arXiv:2601.03864v1 [math.PR] 7 Jan 2026

顶点传递图上的平稳命中时间

Nathanaël Berestycki[1],Jonathan Hermon[2],和 Lucas Teyssier[3]

[1]维也纳大学， nathanael.berestycki@univie.ac.at[2]不列颠哥伦比亚大学， jhermon@math.ubc.ca[3]洛林大学，lucas.teyssier@univ-lorraine.fr

摘要

我们证明了 Aldous 和 Brown 关于平稳命中时间的指数近似的一个精细版本。该结果适用于所有可逆马尔可夫链。随后，我们针对顶点传递图专门化这些估计，得到了依赖于图增长情况的改进界。最棘手的情形是直径与低维环面的直径相当时。特别是，在“维数”小于四时（忽略对数因子），我们的误差项是 Aldous 和 Brown 所得误差的平方。这些改进界在配套工作中发挥了关键作用 [BHT22] ，该工作刻画了顶点传递图上覆盖时间的涨落。

1 引言

1.1 主要结果

令 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 为有限状态空间 S 上不可约可逆（速率为 1）的连续时间马尔可夫链。记顶点 $x\in S$ 的命中时间为 $T_x:=\min\{t\geq 0 \mid X_t=x\}$。链的**弛豫时间** 定义为 $t_{\rm rel}:=1/(1-\theta_2)$，其中 $1=\theta_1>\theta_2>\dots$ 是该链转移矩阵 P 的特征值。设 $\varnothing\neq B\subsetneq S$ 满足链在 B 上的限制是不可约的，即对所有 $b_1,b_2\in B$，有 $\mathbb{P}_{b_1}[T_{b_2}<T_A]>0$ ，其中$T_A:=\max_{x\in A}T_x$ 是命中集合 $A:=B^c$ 的命中时间。我们称这样的集合 B 为X-**不可约**。已知存在一个支撑在 B 上的唯一概率测度 α_B ，称为 B 上的**准平稳分布** ，使得对于以 α_B 为起点条件化的链， T_A 是一个指数随机变量： T_A 对于 $t\geq 0$ 满足，

$$\mathbb{P}_{\alpha_B}(T_A>t)=\exp\left(-\frac{t}{\mathbb{E}_{\alpha_B}[T_A]}\right). \tag{1.1}$$

量化准平稳分布与平稳分布之间的接近程度 π 对于利用指数随机变量近似命中时间 T_A 至关重要，而这里的随机游走从 π 出发。这类指数近似可追溯至 Aldous 和 Brown 的开创性工作 [AB92], 他们得出了定量误差界，我们现在回顾这些结果。

定理 1.1 ([AB92，定理 3、公式 (1) 和推论 4])。 设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是定义在有限状态空间 S上的不可约可逆连续时间马尔可夫链，并记其平稳分布为 π。设 $\varnothing\neq B\subsetneq S$ 使得该链在 B 上的限制是不可约的，

并令 $A := B^c$。我们有

$$\pi(A) \le 1 - \frac{\mathbb{P}_\pi(T_A > t)}{\mathbb{P}_{\alpha_B}(T_A > t)} \le \frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_{\alpha_B}[T_A]} \tag{1.2}$$

对所有 $t \ge 0$，并且

$$\pi(A) \le 1 - \frac{\mathbb{E}_\pi[T_A]}{\mathbb{E}_{\alpha_B}[T_A]} \le \frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_{\alpha_B}[T_A]}\,. \tag{1.3}$$

我们的主要结果改进了（1.2）和（1.3）右侧的“误差项”。定理 1.2 证明了可逆马尔可夫链的一项改进界。定理 1.4和1.5根据体积增长，证明了传递图的具体界。同时，我们从所有结论中去掉了限制 P 在 B 上的限制，即要求其不可约。

以下结果受到合著论文 [BHT22]中对顶点传递图覆盖时间的研究启发。在该文中，Aldous–Brown 类型的近似有助于将小集合的命中概率与其容量联系起来。我们在定理1.5 中证明的改进，是获得 [BHT22中定理 1.1 和 1.2]的刻画所必需的。

近年来，人们对准平稳分布以及在条件为未命中相应集合时链收敛至该分布的速率十分关注，参见 [DM09、DM15、DHESC21]。以下结果在这一背景下也应有所助益。

我们的第一个改进如下。

定理 1.2 （AB 定理的一个改进）。 设 $(X_t)_{t\ge0}$ 是有限状态空间 S 上的不可约可逆连续时间马尔可夫链，并记其平稳分布为π。设 $\varnothing \neq A \subsetneq S$。设 M 是 A^c 的一个 X-不可约分量，且其中的 $\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$ 取最大值。则

$$\pi(A) \le 1 - \frac{\mathbb{P}_\pi(T_A > t)}{\mathbb{P}_{\alpha_M}(T_A > t)} \le \pi(A) + 2\sum_{x\in S} \pi(x)\left(\mathbb{P}_x[T_A \le 2\,t_{\mathrm{rel}}]\right)^2\,, \tag{1.4}$$

对每个 $t \ge 0$ 均成立，并且

$$\pi(A) \le 1 - \frac{\mathbb{E}_\pi[T_A]}{\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]} \le \pi(A) + 2\sum_{x\in S} \pi(x)\left(\mathbb{P}_x[T_A \le 2\,t_{\mathrm{rel}}]\right)^2\,. \tag{1.5}$$

注释 1.3。 设 $X = (X_t)_{t\ge0}$， A 以及 M 如定理 1.2所示。将子集 $W \subsetneq S$的 X-不可约分量的集合记为 $\mathrm{Irr}_X(W)$。由佩龙–弗罗贝尼乌斯定理和特征值交错定理可知，我们将看到，至多有一个 $\mathbb{E}_{\alpha_I}[T_A] > t_{\mathrm{rel}}$ 属于$I \in \mathrm{Irr}_X(A^c)$。如果

$$\max_{I\in \mathrm{Irr}_X(A^c)} \mathbb{E}_{\alpha_I}[T_A] > t_{\mathrm{rel}}\,, \tag{1.6}$$

那么 M 就是**唯一的** 此类最大化者。

在大多数有趣的情形下（例如大型环面中的有限集合），条件（1.6）会自动满足；若该条件不成立，定理1.1 和1.2中的上界则是平凡的。

对于较小的集合 A，对（ $\mathbb{P}_x[T_A \le 2t_{\mathrm{rel}}]^2 \le \mathbb{P}_x[T_A \le 2t_{\mathrm{rel}}]$ ）和（1.4）右侧应用平凡界，可得定理 1.5）便可在相差一个普适常数的意义下还原定理1.1 。然而，一般而言，这个界非常粗糙，通常可以直接估计定理1.2 中的误差项（即（1.4）和（1.5）右侧的和）。对于顶点传递图，可以根据图的增长对其进行如下界定。

定理 1.4。 存在一个普适常数 C_0，使得下述结论成立。设 $\Gamma=(V,\ E)$ 是一个有限连通顶点传递图，其度为 $\deg(\Gamma)\ge 1$。设 $\varnothing\neq A\subsetneq V$。对于 Γ 上的简单随机游走，有

$$2\sum_{x\in S}\pi(x)\left(\mathbb{P}_x[T_A\le 2\,t_{\mathrm{rel}}]\right)^2\le C_0|A|^2\left(\frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_\pi[T_o]}\right)^2\left(1+\frac{\deg(\Gamma)^2 n}{{t_{\mathrm{rel}}}^2}\int_0^{\sqrt{t_{\mathrm{rel}}/\deg(\Gamma)}}\frac{r^3\mathrm{d}r}{V(r)}\right)\tag{1.7}$$
$$=:\mathrm{Err}(\Gamma,A)\,,$$

其中，$V(r)$ 表示半径为 $\lfloor r\rfloor$ 的球的体积。

这类改进对于处理临界情形至关重要，而且事实上对于环面 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d$ 任意 $d\ge 2$ 都具有重要意义。确实，对于环面（若 d 固定且当 $m\to\infty$ 时），我们有 $t_{\mathrm{rel}}\asymp m^2$，并且$V(r)\asymp r^d$。特别地，对于维数为 2 和 3 的环面，对于 A 大小有界的集合，我们有

$$\mathrm{Err}(\Gamma,A)\asymp\left(\frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_\pi T_0}\right)^2\asymp\left(\frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_{\alpha_M}T_A}\right)^2,\tag{1.8}$$

这正是 Aldous 和 Brown 的误差项的平方！下表展示了环面的误差项改进情况。

表 1：对于 A 大小为 $k\ge 1$ 的集合，当 $m\to\infty$ 时环面 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d$ 的渐近参数。第 2 列为 $\Theta_d(\cdot)$，第 3 和第 4 列为 $\Theta_{d,k}(\cdot)$。在所有情形下，我们都有 $t_{\mathrm{rel}}=\Theta_d(m^2)$。我们记 $n=|V|=m^d$。

