正规逻辑程序的陷阱空间语义

Van-Giang Trinh SylvainSoliman Franc¸ois Fages法国 Inria Saclay，EP Lifeware，帕莱索，法国 van-giang.trinh@inria.fr Sylvain.Soliman@inria.fr francois.fages@inria.fr

Belaid BenhamouLIRICA 团队，LIS，艾克斯-马赛大学，马赛，法国 belaid.benhamou@lis-lab.fr

正规逻辑程序的逻辑语义传统上基于 Clark完备化以及二值或三值典范模型的概念，其中包括支持模型、稳定模型、正则模型和良基模型。二值解释也可以视为在程序更新算子作用下演化的状态，由此产生的转移图中，不动点和循环分别刻画稳定行为和振荡行为。我们将这种观点称为动力学语义，因为它通过状态空间轨迹来表征程序的含义；这一观点最早是在稳定（支持）类语义中提出的。最近，我们建立了 Datalog¬程序（即不含函数符号的正规逻辑程序）与布尔网络之间的形式化联系，并由此为 Datalog¬ 程序引入了陷阱空间的概念。本文将陷阱空间的概念推广到任意正规逻辑程序，并引入陷阱空间语义，作为解释这类程序的一种新方法。这种新语义既有模型论刻画，也有动力学刻画，为理解程序行为提供了全面的方法。我们确立了陷阱空间语义的基础性质，并系统地探讨了它与既有模型论语义之间的关系，包括稳定（支持）模型语义、稳定（支持）部分模型语义、正则模型语义和 L-稳定模型语义，以及动力学稳定（支持）类语义。研究结果表明，陷阱空间语义提供了一个统一而精确的框架，可用于证明支持类、严格稳定（支持）类和正则模型的存在，并揭示和形式化正规逻辑程序现有语义之间更深层的联系。

关键词：逻辑程序设计、正规逻辑程序、Clark完备化、模型论语义、动力学语义、陷阱空间、布尔网络、无穷结构

1 引言

正规逻辑程序（NLP）的含义——其声明式语义——通常由与该程序相关的逻辑公式的一类模型来定义，例如该程序的 Clark完备化的 Herbrand模型 [13]。后来证明，这与支撑模型语义等价 [2]。对于含有否定的 NLP，Clark完备化可能没有模型，也可能有多个极小模型；因此，通常不存在唯一的最小Herbrand模型。在这种情况下， [24] 提出了稳定模型语义，以提供一种规范的二值模型概念，其定义基于约简变换的最小模型，是一种优雅的不动点定义。后来，稳定模型被刻画为良支撑模型 [21], ，即具有无环有限论证的模型——这进而促成了稳定模型存在性的图形化条件 [20, 1], ，以及与其他形式的非单调逻辑之间的等价性结果 [43, 31, 32, 7]。

一种三值逻辑方法由此被引入，其中第三个值表示无知 [23, 33, 35]。后续研究通过引入额外的三值逻辑

M. Gebser, D. Inclezan, F. Ricca, M. Carro & M. Truszczynski：第 41 届逻辑程序国际会议（ICLP 2025），EPTCS439，2026 年，第 294–319 页，doi:10.4204/EPTCS.439.21

© V.G. Trinh, S. Soliman, F. Fages & B. Benhamou 本作品依据 Creative Commons 署名许可协议授权。

变换，拓展了 NLP 的语义图景 [3]。稳定（支持）部分模型语义——也称为三值稳定（支持）模型语义——扩展了二值稳定（支持）模型语义 [34,19, 33]。在这一框架下，所有模型都是极小的，并且每个 NLP 至少存在一个稳定（支持）部分模型。值得注意的是，两种特定类型的稳定部分语义在信息内容上有所区别：良基部分模型语义 [22, 33], 表示信息量最少的唯一模型，而正则模型语义 [42], 则涵盖信息量最大的模型。值得注意的是，正规逻辑程序中的这些三值语义（例如，稳定部分模型、正则模型）已被证明分别对应于 Dung框架 [17, 41]和基于假设的论证 [10], 中的若干基于扩展的语义（例如，完备扩展、优选扩展）；这两者是符号人工智能中的两种重要形式体系。

或者，也可以将 NLP 视为一种状态转移系统，其中程序中的每条规则都表示一个组件（此处为原子）如何受到其他组件的影响 [4, 8]。程序的动力学行为，包括其振荡行为 [27], ，由一个称为（稳定或支持）转移图的有向图刻画；该图的顶点是二值解释，弧则表示解释之间的转移。由此提出了稳定类语义 [4]和支持类语义 [27]。如果一个稳定类（分别为支持类）的大小为一，则它与一个稳定模型（分别为支持模型）相重合，并表现出稳定行为。否则，它表现出振荡行为。

上述语义刻画了程序行为的不同方面。尽管取得了成功，它们在解释原则上往往各不相同，而且许多语义缺乏一个能够连贯整合模型论行为与动力学行为的统一框架。最近，我们建立了 Datalog¬ 程序（即不含函数符号的 NLP，因此 Herbrand 基是有限的）与布尔网络之间的形式化联系，并由此引入了 Datalog¬ 程序的陷阱空间概念，该概念的灵感来自布尔网络中的陷阱空间概念 [28, 39]。这一概念为模型论方面与动力学方面搭建了桥梁，但仅适用于有限结构 [40]。

本文将陷阱空间的概念推广到任意 NLP，并引入陷阱空间语义，作为一种解释 NLP 的新方法。这种新语义既有模型论刻画，也有动力学刻画，为理解程序行为提供了全面的方法。我们确立了陷阱空间语义的基础性质，并系统地阐明了它与已有的模型论语义和动力学语义之间的关系，包括稳定（支持）模型语义、稳定（支持）部分模型语义、正则模型语义和 L-稳定模型语义，以及稳定（支持）类语义等动力学语义。我们的结果表明，陷阱空间语义提供了一个统一框架（并恰当地运用了集合论公理），可用于证明支持类、严格支持类、严格稳定类或正则模型的存在性——遗憾的是，此类证明在先前文献中要么缺失，要么不够严谨 [4, 42, 27]。此外，借助陷阱空间语义所依托的稳定或支持陷阱集概念，我们修正了 [27] 中既有的严格稳定类或严格支持类替代刻画中的一个缺陷。最后，陷阱空间语义成为一种有力工具，有助于揭示并形式化 NLP 各种已有语义之间更深层的关系，例如稳定（分别为支持）类语义与稳定（分别为支持）部分模型语义之间的关系，以及正则模型语义与稳定类语义和 L-稳定模型语义之间的关系。

本文其余部分安排如下：第2节回顾 NLP 和集合论的必要背景。第3节给出陷阱空间语义的形式化定义及其基本性质。第4节展示陷阱空间语义与其他语义之间的关系。第5节介绍存在性结果。第6节总结全文并探讨未来的研究方向。

2 预备知识

2.1 正规逻辑程序

我们假设读者熟悉逻辑程序设计理论和稳定模型语义。除非特别说明，NLP 指正规逻辑程序。此外，我们考虑布尔域 $\mathbb{B} = \{0,1\}$ 和三值域 $\mathbb{B}_\star = \{0,1,\star\}$。本文使用的逻辑联结词包括 $\wedge$（合取）、 $\vee$（析取）、 $\neg$（否定）和 $\leftrightarrow$（等价）。

我们考虑一种一阶语言，它建立在一个无限的变量字母表以及有限的常量、函数符号和谓词符号字母表之上。一阶项集合是包含变量和常量、并在函数符号的应用下封闭的最小集合。原子是形如 $p(t1,\ldots,t_k)$ 的公式，其中 p 是谓词符号，且每个 t_i 都是一阶项。正规逻辑程序 P 是由有限条形如 $p \leftarrow p1,\ldots,p_m,\sim p_{m+1},\ldots,\sim p_k$ 的规则组成的集合，其中 p 和 p_i 是原子，$k \geq m \geq 0$，而 $\sim$ 表示默认否定。事实是满足 $k = 0$ 的规则。对于上述形式的任意规则 r，$h(r) = p$ 称为 r 的首部，$b^+(r) = \{p1,\ldots,p_m\}$ 称为 r 的正体，$b^-(r) = \{p_{m+1},\ldots,p_k\}$ 称为 r 的负体，而 $b(r) = b^+(r) \cup b^-(r)$ 称为 r 的体。为方便起见，我们将 $bf(r) = \bigwedge v \in b^+(r)\, v \wedge \bigwedge v \in b^-(r) \neg v$ 记作 r 的体公式；若 $k = 0$，则 $bf(r) = 1$。若对所有 $r \in P$ 都有 $b^-(r) = /0$，则 P 称为正NLP。若对所有 $r \in P$ 都有 $b^+(r) = /0$，则 P 称为负正规逻辑程序。若对于 P 中的任意规则，体中的变量也出现在首部中 [36]，则程序 P 称为无内部变量。

如果一个项、原子或 NLP 不包含任何变量，则称其为基。NLP P 的 Herbrand 基（记作 HB_P）是由 P 的字母表构成的所有基原子的集合。在不含函数符号时，该集合是有限的；Datalog$^\neg$ 程序 [12]正是这种情况。NLP P 的基实例化（记作 gr(P)）是 P 中所有规则的基实例集合。如果 gr(P) 中每个出现在 HB_P 中的原子至多出现在一条规则的首部中，则称 NLP P 为单规则 NLP [37]。

在接下来的章节中，我们将使用 NLP [18] 的最小不动点变换来证明许多新的结果。为使本文自洽，下面简要回顾 NLP P 的最小不动点定义。更多详情请参阅 [18]。设 r 是 gr(P) 中的规则 $p \leftarrow \sim p1、\ldots、\sim p_k、q1、\ldots、q^j$，并设 r_i 是 gr(P) 中满足 $_i \leftarrow \sim q_i^1、\ldots、\sim q^{l_i}{}_i$ 且 $1 \leq i \leq j$ 和 $l_i \geq 0$ 的规则。则 $\Pi_r(\{r1、\ldots、r_j\})$ 是如下规则

$$p \leftarrow \sim p_1,\ldots,\sim p_k,\sim q_1^1,\ldots,\sim q_1^{l_1},\ldots,\sim q_j^1,\ldots,\sim q_j^{l_j},$$

这意味着将规则 r 的正体中的每个原子 q_j 替换为规则 r_j 的体。接着 Π_P 是对负正规逻辑程序的变换：

$$\Pi_P(Q) = \{\Pi_r(\{r_1,\ldots,r_j\}) \mid r \in gr(P), r_i \in Q, 1 \leq i \leq j\}.$$

令 $lfp(P)_i = (\Pi_P(/0))^i = \Pi_P(\Pi_P(\ldots\Pi_P(/0)))$，则 $lfp(P) = \bigcup_{i\geq 1} lfp(P)_i$ 是 NLP P 的最小不动点。

2.1.1 稳定模型与受支持部分模型

NLP P 的三值解释 I 是一个映射 $I : HB_P \to \mathbb{B}_\star$。若对所有 $a \in HB_P$，$I(a) \neq \star$，则 I 是 P 的二值解释。通常，二值解释写作其中为真的原子集合。三值解释 I 刻画了由 $\mathscr{S}(I)$ 表示的二值解释集合，其定义为：$\mathscr{S}(I) = \{J \mid J \in 2^{HB_P}, \forall a \in HB_P,\ I(a) \neq \star \Rightarrow J(a) = I(a)\}$。例如，若 $I = \{p = 1,\ q = 0,\ r = \star\}$，则 $\mathscr{S}(I) = \{\{p\},\{p,r\}\}$。我们考虑三值解释上的三种序。真值

序 $\leq_t$ 由 $0 <_t \star <_t 1$ 给出。因此，$I_1 \leq_t I_2$ 当且仅当对所有 $a \in HB_P$，$I_1(a) \leq_t I_2(a)$。序 $\leq_s$ 由 $0 <_s \star, 1 <_s \star$ 给出；除此之外没有其他关系。因此，$I_1 \leq_s I_2$ 当且仅当对所有 $a \in HB_P$，$I_1(a) \leq_s I_2(a)$。此外，$I_1 \leq_s I_2$ 当且仅当 $\mathscr{S}(I_1) \subseteq \mathscr{S}(I_2)$，也就是说，$\leq_s$ 与子集偏序相同。信息序 $\leq_i$ 由 $\star <_i 0, \star <_i 1$ 给出；除此之外没有其他关系。因此，$I_1 \leq_i I_2$ 当且仅当对所有 $a \in HB_P$，$I_1(a) \leq_i I_2(a)$。显然，$\leq_i$ 是 $\leq_s$ 的补，即 $I_1 \leq_s I_2$ 当且仅当 $I_2 \leq_i I_1$。

设 e 是 HB_P 上的一个命题公式，仅使用 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$ 联结词。则按照三值逻辑，公式 e 在三值解释 I 下的赋值（记为 I(e)）递归定义如下：若 $e \in \mathbb{B}_\star$，则 $I(e) = e$；若 $e = a$，且 $a \in HB_P$，则 $I(e) = I(a)$；若 $e = \neg e_1$，则 $I(e) = \neg I(e_1)$；若 $e = e_1 \wedge e_2$，则 $I(e) = \min_{\leq_t}(I(e_1), I(e_2))$；若 $e = e_1 \vee e_2$，则 $I(e) = \max_{\leq_t}(I(e_1), I(e_2))$，其中 $\neg 1 = 0$、$\neg 0 = 1$、$\neg\star = \star$，且 $\min_{\leq_t}$（分别为 $\max_{\leq_t}$）是根据序 $\leq_t$ 求两个值中最小值（分别为最大值）的函数。若对于 gr(P) 中的每条规则 r，$I(bf(r)) \leq_t I(h(r))$，则称三值解释 I 是 NLP P 的一个三值模型。

