带否定的 DatalogMTL 的不动点语义*

Samuele Pollaci布鲁塞尔自由大学 比利时布鲁塞尔 鲁汶天主教大学 比利时鲁汶
Samuele.Pollaci@vub.be

DatalogMTL¬ 是 Datalog 的扩展，加入了度量时序算子以及不可分层否定。本文运用近似不动点理论（AFT）这一严谨的数学形式体系，以非常简单直接的方式定义了 DatalogMTL¬ 的稳定模型、良基、Kripke-Kleene 和支持模型语义。此外，我们证明，通过 AFT 得到的稳定模型语义与先前工作中借助源自此与彼逻辑的解释对所定义的语义相一致。

1 引言

Datalog [1] 是一种声明式查询语言，通过递归扩展关系代数。过去几十年间，出现了多种 Datalog 变体及其实现 [18], , 旨在解决各种应用中的数据管理任务 [16]。其中一种变体是 DatalogMTL[8], , 它通过引入度量时序逻辑 [21], 中的算子来扩展 Datalog 语言，可应用于基于本体的查询应答 [8, 17, 19, 20], 、流推理 [30, 31], 以及金融领域的推理 [23, 22, 9], 等。

例如，我们可以使用以下 DatalogMTL 规则来表达：成年人服用一片扑热息痛后，必须至少等待 6 小时才能再服用一片：

$$NoMoreParacetamol(x) \leftarrow Adult(x) \wedge \diamondminus_{[0,6]}\, TakesParacetamol(x),$$

其中，$\diamondminus_{[0,6]}$ TakesParacetamol(x) 在时间点 t 为真，当且仅当 TakesParacetamol(x) 在过去 6 小时内的某个时刻为真，也就是说，在区间 $[t-6,t]$内的某个时刻 t'。除 $\diamondminus_{[0,6]}$之外，DatalogMTL 的表达式中还允许使用其他一些度量时序算子。例如，若 φ是一个公式，且 $[t_1,t_2]$ 是有理数或整数时间线上的一个区间，那么$\boxminus_{[t_1,t_2]}\varphi$在时间 t 成立，当且仅当 φ在区间 $[t-t_2,t-t_1]$的所有时间点都成立。类似地，$\diamondminus$ 和 $\boxminus$也分别有面向未来的对应算子 $\diamondplus$ 和 $\boxplus$：$\diamondplus_{[t_1,t_2]}\varphi$在时间 t 成立，当且仅当 φ在区间 $[t+t_1,t+t_2]$的某个时间点成立；$\boxplus_{[t_1,t_2]}\varphi$也同理。DatalogMTL 数据集是一组事实，每个事实都与一个时间区间配对。例如，若 TakesParacetamol(John)@$[8,8]$ 包含在某个数据集中，则表示约翰在上午 8 点服用了一片扑热息痛。

2021年，DatalogMTL 扩展了分层失败否定 [10], , 允许规则体中出现否定原子，但不允许递归。最近，通过在稳定模型语义下为 DatalogMTL 引入不可分层否定 [29],, 并为带分层否定的 DatalogMTL 和带稳定模型否定的 Datalog 增添相应功能，进一步拓展了 DatalogMTL 的能力范围。在这篇论文中，为了求得数据集和程序的稳定模型，作者采用了类似于此与彼逻辑中的解释

*本研究由弗兰德斯科学研究基金会资助（项目编号 G0B2221N）

M. Gebser、D. Inclezan、F. Ricca、M. Carro 和 M. Truszczynski：第41届国际逻辑编程会议（ICLP 2025），EPTCS439，2026，第263–277页，doi:10.4204/EPTCS.439.19

© S. Pollaci 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

的解释 [15, 24], , 即解释对 (I,J)，其中 I 和 J 都是（二值）解释，且 I 判定为真的原子在 J 下也为真。尽管用途不同，这种基于解释对的框架同样是近似不动点理论 (AFT) 众多应用的核心 [12, 13], , 这促成了本文的撰写。

近似固定点理论最初用于研究非单调逻辑的语义，例如逻辑程序设计、自认知逻辑和默认逻辑。它已成功应用于其他若干领域，例如抽象论证 [26], 主动完整性约束 [5], 流推理 [2], 以及语义网的约束语言 [6]。在（一致的）AFT [13], 中，一对满足 I ⊆J 的二值解释 (I,J) 被视为对另一二值解释的近似：若 I 和 J 都将某个原子解释为真（或假），则该原子的值是精确的，即真（或假）；而若 I 将某个原子赋为假、J 将其赋为真，则该原子既可能为真，也可能为假，也就是说，它的值未定义。换言之，一对二值解释等价于一个三值解释，后者将每个原子映射为真、假或未定义。根据具体应用，可在三值解释集合上定义一个合适的语义算子，称为近似算子。随后，AFT 的机制便能以直接而清晰的方式给出一系列众所周知的语义及所需的性质。事实证明，一致的 AFT 适用于定义 DatalogMTL 的稳定模型语义¬，再次展现了 AFT 形式体系的强大功能和灵活性。

在本文中，我们考虑在 [29], 中已经考虑过的解释对集合，在其上定义一个算子，并证明该算子是一致近似算子。随后，AFT 使我们不仅能够获得 DatalogMTL¬的稳定模型语义，还能获得良基语义、Kripke-Kleene 语义以及支持模型语义。最后，我们证明，通过使用 AFT 得到的稳定模型，与 [29]中定义的稳定模型相同。采用 AFT 框架的优势可概括如下：

1. 轻而易举。唯一需要做的就是定义恰当的近似算子；随后，AFT 的机制便能自动给出稳定模型语义、良基语义、Kripke-Kleene 语义和支持模型语义。对于大多数应用而言，选择近似算子的方式都很自然；DatalogMTL¬也不例外。事实上，该近似算子与 Fitting 三值即时后承算子 [14],非常相似，只略作调整以处理时间点和数据集。 2. 坚实的数学基础。AFT 提供了广泛的性质和一般性结果，适用于其所有应用；因此，在切换应用场景时，无需重新证明若干命题。例如，导出 DatalogMTL¬ 在 [29], 中稳定模型定义的极小性与唯一性结果（ [29]中的定理 3.4），已由 AFT 框架保证。 3. 可靠。AFT 坚实的数学基础使所得结果更加可靠。即使语义已经定义，例如 DatalogMTL¬的稳定模型语义，AFT 仍是检查先前工作的内容是否存在错误的有力工具。例如，将 AFT 用于抽象辩论框架时，发现了原始语义中的一些错误 [4]。

本文的结构如下。首先，我们介绍有关 AFT（第2.1节）以及 DatalogMTL¬ 的语法和语义（第 2.2 节）的预备知识。在第3节中，我们定义应用 AFT 所需的基本概念：三值语义，以及即时后果算子（二值和三值）。此外，我们证明这些算子的前不动点与二值模型和三值模型之间存在对应关系。在第4节中，我们最终能够应用 AFT；只需证明上一节定义的三值即时后果算子确实是一致近似算子。随后，我们便能够通过 AFT 定义 Kripke-Kleene、

稳定、良基和支持模型。最后，在第5节中，我们将三值模型和二值稳定模型的概念与 [29], 中的概念进行比较，并证明通过 AFT 获得的稳定模型与 [29]中的稳定模型相同。

2 预备知识

本节首先介绍构成近似固定点理论基础的概念（第2.1节）。然后，我们介绍与时间线、DatalogMTL¬的语法以及规则体的语义相关的基本定义和符号（第 2.2 节），这些内容均如 [29]中所述。

2.1 近似固定点理论

近似固定点理论将塔斯基理论推广到非单调算子 [27], ，其最初目标是研究非单调逻辑的语义。因此，近似固定点理论在很大程度上依赖于以下序理论概念。

偏序集（poset）P 是一个配备了偏序 $\leq_P$的集合，即一种自反、反对称、传递的关系。我们通常将偏序集表示为 $\langle P \leq_P \rangle$，其中 P 是底层集合，而 $\leq_P$ 是偏序。给定子集 $S \subseteq P$，若下界 l 大于 S 的任何其他下界，则 l 是 S 的最大下界，记作 $\bigsqcap S$。类似地，若上界 u 小于 S 的任何其他上界，则 u 是 S 的最小上界，记作 $\bigsqcup S$。链完备偏序集（cpo）是满足如下条件的偏序集 C：对于 C 中的每条链 $S \subseteq C$（即一个全序子集），$\bigsqcup S$ 都存在。完备格是满足如下条件的偏序集 L：对于 L 中的每个子集 $S \subseteq L$，$\bigsqcup S$ 和 $\bigsqcap S$ 都存在。偏序集之间的函数 $f : P_1 \to P_2$称为单调的，如果对于所有满足 $x \in P_1$ 且 $x \leq_{P_1} y$ 的 x、y，都有 $f(x) \leq_{P_2} f(y)$。我们将定义域等于陪域的函数 $O : C \to C$ 称为算子。若 $O(x) = x$（分别为 $O(x) \leq_C x$），则 C 中的元素 $x \in C$ 称为 O 的不动点（分别为前不动点）。根据塔斯基最小不动点定理，cpo 上的每个单调算子 O 都有一个最小不动点，记作 lfp(O)。为了对源自非单调逻辑的算子使用类似原理，一致的 AFT [13] 针对每个完备格 L，考虑其关联的近似空间 $\langle L^c, \leq_p \rangle$，其中 $L^c = \{(x, y) \mid x, y \in L, x \leq_L y\} \subseteq L^2$,，并且 $\leq_p$ 是笛卡尔积 L^2, 上的精度序，即 $(x_1, y_1) \leq_p (x_2, y_2)$ 当且仅当 $x_1 \leq_L x_2$ 且 $y_2 \leq_L y_1$。L^c可视为 L 的一种近似：L^c 中的元素 $(x, y) \in$ “近似”$L \in$ 中满足 $x \leq_L z \leq_L y$ 的所有值 z。形如 $(x, x) \in L^2$ 的对称为精确的，因为它们只近似 L 中的一个元素。