维数 d	命中时间 $\mathbb{E}_\pi T_0$	误差项 $t_{\mathrm{rel}}/\mathbb{E}_\pi T_A$	误差$(\Gamma,\ A)$
1	m^2	1	1
2	m^2 对数 m	1/对数 m	(1/对数 m)^2
3	$n=m^3$	$n^{-1+2/d}=1/m$	$(1/m)^2$
4	$n=m^4$	$n^{-1+2/d}=1/m^2$	对数$_n{}^n\asymp$(对数 m)$/m^4$
≥ 5	$n=m^d$	$n^{-1+2/d}=1/m^{d-2}$	$1/n=1/m^d$

最后，利用 Tessera 和 Tointon 最近的结构性结果 [TT21, TT20]，我们能够进一步将顶点传递图的误差项 $\mathrm{Err}(\Gamma,A)$ 限制在仅由图的直径决定的范围内。下面引入一些记号。设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个有限连通顶点传递图。记其顶点数为 $n=|V|$，图距离为 dist_Γ，直径为 $D=\mathrm{Diam}(\Gamma):=\max_{x,\,y\in V}\mathrm{dist}_\Gamma(x,y)$。记其度为 $\deg(\Gamma)$。我们可以唯一地写成 $n=D^qR$，其中 q 是一个整数，且 $1\le R<D$。考虑在 Γ 上的简单随机游走。记其平稳分布为 π，并令 $o\in V$ 为任意一个顶点。令

$$\beta(\Gamma):=\begin{cases}\frac{D^4}{(\mathbb{E}_\pi[T_o])^2} & \text{if } q\in\{1,2\}\\ \frac{D^4}{(\mathbb{E}_\pi[T_o])^2}\left(1+\frac{R\log R}{D}\right) & \text{if } q=3\\ \frac{D^4}{(\mathbb{E}_\pi[T_o])^2}\left(R+\log(\frac{D}{R})\right) & \text{if } q=4\\ 1/|V| & \text{if } q\ge 5\end{cases}.\tag{1.9}$$

我们证明如下结论。

定理 1.5（传递图的专门准平稳近似）。存在一个普适常数 $C_1>0$，使得以下结论成立。设 $d\ge 2$ 为一个整数。设 $\Gamma=(V,E)$为一个度为 d 的有限连通顶点传递图。设 $\varnothing\neq A\subsetneq V$。设 M 是X的一个 A^c -不可约分量，且其中 $\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$ 取最大值。[1] 对于

[1]根据注记 1.3，M 当 $\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]>t_{\mathrm{rel}}$ 时，自动保证其为唯一的最大化者。

Γ 上的简单随机游走，我们有

$$0 \le \pi(M) - \frac{\mathbb{P}_\pi(T_A > t)}{\mathbb{P}_{\alpha_M}(T_A > t)} \le C_1 |A|^2 d^2 \beta(\Gamma) \tag{1.10}$$

对所有 $t \ge 0$，并且

$$0 \le \pi(M) - \frac{\mathbb{E}_\pi[T_A]}{\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]} \le C_1 |A|^2 d^2 \beta(\Gamma)\,. \tag{1.11}$$

注 1.6（对度的依赖）。我们认为，定理 d 中的1.5 对 d的最优依赖可以改进为线性依赖。对于边传递图，我们认为可以完全消除对

注 1.7。我们的结果在离散时间情形下也成立，只需做少量改动，具体说明见注 2.6。

第 2 节中的许多论证 [AB92]有所借鉴。为了证明定理 1.2中的精细界，需要两个新的步骤。第一步是为示性函数 1_B 在一个适当的标准正交基下分解后的首个系数找到一个显式公式；这在引理 2.7中给出。第二步是引入辅助时间t_{med} （4.8）并对其进行研究。

2 准平稳分布与命中时间：一种简单方法

本节中，$X = (X_t)_{t \ge 0}$ 是定义在有限状态空间 S 上的不可约可逆（速率为 1）连续时间马尔可夫链，其转移矩阵为 P，平稳测度为 π （因此，每个 $x \in S$ 的跳跃率都等于 1；在这样的跳跃时刻，链以概率$P(x,y)$从 x 跳至 y ）。对于 $f, g\colon S \to \mathbb{R}$，$f$的期望定义为 $\mathbb{E}_\pi[f] := \sum_{x \in S} \pi(x) f(x)$，$f$和 g的内积定义为 $\langle f, g \rangle_\pi := \mathbb{E}_\pi[fg]$，相应的 L^2范数定义为 $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_\pi}$。

本节介绍一种高效且自成一体的准平稳分布研究方法。许多论证——这并不令人意外——借鉴自 [AB92], 以及 [AF，第 3.6 节。5] 和[Kei79，第 6 节。9]我们的方法之所以更简单，是因为我们更充分地利用了这些空间的 L^2结构（相对于内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$）

$$C_0(B) := \{ f \in \mathbb{R}^S : f(x) = 0 \text{ for all } a \in B^c \}\,, \tag{2.1}$$

对于子集 $\varnothing \ne B \subsetneq S$。

2.1 被杀死的链与准平稳分布

设 $\varnothing \ne B \subsetneq S$。对于 $x,\ y \in S$,

$$P_B(x,y) := P(x,y) \mathbf{1}\{x, y \in B\}\,. \tag{2.2}$$

这定义了 $S \times S$ 上的严格次随机矩阵 P_B。特别地，若 $x,\ y \in S$ 满足$x \in A$ 或 $y \in A$，则有 $P_B(x,\ y) = 0$。矩阵 P_B 是链在命中 $A = B^c$ 时被杀死（或冻结）后的转移矩阵。

引理 2.1. 设 $\varnothing \ne B \subsetneq S$。 P_B 关于内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ 在$C_0(B)$上是自伴的。

*Pro*的。 设 $x, y \in S$。根据可逆性的定义，我们有 $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$。因此

$$\pi(x)P_B(x,y) = \pi(x)P(x,y)\mathbf{1}\{x,y \in B\} = \pi(y)P(y,x)\mathbf{1}\{x,y \in B\} = \pi(y)P_B(y,x)\,. \tag{2.3}$$

现在，令 f， $g \in C_0(B)$。重新排列各项并利用（2.3），可得

$$\begin{aligned}\langle f, P_B g\rangle_\pi (P_B g)(x) &= \sum_{x\in B}\pi(x)f(x)\sum_{y\in B}P_B(x,y)g(y)\\ &= \sum_{x,y\in B}\left[\pi(y)P_B(y,x)\right]g(y)f(x)\\ &= \sum_{y\in B}\pi(y)g(y)\sum_{x\in B}P_B(y,x)f(x) = \langle g, P_B f\rangle_\pi\,,\end{aligned} \tag{2.4}$$

也就是说， P_B 是自伴的。 □

~考虑将 P_B 限制在 $B \times B$ 上得到的限制矩阵 P_B （删除与 A对应的行和列~即可得到）。由于 P 是不可约随机矩阵， P_B 是严格次随机的。特别地， P_B 的特征值的模都严格小于 1。

~**此外，假设 B 是 X-不可约的**。 那么矩阵 P_B 是本原矩阵。根据~佩龙–弗罗贝尼乌斯定理， P_B 的谱半径 ρ 是 P_B 的一个特征值，其对应的特征子空间是一条直线，并且该直线上恰有一个关于 B的概率测度 α_B。该概率测度α_B （通过令 $\alpha_B(x) = 0$ （ $x \in B^c$），可自然地扩展到 S）称为集合 B的**准平稳分布**。将其总结为一个方程，即得

$$\alpha_B P_B = \rho\alpha_B\,. \tag{2.5}$$

此外，由于 P_B 在 $C_0(B)$ 上是关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$ 的自伴算子，存在 $1 > \rho = \gamma_1 = \gamma_1(B) > \gamma_2 = \gamma_2(B) \geq \ldots \geq \gamma_m = \gamma_m(B)$，其中 $m := |B|$；并且存在 $C_0(B)$ 的一组关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$ 的标准正交基 $(f_1, \ldots, f_m)$，使得对所有 $1 \leq i \leq m$， $P_B f_i = \gamma_i f_i$。（注意， $f_1, \ldots, f_m$ 是 P_B的右特征向量。）另记 $\lambda_i = \lambda_i(B) := 1 - \gamma_i(B)$，其中 $1 \leq i \leq m$。

最后， α 关于 π 的拉东–尼科迪姆导数 $\alpha_B/\pi : S \to \mathbb{R}$ 定义为

$$(\alpha_B/\pi)(a) := \begin{cases}\alpha_B(a)/\pi(a) & \text{if } a \in B\,,\\ 0 & \text{if } a \in B^c\,.\end{cases} \tag{2.6}$$

那么对任意 $x \in S$，由（2.3）且由于 $\alpha_B P_B = \rho\alpha_B$ 由（2.5），可得

$$\begin{aligned}\left(P_B\frac{\alpha_B}{\pi}\right)(x) = \sum_{y\in B}P_B(x,y)\frac{\alpha_B(y)}{\pi(y)} = \sum_{y\in B}P_B(y,x)\frac{\alpha_B(y)}{\pi(x)} &= \frac{1}{\pi(x)}\sum_{y\in B}\alpha_B(y)P_B(y,x)\\ &= \frac{\rho\alpha_B(x)}{\pi(x)}\,,\end{aligned} \tag{2.7}$$