给定 NLP P 的一个三值解释 I，P 关于 I 的约简（记为 P^I）定义如下：若对于某个 $1 \leq i \leq k$，$I(b_i) = 1$，则从 gr(P) 中删除任何规则 $a \leftarrow a_1, \ldots, a_m, \sim b_1, \ldots, \sim b_k \in$；随后，从 gr(P) 中删除任何满足 $I(b_i) = 0$ 的 $\sim b_i$；然后，将剩余的每个 $\sim b_i$ 替换为一个特殊原子 u，使得 $u \notin HB_P$，且其取值始终为 $\star$。NLP P^I 是正的，并且具有唯一的 $\leq_t$-最小三值模型。计算该 $\leq_t$-最小模型的方法见 [33]。若 I 等于 P^I 的 $\leq_t$-最小三值模型，则 I 是 P 的稳定部分模型。若一个稳定部分模型 I 是 $\leq_s$-最小的 [35]，则它是 M-稳定模型。本文将正则模型定义为 M-稳定模型，因为二者等价 [19]。在二值情形下，P^I 与 [24] 定义的约简相同；若 I 等于 P^I 的 $\leq_t$-最小二值模型，则 I 是 P 的稳定模型。容易推出，稳定模型是二值正则模型，也是二值稳定部分模型 [3]。我们将 I^u 定义为在 I 中取值为 $\star$ 的基原子集合，即 $I^u = \{v \mid v \in HB_P, I(v) = \star\}$。若 I 是 P 的稳定部分模型，且不存在稳定部分模型 J 满足 $J^u \subset I^u$ [35]，则 I 是 P 的 L- 稳定模型。

NLP P 的（命题）Clark完备化（记作 comp(P)）由以下等价式组成：对于每个 $p \leftrightarrow \bigvee_{r \in gr(P), h(r)=p} bf(r)$，其中 $p \in HB_P$；如果不存在首部为 p 的规则，则该等价式为 $p \leftrightarrow 0$。令 $rhs_P(a)$ 表示 comp(P) 中基原子 $a \in HB_P$ 对应等价式的右侧。当且仅当对于每个 $a \in HB_P$，都有 $I(a) = I(rhs_P(a))$，三值解释 I 才是 comp(P) 的三值模型。在本文中，我们将 P 的受支持的部分模型定义为 comp(P) 的三值模型，将 P 的支持模型定义为 comp(P) 的二值模型。显然，支持模型是（二值）部分受支持模型。已有研究指出，稳定部分模型（分别为稳定模型）是受支持的部分模型（分别为支持模型），但反之未必成立 [14]。

2.1.2 稳定类与受支持类

设 P 是一个 NLP，I 是 P 的任意二值解释。我们有，P^I 是正的，并且有唯一的 $\leq_t$-最小二值模型（记作 J）。我们将算子 F_P 定义为 $F_P(I) = J$。相较之下，我们将算子 T_P 定义为 $T_P(I) = J$，其中 J 是一个二值解释，满足对于每个 $a \in HB_P$，都有 $J(a) = I(rhs_P(a))$。

定义 2.1. NLP P 的二值解释的非空集合 S 是稳定类，当且仅当 $S = \{F_P(I) \mid I \in S\}$ *[4]*。类似地，S 是 NLP P 的支持类，当且仅当 $S = \{T_P(I) \mid I \in S\}$ *[27]*。若 P 的稳定类（分别为支持类）S 不存在任何属于稳定类（分别为支持类）的真子集，则称 S 为严格的。

例 2.1. 考虑 NLP $P = \{a \leftarrow b;\ b \leftarrow a\}$，其中符号“;”用于分隔程序规则。由于 P 是正程序，对于任意二值解释 I，$P^I = P$。因此，对于所有 I，$F_P(I) = /0$。

容易推导出，P 只有唯一的稳定类 $\{\emptyset\}$。另一方面，我们有 $T_P(/0) = /0$、$T_P(\{a\}) = \{b\}$、$T_P(\{b\}) = \{a\}$，以及 $T_P(\{a,b\}) = \{a,b\}$。容易推导出，P 有三个支持类： $\{\emptyset\}$、 $\{\{a\}$、 $\{b\}\}$和 $\{\{a, b\}\}$。

2.1.3 迁移图

P 的稳定（分别为受支持）转移图是一个（可能无限的）有向图（记作 $tg_{st}(P)$（分别为 $tg_{sp}(P)$）），其顶点集为 P 的所有可能的二值解释，并且 (I, J) 是 $tg_{st}(P)$（分别为 $tg_{sp}(P)$）的一条弧，当且仅当 $J = F_P(I)$（分别为 $J = T_P(I)$）。给定一个有向图 G，我们用 V (G)（分别为 E(G)）表示 G 的顶点集（分别为弧集）。关于有限图与无限图理论的更多细节，请参阅 [29]。

例2.2。考虑 NLP $P = \{p(X) \leftarrow p(s(X))\}$。P 的 Clark完备化包括 $p(0) \leftrightarrow p(s(0))$、$p(s(0)) \leftrightarrow p(s(s(0)))$，.....容易验证，P 只有三个支持部分模型：$I_1$，其中 $I_1(a) = 0$ 对每个 $a \in HB_P$都成立；I_2，其中 $I_2(a) = 1$ 对每个 $a \in HB_P$都成立；以及 I_3，其中 $I_3(a) = \star$ 对每个 $a \in HB_P$都成立。我们有 $P^{I_1} = P^{I_2} = P^{I_3} = P$。容易推得，$I_1$ 是 P 唯一的稳定部分模型。它也是唯一的正则模型、稳定模型和 L-稳定模型。P 的稳定转移图和受支持转移图分别如图1(a)和图1(b)所示。NLP P 只有一个稳定类 $\{I_1\}$，但有三个支持类 $\{I_1\}$、 $\{I_2\}$ 和 $\{I_1, I_2\}$。因此， $\{I_1\}$ 是 P 唯一的严格稳定类，而 $\{I_1\}$ 和 $\{I_2\}$ 是 P 的严格支持类。

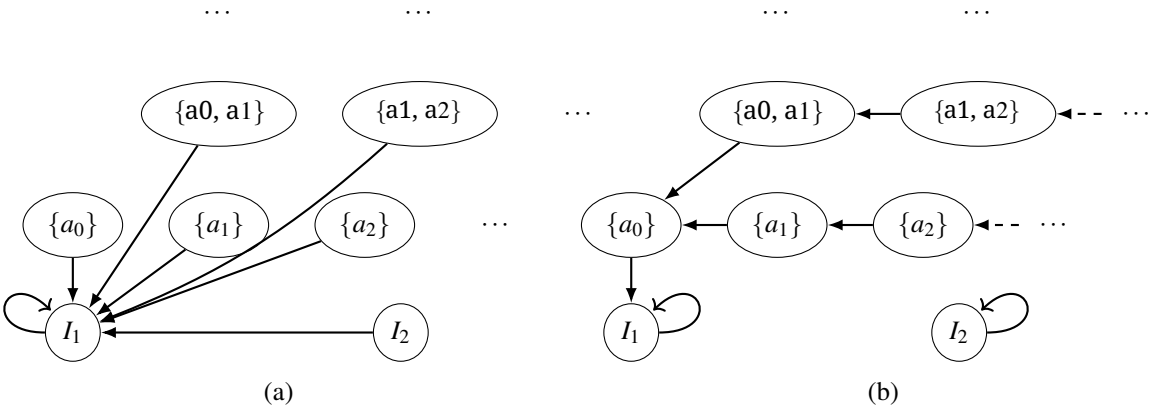

图1：例2.2中 NLP P 的稳定转移图（a）和支持转移图（b）。其中，a_i表示 $p(s^i(0))$，$I_1(a) = 0, \forall a \in HB_P(I_1 = /0)$，$I_2(a) = 1, \forall a \in HB_P(I_2 = HB_P)$。

2.2 集合论

以下各节中的证明依赖于集合论中的已有结果。为使本文内容完整自足，我们在下文回顾这些结果。更多详情请参阅 [25]。

引理2.1（佐恩引理 [44]）。给定一个偏序集 $(P \preceq)$。如果任意 $\preceq$-链都有上界，那么 $(P \preceq)$ 就有一个极大元。

还有一个与佐恩引理等价的“加强版”：

引理 2.2（[6]）。给定一个偏序集 $(P \preceq)$，如果每条 $\preceq$-链都有上界，那么对任意 $p \in P$，P 都有一个极大元 m，使得 $p \preceq m$。

最后，我们证明 Hartogs 引理，它的基本含义是：对于任意集合 X，总存在一个更大的序数 [26]。

引理 2.3（Hartogs 引理）。对于任意集合 X，都存在一个最小序数 α，使得不存在从 α 到 X 的单射。

3 陷阱空间语义

稳定（分别为支持）陷阱集的概念，是通过放宽定义 2.1 中稳定（分别为支持）类所要求的等式而得到的，具体如下：

定义 3.1。NLP P 的一个非空二值解释集合 S 称为 P 的稳定陷阱集（分别为支持陷阱集），当且仅当 $\{F_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S$（分别为 $\{T_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S$）。

请注意，稳定（分别为支持）类显然是稳定（分别为支持）陷阱集，但反之未必成立。事实上，对于例 2.2 中的 NLP P，$\{\emptyset\}$ 是一个稳定类，也是一个稳定陷阱集；而 $\{/0, a_0\}$ 是一个稳定陷阱集，却不是稳定类。类似地，$\{/0, HB_P\}$ 是一个支持类，也是一个支持陷阱集；而 $\{/0, a_0, a_1\}$ 是一个支持陷阱集，却不是支持类。加入关于三值解释的条件后，我们便得到稳定或支持陷阱空间的概念：

定义 3.2. 若 NLP P 的三值解释 I 满足 $\mathcal{S}(I)$ 是 P 的稳定（分别为支持）陷阱集，则称 I 为 P 的稳定陷阱空间（分别为支持陷阱空间）。若 I 是 P 的稳定或支持陷阱空间，则称 I 为 P 的陷阱空间。

更一般地，将 NLP 的稳定或支持陷阱集概念推广到一般的（可能是无限的）有向图并不困难：

定义 3.3. 考虑一个有向图 G。若 V(G) 的一个非空子集 S 满足：不存在两个顶点 A 和 B，使得 $A \in S$、$B \notin S$，且 $(A,B) \in E(G)$，则称 S 为 G 的陷阱集。

根据定义，立即可知，S 是 P 的稳定（分别为支持）陷阱集，当且仅当 S 是 $tg_{st}(P)$（分别为 $tg_{sp}(P)$）的陷阱集。因此，由定义 3.2 可推得，三值解释 I 是 P 的稳定（分别为支持）陷阱空间，当且仅当 $\mathcal{S}(I)$ 是 $tg_{st}(P)$（分别为 $tg_{sp}(P)$）的陷阱集。由于稳定和支持转移图刻画了 NLP [4, 27], 的动力学方面，这表明 NLP 的陷阱空间语义具有动力学刻画。

例3.1。考虑例2.2中的 NLP P。P 的稳定迁移图和支持迁移图分别如图1(a)和图1(b)所示。三值解释 I_1 是 P 的稳定（分别为支持）陷阱空间，因为 $\mathcal{S}(I_1) = \{\emptyset\}$ 是 P 的稳定（分别为支持）陷阱集。容易验证，$\mathcal{S}(I_1)$ 也是 $tg_{st}(P)$（分别为 $tg_{sp}(P)$）的陷阱集。注意，$\{/0, a_0, a_1\}$ 是稳定（分别为支持）陷阱集，但它不对应于 P 的稳定（分别为支持）陷阱空间。我们看到，I_2 是 P 的支持陷阱空间，但不是稳定陷阱空间，因为 $\mathcal{S}(I_2) = \{HB_P\}$ 是 P 的支持陷阱集，但不是稳定陷阱集。

我们将 NLP 的陷阱空间语义定义为其陷阱空间的集合。在适用时，我们将仅考虑稳定陷阱空间或支持陷阱空间，以便将这些子集与其他语义联系起来。为方便起见，令 StTS(P)（分别为 SuTS(P)）表示 NLP P 的稳定（分别为支持）陷阱空间集合。我们首先建立最简单的性质，但该性质对于证明后续结果至关重要，尤其是在无穷结构中。请注意，由于篇幅限制，所有证明均见附录A。

命题 3.1。NLP P 总是具有一个稳定或支持陷阱空间。

接下来，我们研究稳定或支持陷阱空间之间的一致性，这将用于研究模型或类不相交性（见第4节）。

定义3.4。设有一个 NLP P。若对于所有 a $\in HB_P$，$I_1(a) \leq_s I_2(a)$ 或 $I_2(a) \leq_s I_1(a)$，则称 P 的两个三值解释 I_1 和 I_2 相容，当且仅当如此。等价地，若 $\mathscr{S}(I_1) \cap \mathscr{S}(I_2) \neq /0$，则称 I_1 和 I_2 相容，当且仅当如此。