若算子 $A : L^c \to L^c$是算子 $O : L \to L$ 的一致近似算子，当且仅当它是单调的，并且在精确对上与 O 的行为相同，即对于所有 $x \in L$，都有 $A(x,x) = (O(x), O(x))$。我们分别用 A_1和 A_2表示 A 的第一和第二分量，即对于所有 $(x, y) \in L^c$，都有 $A(x, y) = (A_1(x, y), A_2(x, y))$。根据定义，A 是单调的，因此由塔斯基定理，A 存在一个最小不动点，称为 Kripke-Kleene 不动点。此外，给定一个近似算子 A，很容易定义另外三种值得关注的不动点：支持不动点、稳定不动点和良基不动点。我们将在第4节末尾的定义 4.1 中详细介绍这些不动点。如果 A 是 Fitting 三值即时后承算子 [14] ,，那么上述四种不动点分别对应于逻辑程序设计[12, 11]中同名的语义。

2.2 DatalogMTL¬

时间线 $\mathbb{T}$ 可以是整数环 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$，也可以是有理数环 $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$，其顺序由加法给出。一个（$\mathbb{T}$-）区间 δ 是 $\mathbb{T}$ 的非空子集，并满足以下条件：

1. δ是凸的，即对于所有 $t_1, t_2 \in \delta$，对于所有满足 $t_1 < t < t_2$, 的 $t \in \mathbb{T}$，均有 $t \in \delta$ ；

2. $\bigsqcap\delta, \bigsqcup\delta \in \mathbb{T} \cup \{+\infty, -\infty\}$。

如果对于所有 $t \in \delta$，均有 $t \geq 0$，则称区间 δ为非负区间。我们用标准记法$\langle \bigsqcap\delta, \bigsqcup\delta \rangle$表示区间 δ，其中左括号 $\langle$在 $\bigsqcap\delta \in \delta$时可以是 $[$，否则为（；右括号 $\rangle$在 $\bigsqcup\delta \in \delta$时可以是 $]$，否则为）。对于任意 $t \in \mathbb{T}$，我们将区间 $[t,t]$ 简记为 t。

现在考虑一个无函数一阶词汇和时间线 $\mathbb{T}$。对于任意谓词 P，以及由常量和变量组成、元数与 P 相同的元组 s，我们称 P(s) 为关系原子。度量原子是如下形式的表达式

$$M ::= \top \mid \bot \mid P(\mathbf{s}) \mid \diamondminus_\delta M \mid \boxminus_\delta M \mid \boxminus_\delta M \mid \boxplus_\delta M \mid M \mathscr{S}_\delta M \mid M \mathscr{U}_\delta M,$$

其中，P(s) 遍历关系原子，δ 遍历非负区间。若度量原子不包含任何变量，则称其为基度量原子。头原子是由以下语法指定的度量原子：

$$M ::= \top \mid P(\mathbf{s}) \mid \boxminus_\delta M \mid \boxplus_\delta M, \tag{1}$$

其中，P(s) 遍历关系原子，δ 遍历非负区间。我们用 $\mathscr{M}$ 表示基头原子的集合。度量事实是形如 M@δ 的表达式，其中 M 是基度量原子，δ 是一个区间。如果 M 是基关系原子，那么度量事实 M@δ 也是关系事实。数据集是有限个关系事实构成的集合。一个（二值）解释 I 是一个函数，它为每个 $t \in \mathbb{T}$ 指定一个基关系原子集合 I(t)。若对于所有关系事实 P(s)@$\delta \in \mathscr{D}$ 以及所有 $t \in \delta$，均有 P(s) $\in$ I(t)，则称二值解释 I 是数据集 $\mathscr{D}$ 的（二值）模型。注意，解释可依据子集关系进行排序，即 $I \subseteq J$，当且仅当对于所有 $t \in \mathbb{T}$，$I(t) \subseteq J(t)$。我们用 $\mathbb{I}$ 表示所有二值解释的集合。规则 r 是如下形式的表达式

$$M \leftarrow M_1 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge \mathsf{not}\, M_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{not}\, M_m, \tag{2}$$

其中 $m \geq k \geq 0$，每个 M_i都是一个度量原子，且 M 是一个头原子。我们称原子 $M1, \ldots, M_k$为正原子，称 $M_{k+1}, \ldots, M_m$为否定原子。规则中正原子和否定原子的合取称为其体，而后件 M 称为其头。为简洁起见，我们通常将规则记作 M $\leftarrow$B，其中 B 表示体中的合取。请注意，形式为 $\bot \leftarrow$B 的规则在 [29], 中是允许的，但本文不考虑这类规则。相反，我们将使用形式为 P $\leftarrow$B $\wedge$not P 的规则，来表示 B 必须在每个模型中为假。如果规则提及的每个变量都出现在某个正体原子中，且其所在位置不是 $\mathscr{S}$ 或 $\mathscr{U}$ 的左操作数，那么该规则就是安全的。程序是有限个安全规则组成的集合。若规则不含变量，则称其为基规则。对于程序 Π，我们用 ground(Π) 表示通过将变量替换为常量，从 Π 中的规则可能得到的所有基规则的集合。

我们以 DatalogMTL$^\neg$ 的二值语义，以及数据集和程序的二值模型定义作为预备知识部分的结尾。

定义 2.1. 设 Π 是一个程序，I 是一个解释，且 $t \in \mathbb{T}$。基度量原子和体的二值语义定义如下：

1. $[\![\top]\!](I,t) = \mathit{true}$,
2. $[\![\bot]\!](I,t) = \mathit{false}$,
3. $[\![P(\mathbf{s})]\!](I,t) = \begin{cases} \mathit{true}, & \mathit{if}\ P(\mathbf{s}) \in I(t) \\ \mathit{false}, & \mathit{otherwise} \end{cases}$,
4. $[\![\diamondminus_\delta M]\!](I,t) = \bigsqcup_{\leq_\tau} \{ [\![M]\!](I,t') \mid t' \in \mathbb{T}\ \mathit{such\ that}\ t - t' \in \delta \}$,

5. $[\![\oplus_\delta M]\!](I,t) = \bigsqcup_{\leq_\tau}\{[\![M]\!](I,t') \mid t' \in \mathbb{T}$ 使得 $t' - t \in \delta\}$, 6. $[\![\boxminus_\delta M]\!](I,t) = \bigsqcap_{\leq_\tau}\{[\![M]\!](I,t') \mid t' \in \mathbb{T}$ 使得 $t - t' \in \delta\}$, 7. $[\![\boxplus_\delta M]\!](I,t) = \bigsqcap_{\leq_\tau}\{[\![M]\!](I,t') \mid t' \in \mathbb{T}$ 使得 $t' - t \in \delta\}$, 8. $[\![M_1 \mathcal{S}_\delta M_2]\!](I,t) =$ 真，当 $[\![M_2]\!](I,t') =$ 在某个 t'（满足 $t - t' \in \delta$）时为真，且对于所有 $t'' \in$ ，$[\![M_1]\!](I,t'') =$ 为真；若 (t',t) 为假则为假， 9. $[\![M_1 \mathcal{U}_\delta M_2]\!](I,t) =$ 真，当 $[\![M_2]\!](I,t') =$ 在某个 t'（满足 $t' - t \in \delta$）时为真，且对于所有 $t'' \in$ ，$[\![M_1]\!](I,t'') =$ 为真；若 (t,t') 为假则为假， 10. $[\![$非 $M]\!](I,t) = [\![M]\!](I,t)^{-1}$, 11. $[\![M_1 \wedge \ldots \wedge M_m]\!](I,t) = \bigsqcap_{\leq_\tau}\{[\![M_1]\!](I,t) \ldots, [\![M_m]\!](I,t)\}$,

其中我们定义 $\text{false}^{-1} = \text{true}$ 和 $\text{true}^{-1} = \text{false}$， $\leq_\tau$ 是真值序，即由 $\text{false} \leq_\tau \text{true}$ 定义的序。