也就是说， $P_B(\alpha_B/\pi) = \rho(\alpha_B/\pi)$。换言之，向量 α_B/π 是 P_B 的右特征向量，特征值为 ρ。因此，只需将 f_1 替换为 $-f_1$，确保 f_1 至少有一个正系数，我们便有

$$f_1 = \frac{\alpha_B/\pi}{\|\alpha_B/\pi\|_2}\,. \tag{2.8}$$

另定义矩阵 $I_B$by $I_B(x,\ y) = \mathbf{1}\{x = y \in B\}$for x， $y \in S$，并记作 $\lambda = \lambda_1 = 1 - \rho$。换言之， λ 是 $I_B - P_B$的最小特征值，而 $Q_B := P_B - I_B$ 是与该杀死链的速率为 1 的连续时间版本相对应的马尔可夫生成元。

现在我们回顾（并重新证明），与集合 B 对应的准平稳分布 α_B 满足：在 $\mathbb{P}_{\alpha_B}$ 下，$A = B^c$ 的首次到达时间（在连续时间情形下）服从参数为 $\lambda = \lambda_1(B)$ 的指数分布；此外，

$$\lambda_1(B) = 1/\mathbb{E}_{\alpha_B}[T_A]\,. \tag{2.9}$$

引理 2.2. 设 $\varnothing \neq B \subsetneq S$ 是 X-不可约的。记 α 为 α_B。我们有 $\lambda = 1/\mathbb{E}_\alpha[T_A]$，并且对于任意 $t \geq 0$，

$$\mathbb{P}_\alpha(T_A > t) = e^{-t/\mathbb{E}_\alpha[T_A]} = e^{-\lambda t}\,. \tag{2.10}$$

证明. 设 $t \geq 0$。由于 $\alpha Q_B = -\lambda\alpha$，我们有 $\alpha e^{tQ_B} = e^{-\lambda t}\alpha$。因此，将在命中 A时被杀死（或冻结）的链在时刻 t 的位置记为 X_t^A，

$$\mathbb{P}_\alpha[T_A > t] = \mathbb{P}_\alpha(X_t^A \in B) = (\alpha e^{tQ_B})(B) = e^{-\lambda t}\alpha(B) = e^{-\lambda t}\,, \tag{2.11}$$

也就是说，从 α 出发，T_A 的分布是均值为 $1/\lambda$的指数分布。取期望后，最终得到 $1/\lambda = \mathbb{E}_\alpha[T_A]$。 □

注记 2.3. 采用引理 2.2中的相同记号，对于所有 $x \in B$ 以及所有 $t \geq 0$，我们有

$$(\alpha e^{tQ_B})(x) = \mathbb{P}_\alpha(X_t^A = x) = \mathbb{P}_\alpha[X_t = x, T_A > t] = \mathbb{P}_\alpha[X_t = x \mid T_A > t]\mathbb{P}_\alpha[T_A > t]\,, \tag{2.12}$$

也就是说，由于 $\alpha e^{tQ_B} = e^{-\lambda t}\alpha$ 和 $\mathbb{P}_\alpha[T_A > t] = e^{-\lambda t}$，

$$\mathbb{P}_\alpha[X_t = x \mid T_A > t] = \alpha(x)\,. \tag{2.13}$$

这个最后的等式说明了“准平稳分布”这一名称的由来。

若 B 不是 X-不可约，我们可以将 B 划分为 X-不可约分量 B_1，……，B_p，并对每个分量应用佩龙–弗罗贝尼乌斯定理。然后，将 $C_0(B_i)$ 的标准正交基拼接起来，我们便得到 $C_0(B)$ 的标准正交基（f_1，……，f_m），其中同样有 $m = |B|$，相应的特征值为 $1 > \rho = \gamma_1(B) \geq \gamma_2(B) \geq \ldots \geq \gamma_m(B)$。主要区别在于~矩阵 P_B 不是本原的，并且我们可能有 $\gamma_1(B) = \gamma_2(B)$。在这种情况下，最大特征值必定来自不同的不可约分量 B （因为如上所述，根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理，每个分量上都有唯一的最大特征值），并且是这些分量的准平稳分布的特征值 $1 - 1/\mathbb{E}_{\alpha_{B_i}}T_A$。记

$$\mathrm{MaxIrr}_X(B) := \{I \in \mathrm{Irr}_X(B) \mid \mathbb{E}_{\alpha_I}T_A = 1/(1-\gamma_1(B))\}\,, \tag{2.14}$$

具有最大准平稳命中时间的 B 中的 X-不可约分量集合 B^c。换言之，以上所述即为：P_B 中 γ_1（B）的重数等于 $\mathrm{MaxIrr}_X(B)$ 的基数。

注记 2.4。假设 $|\mathrm{MaxIrr}_X(B)| \geq 2$，并令 $M \in \mathrm{MaxIrr}_X(B)$。对于$\varepsilon \in (0,1)$，我们可以考虑链 X 的一个修正版 $X^{(\varepsilon,M)}$，在 M中增加了 ε 少许惰性；也就是说，该链具有满足以下条件的转移矩阵 $P_{(\varepsilon,M)}$

$$P^{(\varepsilon,M)}(x,y) = \begin{cases} \varepsilon + (1-\varepsilon)P(x,y) & \text{if } x = y \in M, \\ (1-\varepsilon)P(x,y) & \text{if } x \in M \text{ and } y \in S\backslash\{x\}\,, \\ P(x,y) & \text{if } x \notin M \text{ and } y \in S. \end{cases} \tag{2.15}$$

那么， X 和 $X^{(\varepsilon,M)}$ 的行为相同，只是 $X^{(\varepsilon,M)}$ 在 M中速度较慢。（事实上，在转移矩阵中增加一些惰性，其效果与随机游走处于 M时将跳跃率从 1 改为 $(1-\varepsilon)$相同。）

由于对于随机游走 $X^{(\varepsilon,M)}$，从 α_M 到 A 的命中时间乘以 $1/(1-\varepsilon)$ 后，而对于每个 $I \in \mathrm{Irr}_X(B)\backslash\{M\}$，从 α_I 到 A 的命中时间保持不变，因此对于 $X^{(\varepsilon,M)}$，$\gamma_1(B)$ 的值略高，进而对于链 $X^{(\varepsilon,M)}$，我们有 $\gamma_1(B) > \gamma_2(B)$。但当 $\varepsilon \to 0$ 时，在某个时间之前命中集合的概率以及 $X^{(\varepsilon,M)}$ 的期望命中时间趋近于 X 对应的值。因此，只需研究链 $X^{(\varepsilon,M)}$，再令 $\varepsilon \to 0$，**我们总可以假设**

$$\gamma_1(B) > \gamma_2(B), \tag{2.16}$$

也就是说，存在唯一的集合 $M \in \mathrm{MaxIrr}_X(B)$，以下我们默认将其记为 M。（这纯粹是为了方便。所有证明在 $|\mathrm{MaxIrr}_X(B)| \geq 2$ 且我们考虑一个集合 $M \in \mathrm{MaxIrr}_X(B)$ 时仍然成立，但这样每次都需要说明，经过重新排序后，特征向量 f_1 对应于所选的 M。）

2.2 Aldous 和 Brown 的一个定理，重述版

一个重要的量是 准平稳态偏离平稳态的程度，对于一个 X-不可约子集M，其定义为

$$R_M := \frac{\|\alpha_M/\pi\|_2^2 - 1}{\|\alpha_M/\pi\|_2^2}. \tag{2.17}$$

量 R_M 出现在 [AB92], 中，作为他们记作 p_1的中间量，但他们似乎没有注意到它具有显式形式 $\frac{\|\alpha_M/\pi\|_2^2-1}{\|\alpha_M/\pi\|_2^2}$。因此，除去 $\frac{\|\alpha_M/\pi\|_2^2-1}{\|\alpha_M/\pi\|_2^2}$ 的取值 R_M 以及不可约性假设的删去之外，我们可以将下面的定理归于 Aldous 和 Brown。

定理 2.5。设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是有限状态空间 S上的不可约可逆连续时间马尔可夫链，并将其平稳分布记为 π。令 $\varnothing \neq A \subsetneq S$ 和$M \in \mathrm{MaxIrr}_X(A^c)$。则

$$\pi(A) \leq 1 - \frac{\mathbb{P}_\pi(T_A > t)}{\mathbb{P}_{\alpha_M}(T_A > t)} \leq R_M, \tag{2.18}$$

对所有 $t \geq 0$，并且

$$\pi(A) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}_\pi[T_A]}{\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]} \leq R_M. \tag{2.19}$$

定理 2.5 优于定理 1.1 因为我们始终有 $R_M \leq t_{\mathrm{rel}}/\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$ 根据 [AB92，引理 10]。我们将此结果的一个修改版本证明为引理2.8。然而，一般而言，界 $t_{\mathrm{rel}}/\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$ 远非紧确：结合定理 2.5 与关于 R_M的界，可以得到更精确的结果，后文将会看到。

