $P^\perp\colon\ \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n-k}$ 为如下定义的正交投影：$P^\perp(x) := (x_{k+1}, \dots, x_{2n})$。 接着，我们通过如下方式定义 $H\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$H(p) := \inf\{h_{\mathcal{S}}(x) : x \in P^{-1}(\{p\})\},$$

其中映射 $h_{\mathcal{S}}$ 定义于 (6.3)。容易看出， H 可以等价地计算为

$$H(p) = \inf\{d_{\mathrm{Eucl}}(p, P(Q)) + \operatorname{diam}(Q) : Q \in \mathcal{S}\}. \tag{6.6}$$

因此可知， H 是一个 1-利普希茨映射，相对于 $\mathbb{R}^k$上的欧几里得距离而言。令 $Z := \{x \in E\colon\ h_{\mathcal{S}}(x) = 0\}$ ，由博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理可知，$p \in P(Z)$ 当且仅当 $H(p) = 0$。

接下来，我们的想法是通过令 g等于 $g(P(z)) = P^\perp(z)$，其中 $z \in Z$(利用引理 $P|_Z$可知其为单射，且其逆映射是 Lipschitz 的6.6)，并应用 Whitney 型论证将g 延拓至 $\mathbb{R}^k$ (更准确地说，延拓至一个球 $U_0 \subset \mathbb{R}^k$)。为此，将 $\mathbb{R}^k \setminus P(Z)$ 分割为可数个互不相交（至多在边界处相交）的标准二进立方体之并 $\{R_i\colon\ i \in \mathbb{N}\}$ ，这些立方体属于 $\mathbb{R}^k$ ，并满足以下 Whitney 型条件

$$20 \operatorname{diam}(R_i) \le H(p) \quad \text{for every } p \in R_i. \tag{6.7}$$

我们还要求每个 R_i 在所有满足（6.7）的立方体中，关于包含关系是极大的。固定 $x_0 \in Q(\mathcal{S})$，并令

$$U_j := B^k\big(P(x_0), 2^{-j} K_0 \operatorname{diam}(Q(\mathcal{S}))\big), \tag{6.8}$$

其中 B^k 表示 $\mathbb{R}^k$ 中的欧几里得球。接着，我们为每个与 U_0 相交的二进立方体 R_i 关联一个好立方体 $Q_i \in \mathcal{S}$ 。具体而言，对每个 $i \in I_0 := \{j \in \mathbb{N}\colon\ R_j \cap U_0 \neq \emptyset\}$，都存在 $Q_i \in \mathcal{S}$ ，其直径与 R_i 可比，具体来说

$$C^{-1} \operatorname{diam}(R_i) \le \operatorname{diam}(Q_i) \le C \operatorname{diam}(R_i)$$

其中 C 是一个适当的常数，仅依赖于 K_0。 Q_i 的选取可按如下方式进行：由 R_i 的极大性可知，对于每个 $p \in R_i$， $H(p) \le 42\operatorname{diam}(R_i)$。固定 $p \in R_i \cap U_0$。由 (6.6)，存在 $Q \in \mathcal{S}$ 使得 $d(p, P(Q)) + \operatorname{diam}(Q) < 90 \operatorname{diam}(R_i)$。若 $d(p, P(Q)) \le K_0 \operatorname{diam}(Q)$，则令 $Q_i = Q$。否则，我们用一个适当的祖先 Q_i 替换 Q，使得 $K_0^{-1} d(p, P(Q_i)) \le \operatorname{diam}(Q_i) \le K_0\, d(p, P(Q_i))$。此类祖先的存在性由以下事实保证： $d(p, P(Q(\mathcal{S}))) \le K_0 \operatorname{diam}(Q(\mathcal{S}))$，因为 $p \in U_0$。

现在我们开始 以构造所需的映射 g。首先，对于每个 $i \in I_0$，令 $A_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n} \qquad -k$