定义 2.2. 设 Π 为一个程序， $\mathcal{D}$ 为一个数据集，$I \in \mathbb{I}$ 为一个解释。那么，I 是 Π 的（二值）模型，当且仅当对于每条规则 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$，以及每个 $t \in \mathbb{T}$， $[\![B]\!](I,t) \leq_\tau [\![M]\!](I,t)$。I 是 Π和 $\mathcal{D}$ 的（二值）模型，当且仅当 I 是 Π 的二值模型，且是 $\mathcal{D}$的模型。

3 DatalogMTL$^\neg$ 的三值语义与即时后果算子

为了应用近似固定点理论（AFT）的机制，我们只需定义一个近似空间和一个合适的近似算子。这相当直接：近似空间是三值解释构成的空间，而近似算子则是对 Fitting 的三值即时后果算子 [14] 的改造。

本节首先定义规则体的三值解释和三值语义。随后，我们定义二值即时后果算子和三值即时后果算子，并证明它们分别刻画二值模型和三值模型。

利用三值解释可以轻松定义规则体的三值语义。三值解释 $\mathcal{I}$ 将一个函数 $\mathcal{I}(t)$ 与每个 $t \in \mathbb{T}$ 相关联，该函数以基关系原子为输入，并返回 true、false 或 undef。注意，三值解释也可以视为一对二值解释 (I_1,I_2)，其中 $I_1,I_2 \in \mathbb{I}$，且 $I_1 \subseteq I_2$：$I_1(t)$ 中的原子解释为 true，属于 $I_2(t)$ 但不属于 $I_1(t)$ 的原子解释为 undef，而不属于 $I_2(t)$ 的原子解释为 false（在时间 t）。注意，三值方法与“成对”方法中的真值对应关系如下：true $\triangleq$ (true, true)，undef $\triangleq$ (false, true)，false $\triangleq$ (false, false)。为清晰起见，我们将使用花体字母来区分三值解释与二值解释。对于三值解释 $\mathcal{I}$，我们将用 I_1 和 I_2 表示构成这一对的两个二值解释 $\mathcal{I}$，即 $\mathcal{I} = (I_1,I_2)$。按照第 2.1节引入的记法，我们用 $\mathbb{I}^c$ 表示三值解释的集合。现在可以直接定义三值语义。注意，我们在定义 2.1 中沿用了二值语义的相同记法；只需查看参数中的解释（二值或三值），便可轻松区分这两种语义。

定义 3.1。设 Π 为一个程序，$\mathscr{I}$ 为一个三值解释，且 $t \in \mathbb{T}$。基度量原子和体的三值语义定义如下：

1. $[\![M]\!](\mathscr{I},t) = ([\![M]\!](I_1,t),[\![M]\!](I_2,t))$,
2. $[\![\text{not } M]\!](\mathscr{I},t) = [\![M]\!](\mathscr{I},t)^{-1}$,
3. $[\![E_1 \wedge \ldots \wedge E_m]\!](\mathscr{I},t) = \bigsqcap_{\leq_\tau}\{[\![E_1]\!](\mathscr{I},t),\ldots,[\![E_m]\!](\mathscr{I},t)\}$,

其中，我们定义 $\text{false}^{-1} = \text{true}$、$\text{undef}^{-1} = \text{undef}$ 和 $\text{true}^{-1} = \text{false}$，且 $\leq_\tau$ 是（三值）真值序，即由 $\text{false} \leq_\tau \text{undef} \leq_\tau \text{true}$ 定义的序。

注 1. 注意，在定义 3.1 中有

$$[\![E_1 \wedge \ldots \wedge E_m]\!](\mathscr{I},t) = \bigsqcap_{\leq_\tau}\{[\![E_1]\!](\mathscr{I},t),\ldots,[\![E_m]\!](\mathscr{I},t)\} = ([\![E_1 \wedge \ldots \wedge E_m]\!](I_1,t),[\![E_1 \wedge \ldots \wedge E_m]\!](I_2,t)).$$

类似于我们在第 2.2 节中的做法，我们可以自然地得到三值模型的定义。

定义 3.2. 设 Π 为一个程序，$\mathscr{D}$ 为一个数据集，$\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$ 为一个三值解释。那么，$\mathscr{I}$ 是 Π 的一个（三值）模型，当且仅当对于每条规则 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$，以及每个 $t \in \mathbb{T}$，$[\![B]\!](\mathscr{I},t) \leq_{\sqcup} [\![M]\!](\mathscr{I},t)$。$\mathscr{I}$ 是 Π 和 $\mathscr{D}$ 的一个（三值）模型，当且仅当 $\mathscr{I}$ 是 Π 的一个三值模型，且 I_1 是 $\mathscr{D}$ 的一个模型。

在定义二值和三值即时后果算子之前，我们构造一个函数 F，以明确基头原子与其所指时间点之间的联系。回想一下，我们允许在规则的头中嵌套 $\boxplus$ 和 $\boxminus$ 算子。

对于所有 $t \in \mathbb{T}$，以及所有基头原子 $M \in \mathscr{M}$，我们定义：

$$F(M,t) := \begin{cases} \bigcup_{t' \in \mathbb{T} \mid t-t' \in \delta}\{F(M',t')\} & \text{if } M = \boxminus_\delta M' \\ \bigcup_{t' \in \mathbb{T} \mid t'-t \in \delta}\{F(M',t')\} & \text{if } M = \boxplus_\delta M' \\ \{(M,t)\} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

根据二值和三值语义的定义以及 F 的构造，很容易看出时间点 timet 处的基头原子 M 与其所指关系事实之间的关系，具体如下述命题所述。

命题 3.1。设 $M \in \mathscr{M}$, $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$，且 $t \in \mathbb{T}$。以下陈述成立：

1. $[\![M]\!](I,t) =$ 当且仅当对于所有 $(P(s),t') \in F(M,t)$，$[\![P(s)]\!](I,t') =$ 为真。
2. $[\![M]\!](\mathscr{I},t) = \bigsqcap_{\leq_\tau}\{[\![P(s)]\!](\mathscr{I},t') \mid (P(s),t') \in F(M,t)\}$。

证明。根据 F 的定义，条目 1 显然成立。对于条目 2，根据定义 3.1，我们可以写出以下等式：$[\![M]\!](\mathscr{I},t) = ([\![M]\!](I_1,t)\ [\![M]\!](I_2,t))$，以及对于所有 $(P(s),t') \in F(M,t)$，$[\![P(s)]\!](\mathscr{I},t') = ([\![P(s)]\!](I_1,t')\ [\![P(s)]\!](I_2,t'))$。然后，条目 2 可由条目 1 轻易推出。□

现在，针对数据库 $\mathscr{D}$ 和程序 Π 的二值和三值即时后果算子的定义自然得出。

定义 3.3. 设 Π 为一个程序，$\mathscr{D}$ 为一个数据集。映射 $T_{\mathscr{D},\Pi}: \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 称为 $\mathscr{D}$ 和 Π 的即时后果算子，并对所有 $t \in \mathbb{T}$ 定义如下

$$T_{\mathscr{D},\Pi}(I)(t) := \{P(\mathbf{s}) \mid \exists \delta \textit{ such that } P(\mathbf{s})@\delta \in \mathscr{D} \textit{ and } t \in \delta\}$$
$$\cup \{P(\mathbf{s}) \mid \exists M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi), \exists t' \in \mathbb{T} \textit{ such that } [\![B]\!](I,t') = \textit{true and } (P(\mathbf{s}),t) \in F(M,t')\}$$

定义 3.4. 设 Π 为一个程序，$\mathscr{D}$ 为一个数据集。映射 $\Psi_{\mathscr{D},\,\Pi}\colon \mathbb{I}^c \to \mathbb{I}^c$ 称为 $\mathscr{D}$ 和 Π 的三值即时后果算子，其分量 $\Psi^1_{\mathscr{D},\,\Pi}\colon \mathbb{I}^c \to \mathbb{I}$ 和 $\Psi^2_{\mathscr{D},\,\Pi}\colon \mathbb{I}^c \to \mathbb{I}$ 对所有 $t \in \mathbb{T}$ 定义如下

$\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t) := \{P(s) \mid \exists \delta$ 使得 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$ 且 $t \in \delta\} \cup \{P(s) \mid \exists M \leftarrow B \in$ 基(Π) $\exists t' \in \mathbb{T}$ 使得 $[\![B]\!](\mathscr{I},t') =$ 为真，且 $(P(s),t) \in F(M,t')\}$, $\Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t) := \{P(s) \mid \exists \delta$ 使得 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$ 且 $t \in \delta\} \cup \{P(s)$ $\mid \exists M \leftarrow B \in$ 基(Π) $\exists t' \in \mathbb{T}$ 使得 $[\![B]\!](\mathscr{I},t') \neq$ 为假，且 $(P(s),t) \in F(M,t')\}$,

最后，正如预期，$T_{\mathscr{D},\Pi}$ 和 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 分别刻画二值模型和三值模型。