注 2.6。我们聚焦于连续时间设置。只需稍作两处修改，便可轻松将分析扩展到离散时间设置。

1. 形如 $\exp(-(1-\gamma_i)t)$ 的项需要替换为 γ_i^t。

2. 关于 $T_A > t$ 的概率下界适用于偶数 t，但对于奇数 t 可能不成立；不过，如果在 A 处杀死的链的转移矩阵的所有特征值均为非负（例如，如果 $\min_{x\in S} P(x,x) \geq 1/2$），那么这些下界对所有整数 $t \geq 0$ 都成立。3. 恒等式 $\mathbb{P}_\alpha(T_A > t) = \exp(-t/\mathbb{E}_\alpha T_A)$ 必须替换为 $(1-1/\mathbb{E}_\alpha T_A)^t$，其中$M \in \mathrm{MaxIrr}_X(A^c)$ 且 $\alpha = \alpha_M$，但命中时间 $\mathbb{E}_\alpha T_A$ 保持不变。

2.3 命中时间与指数分布混合

现在，我们给出一个简单证明，说明一个众所周知的事实：对于连续时间可逆链，从平稳分布 π 出发命中集合 A （满足 $\varnothing \neq A \subsetneq S$）的命中时间是指数分布的混合。换句话说，其分布是完全单调的。

和之前一样，我们记作 $B = A^c$，**我们不假设 B 是 X-不可约的**。我们已经将 P_B 视为 $C_0(B)$ 上的一个算子。现在让我们对 e^{tQ_B} 做同样的处理。对于 $f \in C_0(B)$ 和 $x \in S$，我们有

$$(e^{tQ_B} f)(x) = \sum_{b \in B} \left[e^{tQ_B}\right](x,b) f(b) = \mathbb{E}_x[f(X_t)\mathbf{1}\{T_A > t\}]\,. \tag{2.20}$$

让我们在 $C_0(B)$ 的 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$-标准正交基（$f_1$，……，$f_m$）下分解 1_B：存在 c_1，……，$c_m \in \mathbb{R}$，使得

$$1_B = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i. \tag{2.21}$$

此外，对于 $1 \le i \le m$，根据标准正交性，并且由于 f_i 支持于 B 上，我们有

$$c_i = \langle 1_B, f_i \rangle_\pi = \sum_{b \in B} \pi(b) f_i(b) = \sum_{x \in S} \pi(x) f_i(x) = \mathbb{E}_\pi[f_i]\,. \tag{2.22}$$

于是，对于 $t \ge 0$，我们有恒等式

$$e^{tQ_B} 1_B = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-t(1-\gamma_i)} f_i\,. \tag{2.23}$$

此外，将（2.20）应用于 $f = 1_B$ 可得

$$\mathbb{P}_\pi[T_A > t] = \sum_{x \in S} \pi(x) \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}\{T_A > t\}\right] = \sum_{b \in B} \pi(b)(e^{tQ_B} 1_B)(b) = \langle e^{tQ_B} 1_B, 1_B \rangle_\pi\,. \tag{2.24}$$

因此，根据正交性，我们得到恒等式

$$\mathbb{P}_\pi[T_A > t] = \sum_{i=1}^{m} c_i^2 e^{-t(1-\gamma_i)}\,. \tag{2.25}$$

方程（2.25）将在定理2.5 的证明以及我们对 Aldous–Brown 近似的改进中发挥关键作用。最后，将（2.25）应用于 $t = 0$ 可得

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^2 = \mathbb{P}_\pi[T_A > 0] = 1 - \pi(A) = \pi(B)\,. \tag{2.26}$$

2.4 定理 2.5 的证明

Recall，且 $B = A^c$，并且根据备注 2.4 我们可以假设存在唯一的连通分支 $M \in \mathrm{MaxIrr}_X(B)$。下面是一个简单但关键的新观察。

引理 2.7。我们有 $c_1^2 = 1 - R_M$。

证明。由（2.22）可得 $c_1 = \mathbb{E}_\pi[f_1]$。此外，将（2.8）应用于 M 和 M^c（以 B和 A代替，因为在（2.8）中，集合 B被假设为不可约），我们得到 $f_1 = \frac{\alpha_M/\pi}{\|\alpha_M/\pi\|_2}$。因此可得

$$c_1 = \mathbb{E}_\pi[f_1] = \frac{1}{\|\alpha_M/\pi\|_2}\mathbb{E}_\pi[\alpha_M/\pi] = \frac{1}{\|\alpha_M/\pi\|_2}, \tag{2.27}$$

因此，根据 R_M 的定义， $c_1^2 = 1 - R_M$。 □

现在我们来证明定理2.5。

定理 *2.5* 的证明。令 $t \geq 0$。由（2.25）且由于 $\gamma_i \leq \gamma_1$ 对于 $1 \leq i \leq m$，我们有

$$c_1^2 e^{-t(1-\gamma_1)} \leq \mathbb{P}_\pi[T_A > t] = \sum_{i=1}^m c_i^2 e^{-t(1-\gamma_i)} \leq \left(\sum_{i=1}^m c_i^2\right) e^{-t(1-\gamma_1)}. \tag{2.28}$$

此外， $c_1^2 = 1 - R_M$由引理 2.7 以及 $\sum_{i=1}^m c_i^2 = 1 - \pi$（$A$）由（2.26）。回顾（2.9）和引理2.2 ，我们可以将前面的公式改写为

$$(1 - R_M)\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t] \leq \mathbb{P}_\pi[T_A > t] \leq (1 - \pi(A))\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t], \tag{2.29}$$

这等价于（2.18）。最后，对（2.29）从 0 到 ∞ 积分，得到

$$(1 - R_M)\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A] \leq \mathbb{E}_\pi[T_A] \leq (1 - \pi(A))\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A], \tag{2.30}$$

这等价于（2.19）。证明至此完成。 □

2.5 从 Aldous 和 Brown 的定理 1.1 （的一个变体）直接推导

为完整起见，我们证明 Aldous 和 Brown 的一个引理的变体（见下文注 2.9 ） [AB92，引理 10 第 (b) 部分], 该变体与定理 2.5 结合后，立即推出定理 1.1。我们注意到，尽管下一个引理的陈述与 [AB92],中的基本相同，但其在 [AB92] 中的推导比这里给出的推导更复杂。

引理 2.8。设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是定义在有限状态空间 S上的不可约可逆连续时间马尔可夫链，并用 π表示其平稳分布。设 $\varnothing \neq A \subsetneq S$ 和$M \in \mathsf{MaxIrr}_X(A^c)$。则

$$R_M \leq \frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]}.$$

证明。首先，根据注 2.4 ，我们不妨假设存在唯一的集合 $M \in \mathrm{MaxIrr}_X(A^c)$.

由于 $f_1 = \frac{\alpha_M/\pi}{\|\alpha_M/\pi\|_2}$的支撑集包含于 M（因而也包含于 $B = A^c$），我们得到，对于所有 $x \in S$, $((I-P)f_1)(x)f_1(x) = \lambda f_1(x)^2$，其中回顾一下， $\lambda = 1 - \gamma_1(B) = 1/\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$。结合 $\|f_1\|_2 = 1$ 这一事实可得

$$\frac{1}{\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]} = \lambda = \frac{\langle (I-P)f_1, f_1\rangle_\pi}{\|f_1\|_2^2} = \mathrm{Var}_\pi f_1 \frac{\langle (I-P)f_1, f_1\rangle_\pi}{\mathrm{Var}_\pi f_1}. \tag{2.31}$$

利用弛豫时间的极值刻画（例如，见 [Ber16] 中的定理 3.1；注意，该结果的证明及相关恒等式对次随机 π–可逆转移矩阵也成立），这意味着 $\frac{\langle (I-P)f_1, f_1\rangle_\pi}{\mathrm{Var}_\pi f_1} \geq 1/t_{\mathrm{rel}}$，并注意到

$$\mathrm{Var}_\pi f_1 = \frac{\|\alpha_M/\pi - 1\|_2^2}{\|\alpha_M/\pi\|_2^2} = \frac{\|\alpha_M/\pi\|_2^2 - 1}{\|\alpha_M/\pi\|_2^2} = R_M$$

证明结束。 □

注 2.9。 在 [AB92，引理 10 第 (b) 部分] 中证明的界为 $\|\alpha_M/\pi\|_2^2 \le (1-t_{\rm rel}/\mathbb{E}_\pi[T_A])^{-1}$。换句话说，由于 $R_M = 1 - 1/\|\alpha_M/\pi\|_2^2$，他们的界可以改写为

$$R_M \le \frac{t_{\rm rel}}{\mathbb{E}_\pi[T_A]}. \tag{2.32}$$

由于 $\mathbb{E}_\pi[T_A] \le \mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$，引理 2.8 给出的界更好。不过，只有当 $t_{\rm rel} = o(\mathbb{E}_\pi T_A)$ 时，这些界才有用；此时 $\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A] = (1+o(1))\mathbb{E}_\pi[T_A]$，因此界（2.32）在实际应用中与引理 2.8同样有用。

3 Aldous–Brown 近似中的改进下界

3.1 交错弛豫时间

设 $\varnothing \neq A \subsetneq S$，并令 $B = A^c$。回顾一下，我们不假设链在 B上的限制是不可约的，并且根据备注 $_X(B)$，可以假设 MaxIrr 是单元素集合 $\{M\}$。我们还记 $\pi_A(\cdot) = \pi(\cdot)/\pi(A)$。