~为其图为 $\pi(V_{Q_i})$ 的欧几里得仿射函数。我们还选取 $\phi_i : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ 作为C^2 截断函数，使其在 $2R_i$ 上取值为 1，在 $\mathbb{R}^k \setminus 3R_i$ 上取值为 0，并且满足

$$|\partial_j \widetilde{\phi}_i| \le C\mathrm{diam}(R_i)^{-1}, \quad |\partial_j \partial_m \widetilde{\phi}_i| \le C\mathrm{diam}(R_i)^{-2} \quad \text{for all } j,m \in \{1,\dots,k\}.$$

这些函数将用于在 $U_0 \setminus P(Z)$ 上进行 Whitney 型构造。另一方面，对于每个 $p \in P(Z)$，存在唯一的点 $x(p) \in E$使得 $P^{-1}(\{p\}) \cap K_0 Q(\mathcal{S}) = \{x(p)\}$：回忆一下，这是引理 6.6的直接推论。因此，我们终于可以通过设定以下内容来定义函数 $g : U_0 \to \mathbb{R}^{2n-k}$：

$$g(p) := \begin{cases} \dfrac{\sum_{i\in I_0} \widetilde{\phi}_i(p) A_i(p)}{\sum_{i\in I_0} \widetilde{\phi}_i(p)} & \text{if } p \in U_0 \setminus P(Z) \\ P^{\perp}(x(p)) & \text{if } p \in P(Z) \end{cases} \tag{6.9}$$

映射 g 的主要特征总结于以下引理中，该引理仿照 [DS91，命题 8.2]中关于经典电晕分解构造的相应陈述。

引理 6.7。 取足够大的 $\eta \le 1$, K，使其依赖于 K_0 和 η；再取足够小的 ε，使其依赖于 η 和 K，则有以下性质：若 $g : U_0 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$ 是如上构造的函数，则存在正常数 C，使得

(i) g 是$C\sqrt{\eta}$-Lipschitz；(ii) $|P^{\perp}(x) - g(P(x))| \le C\sqrt{\varepsilon} h_{\mathcal{S}}(x)$ 对所有 $x \in K_0 Q(\mathcal{S})$；(iii) $|g(p)| \le CK_0\sqrt{\eta}\,\mathrm{diam}(Q(\mathcal{S}))$ 对所有 $p \in U_0$。

证明。性质 (i)–(iii) 已在 [Hah12、引理 5.3、引理 5.6 和引理 5.9], 中证明，尤其运用了引理 6.4 和引理 6.6 中所述平面 V_Q 的性质，以及第 6.3 节中树 $\mathcal{S}$ 的性质 (3)。定义 (6.9) 中的 g 及其 ($2\sqrt{\eta}$-Lipschitz) 仿射函数 A_i，使我们能够根据这些几何信息推导出 g的 $C\sqrt{\eta}$-利普希茨连续性、用 g的图逼近$\pi(K_0 Q(\mathcal{S}))$，以及关于 $|g(p)|$ 的估计。□

备注 6.8。 引理 η 和 ε 中的指数 6.7 看起来不同于欧几里得前身 [DS91命题 8 中对应的指数。2]不过，读者应注意角度定义中所采用的不同约定（备注 6.1），并留意引理 6.4中的指数。对于电晕分解的构造而言，重要的是我们得到带有 ε（而不是带有 η）的估计（ii）。这样，通过选择 ε 足够小且依赖于 η，我们就能证明引理 6.10。

6.4.3. 步骤 *3*：将关于 β_1、π 的估计从 E 向下推至 g的图。
本节中的证明遵循 [Hah12第 6], 节中的思路，而该思路又仿照了欧几里得前身 [DS91第 13] 节。然而，其中存在一个关键差异：引理 6.9 中的上界是用投影 β-数表示的，而不是用可能更大的“完整” β-数表示的。