命题 3.2。设 Π 是一个程序，$\mathscr{D}$ 是一个数据库，且 $I \in \mathbb{I}$。解释 I 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的二值模型，当且仅当 I 是 $T_{\mathscr{D},\,\Pi}$ 的前不动点。

证明。假设 I 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的二值模型。我们需要证明，对于所有 $t \in \mathbb{T}$，$T_{\mathscr{D},\Pi}(I)(t) \subseteq I(t)$。令 $P(s) \in T_{\mathscr{D},\Pi}(I)(t)$。如果存在 δ 使得 $t \in \delta$ 且 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$，那么 $P(s) \in I(t)$，因为 I 尤其是 $\mathscr{D}$ 的一个模型。现在假设不存在这样的区间 δ。那么，必定存在一个基规则 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$ 和一个时间点 $t' \in \mathbb{T}$，使得 $[\![B]\!](I,t') =$ 为真，且 $(P(s),t) \in F(M,t')$。由于 I 是 Π 的二值模型，因此有 $[\![B]\!](I,t') \leq_\tau [\![M]\!](I,t')$；故必定有 $[\![M]\!](I,t') =$ 为真。根据命题 3.1，可得 $[\![P(s)]\!](I,t) =$ 为真，即 $P(s) \in I(t)$，证毕。

反过来，假设对于所有 $t \in \mathbb{T}$，$T_{\mathscr{D},\Pi}(I)(t) \subseteq I(t)$。根据 $T_{\mathscr{D},\Pi}$ 的定义，对于所有基关系事实 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$，以及所有 $t \in \delta$，均有 $P(s) \in T_{\mathscr{D},\Pi}(I)(t) \subseteq I(t)$。因此，I 是 $\mathscr{D}$ 的模型。现在我们证明 I 也是 Π 的二值模型。令 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$，且令 $t \in \mathbb{T}$，并假设 $[\![B]\!](I,t) = \text{true}$。只需证明 $[\![M]\!](I,t) = \text{true}$。若 $M = \top$，则这一点显然成立。现在假设 $M \neq \top$。注意，根据 $T_{\mathscr{D},\Pi}$ 的定义，对于所有 $(P(s),t') \in F(M,t)$，$P(s) \in T_{\mathscr{D},\Pi}(I)(t') \subseteq I(t')$。特别地，对于所有 $(P(s),t') \in F(M,t)$，均有 $[\![P(s)]\!](I,t') = \text{true}$。因此，根据命题 3.1，$[\![M]\!](I,t) = \text{true}$，证毕。 □

命题 3.3. 设 Π 是一个程序，$\mathscr{D}$ 是一个数据库，且 $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$。解释 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的一个三值模型，当且仅当 $\mathscr{I}$ 是 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 的一个前不动点。

证明. 假设 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的一个三值模型。我们需要证明 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I}) \leq_\tau \mathscr{I}$。设 P(s) 是一个基关系原子，满足 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t)(P(s)) = \text{true}$。因此，根据定义 3.4，要么存在一个区间 δ，使得 $t \in \delta$ 且 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$，此时 $\mathscr{I}(P(s)) = \text{true}$（根据假设，$\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个模型）；要么存在一个基规则 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$ 和一个时间点 $t' \in \mathbb{T}$，使得 $[\![B]\!](\mathscr{I},t') = \text{true}$，且 $(P(s),t) \in F(M,t')$。由于 $\mathscr{I}$ 是 Π 的一个三值模型，因此 $[\![B]\!](\mathscr{I},t') \leq_\tau [\![M]\!](\mathscr{I},t')$；故必有 $[\![M]\!](\mathscr{I},t') = \text{true}$。根据命题 3.1，可得 $\mathscr{I}(t)(P(s)) = (I^1(t)(P(s)), I^2(t)(P(s))) = ([\![P(s)]\!](I^1,t)\ [\![P(s)]\!](I^2,t)) = [\![P(s)]\!](\mathscr{I},t) = \text{true}$，证毕。现在设 P(s) 是一个基关系原子，满足 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t)(P(s)) = \text{undef}$。因此，根据定义 3.4，存在一个基规则 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$ 和一个时间点 $t' \in \mathbb{T}$，使得 $[\![B]\!](\mathscr{I},t') \neq \text{false}$，且 $(P(s),t) \in F(M,t')$。由于 $\mathscr{I}$ 是 Π 的一个三值模型，因此 $\text{undef} \leq_\tau [\![B]\!](\mathscr{I},t') \leq_\tau [\![M]\!](\mathscr{I},t')$。特别地，我们有 $[\![M]\!](\mathscr{I},t') \neq \text{false}$。根据命题 3.1，可得 $\mathscr{I}(t)(P(s)) = [\![P(s)]\!](\mathscr{I},t) = \text{false}$，第一部分证明完毕。

反之，假设对于所有 $t \in \mathbb{T}$, $\Psi_{\mathscr{D},\,\Pi}(\mathscr{I})(t) \leq_\tau \mathscr{I}(t)$。根据 $\Psi_{\mathscr{D}}$的Π定义，对于所有基关系事实 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$ 以及所有 $t \in \delta$，都有 $\text{true} = \Psi_{\mathscr{D},\,\Pi}(\mathscr{I})(t)(P(s)) \leq_\tau \mathscr{I}(t)(P(s))$。

因此， $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$的模型。现在我们证明， $\mathscr{I}$ 也是 Π的三值模型。令 M $\leftarrow$B $\in$ground(Π)，且令 t $\in \mathbb{T}$。我们需要证明 $[\![B]\!](\mathscr{I},t) \leq_\tau [\![M]\!](\mathscr{I},t)$。如果 M $= \top$，则显然成立，因此假设 M $\neq \top$。首先假设 $[\![B]\!](\mathscr{I},t) = \text{true}$，并证明 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) = \text{true}$。注意，根据 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$的定义，对于所有 (Q(s),t′) $\in$ F(M,t)，都有 $\text{true} = \Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t')(Q(s)) \leq_\tau \mathscr{I}(t')(Q(s))$。特别地，对于所有 (Q(s),t′) $\in$ F(M,t)，$[\![Q(s)]\!](\mathscr{I},t') = \text{true}$。因此，根据命题 3.1，$[\![M]\!](\mathscr{I},t) = \text{true}$，正如所要证明的。现在，我们假设 $[\![B]\!](\mathscr{I},t) = \text{undef}$，并证明 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) \neq \text{false}$。注意，根据 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$的定义，对于所有 (Q(s),t′) $\in$ F(M,t)，都有 $\text{undef} \leq_\tau \Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t')(Q(s)) \leq_\tau \mathscr{I}(t')(Q(s))$。特别地，对于所有 (Q(s),t′) $\in$ F(M,t)，$[\![Q(s)]\!](\mathscr{I},t') \geq_\tau \text{undef}$。因此，根据命题 3.1，$[\![M]\!](\mathscr{I},t) \geq_\tau \text{undef}$，从而完成证明。 □

4 DatalogMTL 的近似不动点理论¬

在上一节定义了三值语义和三值即时后果算子之后，只需证明三值即时后果算子$\Psi_{\mathscr{D},\ \Pi}$ 是 $T_{\mathscr{D},\ \Pi}$ 的一致近似算子（定理 4.1）。接下来，近似固定点理论（AFT）的工具可以用来定义数据库 $\mathscr{D}$ 和程序 Π 的四类模型：受支持模型、稳定模型、 Kripke-Kleene 模型和良基模型。

我们首先证明，二值解释的空间 $\mathbb{I}$是一个完备格，这可直接由序理论的结果得出。

命题 4.1. $\langle \mathbb{I}, \subseteq \rangle$ 是一个完备格。

证明。令 $\mathscr{G}$为基关系原子的集合。那么， $\mathbb{I}$ 是签名为 $\mathbb{T} \to 2^{\mathscr{G}}$的函数集合。按集合包含关系 $\subseteq$ 排序的幂集 $2^{\mathscr{G}}$ 显然是一个完备格，其底元素为空集，顶元素为 $\mathscr{G}$。此外， $\mathbb{T}$ 可视为一个偏序集，其上的序为整数或有理数上的标准序。由于完备格范畴是偏序集范畴的满子范畴，根据 [25], 中的命题 2，我们有同构 $\mathbb{I} \cong \Pi_{t\in\mathbb{T}} 2^{\mathscr{G}}$。根据 [25]中的命题 1， $\Pi_{t\in\mathbb{T}} 2^{\mathscr{G}}$是一个完备格，因此， $\mathbb{I}$ 也是一个完备格。 □

按照近似固定点理论（AFT）的术语，配备精度序 $\leq_p$ ($\mathscr{I} \leq_p \mathscr{J}$ iff $I_1 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq I_2$) 的三值解释集合 $\mathbb{I}^c$ 是 $\mathbb{I}$ 的近似空间。为了证明定理 4.1，我们将用到以下两个引理，它们保证基度量原子的求值在二值和三值情形下都保持序关系。

引理 4.1. 设 $I_1, I_2 \in \mathbb{I}$ 为二值解释，M 为一个基原子。若 $I_1 \subseteq I_2$, ，则对所有 t $\in \mathbb{T}$, $[\![M]\!](I_1,t) \leq_\tau [\![M]\!](I_2,t)$。

证明。设t $I_1 \subseteq I_2$, ，即对所有 t $\in \mathbb{T}$，都有 $I_1(t) \subseteq I_2(t)$。我们对 M 的结构进行归纳 .