回顾一下辅助马尔可夫链的构造，其中 $A = B^c$ 被收缩为一个点。其状态空间为 $B \cup \{A\}$。其转移由 $K(x,y) = P(x,y)$、$K(x,\{A\}) = P(x,A)$、$K(\{A\}\ x) = \sum_{a\in A}\pi_A(a)P(a,x)$（对于 $x, y \in B$）以及 $K(\{A\},\{A\}) = \sum_{a\in A}\pi_A(a)P(a,A)$ 给出。这是关于分布 $\hat{}\pi$ 可逆的马尔可夫链，其中 $\hat{}\pi(\{A\}) = \pi(A)$，且对所有 $x \in B$，$\hat{}\pi(x) = \pi(x)$。记 K 的弛豫时间为 $\mathsf{t}_{\rm rel}(K)$。

引理 3.1（交错弛豫时间）。 我们有

$$\frac{1}{1-\gamma_2(B)} \le t_{\rm rel}(K) \le t_{\rm rel}\,. \tag{3.1}$$

$\hat{}$证明。 记 K 的第二大特征值为 λ。根据第二大特征值的极值刻画（例如 [LP17，备注 13。8]），可得

$$\frac{1}{t_{\rm rel}} = \min_{f:\mathrm{Var}_\pi f\neq 0} \frac{\langle (I-P)f, f\rangle_\pi}{\mathrm{Var}_\pi f} \le \min_{\substack{f:\mathrm{Var}_\pi f\neq 0 \\ f(a)=f(b)\ \text{for all}\ a,b\in A}} \frac{\langle (I-P)f, f\rangle_\pi}{\mathrm{Var}_\pi f}\,. \tag{3.2}$$

注意，对于满足 $f(a) = f(b)$ 的 f，对所有 $a, b \in A$，我们有 $(I-P)f, f_\pi \mathrm{Var}_\pi f = (I-K)\hat{}f, \hat{}f_\pi \mathrm{Var}_\pi \hat{}f$，其中，对所有 $x \in B$，$\hat{}f(x) = f(x)$，且当 $a \in A$ 时，$\hat{}f(\{A\}) = f(a)$。因此，最后一个显示式的右端等于 $1 - \hat{}\lambda = 1/\mathsf{t}_{\rm rel}(K)$。要完成证明，还需证明 $\hat{}\lambda \ge \gamma_2$。注意，$P_B$ 是通过删除与 $\{A\}$ 对应的行和列，从 K 中得到的。由 $\hat{}$ 特征值交错定理可知，确实有 $\lambda \ge \gamma_2$，如 desired。

□

3.2 定理的尖锐性2.5。

我们验证定理2.5 基本上是最优的，因为 R_M 既是上界也是该定理中相关量的下界，而且这一结论相当普遍。

为此，我们利用引理2.7，单独考虑第一个特征值的贡献，从而明确和式（2.25）中第一项的贡献。回忆$1 - \gamma_1 = \lambda = 1/\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$，对于 $t \ge 0$，

$$\mathbb{P}_\pi[T_A > t] = (1-R_M)e^{-t/\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]} + \sum_{i=2}^{m} c_i^2 e^{-t(1-\gamma_i)}\,. \tag{3.3}$$

令 $t \geq 0$。由于（3.3）中的和式各项均非负，因此 $\gamma_2 \geq \gamma_i$ 对于 $2 \leq i \leq m$，且$1-\gamma_2 \geq 1/t_{\mathrm{rel}}$ 根据引理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}(1-R_M)\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t] &\leq \mathbb{P}_\pi[T_A > t] \\ &\leq (1-R_M)\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t] + \left(\sum_{i=2}^{m} c_i^2\right) e^{-t(1-\gamma_2)} \\ &\leq (1-R_M)\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t] + ((1-\pi(A)) - (1-R_M))e^{-t/\,t_{\mathrm{rel}}}\,.\end{aligned} \tag{3.4}$$

除以 $\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t]$，减去 1，再乘以 -1，并提取因子 R_M 后，可将其改写为

$$R_M\left(1 - \left(1 - \frac{\pi(A)}{R_M}\right)\frac{e^{-t/\,t_{\mathrm{rel}}}}{\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t]}\right) \leq 1 - \frac{\mathbb{P}_\pi[T_A > t]}{\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t]} \leq R_M\,. \tag{3.5}$$

对（3.4）积分，得到

$$(1-R_M)\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A] \leq \mathbb{E}_\pi[T_A] \leq (1-R_M)\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A] + (R_M - \pi(A))\,t_{\mathrm{rel}}\,, \tag{3.6}$$

重新排列各项后可得

$$R_M\left(1 - \left(1 - \frac{\pi(A)}{R_M}\right)\frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]}\right) \leq 1 - \frac{\mathbb{E}_\pi[T_A]}{\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]} \leq R_M\,. \tag{3.7}$$

因此，只要 A 不太大，且 $t_{\mathrm{rel}} = o(\mathbb{E}_{\alpha_M}(T_A))$，我们就可以看到 R_M 是定理 2.5中（2.18）的最优界。

注记 3.2。让我们在具体情形下考察上述下界（3.5）：边长为 $\ell \geq 2$ 、维数为 $d \geq 2$的环面 $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^d$，以及大小一致有界的集合 A 。那么$t_{\mathrm{rel}} \asymp \ell^2 = o(\mathbb{E}_{\alpha_M} T_A)$，因此只要 $t/\ell^2 \to \infty$，就有 $\frac{e^{-t/\,t_{\mathrm{rel}}}}{\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A>t]} = o(1)$，从而得到渐近等价关系（当 $\ell \to \infty$）

$$1 - \frac{\mathbb{P}_\pi[T_A > t]}{\mathbb{P}_{\alpha_M}[T_A > t]} \sim R_M\,. \tag{3.8}$$

因此，对 Aldous 和 Brown 的结果作出任何改进，都必须来自对 [AB92] 的改进上界 R_M。

4 可逆马尔可夫链的一般上界

我们已经看到，定理 2.5至少不逊于 Aldous 和 Brown 的上界；我们在定理 1.1中回顾了该上界。为了运用定理 2.5 ，我们需要证明一个比 $R_M - \pi(A)$ 更好的上界 $t_{\mathrm{rel}}\,/\mathbb{E}_{\alpha_M}[T_A]$。为此，我们需要更精确地理解从任意状态 A 出发时 x的命中时间，并且还需要引入一个辅助时间，t_{med}。

与之前一样， $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是定义在有限状态空间 S 上的不可约可逆连续时间马尔可夫链，其平稳分布为 π。 $\varnothing \neq A \subsetneq S$ $B = A^c$，我们可以假设$|\,\mathsf{MaxIrr}_X(B)| = 1$，且 $M \in \mathsf{MaxIrr}_X(B)$。

4.1 随机游走从给定顶点出发时的命中时间

回顾一下， $f_1 = \frac{\alpha_M/\pi}{\|\alpha_M/\pi\|_2}, f_2, \ldots, f_m$ 是 $C_0(B)$的一组标准正交基，并且对所有 $1 \le i \le m$ 和 $t \ge 0$， $e^{tQ_B} f_i = e^{-\lambda_i t} f_i$。

引理 4.1. 令 $\varnothing \neq A \subsetneq S$ 并设 $B = A^c$ （不假定其为 X-不可约）。对于每个 $x \in B$ 和 $t \ge 0$，有

$$\mathbb{P}_x[T_A > t] = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) e^{-\lambda_i t} . \tag{4.1}$$

证明. 令 $x \in B$ 和 $t \ge 0$。对于 $y \in B$，有

$$\mathbb{P}_x[X_t = y, T_A > t] = [e^{tQ_B}](x,y) = \langle e^{tQ_B} 1_y, 1_x \rangle = \left\langle e^{tQ_B} 1_y, \frac{1_x}{\pi(x)} \right\rangle_\pi . \tag{4.2}$$

对所有 $y \in B$ 求和，并利用分解 $1_B = \sum_{i=1}^m c_i f_i$，得到

$$\mathbb{P}_x[T_A > t] = \left\langle e^{tQ_B} 1_B, \frac{1_x}{\pi(x)} \right\rangle_\pi = \left\langle e^{tQ_B} \sum_{i=1}^m c_i f_i, \frac{1_x}{\pi(x)} \right\rangle_\pi = \left\langle \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} f_i, \frac{1_x}{\pi(x)} \right\rangle_\pi . \tag{4.3}$$

展开内积后，我们推出

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x[T_A > t] = \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} \left\langle f_i, \frac{1_x}{\pi(x)} \right\rangle_\pi &= \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} \sum_{z \in S} \pi(z) f_i(z) \frac{1_x(z)}{\pi(x)} \\ &= \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} f_i(x) , \end{aligned} \tag{4.4}$$

由此证明完毕。 □

引理 4.2。 令 $\varnothing \neq A \subsetneq S$ ，并设 $B = A^c$ （不假定其是 X-不可约的）。对于每个 $t \ge 0$，我们有

$$\sum_{x \in B} \pi(x) (\mathbb{P}_x(T_A \le t))^2 = \sum_{i=1}^m c_i^2 (1 - e^{-\lambda_i t})^2 . \tag{4.5}$$