请注意，在定义 3.4 中使用 $I_1 \leq_s I_2$ 或 $I_2 \leq_s I_1$ 在此并不足够，因为两个关于 $\leq_s$ 不可比较的三值解释仍可能相容。接下来，我们将上述定义推广到一个由两两相容的陷阱空间构成的非空集合：

定义 3.5。给定一个 NLP P，设 E 是一个由两两相容的三值解释组成的非空集合（即，对于所有 E_i, E j $\in$E，E_i 和 E j 均相容）。E 中所有元素的交集（记为 $\sqcap_E$）是一个定义如下的三值解释：对于所有原子 a $\in HB_P$，$\sqcap_E(a) = \min_{\leq_s}\{E_i(a) \mid E_i \in E\}$。这是定义良好的，因为 $\{E_i(a) \mid E_i \in E\}$ 关于 $\leq_s$ 构成一个全序有限集合（因此其最小元素存在），因为 E 中的所有元素两两相容。

指出相容的稳定（分别为支持）陷阱空间的交集仍是稳定（分别为支持）陷阱空间，并应用定义3.4和引理 2.2，可得以下两个引理：

引理 3.1. 设有一个 NLP P，以及 P 的一个三值解释 J。若 J 是 P 的稳定陷阱空间，则存在一个 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间 J′ of P，使得 $J' \leq_s J$。

引理 3.2. 设有一个 NLP P，以及 P 的一个三值解释 J。若 J 是 P 的支持陷阱空间，则存在一个 $\leq_s$-极小支持陷阱空间 J′ of P，使得 $J' \leq_s J$。

除命题 3.1 外，我们还得到以下主要结果：

The定理 3.1（主要结果）。任何 NLP P 都有一个 $\leq_s$-极小稳定（或支持）陷阱空间 *e.*

接下来，我们建立非空二值解释集合与稳定或支持陷阱空间之间的关系，这有助于在后文衔接稳定（分别为支持）类与稳定（分别为支持）陷阱空间之间的关系。

命题 3.2. 考虑一个 NLP P。设 S 是 P 的二值解释的非空集合。那么存在唯一的 $\leq_s$-极小稳定（分别为支持）陷阱空间，记作 $\langle S\rangle_P^{st}$（分别为 $\langle S\rangle^{sp}$ P），覆盖 S，即 $S \subseteq \mathscr{S}(\langle S\rangle_P^{st})$（分别为 $S \subseteq \mathscr{S}(\langle S\rangle^{sp}$ P））。

最后，我们证明关于 $\leq_s$-极小性的陷阱空间分离：

命题 3.3. 考虑一个 NLP P。设 I_1 和 I_2 是 P 的两个不同的 $\leq_s$-极小稳定（分别为支持）陷阱空间。那么 I_1 和 I_2 不相容。

4 与其他语义的关系

自然地，如果 NLP P 的稳定（分别为支持）陷阱空间是二值的，那么它也是 P 的稳定（分别为支持）模型。现在，我们介绍稳定或支持陷阱空间与其他类型模型之间的更多关系。这些结果表明，陷阱空间语义可以为 NLP 提供统一的语义框架。需要注意的是，历史上 NLP 存在不同的模型论或动力学语义，且它们通常以不同方式定义 [43, 35]。为方便起见，令 StPM(P)（分别为 SuPM(P)）表示 P 的稳定（分别为支持）部分模型集；令 StM(P)（分别为 SuM(P)）表示 P 的稳定（分别为支持）模型集；令 RegM(P) 表示 P 的正则模型集。

4.1 与稳定与支持类语义的关系

借助陷阱空间语义所依据的稳定或支持陷阱集概念，我们纠正了 [27] 中已证明的、对严格稳定类或支持类的现有替代刻画中的一个缺陷。由于篇幅有限，技术细节请参阅 B 节。

现在，我们证明一个与引理 3.1 类似的结论，但针对的是稳定陷阱集，而非稳定陷阱空间。证明方法与引理 3.1 类似。

引理 4.1。考虑一个 NLP P，以及 P 的一个非空二值解释集合 S。若 S 是 P 的稳定陷阱集，则存在一个 $\subseteq$-极小稳定陷阱集 S′，使得 S′ $\subseteq$S。

对于支持陷阱集，也有类似结论：

引理 4.2。给定一个 NLP P，若 P 的一个非空二值解释集合 S 是 P 的支持陷阱集，则存在一个 $\subseteq$-极小支持陷阱集 S′，使得 S′ $\subseteq$S。

根据引理 4.1，我们得到以下主要结果：

定理 4.1（主要结果）。设 NLP P。二值解释的非空集合 S 是 P 的一个$\subseteq$-极小稳定陷阱集，当且仅当 S 是 P 的一个严格稳定类。

类似地，根据引理 4.2，我们得到：

定理 4.2。设 NLP P。二值解释的非空集合 S 是 P 的一个 $\subseteq$-极小支持陷阱集，当且仅当 S 是 P 的一个严格支持类。

定理 4.1 和定理 4.2 立即推出，每个稳定（分别地，支持）陷阱空间总是至少覆盖 NLP 中的一个严格稳定（分别地，支持）类：

推论 4.1。设 NLP P。对于 P 的每个稳定（分别地，支持）陷阱空间 I，$\mathscr{S}$(I) 至少包含 P 的一个严格稳定（分别地，支持）类。

它们还自然地蕴含了两个严格稳定类或支持类互不相交：

命题 4.1。NLP P 的两个不同严格稳定类（分别地，支持类）互不相交。

在 [4]，中，作者仅证明了 Datalog$^\neg$ 程序中两个严格稳定类互不相交。在 [27]，中，作者仅证明了 Datalog$^\neg$ 程序中两个严格支持类互不相交。

4.2 与稳定和支持部分模型语义的关系

我们首先为 NLP 中的支持陷阱空间建立一个模型论刻画 .

定理 4.3（主要结果）。给定一个 NLP P，当且仅当对每个 a $\in$HB$_P$，I(rhs$_P$(a)) $\leq_s$ I(a) 时，I 是 P 的支持陷阱空间。

定理 4.3 还指出，支持陷阱空间可能不是 comp(P) 的三值模型，因为它考虑的是序 $\leq_s$，而完备化考虑的是等价 $\leftrightarrow$。事实上，给定例2.2中的 NLP P，令 I$_4$ 为如下三值解释：对于每个 a $\in$ HB$_P \setminus \{a_0\}$，I$_4$(a$_0$) $= \star$，且 I$_4$(a) $= 0$。很容易验证，I$_4$ 是一个支持陷阱空间，但不是 comp(P) 的三值模型。

为了推理稳定陷阱空间，我们应用最小不动点变换，该变换总会产生一个负正规逻辑程序。随后我们证明，对于负正规逻辑程序，稳定转移图与支持转移图重合，从而稳定陷阱空间与支持陷阱空间也重合。

定理 4.4。负正规逻辑程序 P 的稳定转移图与受支持转移图相同。

推论 4.2。设 P 为负正规逻辑程序，则 P 的稳定陷阱空间集合与支持陷阱空间集合相同。

定理 4.5（[42]）。给定一个负正规逻辑程序 P，则 P 的稳定部分模型集合与 P 的支持部分模型集合相同。

定理 4.6（ [3] 的定理 3.1）。考虑一个正规逻辑程序 P。令 lfp(P) 为 P 的最小不动点。则 P 与 lfp(P) 具有相同的稳定部分模型集合、相同的正则模型集合，以及相同的稳定模型集合。

基于这样一个性质：对于任意两个二值解释 I，$F_P(I) = F^{lfp(P)}(I)$，该性质已在 [27], 中得到证明，我们可以直接得到以下结论：

定理 4.7。令 P 为一个正规逻辑程序，lfp(P) 表示其最小不动点。则 $tg_{st}(P) = tg_{st}(lfp(P))$，即 P 与 lfp(P) 具有相同的稳定转移图。

由于稳定陷阱空间是基于稳定转移图定义的，上述结果立即推出以下结论：

推论 4.3。设 P 为一个 NLP，lfp(P) 表示 P 的最小不动点。那么，P 与 lfp(P) 具有相同的稳定陷阱空间集合。

由定理 4.3 可轻易得出 NLP 的受支持部分模型与受支持陷阱空间之间的以下简单关系：

命题 4.2。给定一个 NLP P，若 I 是 P 的受支持部分模型，则 I 也是 P 的受支持陷阱空间。

通过应用最小不动点变换，我们可以得到类似的关系：

命题 4.3。给定一个 NLP P，若 I 是 P 的稳定部分模型，则 I 也是 P 的稳定陷阱空间。

接下来，我们将进一步探讨受支持陷阱空间与受支持部分模型之间更深层的关系。首先定义一个新概念如下：

定义 4.1. 考虑一个 NLP P。我们定义映射 f_P: SuTS(P) $\to$ SuTS(P) 如下：如果 m 是一个支持陷阱空间，则对于 $v \in HB_P$，有 $f_P(m)(v) = m(rhs_P(v)) \forall$。映射 f_P 是良定义的，因为当 m 是一个支持陷阱空间时，$f_P(m)$ 总是一个支持陷阱空间（见引理 4.3）。

接下来，我们证明映射 f_P 保持支持陷阱空间这一性质：

引理 4.3. 给定一个 NLP P 及其支持陷阱空间 I，$f_P(I)$ 是 P 的支持陷阱空间，并且 $I \leq_i f_P(I)$。

结合引理 4.3 以及 Hartogs 引理的应用（见引理 2.3），我们得到以下主要结果：

定理 4.8（主要结果）。考虑一个 NLP P。对于每个支持陷阱空间 $I \in$SuTS(P)，存在唯一的受支持的部分模型 $I' \in$SuPM(P)，使得 $I' \leq_s I$。

定理 4.8 的精妙之处在于，函数 f_P 从任意支持陷阱空间出发，都能得到唯一的受支持的部分模型。这一洞见是证明以下结果的关键。

推论 4.4。考虑一个 NLP P。当且仅当三值解释 I 是 P 的 $\leq_s$-极小受支持部分模型时，I 是 P 的 $\leq_s$-极小支持陷阱空间。

推论 4.4 很有启发性，因为它表明，尽管支持部分模型集合可能与支持陷阱空间集合不同，但它们的 $\leq_s$-极小元素相同。接下来，我们展示上述支持陷阱空间与支持部分模型之间的关系所蕴含的一个有趣结论。我们首先证明，包含于某个支持陷阱空间中的支持类，也包含于将 f_P 应用于该支持陷阱空间所得的结果中：

引理 4.4。考虑一个 NLP P。设 I 是 P 的一个支持陷阱空间。如果 S 是 P 的一个支持类，且 $S \subseteq \mathscr{S}(I)$，那么 $S \subseteq \mathscr{S}(\mathrm{f}_P(I))$。

现在我们证明支持类的情形：

命题 4.4。给定一个 NLP P，如果 S 是一个支持类，那么 $\langle S \rangle^{sp}$ P 是一个支持偏模型 *l.*

稳定类的情形类似：

命题 4.5。给定一个 NLP P，若 S 是 P 的稳定类，则 $\langle S \rangle_P^{st}$ 是一个稳定部分模型。

命题 4.4（分别地，命题 4.5）让我们更深入地理解了 NLP 的受支持类（分别地，稳定类）与受支持部分模型（分别地，稳定部分模型）之间的关系。

4.3 与正则模型语义的关系

请回想，稳定陷阱空间未必是稳定部分模型。事实上，给定例 2.2 中的 NLP P，令 I_4 为如下三值解释：对于每个 $a \in HB_P \setminus \{a_0\}$，$I_4(a_0) = \star$，且 $I_4(a) = 0$。容易验证，I_4 是 P 的稳定陷阱空间，但不是 P 的稳定部分模型。然而，由于 P 的每个二值解释在 P 的稳定转移图中都有一条弧指向 I_1，因此对于 P 的每个稳定陷阱空间 I，所有 $a \in HB_P$ 都满足 $I(a) \neq 1$。这意味着 I_1 是 P 的 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间。由于 I_1 也是 P 的正则模型，我们不禁想知道，P 的正则模型集合是否与 P 的 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间集合一致；若确实如此，这将十分有趣。我们对 NLPs 给出如下回答：

定理 4.9（主要结果）。给定一个 NLP P，三值解释 I 是 P 的正则模型，当且仅当 I 是 P 的一个 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间。

根据推论 4.1、命题 3.3 和定理 4.9，每个 NLP 的正则模型至少包含该 NLP 的一个严格稳定类；据我们所知，这是一个新的见解。

4.4 与 L-稳定模型语义的关系

我们首先在 $\mathbb{B}_\star$ 上定义一个新的序，该序只考虑未定义值 $\star$：

定义 4.2。$\mathbb{B}_\star$ 上的序 $\leq_u$ 由 $0 \leq_u 1$、$1 \leq_u 0$、$0 <_u \star$、$1 <_u \star$给出，不存在其他关系。给定 NLP P 的两个三值解释 I_1 和 I_2，当且仅当对于所有 $v \in HB_P$，$I_1 \leq_u I_2$ 蕴含 $I_1(v) \leq_u I_2(v)$。容易看出，$I_1 \leq_s I_2$ 蕴含 $I_1 \leq_u I_2$。

命题 4.6. 给定 NLP P 的两个三值解释 I_1 和 I_2，$I_1 \leq_u I_2$ 当且仅当 $I_1^u \subseteq I_2^u$。