与 [Hah12 第 6], 节中一样，我们使用引理 6.7 (i)、(iii)，将上一步构造的映射 g 延拓为一个 $C\sqrt{\eta}$-Lipschitz 函数，其定义在 $\mathbb{R}^k$ 上，且支撑集包含于 U_{-1}中；后者按照式（6.8）对 $j = -1$定义。接着，我们引入与 g相关的新平坦度系数：对于 $p \in \mathbb{R}^k$, $t > 0$，我们定义

$$\gamma(p,t) := t^{-k-1} \inf_a \int_{B^k(p,t)} |g(u) - a(u)|\, du,$$

其中，下确界取遍所有仿射函数 a: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$，积分则关于 k 维豪斯多夫测度（欧几里得）$\mathbb{R}^k$。由引理 6.7 (i)，若 η 足够小

选得足够小，则

$$\gamma(p,t) \le 2t^{-k-1} \inf_{M} \int_{B^k(p,t)} d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u)),M)\,du \tag{6.10}$$

即在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中所有 k-平面 M 之间取下确界。

下面的引理改进了 [Hah12，引理 6。1], 它表明，实际上可以借助与 γ-数相关的投影 β-数来界定 E。

引理 6.9。 设 $T = K_0$直径$(Q(\mathcal{S}))/2$。设 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 如第 *6.4.2* 节中的 (6.8)。存在正常数 $C = C(K_0) > 0$ 使得

$$\int_0^T \int_{U_1} \gamma(p,t)^2\,dp\frac{dt}{t} \le C\varepsilon\mu(Q(\mathcal{S})) + C\varepsilon^{-6k} \int_{K_0Q(\mathcal{S})} \int_{h_{\mathcal{S}}(x)/K_0}^T \beta_{1,\pi,A(2n,k)}(x,K_0t)^2 \frac{dt}{t} d\mu(x). \tag{6.11}$$

证明。 对于任意 $p \in U_1$ 和 $H(p)/60 < t \le T$，由（6.6）可知，存在一个点 $z_{p,\,t} \in Q(\mathcal{S})$，使得 $|p - P(z_{p,\,t})| \le 60t$。对于任意 $z \in B(z_{p,\,t},\ t) \cap E$ 和 $\delta > 0$，我们找到 $W = W_{z,\,p,\,t,\,\delta} \in A(2n,\ k)$ 使得

$$\int_{B(z,K_0t)} d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(x),W)\,d\mu(x) \le (K_0t)^{k+1}[\beta_{1,\pi,A(2n,k)}(z,K_0t) + \delta], \tag{6.12}$$

根据 $\beta_{1、\,\pi和A(2n,k)}$-数的定义。由 (6.10)，可得

$$\gamma(p,t) \le 2t^{-k-1} \int_{B^k(p,t)} d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u)),W)\,du. \tag{6.13}$$

证明的核心是估计关于 $\mathcal{H}^k$ 在欧几里得球$B^k(p,t)$上的积分，并将其与关于 $\mu = \mathcal{H}^k|_E$在 $B(z,\ K_0t)$上的相应积分进行比较，以便结合 (6.12) 和 (6.13)，得到关于$\beta_{1、\,\pi和A(2n,k)}(z,K_0t)$的 $\gamma(p,t)$逐点估计。若$u \in B^k(p,t) \cap P(Z)$，则存在一个（由引理 6.6 可知是唯一的） $x \in K_0Q(\mathcal{S})$，使得$P(x) = u$。由于 $x \in Z$，因此 $h(x) = 0$且 $\pi(x) = (u,g(u)) \in \mathbb{R}^{2n}$。于是，由引理 6.6 和三角不等式可知，只要 K_0 取得足够大，就有 $d(x,z) \le K_0t$。由 P的 1-Lipschitz 连续性，对于 $\Omega \subset B^k(p,t)\cap P(Z)$，有 $\mathcal{H}^k_{\mathrm{Eucl}}(\Omega) \le P_\sharp\mu(\Omega)$；结合上述结果与 (6.12)，可得

$$\begin{aligned}
\int_{B^k(p,t)\cap P(Z)} d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u)),W)\,du &\le \int_{B^k(p,t)\cap P(Z)} d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u)),W)\,dP_\sharp\mu(u)\\
&\le \int_{P(B(z,K_0t))} d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u)),W)\,dP_\sharp\mu(u)\\
&\le \int_{B(z,K_0t)} d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(x),W)\,d\mu(x)\\
&\le (K_0t)^{k+1}[\beta_{1,\pi,A(2n,k)}(z,K_0t) + \delta].
\end{aligned} \tag{6.14}$$

