arXiv:2601.03865v1 [math.AP] 7 Jan 2026

对数拉普拉斯算子的 Fu˘c´ık 谱

Rakesh Arora[1*]和 Tuhina Mukherjee[2†]，[1] 数学科学系，印度理工学院（IIT-BHU）瓦拉纳西分校，北方邦 221005，印度 [2] 数学系，印度理工学院焦特布尔分校，拉贾斯坦邦 342030，印度

摘要

本文研究与对数拉普拉斯算子相关的 Fu˘c´ık 谱。该谱定义为所有使问题 Σ_L 具有非平凡解 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^2$ 的对 $(\alpha,\ \beta)$ 的集合。

$$\begin{cases} L_\Delta u = \alpha u^+ - \beta u^- & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界区域，其边界为 $C^{1,1}$，$u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$，且 $u = u^+ - u^-$。我们证明，直线 $\lambda_1^L \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R} \times \lambda_1^L$（其中 λ_1^L表示 L_Δ的第一特征值）属于谱 Σ_L，并且在谱中是孤立的。此外，我们证明了 Σ_L 中第一条非平凡曲线的存在性，并分析了其定性性质，包括利普希茨连续性、严格单调性和渐近行为。除此之外，我们还获得了对数拉普拉斯算子的第二特征值的变分刻画，并证明与特征值 $\lambda > \lambda_1^L$ 对应的所有特征函数都变号。最后，我们针对 Fu˘c´ık 谱 Σ_L研究了一个非共振问题，采用变分方法，并仔细克服了由第一特征值 λ_1^L的相反特性所产生的困难。

关键词— 对数拉普拉斯算子、Fu˘c´ık 谱、特征值问题、非共振

数学主题分类： 35S15,35R11, 35R09, 35A15.

1 引言

在本文中，我们研究 对数拉普拉斯算子的 Fu˘c´ık 谱，它定义为所有满足条件的数对 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ ^{2} 对于这些数对， blem

$$\begin{cases} L_\Delta u = \alpha u^+ - \beta u^- & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{$P_{\alpha,\beta}$}$$

存在一个非平凡解 u. 这里， $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u = u^+ - u^-$，Ω 是 $\mathbb{R}^N$的一个有界区域，满足 $\partial\Omega \in C^{1,1}$ 算子 L_Δ 表示对数拉普拉斯算子， *i.e.*, 即傅里叶符号为 $2\ln|\xi|$, 的伪微分算子，它也可以看作分数阶拉普拉斯算子（傅里叶符号为 $|\xi|^{2s}$ 的伪微分算子）的一阶展开。特别地，对于 $u \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ 和 $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(-\Delta)^s u(x) = u(x) + sL_\Delta u(x) + o(s) \quad s \to 0^+ \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^N),\ 1 < p \le \infty. \tag{1.1}$$

回顾一下，对于 $s \in (0,\ 1)$，分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 可以写成一个按主值意义定义的奇异积分算子

$$(-\Delta)^s u(x) = c(N,s)\ \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\ dx,$$

其中 $c(N,\ s) = 2^{2s}\pi^{\frac{-N}{2}} s\frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{\Gamma(1-s)}$是一个归一化常数。类似地，算子 L_Δ 有如下积分表示（见 [5, 定理 1.1]）

$$L_\Delta u(x) = c_N \int_{\mathcal{B}_1(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^N}\ dy - c_N \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{B}_1(x)} \frac{u(y)}{|x-y|^N}\ dy + \rho_N u(x), \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{B}_1(x) \subset \mathbb{R}^N$ 表示以 x 为中心、半径为 1 的欧几里得球，并且

$$c_N := \pi^{\frac{-N}{2}}\Gamma(\frac{N}{2}), \quad \rho_N := 2\ln 2 + \psi(\frac{N}{2}) - \gamma, \quad \gamma := -\Gamma'(1),$$

γ 为欧拉-马歇罗尼常数， $\psi := \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ 为双伽马函数。(1.2) 中的奇异核有时称为 *zero-order*，因为它是超奇异积分的极限情形。这些算子自然地出现在