命题 4.6 推出 L-稳定模型的一个等价定义：

推论 4.5. 给定 NLP P，I 是 L-稳定模型，当且仅当它是一个 $\leq_u$-极小稳定部分模型 *el.*

由推论 4.5 以及 $I_1 \leq_s I_2$ 蕴含 $I_1 \leq_u I_2$这一事实，很容易推出 L-稳定模型也是正则模型。然而，反过来通常未必成立。$\leq_s$与 $\leq_u$ 之间的关系引出了下面这个与定理 4.8 类似的命题：

命题 4.7. 考虑一个 NLP P。对于每个受支持的陷阱空间 I ∈SuTS(P)，都存在一个受支持的部分模型 J ∈SuPM(P)，使得 J $\leq_u$ I。

这一性质立即表明，受支持的部分模型集合与支持陷阱空间集合中的 $\leq_u$-极小元素相同。

推论 4.6. 设有一个 NLP P。三值解释 I 是 P 的 $\leq_u$-极小受支持部分模型，当且仅当 I 是 P 的 $\leq_u$-极小支持陷阱空间。

通过使用最小不动点变换，我们得到以下等价关系：

定理 4.10. 给定一个 NLP P，I 是 L-稳定模型，当且仅当 I 是 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间 *e.*

结合上述关系、最小不动点变换和定理 4.9，我们得到如下结论：

命题 4.8。给定一个 NLP P，I 是 P 的 L-稳定模型，当且仅当 I 是一个 $\leq_u$-极小正则模 *el.*

[35] 的研究表明，L-稳定模型是正则模型。命题 4.8 揭示了 L-稳定模型与正则模型之间更深层的关系。有趣的是，这有助于我们揭示以下见解：

推论 4.7。若 NLP P 没有 L-稳定模型，则它有无穷多个正则模型。

5 存在性结果

某种语义是否相容（即是否至少包含一个相应对象）是一个重要的性质 [36, 38]。对于 Datalog¬ 程序，证明或否定这一性质通常相当直接 [6]。然而，对于 Herbrand 基无限的任意 NLP，进行此类证明或反驳则更为复杂。这往往需要精确运用集合论公理或等价陈述。我们在此指出，先前关于支持类、严格支持（稳定）类以及正则模型存在性的论证，要么有所缺漏，要么不够精确；而陷阱空间语义可以提供一个统一且精确的框架，用于证明模型或类的存在性。此外，我们还揭示了 [35]中关于 L-稳定模型存在性的证明所存在的问题，并仅针对单规则程序对其进行了修正（详见 C 节）。

我们首先回顾一个众所周知的结果：

定理 5.1（ [4]中的定理 1）。任何 NLP P 都有一个稳定类。

定理 5.1 的证明依赖于 F_P 的反单调性和 F_P^2 的单调性，以构造两个构成稳定类的二值解释。然而，这种方法可能不直接适用于支持类，因为 T_P 既可能不具有单调性，也可能不具有反单调性。在 [27，命题 5.6]，中，作者断言稳定类和支持类必定存在，但没有提供形式化证明。尽管他们声称“如前文所述，稳定类/支持类始终存在”，但我们的分析表明，他们在前文中的论述并未清楚地证实这一主张。利用 $\subseteq$-极小稳定（分别为支持）陷阱集的存在性（可由引理 4.1（分别为引理 4.2）轻易推出），我们为 NLP 中稳定类的存在性提供了另一种证明（并为支持类的存在性提供了新的证明）。

定理 5.2。NLP P 总是存在一个 $\subseteq$-极小稳定（或受支持的）陷阱集。

定理 5.3. 任意 NLP P 都有一个支持类。

虽然文献 [4], 已精确证明稳定类的存在性，但迄今尚无严格稳定类（支持类）存在性的形式化证明。 [5]的研究考察了（有限）稳定类，并指出在这类情形下验证严格稳定类的存在性很简单；然而，即使在这些限制条件下，推导过程实际上也并非总是显而易见。借助上一节建立的与$\subseteq$-极小稳定（分别为支持）陷阱集之间的关系，我们可以轻易推导出严格稳定类（分别为支持类）的存在性：

推论 5.1（主要结果）。NLP P 始终有一个严格稳定（或受支持的）类。

正则模型与 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间之间的等价关系（见定理 4.9），以及 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间的存在性（见定理 3.1），立即推出 NLP 中正则模型的存在性：

推论 5.2。NLP P 始终有一个正则模型。

[42,命题 5.1] 通过证明 NLP 至少有一个可辩护模型（即稳定部分模型），且 $<_{undef}$（即 $<_s$）是在可辩护模型集合上的拟序（即传递且自反的关系），从而证明了 NLP 中正则模型的存在性。然而，这一论证仅对有限集合有效，而 NLP 的稳定部分模型集合可能是无限的。一般而言，无限集合可能没有极小元素（更多示例见 [38]）。对于无限集合，必须采用选择公理或等价表述 [6]。借助我们新的语义，可以优雅地证明正则模型的存在性，并准确说明所用集合论公理。

请注意，对于 NLP，正则模型等价于 M-稳定模型 [19]。由于 [35, 推论 5.4], 中证明了 M-稳定模型的存在性，正则模型的存在性也随即得出。因此，我们对推论 5.2 的证明为 [35, 推论 5.4]的证明提供了另一种（或许更简单的）方法。

6 结论

在本文中，我们引入陷阱空间语义，将其作为解释 NLP 的一种新颖且通用的框架。在先前关于 Datalog$^\neg$ 程序及其与布尔网络对应关系的研究基础上，我们将陷阱空间的概念推广到任意 NLP，包括具有无限 Herbrand 基的 NLP。这一推广提供了一个统一的、基于语义的基础，同时涵盖 NLP 的模型论和动力学视角。

我们形式化地定义了陷阱空间语义，并确立了其基础性质。值得注意的是，我们证明了它涵盖并连接了现有的模型论语义和动力学语义。通过这一统一，陷阱空间语义阐明了这些不同方法之间的关系，并提供了一种系统的方法来比较和解释它们。第4节展示的主要关系总结见图 2。

另一项重要贡献是将陷阱空间语义用作建立存在性结果的统一框架。我们展示了这一框架如何支持对支持类、严格支持类、严格稳定类以及正则模型的存在性进行严格证明——这些结果此前在文献中要么尚未出现，要么仅被非正式地提出。

更广泛地说，陷阱空间语义通过在 NLP 的模型论视角与动力学视角之间搭建概念桥梁，推动了该领域的发展。它使我们能够同时推理基于语义的算子的不动点，以及 NLP 随时间演变的动力学行为。这种二元视角为全面理解 NLP 的行为开辟了新的途径。

展望未来，后续研究应聚焦于将陷阱空间语义扩展到更丰富的程序类，例如析取逻辑程序、约束逻辑程序和扩展逻辑程序。

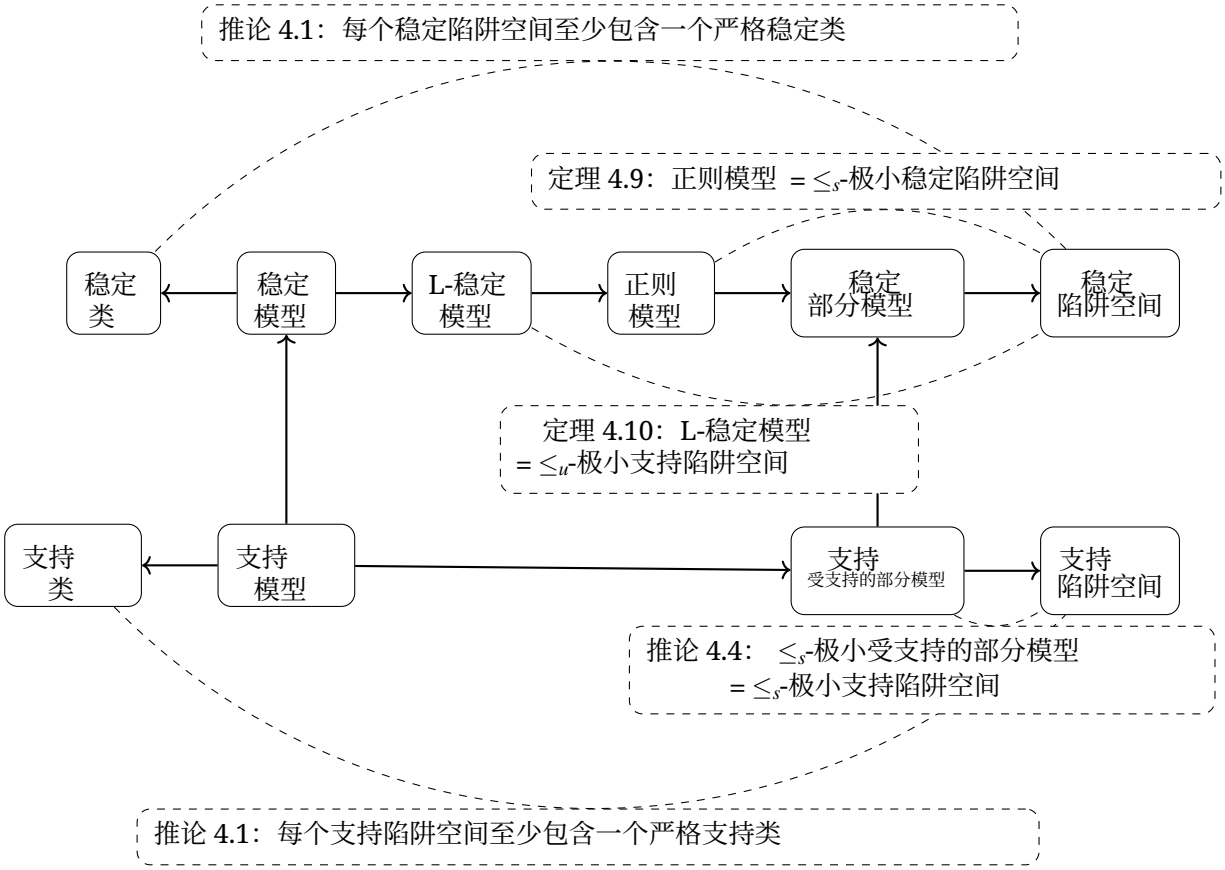

图 2：第4节所示主要关系的总结。实线弧表示集合包含关系，而虚线与方框组合表示两个端点之间的关系。

此外，还有许多其他语义方案，例如考虑累积性等抽象属性的方案 [15, 16]。探讨陷阱空间语义与这类语义之间的联系很有意义，也有助于厘清语义图景。最后，值得探索这种语义在逻辑与动态相互作用能发挥作用的领域中的应用，包括知识表示、验证和系统生物学。

参考文献

[1] Krzysztof R Apt & Marc Bezem (1991)：无环程序。《New Gener. Comput.》9，第 335–363 页，doi:10. 1007/BF03037168。[2] Krzysztof R Apt、Howard A Blair & Adrian Walker (1988)：迈向声明式知识理论。载于：《演绎数据库与逻辑程序设计基础》，爱思唯尔，旧金山，第 89–148 页。[3] Chandrabose Aravindan & Phan Minh Dung (1995)：正规逻辑程序和扩展逻辑程序展开/折叠变换的正确性。《J. Log. Program.》24(3)，第 201–217 页，doi:10.1016/ 0743-1066(94)00104-E。[4] Chitta Baral & V. S. Subrahmanian (1992)：逻辑程序和默认逻辑的稳定与扩展类理论。《J. Autom. Reason.》8(3)，第 345–366 页，doi:10.1007/BF02341854。