另一方面，我们需要估计 $d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u))\ W)$，其中 $u \in B^k(p,t) \setminus P(Z)$。这对应于 [Hah12、引理 6.3、不等式 (34)、引理 6.4 和引理 6.5]: 这里我们仅将中间估计汇总起来。令 $I(p,t) := \{i \in I_0 \colon R_i \cap B^k(p,t) \ne \emptyset\}$，并注意到 $B^k(p,t) \setminus P(Z) = \bigcup_{i\in I(p,t)}(B^k(p,t) \cap R_i)$，因为 $B^k(p,t) \subset U_0$。将这一观察与前述 [Hah12] 中的估计相结合，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B^k(p,t)\setminus P(Z)} d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u)),W)\,du\\
&\lesssim \sum_{i\in I(p,t)} \sqrt{\varepsilon}\mathrm{diam}(R_i)^{k+1} + \sum_{i\in I(p,t)} \varepsilon\mathrm{diam}(R_i)\mathcal{L}^k(R_i) + \varepsilon^{-3k} \int_{B(z,K_0t)} d_{\mathrm{Eucl}}(\pi(x),W)\,d\mu.
\end{aligned}$$

现在我们可以使用改进后的估计式（6.12）得到

(6.15)
$$\int_{B^k(p,t)\setminus P(Z)} d_{\mathrm{Eucl}}((u,g(u)),W)\,du \lesssim \sum_{i\in I(p,t)} \sqrt{\varepsilon}\mathrm{diam}(R_i)^{k+1} + \varepsilon^{-3k}\,t^{k+1}[\beta_{1,\pi,A(2n,k)}(z,K_0t)+\delta].$$

结合 (6.13)、(6.14) 和 (6.15)，利用 $\delta>0$ 的任意性，我们得出

$$\gamma(p,t) \lesssim \varepsilon^{-3k}\beta_{1,\pi,A(2n,k)}(z,K_0t) + \sqrt{\varepsilon}\,t^{-k-1}\sum_{i\in I(p,t)}\mathrm{diam}(R_i)^{k+1}. \tag{6.16}$$

证明的最后一部分是从逐点不等式 (6.16) 推导出积分估计 (6.11)，这部分可以照搬 Hahlomaa 的论文中的论证，从方程 [Hah12, (38)] 开始，将水平 β-数 $\beta_{1,\mathcal{V}_k}$ 替换为投影 β-数 $\beta_{1,\pi,A(2n,k)}$ 即可。□

6.4.4. 步骤 *4*：从上方用 $\mu(Q(\mathcal{S}))$ 估计 $\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3$，并以 $\beta_{1,\pi,A(2n,k)}$-数表示。为了证明第 6.3 节开头定义的 $\mathcal{F}_3$ 中树的打包条件，我们用相应顶层立方体的测度来估计$\beta_{1,\pi,A(2n,k)}$-数。这将使我们能够在步骤 5 中利用假设 $E\in\mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)},2)$ 得出结论。

引理 6.10。设 $\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3$。那么

$$\mu(Q(\mathcal{S})) < \varepsilon^{-6k-1}\int_{K_0Q(\mathcal{S})}\int_{h_{\mathcal{S}}(x)/K_0}^{K_0\mathrm{diam}(Q(\mathcal{S}))} \beta_{1,\pi,A(2n,k)}(x,K_0t)^2\frac{dt}{t}\,d\mu(x). \tag{6.17}$$