*R. Arora, *E-mail address:* rakesh.mat@iitbhu.ac.in
†T. Mukherjee, *E-mail address:* tuhina@iitj.ac.in

表现出临界奇异行为的数学模型以及各种应用情境中。对它们的研究形成了丰富的理论框架；数学方面的发展见 [1, 2, 5, 9, 10, 12, 18]，应用方面的内容见 [22, 23, 26]。Foghem [10] 最近引入了研究涉及对数拉普拉斯算子 L_Δ 的狄利克雷问题所需的适当泛函空间。对于 $q \in [1, \infty]$，我们用 $L^q(\Omega)$ 表示赋予范数的通常勒贝格空间

$$\|u\|_q := \left(\int_\Omega |u|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{for } 1 \le q < \infty, \qquad \|u\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u|.$$

我们引入核函数

$$k, j : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad k(z) = \frac{\mathbf{1}_{B_1}(z)}{|z|^N}, \quad j(z) = \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^N \setminus B_1}(z)}{|z|^N}. \tag{1.3}$$

对于问题（$P_{\alpha,\ \beta}$），自然能量空间定义为（见 [5]）

$$\mathbb{H}(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \text{ and } \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^2 k(x-y) \, dx \, dy < \infty \right\}.$$

$\mathbb{H}(\Omega)$ 上相应的内积和范数分别为

$$\mathcal{E}(u, v) := \frac{c_N}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) k(x-y) \, dx \, dy, \qquad \|u\| := \mathcal{E}(u, u)^{1/2}.$$

与算子 L_Δ 相关的二次型为

$$\mathcal{E}_L(u, v) = \mathcal{E}(u, v) - c_N \iint_{\mathbb{R}^{2N}} u(x) v(y) j(x-y) \, dx \, dy + \rho_N \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx. \tag{1.4}$$

由 [6, 定理 2.1] 和 [20, 推论 2.3] 可知，嵌入

$$\mathbb{H}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{is compact.} \tag{1.5}$$

近来，Arora、Giacomoni 和 Vaishnavi [1, 定理 2.2] 建立了从 $\mathbb{H}(\Omega)$ 到 Orlicz 型空间的最优连续嵌入 $L^\varphi(\Omega)$，其中 $\varphi(t) \approx t^2 \log(e + t)$，当 $t \gg 1$，以及到满足 lim 的 Orlicz空间的紧嵌入 $L^\psi(\Omega)_{t \to \infty}{}^{\psi(t)\,\varphi(t)} = 0.$

过去几十年来，对 Fu˘c´ık 谱的研究一直受到非线性分析和谱理论领域的持续关注。Fu˘c´ık 的开创性工作 [11]开启了对涉及非对称跳跃非线性项的非线性特征值问题的研究，并由此引入了 Fu˘c´ık 谱的概念。此后，这一概念成为分析一大类非线性边值问题的基础框架。

在此基础上，Cuesta、de Figueiredo 和 Gossez [7] 将理论推广至 p-拉普拉斯算子，详细研究了非线性背景下 Fu˘c´ık 谱的结构及其定性性质。他们的工作为分岔现象和解的多重性提供了重要见解。关于拉普拉斯算子和 p-拉普拉斯算子的进一步研究，请参阅 [15, 24, 25] 及其中的参考文献。

在非局部算子的背景下，Goyal 和 Sreenadh [14] 研究了与分数阶拉普拉斯算子相关的 Fu˘c´ık 谱，将局部算子的若干经典结果推广到了非局部框架。通过变分方法和拓扑方法，他们证明了 Fu˘c´ık 谱中第一条非平凡曲线的存在性，并分析了其单调性和渐近行为。此前，Sreenadh [27] 研究了 Hardy–Sobolev 算子的 Fu˘c´ık 谱，并引入加权 Sobolev 空间来处理涉及奇异势的非线性特征值问题。

最近，Goel、Goyal 和 Sreenadh [13] 研究了满足非局部法向导数条件的 p-分数阶拉普拉斯算子的 Fu˘c´ık 谱。我们还提及近期的研究 [21], ，该研究探讨了局部-非局部混合算子的 Fu˘c´ık 谱，进一步丰富了相关理论，也凸显了人们对非局部及混合框架日益增长的兴趣。