[5] Chitta Baral & V. S. Subrahmanian (1993)：逻辑程序设计与非单调推理替代语义之间的对偶关系。《J. Autom. Reason.》10(3)，第 399–420 页，doi:10.1007/BF00881799。[6] Ringo Baumann & Christof Spanring (2015)：无限论证框架：扩展的存在性与唯一性。载于：《知识表示、逻辑程序设计与抽象论证进展：献给 Gerhard Brewka 六十寿辰的论文集》，施普林格，Cham，第 281–295 页，doi:10.1007/978-3-319-14726-0_19。[7] Belaid Benhamou & Pierre Siegel (2012)：一种捕捉并扩展稳定模型语义的逻辑程序新语义。载于：ICTAI 论文集，IEEE计算机学会，希腊雅典，第 572–579 页，doi:10.1109/ICTAI.2012.167。[8] Howard A. Blair、Fred Dushin & Paul R. Humenn (1997)：程序之间的模拟即细胞自动机。载于：LPNMR 论文集，施普林格，柏林、海德堡，第 115–131 页，doi:10.1007/3-540-63255-7_9。[9] Martin Caminada、Samy S´a、Jo˜ao F. L. Alcˆantara & Wolfgang Dvor´ak (2015)：逻辑程序设计语义与论证语义之间的等价性。《Int. J. Approx. Reason.》58，第 87–111 页，doi:10. 1016/J.IJAR.2014.12.004。[10] Martin Caminada & Claudia Schulz (2017)：基于假设的论证与逻辑程序设计之间的等价性。《J. Artif. Intell. Res.》60，第 779–825 页，doi:10.1613/JAIR.5581。[11] Martin W. A. Caminada & Dov M. Gabbay (2009)：形式论证的逻辑阐释。《逻辑研究》93(2-3)，第 109–145 页，doi:10.1007/S11225-009-9218-X。[12] Stefano Ceri、Georg Gottlob & Letizia Tanca (1990)：逻辑程序设计与数据库：概述。施普林格，柏林，doi:10.1007/978-3-642-83952-8。[13] Keith L. Clark (1977)：失败否定。载于：《逻辑与数据库》，逻辑与数据库研讨会，Plemum Press，纽约，第 293–322 页，doi:10.1007/978-1-4684-3384-5_11。[14] Emmanuelle-Anna Dietz、Steffen H¨olldobler & Christoph Wernhard (2014)：在弱完备化与良基语义下建模抑制任务。《J. Appl. NonClass. Logics》24(1-2)，第 61–85 页，doi:10. 1080/11663081.2014.911520。[15] J¨urgen Dix (1995)：正规逻辑程序语义的分类理论：I. 强性质。《Fundam. Informaticae》22(3)，第 227–255 页，doi:10.3233/FI-1995-2233。[16] J¨urgen Dix (1995)：正规逻辑程序语义的分类理论：II. 弱性质。《Fundam. Informaticae》22(3)，第 257–288 页，doi:10.3233/FI-1995-2234。[17] Phan Minh Dung (1995)：论证的可接受性及其在非单调推理、逻辑程序设计和 n 人博弈中的基础作用。《Artif. Intell.》77(2)，第 321–358 页，doi:10.1016/ 0004-3702(94)00041-X。[18] Phan Minh Dung & Kanchana Kanchanasut (1989)：逻辑程序声明式语义的不动点方法。载于：NACLP 论文集，MIT出版社，俄亥俄州克利夫兰，第 604–625 页。[19] Thomas Eiter、Nicola Leone & Domenico Sacc`a (1997)：析取演绎数据库的部分语义。《Ann. Math. Artif. Intell.》19(1-2)，第 59–96 页，doi:10.1023/A:1018947420290。[20] Franc¸ois Fages (1994)：Clark完备化的一致性与稳定模型的存在性。《Methods Log. Comput. Sci.》1(1)，第 51–60 页。[21] Franc¸ois Fages (1991)：一般逻辑程序的一种新不动点语义及其与良基语义和稳定模型语义的比较。《New Gener. Comput.》9(3/4)，第 425–444 页，doi:10.1007/ BF03037172。[22] Allen Van Gelder、Kenneth A. Ross & John S. Schlipf (1988)：一般逻辑程序的无根据集合与良基语义。载于：ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART 论文集，ACM，得克萨斯州奥斯汀，第 221–230 页，doi:10.1145/308386.308444。[23] Allen Van Gelder、Kenneth A. Ross & John S. Schlipf (1991)：一般逻辑程序的良基语义。《J. ACM》38(3)，第 620–650 页，doi:10.1145/116825.116838。

[24] Michael Gelfond & Vladimir Lifschitz (1988)：逻辑程序设计的稳定模型语义。载于：ICLP/SLP会议论文集，MIT出版社，西雅图，第1070–1080页。[25]Paul Richard Halmos (1960)：朴素集合论。van Nostrand，纽约，doi:10.1007/ 978-1-4757-1645-0。[26] F. Hartogs (1915)：¨关于良序问题。Mathematische Annalen 76(4)，第438–443页，doi:10. 1007/bf01458215。[27] Katsumi Inoue & Chiaki Sakama (2012)：逻辑程序的振荡行为。载于：《正确推理——纪念 Vladimir Lifschitz 的基于逻辑的人工智能论文集》，施普林格，柏林，第345–362页，doi:10.1007/ 978-3-642-30743-0_23。[28] Hannes Klarner, Alexander Bockmayr & Heike Siebert (2015)：计算布尔网络的极大和极小陷阱空间。Nat. Comput. 14(4)，第535–544页，doi:10.1007/S11047-015-9520-7。[29] D´enes K¨onig (1990)：有限图与无限图理论。载于：《有限图与无限图理论》，施普林格，Birkhäuser Boston，马萨诸塞州，第45–421页，doi:10.1007/978-1-4684-8971-2。[30] John Wylie Lloyd (1984)：逻辑程序设计基础。施普林格，柏林海德堡，doi:10.1007/ 978-3-642-96826-6。[31] V. Wiktor Marek & V. S. Subrahmanian (1992)：一般逻辑程序中稳定语义、支持语义、默认语义与自认知语义之间的关系。《理论计算机科学》103(2)，第365–386页，doi:10. 1016/0304-3975(92)90019-C。[32] David Pearce (2006)：平衡逻辑。《数学人工智能年刊》47(1)，第3–41页，doi:10.1007/ s10472-006-9028-z。[33] Teodor C. Przymusinski (1990)：良基语义与三值稳定语义一致。《Fundam. Inform.》13(4)，第445–463页，doi:10.3233/FI-1990-13404。[34] Teodor C. Przymusinski (1994)：逻辑程序的良基模型与平稳模型。《Ann. Math. Artif. Intell.》12(3-4)，第141–187页，doi:10.1007/BF01530784。[35] Domenico Sacc`a & Carlo Zaniolo (1997)：确定性和非确定性稳定模型。《J. Log. Comput.》7(5)，第555–579页，doi:10.1093/LOGCOM/7.5.555。[36]Taisuke Sato (1990)：完备逻辑程序及其一致性。《J. Log. Program.》9(1)，第33–44页，doi:10.1016/0743-1066(90)90032-Z。[37]J. Seitzer & John S. Schlipf (1997)：正规逻辑程序的可处理类。载于：LPNMR会议论文集，施普林格，柏林、海德堡，第92–111页，doi:10.1007/3-540-63255-7_7。[38] Christof Spanring (2017)：抽象论证中的集合论与图论研究。博士论文，利物浦大学，英国。可访问：https://ethos.bl.uk/OrderDetails.do?uin=uk.bl.ethos.755437。[39] Van-Giang Trinh, Belaid Benhamou & Sylvain Soliman (2023)：布尔网络的陷阱空间是其 Petri 网编码中的无冲突虹吸集。《理论计算机科学》971，第114073页，doi:10.1016/j.tcs.2023.114073。[40] Van-Giang Trinh, Belaid Benhamou, Sylvain Soliman & Franc¸ois Fages (2025)：Datalog 的布尔网络理论。arXiv:2504.15417。https://arxiv.org/abs/2504.15417。[41] Yining Wu, Martin Caminada & Dov M. Gabbay (2009)：论证中的完备扩展与逻辑程序设计中的三值稳定模型一致。《Stud Logica》93(2-3)，第383–403页，doi:10.1007/ S11225-009-9210-5。[42] Jia-Huai You & Li-Yan Yuan (1994)：演绎数据库与逻辑程序设计的三值语义。《J. Comput. Syst. Sci.》49(2)，第334–361页，doi:10.1016/S0022-0000(05)80053-4。[43] Jia-Huai You & Li-Yan Yuan (1995)：正规逻辑程序语义的等价性。《J. Log. Program.》22(3)，第211–222页，doi:10.1016/0743-1066(94)00023-Y。[44] Max Zorn (1935)：关于超限代数方法的一则评论。《Bull. Am. Math. Soc.》41(10)，第667–670页。

详细证明

本文出现附录展示了本文正文中所述结果的详细证明 r.

命题 3.1。NLP P 总是具有一个稳定陷阱空间或支持陷阱空间。

证明。令 I^* 为一个三值解释，它对应于所有二值解释，即$\forall$一个 $\in HB_P$，$I^*(a) = \star$。通过设置 $S = \mathscr{S}(I^*)$，条件 $\{F_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S$（分别为 $\{T_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S$）总是成立。因此，$\mathscr{S}(I^*)$ 是 P 的一个稳定（分别为支持）陷阱集。根据定义，I^* 是 P 的一个稳定（分别为支持）陷阱空间。□

引理 3.1。考虑一个 NLP P 及其三值解释 J。如果 J 是 P 的一个稳定陷阱空间，那么存在一个 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间 J′，它属于 P，且满足 $J' \leq_s J$。

证明。显然，$(StTS(P) \leq_i)$ 是一个偏序集。考虑一个 $\leq_i$-链 $(E_k)_{k\in I}$。注意，I 是该 $\leq_i$-链中所有元素组成的集合，并且可以将其写成一个指标族，具体做法是将集合本身用作指标集。现在考虑 I 中所有元素的交集，记作 $\sqcap_I$；根据定义 3.5，该交集存在。根据定义可得 $\mathscr{S}(\sqcap_I) = \bigcap_{k\in I} \mathscr{S}(E_k)$。由此可知，对于所有 E_k，$k \in I$，都有 $\sqcap_I \leq_s E_k$。等价地，对于所有 E_k，$k \in I$，都有 $E_k \leq_i \sqcap_I$，这意味着 $\sqcap_I$是 $(E_k)_{k\in I}$ 关于 $\leq_i$ 的一个上界。还需证明 $\sqcap_I$ 是 P 的一个稳定陷阱空间。

考虑 P 的一个二值解释 A。令 B 为 A 在 $tg_w(P)$ 中的后继，即 $B = F_P(A)$。假设 $A \in \mathscr{S}(\sqcap_I)$。那么对所有 $k \in I$，都有 $A \in \mathscr{S}(E_k)$。因此 $B \in \mathscr{S}(E_k)$，因为 E_k 是一个稳定陷阱空间。于是，$B \in \mathscr{S}(\sqcap_I)$。这意味着，如果 $A \in \mathscr{S}(\sqcap_I)$，那么 $F_P(A) \in \mathscr{S}(\sqcap_I)$，因此 $\sqcap_I$ 是 P 的一个稳定陷阱集。根据定义，$\sqcap_I$ 是一个三值解释，因此它是 P 的一个稳定陷阱空间。

根据定义，$\leq_s$-极小稳定陷阱空间等价于 $\leq_i$-极大稳定陷阱空间。根据引理 2.2，若 J 是 P 的稳定陷阱空间，则存在一个 P 的 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间 J′，使得 $J \leq_i J'$（等价地，$J' \leq_s J$）。□

引理 3.2. 考虑一个 NLP P 及其三值解释 J。若 J 是 P 的支持陷阱空间，则存在一个 P 的 $\leq_s$-极小支持陷阱空间 J′，使得 $J' \leq_s J$。

证明。该 引理 3.2 的证明可应用于此处：将引理 3.1 中的 $F_P(A)$ 替换为 $T_P(A)$. □

The理 3.1（主要结果）。任意 NLP P 都有一个 $\leq_s$-极小稳定（或支持）陷阱空 *e.*

证明。对于 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间的情形，由引理 3.1 以及命题 3.1 所述的 P 至少有一个稳定陷阱空间这一事实，可立即得出结论。

对于 $\leq_s$-极小支持陷阱空间的情形，这可直接由引理 3.2以及命题 3.1 所述的 P 至少存在一个支持陷阱空间这一事实得出。□

命题 3.2。设 P 是一个 NLP。令 S 为 P 的二值解释的非空集合。则存在唯一的覆盖 S 的 $\leq_s$-极小稳定（分别为支持）陷阱空间，记为 $\langle S\rangle_P^{st}$（分别为 $\langle S\rangle^{sp}$ P），即 $S \subseteq \mathscr{S}(\langle S\rangle_P^{st})$（分别为 $S \subseteq \mathscr{S}(\langle S\rangle^{sp}$ P））。

证明。下文将证明稳定陷阱空间的情形。支持陷阱空间的情形证明类似。令 T 为所有满足 $S \subseteq \mathscr{S}(I)$ 的稳定陷阱空间 I 所构成的集合。集合 T 非空，因为其中包含 ε，它是一个所有原子都被赋值为 $\star$ 的稳定陷阱空间（见命题 3.1）。由于 S 非空，T 中的元素两两相容，因此我们可以取这些元素的交集，记作 $\sqcap_T$。

接下来，我们证明 $\sqcap_T$ 也是 P 的一个稳定陷阱空间。考虑 P 的一个二值解释 A。令 B 为 A 在 $tg_{st}(P)$ 中的后继，即 $B = F_P(A)$。假设 $A \in \mathscr{S}(\sqcap_T)$。那么对于所有 $E_k \in T$，我们都有 $A \in \mathscr{S}(E_k)$。因此 $B \in \mathscr{S}(E_k)$，因为 E_k 是一个稳定陷阱空间。于是，$B \in \mathscr{S}(\sqcap_T)$。这意味着，如果 $A \in \mathscr{S}(\sqcap_T)$，那么 $F_P(A) \in \mathscr{S}(\sqcap_T)$，因此 $\sqcap_T$ 是 P 的一个稳定陷阱集。根据定义，$\sqcap_T$ 是一个三值解释，因此它是 P 的一个稳定陷阱空间。

根据定义，$\sqcap_T$是唯一的且是 $\leq_s$-极小的。由于对于所有 $E_k \in T$，都有 $S \subseteq \mathscr{S}(E_k)$，因此 $S \subseteq \mathscr{S}(\sqcap_T)$。令 $\langle S\rangle_P^{st} = \sqcap_T$，即可得证。 □

命题 3.3。考虑一个 NLP P。设 I_1 和 I_2 是 P 的两个不同的 $\leq_s$-极小稳定（分别为支持）陷阱空间。那么，I_1 和 I_2 不相容。