若 M $\in \{\bot, \top\}$，则显然 $[\![M]\!](I_1,t) = [\![M]\!](I_2,t)$。若 M $= P(s)$，则由定义 2.1 以及 $I_1(t) \subseteq I_2(t)$ 的假设可得 $[\![M]\!](I_1,t) \leq_\tau [\![M]\!](I_2,t)$。

现在，令 $M = \diamondminus_\delta M'$，并假设对于所有 t $\in \mathbb{T}$，都有 $[\![M']\!](I_1,t) \leq_\tau [\![M']\!](I_2,t)$。若对某个 t $\in \mathbb{T}$， $[\![M]\!](I_1,t) = \text{true}$，则根据定义 2.1，存在 t′ $\in \mathbb{T}$ ，使得 t $-$t′ $\in \delta$ ，且 $[\![M']\!](I_1,t') = \text{true}$。由归纳假设，必有 $[\![M']\!](I_2,t') = \text{true}$，如所需。对于 M $= \diamondplus_\delta M'$、M $= \boxminus_\delta M'$ 和 M $= \boxplus_\delta M'$ 这几种情况，也可以类似地处理。

设 M $= M_1 \mathscr{S}_\delta M_2$, ，并假设对所有 t $\in \mathbb{T}$， $[\![M_1]\!](I_1,t) \leq_\tau [\![M_1]\!](I_2,t)$，且 $[\![M_2]\!](I_1,t) \leq_\tau [\![M_2]\!](I_2,t)$。若对于某个 t $\in \mathbb{T}$， $[\![M]\!](I_1,J_1,t) = \text{true}$，则根据定义 2.1，存在 t′ $\in \mathbb{T}$，使得 t $-$ t′ $\in \delta$, $[\![M_2]\!](I_1,t') = \text{true}$，并且对于所有 t″ $\in$(t′,t)， $[\![M_1]\!](I_1,t'') = \text{true}$。根据归纳假设，必有

$[\![M_2]\!](I_2,t') = \text{true}$，并且对于所有 $t'' \in (t',t)$，$[\![M_1]\!](I_2,t'') = \text{true}$。因此，$[\![M]\!](I_2,t) = \text{true}$，正如所需。对于 $M = M_1 \mathscr{U}_\delta M_2$ 的情况，我们可以类似地进行推导。 □

引理 4.2. 设 $\mathscr{I}$、$\mathscr{J} \in \mathbb{I}^c$ 为三值解释，且 E 为一个基表达式。若 $\mathscr{I} \leq_p \mathscr{J}$，则对于所有 t，都有 $\in \mathbb{T}$、$[\![E]\!](\mathscr{I},t) \leq_p [\![E]\!](\mathscr{J},t)$。

证明. 假设 $\mathscr{I} \leq_p \mathscr{I}$，即对于所有 $t \in \mathbb{T}$，$I_1(t) \subseteq J_1(t) \subseteq J_2(t) \subseteq I_2(t)$。我们对 E 的结构进行归纳。

若 E 是一个基度量原子，则根据引理 4.1，有 $[\![E]\!](I_1,t) \leq_\tau [\![E]\!](J_1,t) \leq_\tau [\![E]\!](J_2,t) \leq_\tau [\![E]\!](I_2,t)$。根据定义 3.1，我们得到 $[\![E]\!](\mathscr{I},t) \leq_p [\![E]\!](\mathscr{J},t)$。

现在假设 E = 不是某个基度量原子 M，并且 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) \leq_p [\![M]\!](\mathscr{J},t)$。如果 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) = [\![M]\!](\mathscr{J},t)$，那么显然有 $[\![E]\!](\mathscr{I},t) = [\![E]\!](\mathscr{J},t)$。现在假设 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) <_p [\![M]\!](\mathscr{J},t)$。必然有 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) = \text{undef}$，且 $[\![M]\!](\mathscr{J},t) \in \{\text{true}, \text{false}\}$。根据定义 3.1，显然可推出 $[\![E]\!](\mathscr{I},t) = \text{undef}$，且 $[\![E]\!](\mathscr{J},t) \in \{\text{true}, \text{false}\}$；因此有 $[\![E]\!](\mathscr{I},t) \leq_p [\![E]\!](\mathscr{J},t)$。

最后，对于 $E = E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ 的情形，我们可以轻松地对 $E1, \ldots, E_m$ 应用归纳假设，从而得到 $[\![E]\!](\mathscr{I},t) \leq_p [\![E]\!](\mathscr{J},t)$。 □

定理 4.1. 设 Π 是一个程序，$\mathscr{D}$ 是一个数据集。算子 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 是 $T_{\mathscr{D},\Pi}$ 的一致近似算子。

证明。我们需要证明以下三点：

1. $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 是一致的，即对所有 $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$, $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I}) \in \mathbb{I}^c$。2. $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 是 $\leq_p$-单调的，即对所有满足 $\mathscr{I} \leq_p \mathscr{J}$ 的 $\mathscr{I}, \mathscr{J} \in \mathbb{I}^c$，有 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I}) \leq_p \Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{J})$。3. $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 近似 $T_{\mathscr{D},\Pi}$，即对所有 I, $\in \mathbb{I}$, $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(I,I) = (T_{\mathscr{D},\Pi}(I), T_{\mathscr{D},\Pi}(I))$。

对于条目 1，注意到由定义 3.4 显然可得，对于所有 $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$ 和所有 $t \in \mathbb{T}$，$\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t) \subseteq \Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t)$。因此，对于所有 $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$，都有 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I}) \in \mathbb{I}^c$，如所需。

现在，为证明条目 2，设 $\mathscr{I} \leq_p \mathscr{J}$ 是 $\mathbb{I}^c$ 的两个元素，且 $t \in \mathbb{T}$。我们需要证明 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t) \subseteq \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{J})(t)$，以及 $\Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{J})(t) \subseteq \Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t)$。令 $P(s) \in \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t)$（如果不存在这样的 P(s)，那么我们已经有 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t) \subseteq \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{J})(t)$）。若存在 δ 使得 $t \in \delta$ 且 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$，那么 $P(s) \in \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{J})(t)$ 也成立。若情况并非如此，则存在一个基规则 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$，以及 $t' \in \mathbb{T}$，使得 $[\![B]\!](\mathscr{I},t') =$ 为真，且 $(P(s),t) \in F(M,t')$。由引理 4.2 可知，$[\![B]\!](\mathscr{J},t') =$ 为真，因此 $P(s) \in \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{J})(t)$。至此，我们已经证明了第一个包含关系，即 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{I})(t) \subseteq \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\mathscr{J})(t)$。第二个包含关系的证明可类似进行。

最后，对于条目 3，设 B 是 ground(Π) 中某个基规则的体，且 $t \in \mathbb{T}$。利用定义 3.1 和注 1，通过对 B 进行归纳，很容易证明 $[\![B]\!]((I, I),t) = ([\![B]\!](I,t)\ [\![B]\!](I,t))$。特别地，$[\![B]\!]((I, I),t) \neq \text{undef}$，且当且仅当 $[\![B]\!]((I, I),t) \neq \text{false}$ 时，$[\![B]\!]((I, I),t) = \text{true}$。因此，根据定义 3.3 和定义 3.4，对于所有 $t \in \mathbb{T}$, $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I, I)(t) = \Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(I, I)(t) = T_{\mathscr{D},\Pi}(I)(t)$，证毕。 □

得益于定理 4.1 以及近似固定点理论的工具，我们能够定义以下感兴趣的模型。

定义 4.1. 设 $\mathscr{D}$ 是一个数据集，Π 是一个程序，且 $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$。

- $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的三值支持模型，当且仅当它是 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 的不动点；

- $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的三值稳定模型，当且仅当它是 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$的稳定不动点；也就是说，当且仅当 $I_1 = \text{lfp}\ \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot, I_2)$ 且 $I_2 = \text{lfp}\ \Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(I_1, \cdot)$，其中 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot, I_2)$ 是一个将解释 X 映射为 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(X, J)$ 第一分量的函数，$\Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(I_1, \cdot)$ 也类似；
- $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的 Kripke-Kleene 模型，当且仅当它是$\Psi_{\mathscr{D},\ \Pi}$的$\leq_p$-最小不动点；
- $\mathscr{I}$是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的良基模型，当且仅当它是$\Psi_{\mathscr{D},\ \Pi}$的良基不动点，也就是说，它是$\leq_p$-最小三值稳定模型。

如果二值模型 I 是 $\mathscr{D}$和 Π 的二值稳定模型，且 (I, I) 是 $\mathscr{D}$ 和 Π的三值稳定模型，那么我们称 I 为 $\mathscr{D}$ 和 Π 的二值稳定模型。