与 Fu˘c´ık 谱 相关的问题 ($P_{\alpha,\ \beta}$) 自然拓展了对数 ic
拉普拉斯算子。因此，当参数满足 $\alpha = \beta$ 时，问题 ($P_{\alpha,\ \beta}$) 退化为标准特征值问题

$$\begin{cases} L_\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

在 [5] 中, Chen 和 Weth 证明了一个递增且无界的特征值序列的存在性 s

$$\lambda_1^L < \lambda_2^L \le \cdots \le \lambda_k^L \le \cdots, \qquad \lim_{k \to \infty} \lambda_k^L = +\infty.$$

第一特征值 λ_1^L 是单重的，且存在符号恒定的特征函数；然而，与经典拉普拉斯算子和分数阶拉普拉斯算子不同，它可能为负。此外，λ_1^L 具有变分刻画，

$$\lambda_1^L = \inf_{u \in \mathbb{H}(\Omega)} \left\{ \mathcal{E}_L(u, u) : \|u\|_2 = 1 \right\}.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，点 (λ_k^L，λ_k^L) 都属于 Fu˘c´ık 谱 Σ_L。然而，除了这些对角线上的点之外，Σ_L 的几何结构尚未得到探索。据我们所知，与问题 ($k \in \mathbb{N}$,) 相关的 Fu˘c´ık 谱的系统研究

迄今尚未开展，而揭示其结构正是本文的目标。

尽管我们的研究分别受到 [7,14] 中针对局部 p-拉普拉斯算子和非局部分数阶拉普拉斯算子所发展的方法的启发，但算子 L_Δ 本身具有非局部性，再加上其第一特征值 λ_1^L 的性质迥异，因此面临着重大的分析挑战，无法直接推广这些研究中采用的技术。本文的主要挑战与贡献概述如下。

• 首先，我们研究权重在正测度子集上远离 λ_1^L 的加权对数拉普拉斯问题的解的变号性质，见定理 2.2。这些性质对于识别谱中的孤立点以及构造 L_Δ 的 Fu˘c´ık 谱中的非平凡曲线都起着关键作用。作为其应用，在推论 2.3 中，我们还证明了对应于特征值 $\lambda > \lambda_1^L$ 的特征函数会变号，这一结果本身也具有独立的研究价值。

• 接下来，我们证明直线 $\lambda_1^L \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R} \times \lambda_1^L$属于谱 Σ_L，其中 λ_1^L表示 L_Δ的第一特征值。为此，我们引入约束能量泛函 $\tilde{E}_r$ （见第 3 节），并证明其临界点的存在性，这等价于确定谱 Σ_L中的点。第一个临界点 φ_1的存在性通过在适当的约束集上对 $\tilde{E}_r$ 进行全局极小化得到； φ_1是与 λ_1^L相关联的特征函数。这说明垂直线 $\lambda_1^L \times \mathbb{R}$ 属于谱 Σ_L，见命题3.2。第二个临界点 $-\varphi_1$的存在性则由局部极小化论证得出，并由此得到水平线 $\mathbb{R}\times\lambda_1^L$，见命题 3.5。最后，我们通过验证局部极小值 $-\varphi_1$邻域内约束泛函的 Palais–Smale 条件和山路几何，证明第三个临界点的存在性。应用山路定理，在定理 3.10 中，我们得到如下形式的谱曲线：$(r + c(r)\ \ c(r))$ 和 $(c(r)\ \ r + c(r))$，其中 $r \geq 0$，而 $c(r)$表示约束能量泛函 $\tilde{E}_r$对应的临界值。

• 在定理 4.2 中，我们证明上述得到的谱直线 $\lambda_1^L \times \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R} \times \lambda_1^L$在 Σ_L中是孤立的。在研究局部 p-拉普拉斯算子和非局部分数阶拉普拉斯算子的文献 [7,14] 中，这一性质是通过底层能量空间连续嵌入到满足 $r > 2$条件的勒贝格空间 $L^r(\Omega)$ 来建立的。然而，对于与算子 L_Δ相关的能量空间 $\mathbb{H}(\Omega)$，这类嵌入并不存在。为克服这一障碍，我们采用 Orlicz 空间理论中的分析技巧，并充分利用文献 [1, 定理 2.2]中近期建立的、嵌入到 Orlicz 型空间的最优嵌入结果。