证明。由引理 6.9，证明（用矛盾法）可归结为一个关于与 g相关联的γ-数的陈述。这对应于 [Hah12，第 7] 节以及 [DS91，第 11 节和第14]节。事实上，设 $\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3$，并注意到我们可以假设 $V_{Q(\mathcal{S})}=\{x\in\mathbb{H}^n:\text{对所有 } i>k\}$，都有 $x_i=0$，因为引理 6.10 中的所有量在群平移和旋转下均保持不变，包括 β_1、π、$A(2n,k)$；参见引理 3.12 和 3.13。用矛盾法，若 (6.17) 不成立，那么由引理 6.9 可得

$$\int_0^{K_0\mathrm{diam}(Q(\mathcal{S}))/2}\int_{U_1}\gamma(p,t)^2\,dp\frac{dt}{t} \le C(K_0)\varepsilon\mu(Q(\mathcal{S})). \tag{6.18}$$

这正是 [Hah12 的公式 (41)]；因此，证明的其余部分与 Hahlomaa的论文完全相同。这类论证也曾出现在例如 [L´eg99，第5] 节或 [DS91，第 14] 节中。利用 (6.18) 估计函数 g 的振荡，这与假设 $\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3$不相容；回想一下，$\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3$ 意味着 $Q(\mathcal{S})$中很大一部分（按 μ-测度计）被立方体 $Q\in m_2(\mathcal{S})$覆盖，而这些立方体至少有一个子立方体 R 满足 $\angle(V_R,V_{Q(\mathcal{S})})>1+\eta$。事实上，(6.18) 再结合 Calder´on 的重现公式（例如参见 [Wil08，第 5]章）应用于函数 g，可得

$$\mu\left(\bigcup_{Q\in m_2(\mathcal{S})}Q\right)\le C(K_0)\varepsilon^{1/3}\mu(Q(\mathcal{S})),$$

前提是适当地选取参数 K_0,η,ε,K。通过选取足够小的 ε（其取值取决于 K_0），这就与 $\mathcal{F}_3$ 的定义矛盾。□

6.4.5. 步骤 *5*：树的顶层立方体满足 *Carleson* 打包条件 $\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3$。在这一步中，我们证明利用水平平面构造电晕分解所需的最后一个要素。我们说明如何推导集合 $\mathcal{F}_3$的 Carleson 打包条件，从而得以推出冠状分解定义中的性质（3.18）。这可以看作是[DS91第 12] 节中论证的一种变体。这里我们使用了新的假设 $E\in\mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)},2)$。

引理 6.11。 存在一个常数 $C = C(\varepsilon, K_0) > 0$，使得

$$\sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3, Q(\mathcal{S})\subseteq R} \mu(Q(\mathcal{S})) \le C\mu(R), \quad R \in \mathcal{D}.$$

证明。 完全按照 [Hah12，引理 8。1], 的 Ahlfors 正则性 E 给出了一个界$N = N(K_0) \in \mathbb{N}$ 使得对于每个 $x \in E$ 以及任意 $t \in \mathbb{R}$，满足 N 的树少于 $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$棵 $x \in K_0Q(\mathcal{S})$ 和 $h_{\mathcal{S}}(x)/K_0 < t < K_0 \operatorname{diam}(Q(\mathcal{S}))$。结合前一步的引理 6.10 与这一观察，可估计得

$$\begin{aligned}\sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3, Q(\mathcal{S})\subseteq R} \mu(Q(\mathcal{S})) &\le \sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{F}_3, Q(\mathcal{S})\subseteq R} \varepsilon^{-6k-1} \int_{K_0Q(\mathcal{S})} \int_{h_{\mathcal{S}}(x)/K_0}^{K_0\operatorname{diam}(Q(\mathcal{S}))} \beta_{1,\pi,A(2n,k)}(x, K_0t)^2 \frac{dt}{t}\, d\mu(x) \\ &\le N\varepsilon^{-6k-1} \int_{K_0R} \int_0^{K_0\operatorname{diam}(R)} \beta_{1,\pi,A(2n,k)}(x, K_0t)^2 \frac{dt}{t}\, d\mu(x).\end{aligned}$$