5 与先前工作的比较

本节将 [29] 的 HT 模型和稳定模型定义与我们的定义进行比较。具体而言，我们首先证明，任何三值模型都是 [29], 的 HT 模型，但反之通常不成立。最后，我们证明， [29] 中的稳定模型概念确实与我们对二值稳定模型的定义一致。为清晰起见，我们采用本文使用的记法，重述 [29] 中的 HT 模型定义（定义 5.1）和稳定模型定义（定义 5.2）。为避免歧义，我们将 [29] 中的稳定模型重新命名为“稳定 HT 模型”。

定义 5.1. 设 $\mathscr{D}$ 是一个数据集， Π 是一个程序，且 $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$。 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的 HT 模型，当且仅当 I_1 是 $\mathscr{D}$ 的模型，并且对所有规则 $M \leftarrow M_1 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge \text{not } M_{k+1} \wedge \ldots \wedge \text{not } M_m \in \text{ground}(\Pi)$，对所有 $t \in \mathbb{T}$, 以下条件均成立

1. 如果 $[\![M_i]\!](I_1,t) =$ 对所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$ 都为真，且 $[\![M_j]\!](I_2,t) =$ 对所有 $j \in \{k+1,\ldots,m\}$ 都为假，那么$[\![M]\!](I_1,t) =$ 为真；2. 如果 $[\![M_i]\!](I_2,t) =$ 对所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$ 都为真，且 $[\![M_j]\!](I_2,t) =$ 对所有 $j \in \{k+1,\ldots,m\}$ 都为假，那么$[\![M]\!](I_2,t) =$ 为真。

命题 5.1. 设 $\mathscr{D}$ 是一个数据集， Π 是一个程序，且 $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$。如果 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的三值模型，那么 $\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的 HT 模型。

证明。根据假设，显然，I_1 是 $\mathscr{D}$ 的模型。现在我们证明定义 5.1 中的条目 1 成立。设 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$ 是一个基规则，其中 $B = M_1 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge \text{not } M_{k+1} \wedge \ldots \wedge \text{not } M_m$，且 $t \in \mathbb{T}$ 满足：对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$， $[\![M_i]\!](I_1,t) =$ 为真；对于所有 $j \in \{k+1, \ldots, m\}$， $[\![M_j]\!](I_2,t) =$ 为假。这意味着，对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$， $[\![M_i]\!](\mathscr{I},t) =$ 为真；对于所有 $j \in \{k+1, \ldots, m\}$， $[\![M_j]\!](\mathscr{I},t) =$ 为假。特别地，根据定义 3.1，我们有 $[\![B]\!](\mathscr{I},t) =$ 为真。由于根据假设， $\mathscr{I}$ 是一个三值模型，因此必有 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) =$ 也为真。因此， $[\![M]\!](I_1,t) =$ 为真，证毕。

现在，我们证明定义 5.1 中的条目 2 也成立。设 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$ 是一条基规则，其中 $B = M_1 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge \text{not } M_{k+1} \wedge \ldots \wedge \text{not } M_m$，且 $t \in \mathbb{T}$满足：对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$， $[\![M_i]\!](I_2,t) =$为真；对于所有 $j \in \{k+1, \ldots, m\}$， $[\![M_j]\!](I_2,t) =$为假。这意味着，对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$， $[\![M_i]\!](\mathscr{I},t) \neq$为假；对于所有 $j \in \{k+1, \ldots, m\}$， $[\![M_j]\!](\mathscr{I},t) =$为假。特别地，根据定义 3.1，我们有 $[\![B]\!](\mathscr{I},t) \neq$为假。由于 $\mathscr{I}$是一个三值模型，因此必有 $[\![M]\!](\mathscr{I},t) \neq$为假。因此，$[\![M]\!](I_2,t) =$为真，证明完毕。 □

命题 5.1 的逆命题不成立，也就是说，并非所有 HT 模型都是三值模型。事实上，根据定义 3.2, $\mathscr{I} \in \mathbb{I}^c$ 是 Π 的三值模型，当且仅当对于每条规则 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$，以及每个 $t \in \mathbb{T}$，都有 $[\![B]\!](\mathscr{I}, t) \leq_\tau [\![M]\!](\mathscr{I},t)$，也就是说，满足

1. 若对于所有 i $\in \{1,\ldots,k\}$， $[\![M_i]\!](I_1,t) =$为真，且对于所有 j $\in \{k+1,\ldots,m\}$， $[\![M_j]\!](I_2,t) =$为假，则$[\![M]\!](I_1,t) =$为真，
2. 如果对所有 i $\in \{1,\ldots,k$， $[\![M_i]\!](I_2,t) =$均为真，且对所有 j $\in \{k+1,\ldots,m\}$， $[\![M_j]\!](I_1,t) =$均为假，那么$[\![M]\!](I_2,t) =$为真，

其中 $B := M_1 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge \text{not } M_{k+1} \wedge \ldots \wedge \text{not } M_m$。请注意，尽管上述第一个条件与定义 5.1 中的第一个条件相同，但第二个条件比定义 5.1 中的第二个条件更严格：即使当某个 h $\in \{k+1,\ldots,m\}$ 满足 $[\![M_h]\!](I_2,t) =$为真时，只要对所有 j $\in \{k+1,\ldots,m\}$，$[\![M_j]\!](I_1,t) =$为假，该条件仍然适用。

我们在下面的例子中更具体地展示这种差异。

例5.1. 考虑一个空数据集 $\mathscr{D}$ 和一个仅包含一条规则的程序 Π，即 P $\leftarrow$ not Q，其中 P 和 Q 是元数为 0 的谓词。令 (I_1,I_2) 为三值解释，满足对所有 t $\in \mathbb{T}$，$I_1(t) = /0$ 且 $I_2(t) = \{Q\}$。显然，I_1 是空数据集 $\mathscr{D}$的模型。此外，由于定义 5.1 中两个条件的前件都不成立，(I_1,I_2) 是 $\mathscr{D}$和 Π的 HT 模型。然而，(I_1,I_2) 不是三值模型：$[\![\text{not } Q]\!](I_1,I_2,t) = [\![Q]\!](I_1,I_2,t)^{-1} = ([\![Q]\!](I_1,t)\ [\![Q]\!](I_2,t))^{-1} = \text{undef}^{-1} = \text{undef} \not\leq_\tau \text{false} = [\![P]\!](I_1,I_2,t)$，对所有 t $\in \mathbb{T}$。

现在我们关注稳定 HT 模型，并证明它们与我们的二值稳定模型相对应。

定义 5.2. 设 $\mathscr{D}$ 是一个数据集，Π 是一个程序，且 I $\in \mathbb{I}$。若 (I,I) 是 $\mathscr{D}$和 Π 的 HT 模型，并且

$$I = \bigsqcap_{\subseteq} \{J \mid (J,I) \textit{ is an HT-model of } \mathscr{D} \textit{ and } \Pi\}. \tag{3}$$

引理5.1. 设 $\mathscr{D}$ 是一个数据集，Π 是一个程序，且 I, J $\in \mathbb{I}$。若 (I, J) 是一个 HT 模型，则 I 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\ \Pi}(\cdot, J)$ 的前不动点。

证明. 我们需要证明 $\Psi^1_{\mathscr{D},\ \Pi}(I,J) \subseteq I$。令 t $\in \mathbb{T}$，且 $P(s) \in \Psi^1_{\mathscr{D},\ \Pi}(I, J)(t)$。那么有两种可能情况：

1. 存在一个区间 δ，使得 t $\in \delta$ 且 $P(s)@\delta \in \mathscr{D}$。在这种情况下，必有 $P(s) \in I(t)$，因为 (I, J) 是 $\mathscr{D}$和 Π的 HT 模型。2. 存在 M $\leftarrow$ B $\in$ ground(Π) 和 t′ $\in \mathbb{T}$，使得 $[\![B]\!](I, J, t') =$ 为真，且 $(P(s),t) \in F(M,t')$。根据定义 3.1，容易看出 $[\![B]\!](I, J, t') =$ 为真满足定义 5.1 中条目 1 的前提。由于 (I, J) 是一个 HT 模型，我们可以推出 $[\![M]\!](I,t') =$ 为真。根据命题 3.1，我们有 $[\![P(s)]\!](I,t) =$ 为真，即 $P(s) \in I(t)$。

在上述两种情况下，我们都可以得出 $P(s) \in I(t)$。由于 P(s) 和 t 的任意性，有$\Psi^1_{\mathscr{D},\ \Pi}(I, J) \subseteq I$，即 I 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\ \Pi}(\cdot, J)$ 的前不动点，证毕。 □

定理 5.1. 设 $\mathscr{D}$ 是一个数据集，Π 是一个程序，且 I $\in \mathbb{I}$。I 是 $\mathscr{D}$和 Π 的稳定 HT 模型，当且仅当 I 是 $\mathscr{D}$和 Π的二值稳定模型。