• 在定理 4.5 中，我们证明点 $(r + c(r)\ \ c(r))$ 是 Σ_L 中位于经过 $(r,0)$ 且平行于对角线的直线上的第一个非平凡元素。证明的关键在于构造一条连续路径，将约束能量泛函 $\tilde{E}_r$的第一和第二个临界点 φ_1 及 $-\varphi_1$连接起来，并使该路径始终严格低于临界水平 $c(r)$。在构造这条路径时，算子的非局部性与相关二次型中的变号项相结合，产生了若干额外的尾部贡献，而这些贡献在经典的局部和分数阶情形中并不存在。控制这些项需要细致的分析，也是证明中的一大技术难点。作为定理 4.5 的进一步推论，我们得到了第二特征值 λ_2^L的变分刻画，这在现有文献中尚属首次。

• 接下来，我们研究第一条非平凡谱曲线的单调性、正则性和渐近行为；参见命题 5.1、5.5 和 5.6。在有关局部 p-拉普拉斯算子和非局部分数阶拉普拉斯算子的文献 [7,14] 中，这些性质是利用基于主特征值正性的结果建立的。相比之下，对于算子 L_Δ，第一特征值可能变号，这带来了实质性的分析困难。通过利用加权对数拉普拉斯问题的解的变号性质，可以克服这一障碍；该问题的权在正测度子集上与 λ_1^L 保持有界距离，相关结果已在定理 2.2 中建立，并见引理 5.3 中的相应推论。结合上述已建立的性质，图 1 展示了与 L_Δ 相关的 Fu˘c´ık 谱中的对角线上的点和第一条非平凡曲线。

• 最后，我们研究一个涉及对数拉普拉斯算子的非共振问题，其中渐近线性项位于 $(\lambda_1^L, \lambda_1^L)$ 与第一条非平凡谱曲线之间。通过运用变分方法并利用定理 2.2 的推论，我们证明了非平凡解的存在性。

本文结构如下： 在第 2 节中，我们推导出权重有界且在正测度子集上与 λ_1 保持距离的加权对数拉普拉斯问题之解的变号性质。在第 3 节中，我们引入参数化约束泛函 $\tilde{E}_r$, $r \in \mathbb{R}$，其临界点刻画了 Fu˘c´ık 谱 Σ_L。在此框架下，我们证明直线 $\lambda_1^L \times \mathbb{R}$和 $\mathbb{R} \times \lambda_1^L$（其中 λ_1^L是 L_Δ的第一特征值）属于 Σ_L。通过应用山路定理，我们进一步得到形如 $(r + c(r)\ \ c(r))$ 和 $(c(r)\ \ r+c(r))$ 的谱曲线，其中 $r \geq 0$。第 4 节证明上述直线在 Σ_L 中是孤立的，所得曲线是非平凡的，并给出第二特征值 λ_2^L 的变分刻画。在第 5 节中，我们建立该曲线的严格单调性、利普希茨连续性和渐近行为。最后，在第 6 节中，我们研究关于 Σ_L 的非共振问题，并证明非平凡解的存在性。