证明。 令 $t \ge 0$。根据引理 4.1 ，对于 $x \in B$，利用 $\sum_{i=1}^m c_i f_i(x) = 1_B(x) = 1$ 这一事实可得最后一个等式，

$$g_t(x) := \mathbb{P}_x[T_A \le t] = 1 - \mathbb{P}_x[T_A > t] = 1 - \sum_{i=1}^m c_i f_i(x) e^{-\lambda_i t} = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x)(1 - e^{-\lambda_i t}) , \tag{4.6}$$

tha**t** 是， $g_t = \sum_{i=1}^m c_i (1 - e^{-\lambda_i t}) f_i$。根据族 $(f_i)_{1 \le i \le m}$ 的标准正交性，我们得出 t

$$\sum_{x \in B} \pi(x) (\mathbb{P}_x[T_A \le t])^2 = \langle g_t, g_t \rangle_\pi = \sum_{i=1}^m c_i^2 (1 - e^{-\lambda_i t})^2 . \tag{4.7}$$

□

4.2 使用辅助时间的一般界

We 引入以下辅助时间，事实证明它非常有用：令 $t_{\mathrm{med}} = t_{\mathrm{med}}(B)$ 为 t
满足以下条件的时间（由单调性可知其存在且唯一）

$$\sum_{i=2}^{m} c_i^2 (1 - e^{-\lambda_i \, t_{\mathrm{med}}})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{m} c_i^2 \,. \tag{4.8}$$

命题 4.3 （关于 $R_M - \pi(A)$ 的界）。令 $\varnothing \neq A \subsetneq S$，并设 $B = A^c$（不假定其为 X-不可约的）。我们有

$$R_M - \pi(A) = 2 \sum_{x \in B} \pi(x) \left(\mathbb{P}_x[T_A \leq t_{\mathrm{med}}]\right)^2 - 2(1 - R_M)(1 - e^{-\lambda_1 \, t_{\mathrm{med}}})^2 \,. \tag{4.9}$$

特别地，我们有以下界

$$R_M - \pi(A) \leq 2 \sum_{x \in B} \pi(x) \left(\mathbb{P}_x[T_A \leq t_{\mathrm{med}}]\right)^2 \,. \tag{4.10}$$

证明。由引理 4.2 以及 t_{med}的定义，我们有

$$\sum_{x \in B} \pi(x) (\mathbb{P}_x(T_A \leq t_{\mathrm{med}}))^2 = c_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 \, t_{\mathrm{med}}})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{m} c_i^2 \,. \tag{4.11}$$

由于 $c_1^2 = 1 - R_M$ 和 $\sum_{i=2}^{m} c_i^2 = R_M - \pi(A)$，因此可将其改写为

$$\sum_{x \in B} \pi(x) (\mathbb{P}_x(T_A \leq t_{\mathrm{med}}))^2 = (1 - R_M)(1 - e^{-\lambda_1 \, t_{\mathrm{med}}})^2 + \frac{1}{2}(R_M - \pi(A)) \,, \tag{4.12}$$

重新排列各项后，即可得到所需结果。 □

4.3 利用弛豫时间前的命中给出的一般界

辅助时间 t_{med} 似乎不容易估计。不过，我们总能用弛豫时间的两倍来给它作界，下面就来证明这一点。

引理 4.4. 我们有 $e^{-\,t_{\mathrm{med}}/t_{\mathrm{rel}}} \geq 1 - 1/\sqrt{2}$，特别地，$t_{\mathrm{med}} \leq 2\, t_{\mathrm{rel}}$。

证明. 首先，对于 $2 \leq i \leq m$，我们有 $\gamma_i \leq \gamma_2$，因此 $\lambda_i \geq \lambda_2$。此外，由引理 3.1，我们有 $\lambda_2 = 1 - \gamma_2 \geq 1/t_{\mathrm{rel}}$。由此可得，对于每个 $2 \leq i \leq m$，都有 $\lambda_i \geq 1/t_{\mathrm{rel}}$，因此 $(1 - e^{-\lambda_i \, t_{\mathrm{med}}})^2 \geq (1 - e^{-\,t_{\mathrm{med}}/t_{\mathrm{rel}}})^2$。将此应用于 (4.8) 中求和的每一项，我们得到$1/2 \geq (1 - e^{-\,t_{\mathrm{med}}/t_{\mathrm{rel}}})^2$，，可将其改写为 $e^{-\,t_{\mathrm{med}}/t_{\mathrm{rel}}} \geq 1 - 1/\sqrt{2}$。因此我们有$t_{\mathrm{med}} \leq -\log(1 - 1/\sqrt{2})\; t_{\mathrm{rel}} \leq (5/4) t_{\mathrm{rel}}$。 □

现在我们可以证明定理 1.2。

定理的证明 *1.2*。回顾备注 2.4，我们可以假设 $\mathrm{MaxIrr}_X(B) = \{M\}$。由引理 4.4，对每个 $x \in B$，我们有 $\mathbb{P}_x[T_A \leq t_{\mathrm{med}}] \leq \mathbb{P}_x[T_A \leq 2t_{\mathrm{rel}}]$。结论随即由定理2.5 和命题4.3得出。

□

5 顶点传递图结果的特化

在定理 1.2中，我们证明了一个实用的界，该界表示为弛豫时间之前命中时间的函数。本节的目标是界定这一量

$$\sum_{x\in S}\pi(x)\left(\mathbb{P}_x[T_A\le t_2]\right)^2, \tag{5.1}$$

对于顶点传递图，其中 $t_2:=2t_{\text{rel}}$。

5.1 将命题归约为单点情形

设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个有限连通顶点传递图。本节考虑的马尔可夫链是在 Γ 上以速率 1 运行的连续时间简单随机游走。令 $o\in V$ 为任意一个顶点。注意，此时状态空间为 $S=V$，且平稳测度是均匀的，也就是说，对于每个 $x\in V$，都有 $\pi(x)=1/|V|$。

引理 5.1. 设 $A\subset V$ 和 $t\ge 0$。我们有

$$\sum_{x\in V}\pi(x)\mathbb{P}_x(T_A\le t)^2\le |A|^2\sum_{x\in V}\pi(x)\mathbb{P}_x(T_o\le t)^2. \tag{5.2}$$

证明. 对于 $x\in V$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\mathbb{P}_x(T_A\le t)^2\le\left(\sum_{a\in A}\mathbb{P}_x(T_a\le t)\right)^2\le |A|\sum_{a\in A}\mathbb{P}_x(T_a\le t)^2. \tag{5.3}$$

交换求和顺序并利用传递性，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{x\in V}\pi(x)\mathbb{P}_x(T_A\le t)^2\le |A|\sum_{a\in A}\sum_{x\in V}\pi(x)\mathbb{P}_x(T_a\le t)^2&=|A|\sum_{a\in A}\sum_{x\in V}\pi(x)\mathbb{P}_x(T_o\le t)^2\\&=|A|^2\sum_{x\in V}\pi(x)\mathbb{P}_x(T_o\le t)^2,\end{aligned} \tag{5.4}$$

正如所需。 □

5.2 在指数时间处杀死链

我们的目标现在是对 $\sum_{x\in V}\pi(x)\mathbb{P}_x(T_o\le t_2)^2$, 进行界定，其中回顾一下，$t_2=2t_{\text{rel}}$。对于 $t\ge 0$，记 o 在时间 t 的局部时间为 $L_o(t)=\int_0^t 1_{X_s=o}\mathrm{d}s$。对于 $x,\ y\in V$和 $t\ge 0$，令$p_t(x,\ y):=\mathbb{P}_x(X_t=y)$。因此，对于任意 $x\in V$和 $t\ge 0$，我们有

$$\mathbb{E}_xL_o(t)=\int_0^t p_s(x,o)\mathrm{d}s. \tag{5.5}$$

此外，对于任意 $x\in V$和 $t\ge 0$，我们有

$$\mathbb{P}_x[T_o\le t]=\frac{\mathbb{E}_x[L_o(t)]}{\mathbb{E}_x[L_o(t)\mid L_o(t)>0]}. \tag{5.6}$$

分子的上界可以利用积分形式（5.5）得到。对于分母，我们希望将 $\mathbb{E}_x[L_o(t)\mid L_o(t)>0]$ 下界估计为 $\mathbb{E}_o[L_o(t/2)]$, 或许差一个常数因子，

然后也对分母使用积分形式。然而，这样的界一般并不成立。（例如，在离散时间下，对于长度为 n 的线段，在时刻 $t = n$，我们有$\mathbb{E}_n[L_0(n) \perp L_0(n) > 0] = 1$，而 $\mathbb{E}_0[L_0(n/2)] \asymp \sqrt{n}$。）

为了解决这一问题，我们考虑一条以速率 $1/t_2$ 被杀死的链。令 τ 为参数为 $1/t_2$ 的指数随机变量。注意，由于 $\mathbb{P}(\tau \geq t_2) = e^{-1}$，我们有

$$\sum_{x\in V} \pi(x)\mathbb{P}_x(T_A \leq t_2)^2 \leq e^2 \sum_{x\in V} \pi(x)\mathbb{P}_x(T_A \leq \tau)^2. \tag{5.7}$$

用 τ 替换 t_2 后，我们因此只损失一个乘法常数。令 $N := L_o(\tau)$ 表示链被杀死之前在 o 处的局部时间。对于 $x,\ y \in V$ 和 $s \geq 0$，我们有 $\mathbb{P}_x[X_s = y, \tau > s] = p_s(x,\ y)e^{-\frac{s}{t_1}}$，因此对于 $x \in V$，

$$\mathrm{E}_x[N] = \int_0^\infty p_s(x,o)e^{-\frac{s}{t_1}}\mathrm{d}s. \tag{5.8}$$