证明。假设 I 是一个稳定 HT 模型。根据定义 5.1，I 是 $\mathscr{D}$ 的模型。现在我们证明 (I, I) 是 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}$ 的稳定不动点，即 $I = \text{lfp}\ \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot, I) = \text{lfp}\ \Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(I\ \cdot)$。根据定理 4.1，$\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I, I) = I$ 当且仅当 $\Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(I,I) = I$，也就是说，I 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot, I)$ 的不动点，当且仅当 I 是 $\Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(I\ \cdot)$ 的不动点。由于我们只考虑一致对，即形如 (J_1, J_2) 且满足 $J_1 \subseteq J_2$, 的对，因此只需证明 $I = \text{lfp}\ \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$。根据引理5.1，I 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot, I)$ 的前不动点。现在我们证明 $I \subseteq \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I, I)$。

由于 I 是一个稳定 HT 模型，只需证明 $(\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I),I)$ 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的 HT 模型。显然，$\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I)$ 根据定义 3.4 是 $\mathscr{D}$ 的模型。接下来需要验证定义 5.1 中列出的两个条件。设 $B = M_1 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge \text{not } M_{k+1} \wedge \ldots \wedge \text{not } M_m$ 满足 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$，且 $t \in \mathbb{T}$:

1. 假设对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I),t) =$均为真，并且对于所有 $j \in \{k+1,\ldots,m\}$，$[\![M_j]\!](I,t) =$ 均为假。根据引理 4.1，对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](I,t) =$ 为真。显然，由于所有 M_i's 均不包含否定，我们还可得，对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](I,I,t) =$为真，并且对于所有 $j \in \{k+1,\ldots,m\}$，$[\![M_j]\!](I,I,t) =$为假。因此，我们有 $[\![B]\!](I,I,t) =$为真。根据定义 3.4，对于所有 $t' \in \mathbb{T}$ 以及满足 $(P(s),t') \in F(M,t)$ 的基关系原子 $P(s)$，$P(s) \in \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I)(t')$。根据命题 3.1，可得 $[\![M]\!](\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I),t) =$ 为真，证毕。2. 假设对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](I,t) =$为真，并且对于所有 $j \in \{k+1,\ldots,m\}$，$[\![M_j]\!](I,t) =$为假。按照上述相同的推理，可得 $[\![M]\!](\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I),t) =$ 为真。根据引理 4.1，我们得到 $[\![M]\!](I,t) =$ 为真，证毕

因此，我们可以得出结论：$(\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I),I)$ 是一个 HT 模型。由于 I 是一个稳定 HT 模型，因此 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(I,I) = I$，也就是说，I 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 的一个不动点。

我们现在证明 I 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 的最小不动点。设 $J \subseteq I$ 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 的一个不动点。只需证明 $I \subseteq J$。若能证明 (J, I) 是一个 HT 模型，则根据 I 的极小性，我们同样可以得出结论。因此，我们接下来证明 (J, I) 确实是 $\mathscr{D}$ and Π 的一个 HT 模型。首先，注意到由于 $J = \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(J,I)$，根据定义 3.4，J 是 $\mathscr{D}$ 的一个模型。接下来还需验证定义 5.1 中列出的两个条件。设 $B = M_1 \wedge \ldots \wedge M_k \wedge \text{not } M_{k+1} \wedge \ldots \wedge \text{not } M_m$，其中 $M \leftarrow B \in \text{ground}(\Pi)$，且 $t \in \mathbb{T}$:

1. 假设对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](J,t) =$为真，并且对于所有 $j \in \{k+1、\ldots\ldots、m\}$，$[\![M_j]\!](I,t) =$为假。根据引理 4.1，对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](I,t) =$为真；对于所有 $j \in \{k+1、\ldots\ldots、m\}$，$[\![M_j]\!](J,t) =$为假。因此，对于所有 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](J,I,t) =$为真，并且对于所有 $j \in \{k+1、\ldots\ldots、m\}$，$[\![M_j]\!](J,I,t) =$为假。由此可得，$[\![B]\!](J,I,t) =$为真。根据定义 3.4，对于所有 $t' \in \mathbb{T}$ 以及满足 $(P(s),t') \in F(M,t)$ 的基关系原子 $P(s)$，$P(s) \in \Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(J,I)(t') = J(t')$。根据命题 3.1，可得 $[\![M]\!](J,t) =$ 为真，证毕。

2. 假设对于所有的 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$[\![M_i]\!](I,t) =$为真，并且对于所有的 $j \in \{k+1,\ldots,m\}$，$[\![M_j]\!](I,t) =$为假。根据上面所述的同样推理，可得 $[\![M]\!](J,t) =$ 为真。由引理 4.1 可知，$[\![M]\!](I,t) =$为真，证毕。

因此，我们可以得出 (J, I) 是一个 HT 模型。由于 I 是一个稳定 HT 模型，因此 $J = I$，即 I 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 的最小不动点。

现在假设 (I,I) 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的三值稳定模型。根据定义 4.1，I 同时是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 和 $\Psi^2_{\mathscr{D},\Pi}(I,\cdot)$ 的不动点，即 $\Psi_{\mathscr{D},\Pi}(I,I) = (I,I)$。根据命题 5.1，(I, I) 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的 HT 模型。接下来需要证明定义 5.2 中的等式 (3) 成立。设 $J \subseteq I$，且 (J, I) 是 $\mathscr{D}$ 和 Π 的 HT 模型。我们证明 J 必须等于 I。只需证明 $I \subseteq J$。

根据 [13] 的命题 3.3，$\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 是完备格 $\langle \{H \mid H \subseteq I\}, \subseteq \rangle$ 上的单调算子。因此，根据塔斯基–克纳斯特定理 [27], , $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 的最小不动点与其最小前不动点相同。根据假设，$\text{lfp}\,\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I) = I$，因此 I 也是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 的最小前不动点。根据引理5.1，J 是 $\Psi^1_{\mathscr{D},\Pi}(\cdot,I)$ 的前不动点。因此，必有 $I \subseteq J$，证毕。 □

6 结论与未来工作

借助近似不动点理论这一坚实框架，我们为 DatalogMTL¬ 定义了若干值得关注的语义：Kripke-Kleene 语义、良基语义、稳定模型语义和支持模型语义。这是通过定义一个一致近似算子实现的；也就是说，它是在部分三值解释空间上的一个算子。正如我们所展示的，这种算子的定义并不需要任何牵强的选择；相反，它是将 Fitting 三值即时后承算子应用于 DatalogMTL¬ 场景的最自然方式，再次彰显了近似固定点理论形式体系的简洁性、通用性与强大功能。在最后一节中，我们还证明了通过近似固定点理论得到的稳定模型，与 [29] 中基于 HT 逻辑的解释所定义的稳定模型等价。

虽然在 AFT 和 HT 逻辑中都使用解释对，但二者的用法有所不同。通常，当采用 HT 逻辑来定义某些稳定模型时，AFT 可以提供一条更简便的途径来获得相同结果，同时还能免费获得其他类型的模型。对于 [3]，中定义的度量稳定模型，这或许也成立；该工作从 HT 的度量逻辑这一 HT 逻辑的时间扩展出发，旨在得到非单调的度量均衡逻辑（MEL）。如果确实如此，AFT 就能为比较 [3]，中提出的 MEL 与本文讨论的 [29]，中带有否定即失败的 Datalog MTL 扩展提供坚实可靠的基础。

还值得一提的是，AFT 能够利用其应用领域中的大量理论成果。其中一条研究路线聚焦于分层结果 [28, 7]。具体而言，研究者定义了可分层算子的概念，从而能够逐层计算 Kripke-Kleene 模型、支持模型、良基模型和稳定模型。这似乎等同于针对可分层 DatalogMTL¬ 所做的工作，即针对不存在经由否定形成循环依赖的 DatalogMTL¬ 程序[10]。

参考文献

[1] S. Abiteboul、R. Hull 与 V. Vianu（1995）：数据库基础。Addison-Wesley。[2] C. Antic（2020）：流推理的不动点语义。《人工智能》288，文章编号 103370，doi:10.1016/J.ARTINT.2020.103370。[3] A. Becker、P. Cabalar、M. Di´eguez、T. Schaub 与 A. Schuhmann（2024）：定时轨迹上的度量时序均衡逻辑。《理论与实践逻辑程序设计》24(3)，第425–452页，doi:10.1017/S1471068424000139。[4] B. Bogaerts（2019）：从近似不动点理论视角看加权抽象辩论框架。载于：第三十三届AAAI人工智能会议、AAAI 2019、第三十一届人工智能创新应用会议、IAAI 2019、第九届AAAI教育人工智能进展研讨会、EAAI 2019，美国夏威夷州檀香山，2019年1月27日至2月1日，AAAI出版社，第2686–2693页，doi:10.1609/AAAI.V33I01.33012686。[5] B. Bogaerts 与 L. Cruz-Filipe（2018）：主动完整性约束的不动点语义。《人工智能》255，第43–70页，doi:10.1016/J.ARTINT.2017.11.003。[6] B. Bogaerts 与 M. Jakubowski（2021）：递归 SHACL 的不动点语义。载于 A. Formisano、Y. A. Liu、B. Bogaerts、A. Brik、V. Dahl、C. Dodaro、P. Fodor、G. L. Pozzato、J. Vennekens 与 N. Zhou 编：第37届国际逻辑程序设计会议（技术通信）、ICLP 技术通信 2021，波尔图（线上活动），2021年9月20日至27日，EPTCS345，第41–47页，doi:10.4204/EPTCS.345.14。[7] Bart Bogaerts 与 Lu´ıs Cruz-Filipe（2021）：近似不动点理论中的分层及其在主动完整性约束中的应用。《ACM计算逻辑汇刊》22(1)，第6:1–6:19页，doi:10.1145/3430750。