证明。下文证明稳定陷阱空间的情形。支持陷阱空间情形的证明与此类似。假设 I_1 和 I_2 相容。则 $I = \sqcap_{\{I_1, I_2\}}$ 存在，且 $\mathscr{S}(I) = \mathscr{S}(I_1) \cap \mathscr{S}(I_2)$。类似地应用命题 3.2 的论证可得，I 也是 P 的一个稳定陷阱空间。由于 I_1 和 I_2 不同，因此必有 $\mathscr{S}(I_1) \subset \mathscr{S}(I)$ 或 $\mathscr{S}(I_2) \subset \mathscr{S}(I)$ 成立。这将导致矛盾，因为 I_1 和 I_2 是 P 的 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间。因此，I_1 和 I_2 不相容。 □

引理 4.1。设有一个 NLP P，以及一个由 P 的二值解释构成的非空集合 S。若 S 是 P 的稳定陷阱集，则存在一个 $\subseteq$-极小稳定陷阱集 S'，使得 $S' \subseteq S$。

证明。令 T S(P) 表示 P 的所有稳定陷阱集构成的集合。显然，(T S(P) $\supseteq$) 是一个偏序集。给定一个 $\supseteq$-链 $(E_i)_{i\in I}$。注意，I 是该 $\supseteq$链中所有元素构成的集合，并且可以将其写成一个指标族，具体做法是将集合本身用作指标集。现在考虑 $E = \bigcap_{i\in I} E_i$。显然，E 是 $(E_i)_{i\in I}$ 的上界，即对于所有 $i \in I$，都有 $E_i \supseteq E$。剩下只需证明 E 是 P 的稳定陷阱集。

考虑一个二值解释 A。$A \in E$ 当且仅当 $A \in E_i, \forall i \in I$。这意味着 $F_P(A) \in E_i, \forall i \in I$，因为 E_i 是 P 的一个稳定陷阱集。于是 $F_P(A) \in E$。这意味着 $\{F_P(B) \mid B \in E\} \subseteq E$。根据定义，E 是 P 的一个稳定陷阱集。

根据定义，$\subseteq$-极小稳定陷阱集等价于一个 $\supseteq$-极大稳定陷阱集。由引理 2.2，若 S 是 P 的一个稳定陷阱集，则存在一个 P 的 $\subseteq$-极小稳定陷阱集 S'，使得 $S \supseteq S'$（等价地，$S' \subseteq S$）。 □

引理 4.2。给定一个 NLP P，若 P 的二值解释的非空集合 S 是 P 的一个支持陷阱集，则存在 P 的一个 $\subseteq$-极小支持陷阱集 S'，使得 $S' \subseteq S$。

证明。引理 4.1 的证明可应用于此，只需将引理 4.1 中的 $F_P(I)$ 替换为 $T_P(I)$。 □

定理 4.1（主要结果）。设 P 是一个 NLP。P 的二值解释的非空集合 S 是一个$\subseteq$-极小稳定陷阱集，当且仅当 S 是 P 的严格稳定类。

证明。“⇒”假设 S 是 P 的一个 $\subseteq$-极小稳定陷阱集。根据定义，$\{F_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S$。假设 $\{F_P(I) \mid I \in S\} \subsetneq S$。则存在 $J \in S$，使得对所有 $I \in S$，$F_P(I) \neq J$。我们有$\{F_P(I) \mid I \in S \setminus \{J\}\} \subseteq \{F_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S \setminus \{J\}$。因此，$S \setminus \{J\}$ 是 P 的一个稳定陷阱集，这与 S 的 $\subseteq$-极小性矛盾。因此，$\{F_P(I) \mid I \in S\} = S$，即 S 是 P 的一个稳定类。由于稳定类是稳定陷阱集，S 必定是严格稳定类。

“⇐” 假设 S 是 P 的一个严格稳定类。根据定义，$\{F_P(I) \mid I \in S\} = S$。这意味着 S 是 P 的一个稳定陷阱集。根据引理 4.1，存在一个 $\subseteq$-极小稳定陷阱集 S'，使得 $S' \subseteq S$。根据定义，我们有 $\{F_P(I) \mid I \in S'\} \subseteq S'$。假设 $\{F_P(I) \mid I \in S'\} \subsetneq S'$。那么存在 $J \in S'$，使得

对于所有 $I \in S'$，$F_P(I) \neq J$。我们有 $\{F_P(I) \mid I \in S' \setminus \{J\}\} \subseteq \{F_P(I) \mid I \in S'\} \subseteq S' \setminus \{J\}$。根据定义，$S' \setminus \{J\}$ 是 P 的一个稳定陷阱集，这与 S′的 $\subseteq$-极小性矛盾。因此，$\{F_P(I) \mid I \in S'\} = S'$，即 S′ 是 P 的一个稳定类。S 是 P 的一个严格稳定类，因此，由于严格稳定类的 $\subseteq$-极小性，$S = S'$。因此，S 是 P 的一个 $\subseteq$-极小稳定陷阱集。□

定理 4.2。设 P 为一个 NLP。一个二值解释的非空集合 S 是 P 的 $\subseteq$-极小支持陷阱集，当且仅当 S 是 P 的严格支持类。

证明。将定理 4.1 中的 $F_P(I)$ 和引理 4.1 分别替换为 $T_P(I)$ 和引理 4.2，即可应用定理 4.1 的证明。□

推论 4.1。设 P 为一个 NLP。对于 P 的每个稳定（分别为支持）陷阱空间 I，$\mathscr{S}(I)$ 至少包含 P 的一个严格稳定（分别为支持）类。

证明。假设 I 是 P 的稳定陷阱空间。根据定义，$\mathscr{S}(I)$ 是 P 的稳定陷阱集。存在一个 $\subseteq$-极小稳定陷阱集 $S' \subseteq \mathscr{S}(I)$。根据定理 4.1，S′ 也是 P 的一个严格稳定类。

假设 I 是 P 的一个支持陷阱空间。根据定义，$\mathscr{S}(I)$ 是 P 的一个支持陷阱集。存在一个 $\subseteq$-极小支持陷阱集 $S' \subseteq \mathscr{S}(I)$。根据定理 4.2，S′ 也是 P 的一个严格支持类。

□

命题 4.1。NLP P 的两个不同严格稳定（分别为支持）类互不相交。

证明。我们先证明严格稳定类的情形。

设 S_1 和 S_2 是 P 的两个不同严格稳定类。根据定理 4.1，S_1 和 S_2 是 P 的两个不同的$\subseteq$-极小稳定陷阱集。假设 S_1 和 S_2 并非互不相交。于是 $S_1 \cap S_2 \neq /0$。考虑 $I \in S_1 \cap S_2$。我们有 $I \in S_1$ 且 $I \in S_2$,，因此 $F_P(I) \in S_1$ 且 $F_P(I) \in S_2$，因为 S_1 和 S_2 是稳定陷阱集，所以 $F_P(I) \in S_1 \cap S_2$。由此可知，$S_1 \cap S_2$ 是 P 的一个稳定陷阱集。于是 $S_1 \cap S_2 \subsetneq S_1$或 $S_1 \cap S_2 \subsetneq S_2$ 必有其一成立，因为 $S_1 \neq S_2$,，这与 S_1 和 S_2 的 $\subseteq$- 极小性矛盾。因此，S_1 和 S_2 互不相交。

对于严格支持类的情况，我们只需分别将 F_P 和定理 4.1 替换为 T_P 和定理 4.2。

□

定理 4.3（主要结果）。给定一个 NLP P，I 是 P 的支持陷阱空间，当且仅当对于每个 $a \in HB_P$，$I(rhs_P(a)) \leq_s I(a)$。

证明。“⇒”假设 I 是 P 的支持陷阱空间。设存在一个原子 $a \in HB_P$，使得 $I(a) <_s I(rhs_P(a))$。根据序 $\leq_s$的定义，我们有 $I(rhs_P(a)) = \star$ 且 $I(a) \neq \star$。由于 $I(rhs_P(a)) = \star$，存在一个二值解释 $J \in \mathscr{S}(I)$，使得 $J(rhs_P(a)) = \neg I(a)$。根据定义，$T_P(J)(a) = J(rhs_P(a))$，因此 $T_P(J)$ 不属于 $\mathscr{S}(I)$。这意味着根据定义，$\mathscr{S}(I)$ 不是支持陷阱集，矛盾。因此，对于每个 $a \in HB_P$，$I(rhs_P(a)) \leq_s I(a)$。

“⇐” 假设对于每个原子 $a \in HB_P$，$I(rhs_P(a)) \leq_s I(a)$。设 A 是 $\mathscr{S}(I)$ 中的一个二值解释。当然，$A \leq_s I$。根据三值逻辑的特性，我们有 $A(rhs_P(a)) \leq_s I(rhs_P(a))$，因此对于每个 $a \in HB_P$，$A(rhs_P(a)) \leq_s I(a)$。这意味着 $T_P(A) \leq_s I$，因此 $T_P(A) \in \mathscr{S}(I)$。由此，$\mathscr{S}(I)$ 是 P 的一个支持陷阱集。根据定义，I 是 P 的一个支持陷阱空间。□

定理 4.4。负正规逻辑程序 P 的稳定迁移图与受支持迁移图相同。

证明。已有研究表明，对于任意二值解释 I，若 P 是负正规逻辑程序，则 $F_P(I) = T_P(I)$。根据稳定转移图和受支持转移图的定义，可得 $tg_{st}(P) = tg_{sp}(P)$。□

推论 4.2。设 P 是一个负正规逻辑程序。那么，P 的稳定陷阱空间集合与 P 的支持陷阱空间集合相同。

证明。由定理 4.4 可立即得出。 □

定理 4.7。设 P 是一个 NLP，lfp(P) 表示 P 的最小不动点。那么 $tg_{st}(P) = tg_{st}(lfp(P))$，即 P 与 lfp(P) 具有相同的稳定转移图。

证明。已在 [27] 中证明，对于任意二值解释 I，都有 $F_P(I) = F^{lfp(P)}(I)$。根据稳定转移图的定义，有 $tg_{st}(P) = tg_{st}(lfp(P))$。 □

推论 4.3。设 P 是一个 NLP，lfp(P) 表示 P 的最小不动点。那么 P 与 lfp(P) 具有相同的稳定陷阱空间集合。

证明。由定理 4.7 可立即得出。 □

命题 4.2。给定一个 NLP P，如果 I 是 P 的受支持的部分模型，那么它也是 P 的支持陷阱空间。

证明。假设 I 是 P 的受支持的部分模型。那么 I 是 comp(P) 的三值模型。因此，$I(a) = I(rhs_P(a))$，$\forall a \in HB_P$。所以，I 也满足条件 $I(rhs_P(a)) \leq_s I(a), \forall a \in HB_P$。根据定理 4.3，I 也是 P 的支持陷阱空间。

□

命题 4.3。给定一个 NLP P，如果 I 是 P 的稳定部分模型，那么它也是 P 的稳定陷阱空间。

证明。假设 I 是 P 的稳定部分模型。根据定理 4.6，I 也是 lfp(P) 的稳定部分模型。由于 lfp(P) 是一个负正规逻辑程序，根据定理 4.5，I 也是 lfp(P) 的受支持的部分模型。根据命题 4.2，I 是 lfp(P) 的支持陷阱空间。根据推论 4.2，I 也是 lfp(P) 的稳定陷阱空间。根据推论 4.3，I 是 P 的稳定陷阱空间。

□

引理 4.3. 给定一个 NLP P 和 P 的一个支持陷阱空间 I，$f_P(I)$ 是 P 的一个支持陷阱空间，并且 $I \leq_i f_P(I)$。

证明. 根据定义，对于所有 $v \in HB_P$，$f_P(I)(v) = I(rhs_P(v))$。由于根据定理 4.3，I 是 P 的一个支持陷阱空间，因此对于所有 $v \in HB_P$，$I(v) \leq_i I(rhs_P(v))$。于是，$I \leq_i f_P(I)$。接着，根据三值逻辑的真值表，对于所有 $v \in HB_P$，$I(rhs_P(v)) \leq_i f_P(I)(rhs_P(v))$。这意味着，对于所有 $v \in HB_P$，$f_P(I)(v) \leq_i f_P(I)(rhs_P(v))$。因此，根据定理 4.3，$f_P(I)$ 是 P 的一个支持陷阱空间。 □

定理 4.8（主要结果）。考虑一个 NLP P。对于每个满足 $I \in SuTS(P)$ 的支持陷阱空间 I，都存在唯一的满足 $I' \in SuPM(P)$ 的受支持的部分模型 I，使得 $I' \leq_s I$。

证明。我们在序数上递归地定义函数 K，如下所示：

$$K(0) = I$$
$$K(\alpha + 1) = f_P(K(\alpha)).$$

如果 β 是极限序数，那么根据构造和引理 4.3 $\{K(\alpha) : \alpha < \beta\}$ 是 SuTS(P) 中关于 $\leq_i$ 的一条链。定义 $K(\beta) = \sup_{\leq_i}\{K(\alpha) : \alpha < \beta\}$，其中 $\sup_{\leq_i}$ 表示关于 $\leq_i$ 的最小上界。

我们知道，K 是从序数到 SuTS(P) 的递增函数。它不可能严格递增，否则就会存在一个从序数到 SuTS(P) 的单射，这与引理 2.3 矛盾。因此，K 必定最终为常值函数。由此可知，存在某个序数 α，使得 $K(\alpha+1) = K(\alpha)$，于是 $f_P(K(\alpha)) = K(\alpha)$。令 α^* 为满足 $K(\alpha^*+1) = K(\alpha^*)$ 的最小序数。对于所有 $\beta > \alpha^*$，都有 $K(\beta) = K(\alpha^*)$。因此，$K(\alpha^*)$ 是唯一的。令 $I' = K(\alpha^*)$。我们有 $f_P(I') = I'$，即 I' 是 comp(P) 的一个三值模型。因此，$I' \in$SuPM(P)。根据构造和引理 4.3，$I \leq_i I'$。这意味着 $I' \leq_s I$。 □