由（3.4）以及我们的主要假设 $E \in \mathrm{GLem}(\beta_{1,\pi,A(2n,k)}, 2)$，可得所需的最终界。□

References

[AK00] Luigi Ambrosio 和 Bernd Kirchheim. “度量空间与 Banach 空间中的可整流集”。载于：《Math. Ann.》318.3 (2000)，第 527–555 页。[AM22] Gioacchino Antonelli 和 Andrea Merlo. “卡诺群中的可求 rectifiable 测度：Marstrand-Mattila 可整流性判据”。载于：《J. Funct. Anal.》283.1 (2022)，论文编号 109495，共 62 页。[BF09] Zolt´an Balogh 和 Katrin F¨assler. “到海森堡群的可整性与 Lipschitz 延拓”。载于：《Math. Z.》263.3 (2009)，第 673–683 页。[BFMT12] Zolt´an Balogh、Katrin F¨assler、Pertti Mattila 和 Jeremy T. Tyson. “海森堡群中的投影与切片定理”。载于：《Adv. Math.》231.2 (2012)，第 569–604 页。[BHHLN22] Simon Bortz、John Hoffman、Steve Hofmann、Jose Luis Luna-Garcia 和 Kaj Nystr¨om. “度量空间中的冠状分解与大块”。载于：《Ann. Inst. Fourier (Grenoble)》72.5 (2022)，第 2037–2078 页。[BHS23] David Bate、Matthew Hyde 和 Raanan Schul. “一致可求 rectifiable 度量空间：Lipschitz 像、双侧弱几何引理与电晕分解”。预印本，arXiv:2306.12933，2023。[BLZ23] Matthew Badger、Sean Li 和 Scott Zimmerman. “卡诺群中 1-可整流测度的识别”。载于：《分析、几何与度量空间》11.1 (2023)，论文编号 20230102，共 40 页。[CDPT07] Luca Capogna、Donatella Danielli、Scott D. Pauls 和 Jeremy T. Tyson.《海森堡群与次黎曼等周问题导论》。第 259 卷，《数学进展》。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，2007 年，第 xvi+223. ISBN 页：978-3-7643-8132-5；3-7643-8132-9。[CFO19] Vasileios Chousionis、Katrin F¨assler 和 Tuomas Orponen. “海森堡群中的内在Lipschitz图与垂直 β-数”。载于：《Am. J. Math.》141.4 (2019)，第 1087–1147 页。[Chr90] Michael Christ. “关于解析容量与 Cauchy 积分的评注及一个 $T(b)$ 定理”。载于：《Colloq. Math.》60/61.2 (1990)，第 601–628 页。[CL17] Vasileios Chousionis 和 Sean Li. “海森堡群中的非负核与 1-可整性”。载于：《分析与偏微分方程》10.6 (2017)，第 1407–1428 页。