2 变号性质

我们首先证明能量项 $\mathcal{E}_L$ 的测地凸性，以及在正测度子集上、权重有界且远离 λ_1 时，加权对数拉普拉斯问题的解所具有的变号性质

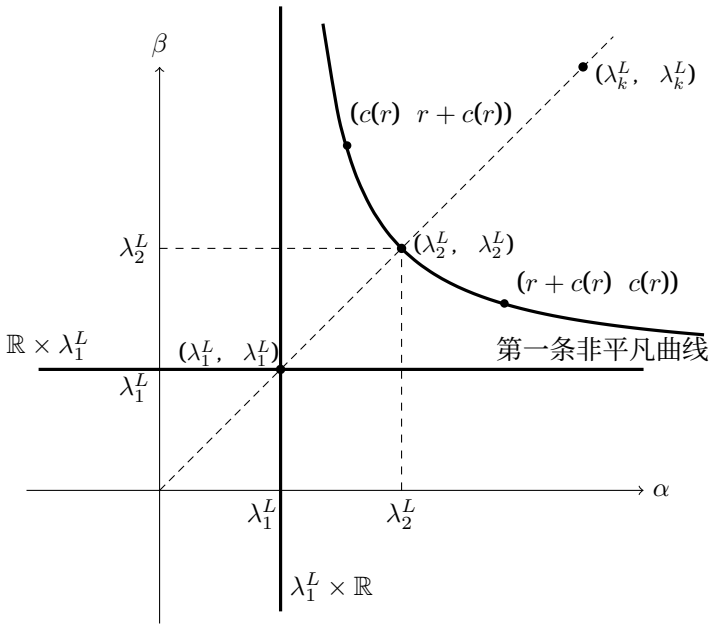

图 1: Fu˘c´ık 谱的结构 Σ_L （粗线、非平凡曲线和对角点 ts)

作为应用，我们证明对应于特征值 $\lambda > \lambda_1$ 的特征函数会变号。

引理 2.1. *Let $N \geq 1$ and $W:\ \mathbb{H}(\Omega) \to \mathbb{R}$ be the functional defined as*

$$W(u) := \mathcal{E}_L(u,u). \tag{2.1}$$

For functions $u, v \in \mathbb{H}(\Omega)$ consider the function σ_t defined by

$$\sigma_t(x) := \left(tu^2 + (1-t)v^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{for all } t \in [0,1].$$

Then,

$$W(\sigma_t) \leq tW(u) + (1-t)W(v).$$

Proof. 设 $u \in \mathbb{H}(\Omega)$。 根据 [5, 命题 3.2], , 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L(u,u) &= \frac{c_N}{2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^N}\,dx\,dy + \int_\Omega \left(h_\Omega(x)+\rho_N\right)u^2(x)\,dx \\ &:= I_1(u) + I_2(u),\end{aligned}$$

其中

$$h_\Omega(x) = c_N\left(\int_{B_1(x)\setminus\Omega}\frac{1}{|x-y|^N}\,dy - \int_{\Omega\setminus B_1(x)}\frac{1}{|x-y|^N}\,dy\right).$$

注意到

$$\sigma_t \equiv \|(t^{\frac{1}{2}}u, (1-t)^{\frac{1}{2}}v)\|_{\ell^2}$$

其中 $\|\cdot\|_{\ell^2}$ 表示 $\mathbb{R}^2$中的 ℓ^2-范数。现在，应用以下三角不等式

$$|\|\xi\|_{\ell^2} - \|\eta\|_{\ell^2}| \leq \|\xi-\eta\|_{\ell^2},$$

其中 $\xi = (t^{\frac{1}{2}}u(y),\ (1-t)^{\frac{1}{2}}v(y))$ 和 $\eta = (t^{\frac{1}{2}}u(x),\ (1-t)^{\frac{1}{2}}v(x))$，可得

$$(\sigma_t(x)-\sigma_t(y))^2 \leq t(u(x)-u(y))^2 + (1-t)(v(x)-v(y))^2, \quad \text{for any } x,y \in \mathbb{R}^N.$$

将上述不等式乘以分数阶核 $\frac{1}{|x-y|^N}$，并在 $\Omega\times\Omega$ 上积分，可得

$$I_1(\sigma_t) \leq tI_1(u) + (1-t)I_2(v). \tag{2.2}$$

此外，容易看出

$$I_2(\sigma_t) = \int_\Omega \left(h_\Omega(x)+\rho_N\right)\left(tu^2+(1-t)v^2\right)dx = tI_2(u) + (1-t)I_2(v). \tag{2.3}$$

最后，结合 (2.3) 和 (2.2)，即可得到所需的断言。 □

定理 2.2. *Let $a \in L^\infty(\Omega)$ such that $a(x) \geq \lambda_1^L$ for a.e. in Ω and*

$$|\{x \in \Omega : a(x) > \lambda_1^L\}| > 0.$$

Let v be a non-trivial solution of

$$L_\Delta v = a(x)v \text{ in } \Omega, \quad \text{and} \quad v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \tag{2.4}$$