[8] S. Brandt、E. G. Kalayci、V. Ryzhikov、G. Xiao 与 M. Zakharyaschev（2018）：使用度量时序逻辑查询日志数据。《人工智能研究杂志》62，第829–877页，doi:10.1613/JAIR.1.11229。[9] A. Colombo、L. Bellomarini、S. Ceri 与 E. Laurenza（2023）：DatalogMTL 中的智能衍生品合约。载于 J. Stoyanovich、J. Teubner、N. Mamoulis、E. Pitoura、J. M¨uhlig、K. Hose、S. S. Bhowmick 与 M. Lissan-drini 编：第26届数据库技术扩展国际会议论文集，EDBT 2023，希腊约阿尼纳，2023年3月28日至31日，OpenProceedings.org，第773–781页，doi:10.48786/EDBT.2023.65。[10] D. J. Tena Cucala、P. A. Walega、B. Cuenca Grau 与 E.V. Kostylev（2021）：带度量时序算子的 Datalog 中的分层否定。载于：第三十五届AAAI人工智能会议、AAAI 2021、第三十三届人工智能创新应用会议、IAAI 2021、第十一届人工智能教育进展研讨会、EAAI 2021，线上活动，2021年2月2日至9日，AAAI出版社，第6488–6495页，doi:10.1609/AAAI.V35I7.16804。[11] M. Denecker、M. Bruynooghe 与 J. Vennekens（2012）：近似不动点理论以及逻辑程序和答案集程序的语义。载于 E. Erdem、J. Lee、Y. Lierler 与 D. Pearce 编：正确推理——献给 Vladimir Lifschitz 的基于逻辑的人工智能论文集，《计算机科学讲义》7265，施普林格，第178–194页，doi:10.1007/978-3-642-30743-0_13。[12] M. Denecker、V. Marek 与 M. Truszczy´nski（2000）：近似、稳定算子、有根不动点及其在非单调推理中的应用。载于：基于逻辑的人工智能，597，Springer US，第127–144页，doi:10.1007/978-1-4615-1567-8_6。[13] M. Denecker、V. W. Marek 与 M. Truszczy´nski（2004）：终极近似及其在非单调知识表示系统中的应用。《信息与计算》192(1)，第84–121页，doi:10.1016/J.IC.2004. 02.004。[14] M. Fitting（2002）：逻辑程序设计的不动点语义：综述。《理论计算机科学》278(1-2)，第25–51页，doi:10.1016/S0304-3975(00)00330-3。[15] A. Heyting（1930）：直觉主义逻辑的形式规则。载于：《普鲁士科学院会议记录》，物理—数学类。[16] S. S. Huang、T. J. Green 与 B. T. Loo（2011）：Datalog 与新兴应用：交互式教程。载于 T. K. Sellis、R. J. Miller、A. Kementsietsidis 与 Y. Velegrakis 编：ACM SIGMOD 数据管理国际会议论文集，SIGMOD 2011，希腊雅典，2011年6月12日至16日，ACM，第1213–1216页，doi:10.1145/1989323.1989456。[17] E. G. Kalayci、G. Xiao、V. Ryzhikov、T. E. Kalayci 与 D. Calvanese（2018）：Ontop-temporal：一种在时态数据上进行基于本体的查询应答的工具。载于 A. Cuzzocrea、J. Allan、N. W. Paton、D. Srivastava、R. Agrawal、A. Z. Broder、M. J. Zaki、K. S. Candan、A. Labrinidis、A. Schuster 与 H. Wang 编：第27届ACM信息与知识管理国际会议论文集，CIKM 2018，意大利都灵，2018年10月22日至26日，ACM，第1927–1930页，doi:10.1145/3269206.3269230。[18] B. Ketsman 与 P. Koutris（2022）：现代Datalog引擎。《数据库基础与趋势》12(1)，第1–68页，doi:10.1561/1900000073。[19] S. Kikot、V. Ryzhikov、P. A. Walega 与 M. Zakharyaschev（2018）：关于定时词上带 MTL 算子的本体中介查询的数据复杂度。载于 M. Ortiz 与 T. Schneider 编：第31届描述逻辑国际研讨会论文集——与第16届知识表示与推理原理国际会议（KR2018）联合举办，美国亚利桑那州坦佩，2018年10月27日至29日，CEUR研讨会论文集2211，CEUR-WS.org。[20] P. Koopmann（2019）：概率时态数据的基于本体的查询应答。载于：第三十三届AAAI人工智能会议、AAAI 2019、第三十一届人工智能创新应用会议、IAAI 2019、第九届AAAI教育人工智能进展研讨会、EAAI 2019，美国夏威夷州檀香山，2019年1月27日至2月1日，AAAI出版社，第2903–2910页，doi:10.1609/AAAI.V33I01.33012903。[21] R. Koymans（1990）：使用度量时序逻辑描述实时性质。《实时系统》2(4)，第255–299页，doi:10.1007/BF01995674。

[22] M. Mori、P. Papotti、L. Bellomarini 和 O. Giudice（2022）：用于事实核查时间性主张的神经机器翻译。载于 R. Aly、C. Christodoulopoulos、O. Cocarascu、Z. Guo、A. Mittal、M. Schlichtkrull、J. Thorne 和 A. Vlachos 编：《第五届事实抽取与验证研讨会（FEVER）论文集》，计算语言学协会，都柏林，爱尔兰，第 78–82 页，doi:10.18653/v1/2022.fever-1.8。[23] M. Nissl 和 E. Sallinger（2022）：使用 DatalogMTL 对智能合约建模。载于 M. Ramanath 和 T. Palpanas 编：《EDBT/ICDT 2022 联合会议研讨会论文集》，爱丁堡，英国，2022 年 3 月 29 日，CEUR Workshop Proceedings 3135，CEUR-WS.org。[24] D. Pearce（1996）：稳定模型与答案集的一种新逻辑刻画。载于 J. Dix、L. Moniz Pereira 和 T. C. Przymusinski 编：《逻辑程序设计中的非单调扩展》，NMELP'96，巴特洪内夫，德国，1996 年 9 月 5–6 日，精选论文，计算机科学讲义 1216，施普林格，第 57–70 页，doi:10.1007/BFB0023801。[25] S. Pollaci、B. Kostopoulos、M. Denecker 和 B. Bogaerts（2025）：高阶近似不动点理论的范畴论视角。载于 C. Dodaro、G. Gupta 和 M. V. Martinez 编：《逻辑程序设计与非单调推理》，计算机科学讲义 15245，施普林格自然瑞士，查姆，第 317–330 页，doi:10.1007/978-3-031-74209-5_24.[26] H. Strass（2013）：抽象辩论框架的近似算子与语义。《人工智能》205，第 39–70 页，doi:10.1016/J.ARTINT.2013.09.004。[27] A. Tarski（1955）：一个格论不动点定理及其应用。《太平洋数学杂志》5，第 285–309 页，doi:10.2140/pjm.1955.5.285。[28] J. Vennekens、D. Gilis 和 M. Denecker（2006）：算子分解：具有不动点语义的逻辑的代数模块化结果。《ACM 计算逻辑汇刊》7(4)，第 765–797 页，doi:10.1145/1183278.1183284。[29] P. A. Walega、D. J. Tena Cucala、B. Cuenca Grau 和 E. V. Kostylev（2024）：带度量时序算子的 Datalog 的稳定模型语义。《理论与实践逻辑程序设计》24(1)，第 22–56 页，doi:10.1017/S1471068423000315。[30] P. A. Walega、M. Kaminski 和 B. C. Grau（2019）：在度量时间 Datalog 中对流数据进行推理。载于：《第三十三届AAAI人工智能会议》，AAAI 2019，第三十一届人工智能创新应用会议，IAAI 2019，第九届AAAI人工智能教育进展研讨会，EAAI 2019，檀香山，夏威夷，美国，2019 年 1 月 27 日至 2 月 1 日，AAAI出版社，第 3092–3099 页，doi:10.1609/AAAI.V33I01.33013092。[31] P. A. Walega、M. Kaminski、D. Wang 和 B. C. Grau（2023）：使用 DatalogMTL 进行流推理。《网络语义学杂志》76，doi:10.1016/J.WEBSEM.2023.100776。