[CLY22] Vasileios Chousionis、Sean Li 和 Robert Young. “海森堡群中内在Lipschitz图的强几何引理”。载于：《J. Reine Angew. Math.》784 (2022)，第 251–274 页。[CLY25] Vasileios Chousionis、Sean Li 和 Robert Young. “海森堡群中的强几何引理”。载于：《Int. Math. Res. Not.》2025.12 (2025)。编号 rnaf162，第 32 页。[CLY26] Vasileios Chousionis、Sean Li 和 Robert Young. “海森堡群中内在Lipschitz图上的 Riesz 变换”。即将发表于《美国数学会回忆录》(2026)。[CLZ19] Vasileios Chousionis、Sean Li 和 Scott Zimmerman. “卡诺群中的旅行推销员定理”。英文。载于：《Calc. Var. Partial Differ. Equ.》58.1 (2019)。第 14 号，第 35 页。[DF22] D. Di Donato 和 K. F¨assler. “海森堡群中低维内在Lipschitz图的延拓与电晕分解”。载于：《Ann. Mat. Pura Appl.》(4) 201.1 (2022)，第 453–486 页。[DS91] G. David 和 S. Semmes.《奇异积分与可整流集：超越利普希茨图》。Asterisque，第 193 号，1991。 $\mathbb{R}^n$DS[G. David 和 S. Semmes.《一致可整流集及其上的分析》。数学调查与专著，第 38 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993。93] FFP[Fausto Ferrari、Bruno Franchi 和 Herv´e Pajot. “海森堡群中的几何旅行商问题”。载于：《伊比利亚美洲数学评论》23.2 (2007)，第 437–480 页。[FO20] KatrinF¨assler 和 Tuomas Orponen. “海森堡群中的 Dorronsoro 定理”。英文。载于：《Bull. Lond. Math. Soc.》52.3 (2020)，第 472–488 页。[FO21] Katrin F¨assler 和 Tuomas Orponen. “海森堡群中正则曲线上的奇异积分”。载于：《纯粹与应用数学杂志》(9) 153 (2021)，第 30–113 页。[FOR20] Katrin F¨assler、Tuomas Orponen 和 S´everine Rigot. “海森堡群中的 Semmes 曲面与内在Lipschitz图”。载于：《美国数学会汇刊》373.8 (2020)，第 5957–5996 页。[FSS07] Bruno Franchi、Raul Serapioni 和 Francesco Serra Cassano. “海森堡群中的正则子流形、图与面积公式”。载于：《Adv. Math.》211.1 (2007)，第 152–203 页。[FV25a] Katrin F¨assler 和 Ivan Yuri Violo. “关于度量空间中的各种 Carleson 型几何引理与一致可整性：第一部分”。载于：《伊比利亚美洲数学评论》，2025 年在线优先发表。[FV25b] Katrin F¨assler 和 Ivan Yuri Violo.《关于度量空间中的各种 Carleson 型几何引理与一致可整性：第二部分》。预印本，arXiv:2505.15421，2025。[Hah12] Immo Hahlomaa. “关于海森堡群中欧几里得空间子集的双利普希茨像大块存在的一个充分条件”。预印本，arXiv:1212.0687，2012。[Hak20] Eero Hakavuori. “二阶卡诺群中的无限测地线与等距嵌入”。载于：《SIAM J. Control Optim.》58.1 (2020)，第 447–461 页。[HJ25] John Hoffman 和 Ben Jaye. “抛物空间与海森堡群中的奇异积分和定量可整性”。载于：arXiv 电子预印本，arXiv:2510.269 (2025 年 10 月)，arXiv:2510.26934。[HM12] Tuomas Hyt¨onen 和 Henri Martikainen. “度量测度空间中的非齐次 Tb 定理与随机二进立方体”。载于：《J. Geom. Anal.》22.4 (2012)，第 1071–1107 页。