Then, v is a sign-changing function in Ω。

Proof. 我们用反证法。假设 $v \in \mathbb{H}(\Omega)$ 是问题 (2.4) 的非负弱解（如果 $v \leq 0$ 在 Ω 中，我们可以将 v 替换为 $-v$，重复证明）。由 (1.4)，我们有

$$\mathcal{E}_L(v,\phi) = \mathcal{E}(v,\phi) - \int_\Omega (a(x) - \rho_N)v\phi \, dx = \int_\Omega (j * v)\phi \, dx \geq 0, \quad \text{for all } \phi \in \mathbb{H}(\Omega), \phi \geq 0.$$

因此， v是方程 $Iv - (a(x) - \rho_N)v = 0$ 在 Ω 中的一个非平凡非负弱上解，其意义见 [19],，其中 I是与核 k相关联的积分算子，该核在 (1.3) 中定义。因此，应用 [19, 定理 1.1] 可得 $v > 0$ 在 Ω 中。 设 $u \in \mathbb{H}(\Omega)$ 是极小化问题的一个解

$$\lambda_{1,L} := \min\{\mathcal{E}_L(u,u) : u \in \mathbb{H}(\Omega), \|u\|_2 = 1\}.$$

利用 [5, 定理 1.4 和 1.11] 以及 [8, 定理 1.9]， $u > 0$ 在 Ω 中，且 u， $v \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$。此外，由 [18, 定理 1.4 和推论 5.3], 存在 $M \in (0,1)$，使得

$$M^{-1} \geq \frac{u(x)}{v(x)} \geq M, \quad \text{for all } x \in \Omega. \tag{2.5}$$

记

$$v_\varepsilon := \begin{cases} v + \varepsilon & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \qquad u_\varepsilon := \begin{cases} u + \varepsilon & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

and

$$\sigma_t^\varepsilon(x) = (tu_\varepsilon^2 + (1-t)v_\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

首先，我们证明

$$w_\varepsilon := \frac{u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2}{v_\varepsilon} \in \mathbb{H}(\Omega), \quad \text{for all } \varepsilon \in (0,1).$$

容易看出 $w_\varepsilon = 0$ 属于 $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$。 对于 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$\begin{aligned}
|w_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(y)| &\leq \left|\frac{u_\varepsilon^2(x)}{v_\varepsilon(x)} - \frac{u_\varepsilon^2(y)}{v_\varepsilon(y)}\right| + |v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)| \\
&\leq \left|\frac{u_\varepsilon^2(x)}{v_\varepsilon(x)} - \frac{u_\varepsilon^2(y)}{v_\varepsilon(x)}\right| + \left|\frac{u_\varepsilon^2(y)}{v_\varepsilon(x)} - \frac{u_\varepsilon^2(y)}{v_\varepsilon(y)}\right| + |v(x) - v(y)| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon^2(x) - u_\varepsilon^2(y)| + \frac{u_\varepsilon^2(y)}{v_\varepsilon(x)v_\varepsilon(y)}|v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)| + |v(x) - v(y)| \\
&\leq \frac{2(\|u\|_\infty + \varepsilon)}{\varepsilon}|u(x) - u(y)| + \left(1 + \frac{(\|u\|_\infty + \varepsilon)^2}{\varepsilon^2}\right)|v(x) - v(y)| \\
&\leq C_1(\varepsilon, \|u\|_\infty)|u(x) - u(y)| + C_2(\varepsilon, \|u\|_\infty)|v(x) - v(y)|
\end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{E}(w_\varepsilon, w_\varepsilon) < +\infty$. 因此断言得证。此外，利用 u， $v \in L^\infty(\Omega)$ 和 (2.5)，我们得到 $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中一致有界。 现在，由引理 2.1， $t \mapsto \sigma_t^\varepsilon$ 是 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中的一条函数曲线，泛函 W 沿该曲线为凸。这给出