推论 4.4。设 NLP P。三值解释 I 是 P 的 $\leq_s$-极小受支持部分模型，当且仅当 I 是 P 的 $\leq_s$-极小支持陷阱空间。

证明。回顾一下，SuTS(P)（分别地，SuPM(P)）表示 P 的所有支持陷阱空间（分别地，部分模型）的集合。根据命题 4.2，我们有 SuPM(P) $\subseteq$ SuTS(P)。

“⇒”假设 I 不是 P 的 $\leq_s$-极小支持陷阱空间。那么存在 $I' \in$SuTS(P)，使得 $I' <_s I$。根据定理 4.8，存在 $J \in$ SuPM(P)，使得 $J \leq_s I'$。这意味着 $J <_s I$，这与 I 的 $\leq_s$-极小性矛盾。因此，I 是 P 的 $\leq_s$-极小支持陷阱空间。

“⇐” 由于 SuPM(P) $\subseteq$ SuTS(P)，该方向是显然的。 □

引理 4.4。考虑一个 NLP P。设 I 是 P 的支持陷阱空间。如果 S 是 P 的支持类，且 $S \subseteq \mathscr{S}(I)$，则 $S \subseteq \mathscr{S}(f_P(I))$。

证明。考虑 $J \in S$。由于 $S \subseteq \mathscr{S}(I)$，我们有 $J \in \mathscr{S}(I)$。令 $J' = T_P(J)$。对于任意原子 $a \in HB_P$，我们有 $J'(a) = J(rhs_P(a)) \leq_s I(rhs_P(a)) = f_P(I)(a)$。这意味着 $J' \in \mathscr{S}(f_P(I))$。因此，$\{T_P(J) \mid J \in S\} \subseteq \mathscr{S}(f_P(I))$。由于 S 是支持类，根据定义，$\{T_P(J) \mid J \in S\} = S$。这意味着 $S \subseteq \mathscr{S}(f_P(I))$。 □

命题 4.4. 给定一个 NLP P，若 S 是一个支持类，则 $\langle S\rangle^{sp}$ P 是一个受支持的部分模型。

证明. 根据命题 3.2，$\langle S\rangle^{sp}{}_P$ 是 P 的一个支持陷阱空间。假设它不是 P 的一个受支持的部分模型。根据定义，有 $f_P(\langle S\rangle^{sp}{}_P) \neq \langle S\rangle^{sp}{}_P$。根据引理 4.3，$f_P(\langle S\rangle^{sp}{}_P) \leq_s \langle S\rangle^{sp}{}_P$。由此可得，$f_P(\langle S\rangle^{sp}{}_P) <_s \langle S\rangle^{sp}{}_P$。根据引理 4.4，$S \subseteq \mathscr{S}(f_P(\langle S\rangle^{sp}{}_P))$，因为 S 是一个支持类；根据定义，$S \subseteq \mathscr{S}(\langle S\rangle^{sp}{}_P)$。这意味着 $\langle S\rangle^{sp}{}_P$ 不是覆盖 S 的 $\leq_s$-极小支持陷阱空间，这与假设矛盾。因此，$\langle S\rangle^{sp}{}_P$ 是 P 的一个受支持的部分模型。

□

命题 4.5. 给定一个 NLP P，如果 S 是 P 的稳定类，那么 $\langle S\rangle^{st}_P$ 是一个稳定部分模型。

证明。根据定理 4.7 和定理 4.4，$tg_{st}(P) = tg_{st}(lfp(P)) = tg_{sp}(lfp(P))$。因此，S 是 lfp(P) 的支持类。此外，$\langle S\rangle^{st}_P = \langle S\rangle^{sp}{}_{lfp(P)}$。根据命题 4.4，$\langle S\rangle^{sp}{}_{lfp(P)}$ 是 lfp(P) 的受支持的部分模型。根据定理 4.5，它也是 lfp(P) 的稳定部分模型，因为 lfp(P) 是负向的。根据定理 4.6，$\langle S\rangle^{st}_P$ 是 P 的稳定部分模型。

□

定理 4.9（主要结果）。给定一个 NLP P，三值解释 I 是 P 的正则模型，当且仅当 I 是 P 的 a $\leq_s$-极小稳定陷阱空间。

证明。根据定理 4.6，程序 P 和 lfp(P) 具有相同的正则模型集合。根据推论 4.3，它们也具有相同的稳定陷阱空间集合。因此，只需证明：I 是 lfp(P) 的正则模型，当且仅当 I 是 lfp(P) 的一个 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间。

回顾一下，lfp(P) 是一个负正规逻辑程序。根据定义，I 是 lfp(P) 的
正则模型，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_s$-极小稳定部分模型

根据定理 4.5，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_s$-极小受支持部分模型；根据推论 4.4，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_s$-极小支持陷阱空间；根据推论 4.2，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_s$-极小稳定陷阱空间。 □

命题 4 .6. 给定 NLP P 的两个三值解释 I_1 和 I_2，当且仅当 $I_1 \leq_u I_2$。

证明。我们有 $I_1 \leq_u I_2$ 当且仅当对于所有 $v \in HB_P$，$I_1(v) \leq_u I_2(v)$，当且仅当对于所有 $v \in HB_P$，要么 $I_1(v),I_2(v) \neq \star$，要么 $I_1(v) <_u I_2(v)$，当且仅当 $I_1^{\mathbf{u}} \subseteq I_2^{\mathbf{u}}$。 □

推论 4.5. 给定一个 NLP P，I 是 L-稳定模型，当且仅当它是一个 $\leq_u$-极小稳定部分模型。

证明。该结论可直接由命题 4.6 得出。 □

命题 4.7。考虑一个 NLP P。对于每个受支持陷阱空间 $I \in SuTS(P)$，都存在一个受支持的部分模型 $J \in SuPM(P)$，使得 $J \leq_u I$。

证明。根据定理 4.8，存在唯一的受支持的部分模型 $J \in SuPM(P)$，使得 $J \leq_s I$。由于 $I' \leq_s I$ 蕴含 $I' \leq_u I$，因此可以得出证明。注意，对于 $\leq_u$，这样的受支持的部分模型可能并不唯一。 □

推论 4.6。考虑一个 NLP P。当且仅当三值解释 I 是 P 的 $\leq_u$-极小受支持的部分模型时，I 才是 P 的 $\leq_u$- 极小受支持陷阱空间。

证明。根据命题 4.2，有 $SuPM(P) \subseteq SuTS(P)$。

“⇒” 假设 I 不是 P 的 $\leq_u$-极小受支持陷阱空间。那么存在 $I' \in SuTS(P)$，使得 $I' <_u I$。根据命题 4.7，存在 $J \in SuPM(P)$，使得 $J \leq_u I'$。这意味着 $J <_u I$，与 I 的 $\leq_u$-极小性矛盾。因此，I 是 P 的 $\leq_u$-极小受支持陷阱空间。

“⇐” 这个方向显然成立，因为 $SuPM(P) \subseteq SuTS(P)$。 □

定理 4.10. 给定一个 NLP P，I 是 L-稳定模型，当且仅当 I 是一个 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间。

证明. 根据定理 4.6，P 和 lfp(P)具有相同的稳定部分模型集合。根据推论 4.3，它们也具有相同的稳定陷阱空间集合。因此，只需证明 I 是 lfp(P) 的 L-稳定模型，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间。

回顾一下，lfp(P) 是一个负正规逻辑程序。根据推论 4.5，I 是 lfp(P) 的 L-稳定模型，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_u$-极小稳定部分模型；根据定理 4.5，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_u$-极小受支持的部分模型；根据推论 4.6，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_u$ 支持陷阱空间；根据推论 4.2，当且仅当 I 是 lfp(P) 的 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间。 □

命题 4.8. 给定一个 NLP P，I 是 P 的 L-稳定模型，当且仅当 I 是一个 $\leq_u$-极小正则模 *el.*

证明。根据定理 4.10，只需证明 I 是 P 的 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间，当且仅当 I 是 P 的 $\leq_u$-极小正则模型。正向结论显然成立，因为 $RegM(P) \subseteq StTS(P)$，也就是说，正则模型集合是稳定陷阱空间集合的子集。现在，我们证明反向结论。

设 I 是 P 的 $\leq_u$-极小正则模型。根据定理 4.6，I 是 lfp(P) 的 $\leq_u$-极小正则模型。假设 I 不是 lfp(P) 的 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间。那么存在 lfp(P) 的一个稳定陷阱空间 I'，使得 $I' <_u I$。根据定理 4.9，lfp(P) 的正则模型是 $\leq_s$-极小

稳定陷阱空间。这意味着存在 lfp(P) 的一个正则模型 J，使得 $J \leq_s I'$。由于 $J \leq_s I'$ 蕴含 $J \leq_u I'$，所以 $J <_u I$。根据定理 4.6，J 是 P 的正则模型，这与 I 的 $\leq_u$-极小性相矛盾。因此，I 是 lfp(P) 的 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间。根据推论 4.3，I 是 P 的 $\leq_u$-极小稳定陷阱空间。 □

推论 4.7。若 NLP P 没有 L-稳定模型，则它有无穷多个正则模型 .

证明。根据命题 4.8，P 的 L-稳定模型集合与 P 的 $\leq_u$-极小正则模型集合相同。若 RegM(P) 是有限集，则它必定有一个 $\leq_u$-极小元素，即 $\leq_u$-极小正则模型集合非空，因此 P 有一个 L-稳定模型，这与前提矛盾。因此，P 有无穷多个正则模型。 □

定理 5.2。NLP P 总是有一个 $\subseteq$-极小稳定（或受支持）陷阱集。

证明。对于 $\subseteq$-极小稳定陷阱集的情形，由引理 4.1 以及命题 3.1 所述的 P 至少有一个稳定陷阱集这一事实，可立即得出结论。

对于 $\subseteq$-极小支持陷阱集的情形，这由引理 4.2 以及命题 3.1 所述的 P 至少有一个支持陷阱集这一事实立即得出。 □

定理 5.1 的另一种证明。根据定理 5.2，P 有一个 $\subseteq$-极小稳定陷阱集 S。我们证明 S 是一个稳定类。

根据定义，$\{F_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S$。假设 $\{F_P(I) \mid I \in S\} \subsetneq S$。那么存在 $J \in S$，使得对所有 $I \in S$，$F_P(I) \neq J$。我们有 $\{F_P(I) \mid I \in S \setminus \{J\}\} \subseteq \{F_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S \setminus \{J\}$。因此，$S \setminus \{J\}$ 是 P 的一个支持陷阱集，这与 S 的 $\subseteq$-极小性矛盾。因此，$\{F_P(I) \mid I \in S\} = S$，即 S 是 P 的一个支持类。 □

定理 5.3。任意 NLP P 都有一个支持类。

证明。根据定理 5.2，P 有一个 $\subseteq$-极小支持陷阱集 S。我们证明 S 是一个支持类。

根据定义，$\{T_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S$。假设 $\{T_P(I) \mid I \in S\} \subsetneq S$。那么存在 $J \in S$，使得对所有 $I \in S$，$T_P(I) \neq J$。我们有 $\{T_P(I) \mid I \in S \setminus \{J\}\} \subseteq \{T_P(I) \mid I \in S\} \subseteq S \setminus \{J\}$。因此，$S \setminus \{J\}$ 是 P 的一个支持陷阱集，这与 S 的 $\subseteq$-极小性矛盾。因此 $\{T_P(I) \mid I \in S\} = S$，即 S 是 P 的一个支持类。 □

C推论 5.1（主要结果）。NLP P 总是有一个严格稳定（或支持）类。

Pro。这可直接由定理 5.2 和定理 4.1（分别由定理 4.2）得出 . □

推论 5.2。NLP P 总是有一个正则模型。

证明。此结论可直接由定理 4.9 和定理 3.1 得出。 □

B 重新审视 严格稳定类和支持类的刻画 s

我们首先回顾 [27] 关于稳定类和支持类的基本定义与结果 s.