引理 5.2。对于任意 $x \in V$，我们有

$$\mathbb{P}_x[T_o \leq \tau] = \frac{\int_0^\infty p_s(x,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s}{\int_0^\infty p_s(o,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s}. \tag{5.9}$$

证明。令 $x \in V$。首先，我们有

$$\mathbb{P}_x[T_o \leq \tau] = \mathbb{P}_x[N \mid N > 0] = \frac{\mathrm{E}_x[N]}{\mathrm{E}_x[N \mid N > 0]}. \tag{5.10}$$

此外，根据指数分布的无记忆性，我们有 $\mathrm{E}_x[N \mid N > 0] = \mathrm{E}_o[N]$。因此

$$\mathbb{P}_x[T_o \leq \tau] = \frac{\mathrm{E}_x[N]}{\mathrm{E}_o[N]} = \frac{\int_0^\infty p_s(x,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s}{\int_0^\infty p_s(o,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s}. \tag{5.11}$$

□

对于 $j \geq 0$，我们定义

$$I_j = \int_0^\infty s^j p_s(x,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s\,. \tag{5.12}$$

引理 5.3. 我们有

$$\sum_{x\in V} \pi(x)(\mathbb{P}_x[T_o \leq \tau])^2 = \frac{1}{|V|}\frac{I_1}{I_0^2}. \tag{5.13}$$

证明。由于 $\pi(x) = 1/|V|$ 对每个 $x \in V$，由引理 5.2 可得

$$|V|\left(\int_0^\infty p_s(x,\ o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s\right)^2 \sum_{x\in V} \pi(x)(\mathbb{P}_x[T_o \leq \tau])^2 = \sum_{x\in V}\left(\int_0^\infty p_s(x,\ o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s\right)^2. \tag{5.14}$$

此外，根据可逆性，对于每个 $s \geq 0$ 和 $x \in V$，我们有 $p_s(o,\ x) = p_s(x,\ o)$。因此，交换求和与积分的次序，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in V}\left(\int_0^\infty p_s(x,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s\right)^2 &= \sum_{x\in V}\int_0^\infty p_{s_1}(o,x)e^{-s_1/t_2}\mathrm{d}s_1 \int_0^\infty p_{s_2}(x,o)e^{-s_2/t_2}\mathrm{d}s_2 \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s_1+s_2)/t_2}\left(\sum_{x\in V} p_{s_1}(o,x)p_{s_2}(x,o)\right)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s_1+s_2)/t_2}p_{s_1+s_2}(o,o)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\,.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

最后，进行变量替换 $s = s_1 + s_2$ 并交换积分次序，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{x\in V}\left(\int_0^\infty p_s(x,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s\right)^2 &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s/t_2}p_s(o,o)1_{s\geq s_1}\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\\ &= \int_0^\infty s\cdot p_s(o,o)e^{-s/t_2}\mathrm{d}s\,,\end{aligned} \tag{5.16}$$

由此完成证明。 □

5.3 杀死链的谱分解

设 $n = |V|$。将链的转移矩阵记为 P。设 $I - P =$ 的特征值为 $0 = \beta_1 < \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n$： $-Q$，并设 $g_1, \ldots, g_n$ 是相对于 $\mathbb{R}^V$ 上的 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$ 的一组对应的标准正交基。那么对于 $s \geq 0$ 和 $1 \leq i \leq n$，有 $e^{sQ}g_i = e^{-s\beta_i}g_i$。

引理 5.4。回忆 $n = |V|$，并设 $j \geq 0$ 为一个整数。我们有

$$\frac{n}{j!}I_j = t_2^{j+1} + \sum_{i=2}^n(\beta_i + 1/t_2)^{-(j+1)}\,. \tag{5.17}$$

证明。对于 $\theta > 0$，我们有 $\int_0^\infty s^j e^{-s/\theta}\mathrm{d}s = j!\theta^{j+1}$。将此应用于 $\theta = t_2$ 并利用传递性，得到

$$nI_j - j!t_2^{j+1} = \int_0^\infty ns^j\left(p_s(o,o) - \pi(o)\right)e^{-\frac{s}{t_2}}\mathrm{d}s = \int_0^\infty s^j\sum_{x\in V}\left(p_s(x,x) - \pi(x)\right)e^{-\frac{s}{t_2}}\mathrm{d}s\,. \tag{5.18}$$

此外，对于每个 $s \geq 0$，我们有

$$\sum_{x\in V}\left(p_s(x,x) - \pi(x)\right) = \mathrm{Tr}\left(e^{Qs} - I/n\right) = \left(\mathrm{Tr}\,e^{Qs}\right) - 1 = \left(\sum_{i=1}^n e^{-\beta_i s}\right) - 1 = \sum_{i=2}^n e^{-\beta_i s}\,. \tag{5.19}$$

因此，

$$nI_j - j!t_2^{j+1} = \sum_{i=2}^n\int_0^\infty s^j e^{-s\left(\beta_i + \frac{1}{t_2}\right)}\mathrm{d}s = k!\sum_{i=2}^n(\beta_i + 1/t_2)^{-(k+1)}\,, \tag{5.20}$$

证明至此完成。 □

5.4 积分的界

我们在引理 5.3 中看到 $\sum_{x\in V}\pi(x)(\mathbb{P}_x[T_o \leq \tau])^2 = \frac{1}{|V|}\frac{I_1}{I_0^2}$，并在引理 5.4 中以不同方式重写了。现在我们想要找到 I_1 的上界，以及 I_0的下界。

我们先从 I_0开始。

引理 5.5。我们有

$$I_0 \geq \frac{2}{3}\frac{\mathbb{E}_\pi[T_o]}{n}\,. \tag{5.21}$$

证明。回忆 $2/t_2 = 1/\,t_{\mathrm{rel}} = \beta_2 \leq \beta_3 \leq \ldots \leq \beta_n$。由此可知，对于每个 $2 \leq i \leq n$ 我们都有 $\beta_i + 1/t_2 \leq \frac{3}{2}\beta_i$，因此根据引理5.4 我们有

$$nI_0 \geq nI_0 - t_2 \geq \frac{2}{3}\sum_{i=2}^n\frac{1}{\beta_i}\,. \tag{5.22}$$

最后，根据特征时间恒等式（[AF，命题 3。13]）以及传递性，我们有

$$\sum_{i=2}^{n} \beta_i^{-1} = \sum_x \pi(x)\mathbb{E}_\pi[T_x] = \mathbb{E}_\pi[T_o]. \tag{5.23}$$

将其代入（5.22）即可完成证明。 □

L现在来估计 I_1。回顾一下， D 表示 Γ 的直径，而 d 是其度。对于 $\rho > 0$，记
半径为 $\lfloor \rho \rfloor$ 的球中的顶点数为 $V(\rho)$。

引理 5.6。我们有

$$I_1 \le 64\left(\frac{t_{\rm rel}{}^2}{n} + d^2\int_0^{\sqrt{t_{\rm rel}/d}} \frac{s^3 \mathrm{d}s}{V(s)}\right). \tag{5.24}$$

证明。 首先，根据引理 5.4我们有

$$I_1 - \frac{t_2^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(\beta_i + 1/t_2)^{-2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\beta_i^{-2}. \tag{5.25}$$

定义谱测度为

$$\mu := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\beta_i}. \tag{5.26}$$

回忆一下， $\beta_1 = 0$，并且也定义

$$\nu := \mu - \frac{\delta_{\{0\}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\delta_{\beta_i}, \tag{5.27}$$

需要强调的是，它不是概率测度，因为其总质量为 $1 - 1/n$。令 $X \sim \mu$。作变量替换 $r = 1/\sqrt{u}$，得到

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\beta_i^{-2} = \mathbb{E}[X^{-2}\mathbf{1}\{X > 0\}] = \int_0^{\beta_2^{-2}} \mathbb{P}[u \le X^{-2} < \infty]\mathrm{d}u = \int_{\beta_2}^{\infty} \frac{2}{r^3}\mathbb{P}[0 < X \le r]\mathrm{d}r. \tag{5.28}$$

利用 $\mu((0,r]) = \mu([0,r]) - \frac{1}{n} = \nu([0,r])$（对于 $r > 0$），我们得到

$$\int_{\beta_2}^{\infty}\frac{2}{r^3}\mathbb{P}[0 < X \le r]\mathrm{d}r = \int_{\beta_2}^{\infty}\frac{2}{r^3}\mu((0,r])\mathrm{d}r = \int_{\beta_2}^{\infty}\frac{2}{r^3}\nu([0,r])\mathrm{d}r. \tag{5.29}$$