[HMMM17] Steve Hofmann、Dorina Mitrea、Marius Mitrea 和 Andrew J. Morris。《齐次型空间和一致可整流集上的 L^p-平方函数估计》。载于：《美国数学学会回忆录》245.1159（2017），第 v+108 [HZ15] Piotr Haj-lasz 和 Scott Zimmerman。《海森堡群中的测地线》。载于：《分析、几何与度量空间》3.1（2015），第 325–337 页。[Jui10] Nicolas Juillet。《海森堡群中几何旅行商问题的一个反例》。载于：《伊比利亚美洲数学评论》26.3（2010），第 1035–1056 页。[KN10] Tom Klein 和 Andrew Nicas。《海森堡群的视距函数边界：卡诺-卡拉泰奥多里度量》。载于：《共形几何与动力系统》14（2010），第 269–295 页。[L´eg99] J. C. L´eger。《门格尔曲率与可整流性》。载于：《数学年刊》（第 2 辑）149.3（1999），第 831–869 页。[Li22] Sean Li。《分层 β-数与卡诺群中的旅行商问题》。载于：《伦敦数学会杂志》第二辑（2022），106(2)：662–703。[LN18] Enrico Le Donne 和 Sebastiano Nicolussi Golo。《齐次群中球面的正则性性质》。载于：《美国数学会汇刊》370.3（2018），第 2057–2084 页。[LS16a] Sean Li 和 Raanan Schul。《海森堡群中旅行商路径长度的一个上界》。载于：《伊比利亚美洲数学评论》（2016），32(2)，391–417。[LS16b] Sean Li 和 Raanan Schul。《海森堡群中的旅行商问题：曲率的上界》。载于：《美国数学会汇刊》（2016），368(7)，4585–4620。[Mag04] Valentino Magnani。《分层群中的不可整流性与刚性》。载于：《数学文献》（巴塞尔）83.6（2004），第 568–576 页。[Mag10] Valentino Magnani。《接触方程、Lipschitz 延拓与等周不等式》。载于：《变分法与偏微分方程》39.1-2（2010），第 233–271 页。[Mer23] Andrea Merlo。《卡诺群中 1-余维测度的 Marstrand-Mattila 可整流性判据》。载于：《分析与偏微分方程》16.4（2023），第 927–996 页。[MS17] Roberto Monti 和 Giorgio Stefani。《 H-周长极小边界的改进 Lipschitz 逼近》。载于：《纯粹与应用数学杂志》（第 9 辑）108.3（2017），第 372–398 页。[MSS10] Pertti Mattila、Raul Serapioni 和 Francesco Serra Cassano。《海森堡群中内在可整流性的刻画》。载于：《比萨高等师范学院科学分类学报》（第 5 辑）9.4（2010），第 687–723 页。ISSN：0391-173X。[NY18] Assaf Naor 和 Robert Young。《垂直周长与水平周长》。载于：《数学年刊》（第 2 辑）188.1（2018），第 171–279 页。[NY22] Assaf Naor 和 Robert Young。《叶状晕分解》。载于：《数学学报》229.1（2022），第 55–200 页。[Rig19] S´everine Rigot。《海森堡群中可整流性的定量概念》。载于：arXiv 电子预印本，arXiv:1904.06904（2019 年 4 月），arXiv:1904.06904。[Sch07] Raanan Schul。《分析学家的旅行商定理：一篇综述》。载于：《Ahlfors-Bers 传统，第 IV 卷》。第三届 Ahlfors-Bers 学术讨论会论文集，美国密歇根州安娜堡，2005 年 5 月 19–22 日。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2007 年，第 209–220 页。[Sch09] Raanan Schul。《将 Lipschitz 函数双 Lipschitz 分解为度量空间中的函数》。载于：《伊比利亚美洲数学评论》25.2（2009），第 521–531 页。ISSN：0213-2230。

[Ser16] Francesco Serra Cassano。《卡诺群中的几何测度论专题》。载于：次黎曼流形上的几何、分析与动力学。第 *1* 卷。《欧洲数学学会讲义数学丛书》。欧洲数学学会，苏黎世，2016年，第 1–121 页。[Vio22] Ivan Yuri Violo。《关于欧几里得空间中集合的两种平坦性概念的一个注记》。载于：《莱茵与应用数学杂志》791（2022），第 157–171 页。[Wil08] Michael Wilson。加权 *Littlewood-Paley* 理论与指数平方可积性。第 1924 卷。《数学讲义》。施普林格，柏林，2008年，第 xiv+224

ISBN: 978-3-540-74582-2.[WY10] Stefan Wenger 和 Robert Young. “到喷射空间卡诺群的 Lipschitz 延拓”.载于：《数学研究快报》17.6 (2010年), 第 1137–1149 页。 ISSN: 1073-2780.

Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, P.O. Box 35 (MaD), FI-40014 University of Jyväskylä, Finland电子邮箱：katrin.s.fassler@jyu.fi

Dipartimento di Matematica, Università di Trento, Via Sommarive, 14, 38123 Povo TN, Italy电子邮箱：andrea.pinamonti@unitn.it

Dipartimento di Matematica, Università di Trento, Via Sommarive, 14, 38123 Povo TN, Italy电子邮箱：kilian.zambanini@unitn.it