定义 B.1（[27]）。设 P 是一个 NLP，I 是 P 的一个二值解释。在 P 的二值解释集合上依次应用算子所形成的序列称为轨道。I 关于 T_P 的轨道是序列 $\langle T\,kP\,(I)\rangle_{k\in\omega}$，其中 $T\ {}^{0}P\ (I)\ =I$，且 T_P^{k+1} $(I)\ =T_P(T\,kP\,(I))$。类似地，可以定义 I 关于 F_P 的轨道。

定义 B.2（[27]）。设 P 是一个 NLP，I 是 P 的一个二值解释。令 $\mathscr{T}_P(I)$ 为如下定义的二值解释集合：

$$\mathscr{T}_P(I) = \{T_P^k(I) \mid k \in \omega\}.$$

令 $\mathscr{F}_P(I)$ 为如下定义的二值解释集合：

$$\mathscr{F}_P(I) = \{F_P^k(I) \mid k \in \omega\}.$$

定理 B.1（[27]）。给定一个 NLP P，二值解释的非空集合 S 是 P 的严格稳定（或受支持）类，当且仅当对于每个 $I \in S$，$\mathscr{T}_P(I) = S$（或 $\mathscr{F}_P(I) = S$）。

定理 B.1 为严格稳定类（或受支持类）提供了另一种刻画。该定理主要依赖于稳定轨道和受支持轨道的定义（见定义 B.1）。这可能会带来问题，因为这些定义仅将序列的长度限制为 ω（第一个无限极限序数）。由于该序列可以遍历所有二值解释构成的集合，而该集合可能是无限集，因此序列长度可能是更大的序数。根据定义 B.1，定理 B.1 似乎只考虑 Datalog$^{\neg}$ 程序，而非任意 NLP。我们将如下修正上述问题。

首先，我们递归地定义二值解释在所有序数上的稳定或受支持可达闭包。

定义 B.3. 给定一个 NLP P，令 I 为 P 的一个二值解释。I 的支持可达闭包定义如下：

$$\Pi_P^I \uparrow 0 = \{I\}$$
$$\Pi_P^I \uparrow \alpha + 1 = \Pi_P^I \uparrow \alpha \cup \bigcup_{J \in \Pi_P^I \uparrow \alpha} \{T_P(J)\}.$$

若 β 是一个极限序数，则根据构造，$\{\Pi_P^I \uparrow \alpha\colon\ \alpha < \beta\}$ 是一条 $\subseteq$ 链。定义 $\Pi_P^I \uparrow \beta = \sup_{\subseteq}\{\Pi_P^I \uparrow \alpha\colon\ \alpha < \beta\}$，其中 $\sup_{\subseteq}$ 表示相对于 $\subseteq$ 的最小上界。将 $T_P(J)$ 和 Π_P^I 分别替换为 $F_P(J)$ 和 Σ_P^I，即可得到 I 的稳定可达闭包的定义。

接下来的两个命题表明，对于任意二值解释，稳定或受支持可达闭包最终都会达到一个常值。其证明的关键在于使用 Hartogs 引理（参见引理 2.3）。

命题 B.1. 考虑一个 NLP P。对于 P 的任意二值解释 I，存在唯一的最小序数 α_I，使得 $\Pi_P^I \uparrow \alpha_I + 1 = \Pi_P^I \uparrow \alpha_I$。

证明。我们有 $\Pi_P^I \uparrow$ 是从序数到 2^{HB_P} 的递增函数。它不可能是严格递增的，因为如果是这样，我们就会得到一个从序数到 2^{HB_P} 的单射，这违反了引理 2.3。因此，$\Pi_P^I \uparrow$ 必然最终保持不变。由此可知，对于某个序数 α，$\Pi_P^I \uparrow \alpha + 1 = \Pi_P^I \uparrow \alpha$。令 α_I 为满足 $\Pi_P^I \uparrow \alpha_I + 1 = \Pi_P^I \uparrow \alpha_I$ 的最小序数。由于序数是有序的，α_I 是唯一的。 □

命题 B.2。考虑一个 NLP P。对于 P 的任意二值解释 I，都存在唯一的最小序数 α_I，使得 $\Sigma_P^I \uparrow \alpha_I + 1 = \Sigma_P^I \uparrow \alpha_I$。

证明。将 Π_P^I 替换为 Σ_P^I，即可得到命题 B.1 的证明。□

通过使用超限归纳（更多详细信息见 [30]），我们证明支持可达闭包满足支持陷阱集性质。

引理 B.1。考虑一个 NLP P。设 S 是 P 的支持陷阱集。那么对于所有 $I \in S$，对于所有序数 α，$\Pi_P^I \uparrow \alpha \subseteq S$。

证明。我们通过使用超限归纳来证明这一点。

基础情形：$\Pi_P^I \uparrow 0 = \{I\} \subseteq S$。

后继情形：$\Pi_P^I \uparrow \alpha + 1 = \Pi_P^I \uparrow \alpha \cup \bigcup_{J \in \Pi_P^I \uparrow \alpha} \{T_P(J)\} \subseteq S \cup \bigcup_{J \in S} \{T_P(J)\}$，因为根据归纳假设，$\Pi_P^I \uparrow \alpha \subseteq S$。于是，$\Pi_P^I \uparrow \alpha + 1 \subseteq S \cup S = S$，因为 S 是支持陷阱集。

极限情形：$\Pi_P^I \uparrow \alpha = \sup_{\subseteq} \{\Pi_P^I \uparrow \beta : \beta < \alpha\} \subseteq S$，因为根据归纳假设，对于所有 $\beta < \alpha$，$\Pi_P^I \uparrow \beta \subseteq S$。□

另一方面，我们证明，支持可达闭包所达到的不动点相对于任意二值解释都是一个支持陷阱集。

引理 B.2。给定一个 NLP P，对于 P 的任意二值解释 I，$\Pi_P^I \uparrow \alpha_I$ 是 P 的一个支持陷阱集。

证明。根据 Π_P^I 的定义，有 $\Pi_P^I \uparrow \alpha_I + 1 = \Pi_P^I \uparrow \alpha_I \cup \bigcup_{J \in \Pi_P^I \uparrow \alpha_I} \{T_P(J)\}$。根据 α_I 的定义，有 $\Pi_P^I \uparrow \alpha_I + 1 = \Pi_P^I \uparrow \alpha_I$。令 $S = \Pi_P^I \uparrow \alpha_I$。由此可得，$S = S \cup \bigcup_{J \in S} \{T_P(J)\}$。于是，$\bigcup_{J \in S} \{T_P(J)\} \subseteq S$，这意味着 S 是 P 的一个支持陷阱集。□

结合引理 B.1 和引理 B.2，我们现在得到 NLP 的 $\subseteq$-极小支持陷阱集的一个新刻画：

定理 B.2. 给定一个 NLP P，S 是 P 的 $\subseteq$-极小支持陷阱集，当且仅当对于所有 $I \in S$，$\Pi_P^I \uparrow \alpha_I = S$。

证明. “⇒” 假设 S 是 P 的 $\subseteq$-极小支持陷阱集。假设存在 $I \in S$，使得 $\Pi_P^I \uparrow \alpha_I \neq S$。由引理 B.1，$\Pi_P^I \uparrow \alpha_I \subseteq S$，因为 S 是支持陷阱集。于是 $\Pi_P^I \uparrow \alpha_I \subset S$。由引理 B.2，$\Pi_P^I \uparrow \alpha_I$ 是支持陷阱集，这与 S 的 $\subseteq$-极小性矛盾。因此，对于所有 $I \in S$，$\Pi_P^I \uparrow \alpha_I = S$。

“⇐” 假设对于所有 $I \in S$，$\Pi_P^I \uparrow \alpha_I = S$。我们有 $\Pi_P^I \uparrow \alpha_I + 1 = S = S \cup \bigcup_{J \in S} \{T_P(J)\}$。这意味着 $\bigcup_{J \in S} \{T_P(J)\} \subseteq S$，因此 S 是 P 的支持陷阱集。假设 S 不是 $\subseteq$-极小的。那么存在 P 的一个支持陷阱集 S'，使得 $S' \subset S$。考虑 $J \in S'$。由引理 B.1，$\Pi_P^I \uparrow \alpha_J \subseteq S' \subset S$，这构成矛盾，因为 $J \in S$。因此，S 是 P 的 $\subseteq$-极小支持陷阱集。□

对于稳定陷阱集，只需在定理 B.2 的证明中将 Π_P^I 替换为 Σ_P^I，即可得到类似结论：

定理 B.3. 给定一个 NLP P，当且仅当对所有 $I \in$，$\Sigma_P^I \uparrow \alpha_I = S$ 时，S 是 P 的 $\subseteq$-极小稳定陷阱集 S.

证明。将定理 B.2 的证明中的 Π_P^I 替换为 Σ_P^I。□

定理 B.2 和定理 B.3 是 NLP 情况下对定理 B.1 的修正版，因为我们证明了 $\subseteq$-极小支持（分别为稳定）陷阱集等价于严格支持（分别为稳定）类（见定理 4.1 和定理 4.2）。在 Datalog$^\neg$ 程序的情况下，HB_P 是有限的，因此 $\mathscr{T}_P(I) = \Pi_P^I \uparrow \omega$（分别为 $\mathscr{T}_P(I) = \Sigma_P^I \uparrow \omega$）。因此，在这种情况下，定理 B.2 和定理 B.3 等价于定理 B.1。

重新审视 L-稳定模型的存在性

NLP 中 L-稳定模型的存在性在 [35, 命题 5.11] 中陈述并得到证明。该证明的主要思想与用于证明 NLP 中 M-稳定模型存在性的思想相似（见 [35,定理 5.3]）。然而，这里可能会产生一个问题，因为 L-稳定模型的情况实际上不同于 M-稳定模型的情况。更具体地说，相对于 $\subseteq$-极小 $\mathbf{I^u}$ 的极大链中所有部分稳定模型的并集可能不是部分稳定模型（甚至该并集可能不存在，见例 C.1），而如 [35,定理 5.3] 的证明所示，$\leq_i$-链中所有稳定部分模型的并集是一个稳定部分模型。L-稳定模型与抽象论证框架（AF）的半稳定扩展之间的双射进一步凸显了这一问题 [9]。已有研究表明，存在一个没有半稳定扩展的无限 AF [6]。

例 C.1. 考虑 NLP $P = \{a \leftarrow \sim b;\ b \leftarrow \sim a;\ c \leftarrow \sim c\}$。程序 P 有三个稳定部分模型：$I_1 = \{a = \star, b = \star, c = \star\}$、$I_2 = \{a = 0, b = 1, c = \star\}$ 和 $I_3 = \{a = 1, b = 0, c = \star\}$。采用 *[35],* 的记法，我们有 $I_1 = \langle /0, \emptyset \rangle$、$I_1 = \langle \{b\}, \{a\} \rangle$ 和 $I_1 = \langle \{a\}, \{b\} \rangle$。相对于 $\subseteq$-极小 $\mathbf{I^u}$，P 的每条极大链都包含所有 I_1, 、I_2, 和 I_3。然而，这样一条链中所有元素的并集为 $\langle \{a, b\}, \{a, b\} \rangle$，它并不表示有效的三值解释。因此，该并集不存在。

受抽象论证框架中已有相关结果的启发 [6, 38]，我们提出以下两个猜想。

猜想 C.1。无内部变量的 NLP P 至少有一个 L-稳定模型。

猜想 C.2。存在一个 NLP P，使得 P 没有 L-稳定模型。

我们在此证明了猜想 C.1 的一个特例，但该猜想和猜想 C.2 仍未解决。这一结果意义重大，因为：1）单规则 NLP 类可以通过句法特征轻易识别；2）就稳定模型语义而言，单规则 Datalog$^\neg$ 程序与一般 Datalog$^\neg$ 程序同样难，因为判定单规则 Datalog$^\neg$ 程序是否有稳定模型是 NP完全的 [37], ；3）这一类与（可能无限的）抽象论证框架 [17, 11]有直接联系。

定理 C.1。考虑一个 NLP P。若 P 是单规则的，则它至少有一个 L-稳定模型。

证明。由于 P 是单规则的，根据最小不动点的定义，很容易推得 lfp(P) 也是单规则的。若 $\text{lfp(P)} = /0$，则它显然有一个 L-稳定模型 I^*，其中 $I^*(a) = 0$ 对每个 $a \in HB^{\text{lfp}(P)}$ 都成立。接下来我们只考虑 $\text{lfp(P)} \neq /0$ 的情况。若存在一个原子 $a \in HB^{\text{lfp}(P)}$，它不是 lfp(P) 中任何规则的首部，那么在 lfp(P) 的任何稳定部分模型或受支持的部分模型中，它的值始终为 0。因此，我们可以将这类原子“传播”出去，得到一个新的 NLP P'，使得 P' 的稳定部分模型集合与 lfp(P) 的稳定部分模型集合一一对应。这意味着 P' 的 L-稳定模型集合与 lfp(P) 的 L-稳定模型集合一一对应。由于 lfp(P) 是单规则且为负向的，P' 也如此。存在一个（可能是无限的）抽象论证框架 AF（记作 $\mathscr{A}$），它与 P' 相对应，其中 $\mathscr{A}$ 的论证集合为 $HB_{P'}$，且规则体中每个原子都对应于其中首部为 a 的规则的一个攻击者。根据定义，规则的体是有限的，因此 $\mathscr{A}$ 是有限分支的，即每个论证都只有有限个攻击者 [6]。

抽象论证框架的标记与 NLP 的三值解释相同。抽象论证框架的扩展定义为论证的子集，并对应于 NLP 的二值解释。给定类型 [11] 的标记集合与扩展集合之间存在一一对应关系。[6, 定理 14] 指出，有限分支的抽象论证框架至少有一个半稳定扩展。我们可以很容易地推导出 $\mathscr{A}$ 中半稳定标注的存在性。

完全标注 I 是半稳定标注，当且仅当 $\mathbf{I^u}$ 是 $\subseteq$-极小的 [9]。根据完全标注的定义， [11], 我们可以推导出， $\mathscr{A}$的完全标注集合与 P′的受支持的部分模型集合相同。根据定理 4.5，P′ 的稳定部分模型与 P′ 的受支持的部分模型相同，因此 P′ 至少有一个 L-稳定模型，这意味着 lfp(P) 也有。根据定理 4.6，P 和 lfp(P) 的稳定部分模型集合相同，因此 P 至少有一个 L-稳定模型。 □