现在，根据 [LOG18，定理 1。7]（其参数 α 设为 $\alpha = 1/2$），对于每个 $r > 0$

$$\nu([0,r]) \le \frac{4}{V(\sqrt{(2dr)^{-1}})}. \tag{5.30}$$

代入该界并使用变量替换 $s = \sqrt{(2dr)^{-1}}$ 可得，回忆 $\beta_2 = 1/t_{\rm rel}$，

$$\begin{aligned}\int_{\beta_2}^{\infty}\frac{2}{r^3}\nu([0,r])\mathrm{d}r &\le \int_0^{(2d\beta_2)^{-1/2}} 2(2ds^2)^3\frac{4}{V(s)}\frac{2}{ds^3}\mathrm{d}s = 64d^2\int_0^{(2d\beta_2)^{-1/2}}\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)} \\ &\le 64d^2\int_0^{\sqrt{t_{\rm rel}/d}}\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

由此我们得出

$$I_1 \le \frac{(2\,t_{\rm rel})^2}{n} + 64d^2\int_0^{\sqrt{t_{\rm rel}/d}}\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)} \le 64\left(\frac{t_{\rm rel}{}^2}{n} + d^2\int_0^{\sqrt{t_{\rm rel}/d}}\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)}\right). \tag{5.32}$$

□

5.5 综合与专门化界

Th得益于我们对 I_0 和 I_1的界，我们现在可以证明关于 th 的一般界 e gro定理中所述图的大小1.4。

定理 *1.4* 的证明。 由（5.7）、引理 5.1（注意 $e^2 \le 8$）以及引理 5.3，可得

$$2\sum_{x\in S}\pi(x)\left(\mathbb{P}_x[T_A \le 2\,t_{\mathrm{rel}}]\right)^2 \le 16|A|^2\frac{I_1}{nI_0^2} = 16|A|^2\frac{nI_1}{(nI_0)^2}. \tag{5.33}$$

结合引理 5.5 和 5.6，我们得到

$$\begin{aligned} 16|A|^2\frac{1}{(nI_0)^2}nI_1 &\le (16|A|^2)\left(\frac{1}{\frac{2}{3}\mathbb{E}_\pi[T_o]}\right)^2 64\left(\frac{{t_{\mathrm{rel}}}^2}{n}+d^2\int_0^{\sqrt{t_{\mathrm{rel}}/d}}\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)}\right)\\ &= C_0|A|^2\left(\frac{t_{\mathrm{rel}}}{\mathbb{E}_\pi[T_o]}\right)^2\left(1+\frac{d^2n}{{t_{\mathrm{rel}}}^2}\int_0^{\sqrt{t_{\mathrm{rel}}/d}}\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)}\right), \end{aligned} \tag{5.34}$$

其中 $C_0 = 16\cdot(3/2)^2\cdot 64 = 2304$。 □

推论 5.7。 存在一个普适常数 C_0，使得以下结论成立。设 $\Gamma=(V,\ E)$ 是一个有限连通顶点传递图。记其度为 d，直径为 D。设$\varnothing \ne A \subsetneq V$是 V的一个子集（其补集 A^c 在 Γ中不一定连通）。我们有

$$2\sum_{x\in S}\pi(x)\left(\mathbb{P}_x[T_A \le 2\,t_{\mathrm{rel}}]\right)^2 \le C_0|A|^2d^2\left(\frac{D^2}{\mathbb{E}_\pi[T_o]}\right)^2\left(1+\frac{n}{D^4}\int_0^D\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)}\right). \tag{5.35}$$

证明。 根据 [LOG18，定理 1。7] 我们有 $\beta_2 \ge \frac{1}{dD^2}$（这里用到了传递性），即 $t_{\mathrm{rel}} \le dD^2$。将其代入定理 1.4 即可得到所需结果。 □

有限顶点传递图的增长最近由 Tessera 和 Tointon 研究清楚了[TT20，命题 6。1]。特别是，他们证明了以下结果。

对于每个整数 $q \ge 1$，存在一个常数 $c(q)$，使得对于任意大小为 $|V| = D^qR$ 的有限（连通）顶点传递图 $\Gamma=(V,\ E)$（其中某个 $R \in [1, D)$，这里 D 是 Γ的直径；对于每个 $1 \le s \le D$，半径为 s 的球的大小 $V(s)$ 满足

$$V(s) \ge \begin{cases} c(q)s^{q+1} & s \le R \\ c(q)Rs^q & s > R \end{cases}, \tag{5.36}$$

并且，若 $q \ge 5$,

$$V(s) \ge c(5)s^5\,. \tag{5.37}$$

利用这些增长界，可以将推论 5.7 专门化，正如我们在定理 1.5 中所述。下面证明这一结果。回顾式（1.9）中 $\beta(\Gamma)$ 的定义。

定理 *1.5* 的证明。 令 $c^*:=\min(\min_{1\le q\le 5}c(q),\ 1$。首先假设 $q \ge 5$。应用（5.5）可得

$$\int_0^D\frac{s^3\mathrm{d}s}{V(s)} \le 1+\int_1^D\frac{s^3\mathrm{d}s}{c^*s^5} = 1+\frac{1}{c^*}\int_1^D\frac{\mathrm{d}s}{s^2} \le \frac{2}{c^*}\,. \tag{5.38}$$

此外，由于 $n \geq D^4$，我们有 $1 + \frac{n}{D^4}\int_0^D s^3 \mathrm{d}V\ s\ () \leq \frac{3}{c^*}\frac{n}{D^4}$，且 $\mathbb{E}_\pi[T_o] = \sum_{i=2}^n \frac{1}{\beta_i} \geq \frac{1}{2}(n-1)$ $\geq \frac{n}{4}$。因此，

$$\left(\frac{D^2}{\mathbb{E}_\pi[T_o]}\right)^2 \left(1 + \frac{n}{D^4}\int_0^D \frac{s^3 \mathrm{d}s}{V(s)}\right) \leq \frac{48/c^*}{n}\,, \tag{5.39}$$

从而完成了 $q \geq 5$情形的证明。现在假设 $1 \leq q \leq 4$。将 (5.36) 中的下界代入推论 5.7，得到

$$\int_0^D \frac{s^3 \mathrm{d}s}{V(s)} \leq 1 + \int_1^R \frac{s^3 \mathrm{d}s}{c^* s^{q+1}} + \int_R^D \frac{s^3 \mathrm{d}s}{c^* R s^q}\,. \tag{5.40}$$

通过逐一分析各个情形，我们得到 $q \in \{1、2、3、4\}$ 的结果。 □

致谢。感谢 Persi Diaconis、Roberto Imbuzeiro Oliveira、Perla Sousi 和 Matt Tointon 提供了有益的讨论。第一、第二作者在剑桥大学期间开展了这项工作，并在此期间获得 EPSRC 资助 EP/L018896/1。本文的第一个版本是在第一作者驻留于加利福尼亚州伯克利的数学科学研究所期间完成的，当时为 2022 年春季学期，研究项目为随机空间的分析与几何，该项目由美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-1928930。N.B. 感谢奥地利科学基金（FWF）项目 10.55776/F1002“离散随机结构：计数与标度极限”和 10.55776/PAT1878824“随机共形场”提供的支持；此前还曾获 FWF 项目 P33083“随机共形几何中的标度极限”的资助。J.H. 的研究获得 NSERC 资助。L. T. 的研究获 FWF 项目 P33083“随机共形几何中的标度极限”资助。

参考文献

[AB92] David J. Aldous 和 Mark Brown. 时间可逆马尔可夫链中稀有事件的不等式。I. 收录于《随机不等式》（华盛顿州西雅图，1991），IMS Lecture Notes Monogr. Ser. 第22卷，第1–16页。Inst. Math. Statist.，加利福尼亚州海沃德，1992年。[AF] David Aldous 和 James A. Fill. 对称图的局部扩张。[Ber16] Nathanaël Berestycki. 马尔可夫链的混合时间：技术与实例，2016年。[BHT22] Nathanaël Berestycki、Jonathan Hermon 和 Lucas Teyssier. 关于覆盖时间涨落的普适性。arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2202.02255，2022年。[DHESC21] Persi Diaconis、Kelsey Houston-Edwards 和 Laurent Saloff-Coste. 有限内一致域上的赌徒破产估计。《Ann. Appl. Probab.》，31(2):865–895，2021年。[DM09] Persi Diaconis 和 Laurent Miclo. 生灭过程达到拟平稳状态所需的时间。《J. Theoret. Probab.》，22(3):558–586，2009年。[DM15] Persi Diaconis 和 Laurent Miclo. 关于收敛到拟平稳状态的定量分析。《Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)》，24(4):973–1016，2015年。[Kei79] Julian Keilson. 马尔可夫链模型——稀有性与指数性，应用数学科学第28卷。Springer-Verlag，纽约—柏林，1979年。

[LOG18] Russell Lyons 和 Shayan Oveis Gharan. 通过谱嵌入得到的随机游走特征值锐界，2018年。[LP17] David A. Levin 和 Yuval Peres. 马尔可夫链与混合时间。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2017年。第二版，内容改编自 [MR2466937], Elizabeth L. Wilmer 参与编写，另附由 James G. Propp 和 David B. Wilson 撰写的“从过去耦合”一章。[TT20] Romain Tessera 和 Matthew Tointon. 顶点传递图中体积增长、等周性与电阻之间的锐利关系。*arXiv* 预印本 https://arxiv.org/abs/2001.01467，2020年。[TT21] Romain Tessera 和 Matthew C. H. Tointon. 多项式增长顶点传递图的有限结构定理。 *Combinatorica*，41(2):263–298，2021年。