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_L(\sigma_t^\varepsilon, \sigma_t^\varepsilon) - \mathcal{E}_L(v_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq t\left(\mathcal{E}_L(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \mathcal{E}_L(v_\varepsilon, v_\varepsilon)\right) \\
&= t\left(\mathcal{E}_L(u,u) - \mathcal{E}_L(v,v)\right) - tc_N \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \left(u_\varepsilon(x)u_\varepsilon(y) - u(x)u(y)\right) j(x-y) \, dx \, dy \\
&\quad + tc_N \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \left(v_\varepsilon(x)v_\varepsilon(y) - v(x)v(y)\right) j(x-y) \, dx \, dy \\
&\quad + t\rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (u_\varepsilon^2 - u^2) \, dx - t\rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon^2 - v^2) \, dx \\
&= t\left(\lambda_{1,L}\|u\|_2^2 - \int_\Omega a(x)v^2 \, dx\right) - tc_N \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \left(u_\varepsilon(x)u_\varepsilon(y) - u(x)u(y)\right) j(x-y) \, dx \, dy \\
&\quad + tc_N \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \left(v_\varepsilon(x)v_\varepsilon(y) - v(x)v(y)\right) j(x-y) \, dx \, dy \\
&\quad + t\rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (u_\varepsilon^2 - u^2) \, dx - t\rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon^2 - v^2) \, dx
\end{aligned} \tag{2.6}$$

由引理 2.1，由 $\Phi(t) := W(\sigma_t)$ 定义的函数 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是凸的。因此，利用 v 满足 (2.4) 这一事实，并取 w_ε 作为测试函数，我们得到如下估计

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_L(\sigma_t^\varepsilon, \sigma_t^\varepsilon) - \mathcal{E}_L(v_\varepsilon, v_\varepsilon) = \Phi(t) - \Phi(0) \geq t\Phi'(0) &= t\mathcal{E}_L\left(v_\varepsilon, \frac{u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2}{v_\varepsilon}\right) = t\mathcal{E}_L\left(v_\varepsilon, w_\varepsilon\right) \\
&= t\mathcal{E}_L\left(v, w_\varepsilon\right) - tc_N \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon(x) - v(x))w_\varepsilon(y) j(x-y)\ dx\ dy \\
&\quad + t\rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon(x) - v(x))w_\varepsilon(x)\ dx \\
&= t\int_\Omega a(x) v w_\varepsilon\ dx - tc_N \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon(x) - v(x))w_\varepsilon(y) j(x-y)\ dx\ dy \\
&\quad + t\rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon(x) - v(x))w_\varepsilon(x)\ dx.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

结合 (2.6) 和 (2.7)，我们得到

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,L}\|u\|_2^2 - \int_\Omega a(x)v^2\ dx \geq \int_\Omega a(x) v w_\varepsilon\ dx &- c_N \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon(x) - v(x))w_\varepsilon(y) j(x-y)\ dx\ dy \\
&+ \rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon(x) - v(x))w_\varepsilon(x)\ dx \\
&+ c_N \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \left(u_\varepsilon(x)u_\varepsilon(y) - u(x)u(y)\right) j(x-y)\ dx\ dy \\
&- c_N \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \left(v_\varepsilon(x)v_\varepsilon(y) - v(x)v(y)\right) j(x-y)\ dx\ dy \\
&- \rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (u_\varepsilon^2 - u^2)\ dx + \rho_N \int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon^2 - v^2)\ dx = \lambda I_0 + \sum_{i=1}^4 I_i.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

由于 $vw_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ 且 $vw_\varepsilon \to u^2 - v^2$ 在 Ω 中几乎处处成立，应用勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$I_0 \to \int_\Omega (u^2 - v^2)\ dx = \|u\|_2^2 - \|v\|_2^2 = 0.$$

根据 (1.3) 中核 j 的定义，我们有

$$|I_1| + |I_2| \leq (c_N|\Omega| + \rho_N)\,\varepsilon\|w_\varepsilon\|_1 \to \varepsilon \to 0.$$

此外，由于 $u_\varepsilon \to u$、$v_\varepsilon \to v$ 属于 $L^2(\Omega)$，且在 Ω 中几乎处处成立，并且 $\operatorname{supp}(u_\varepsilon)$，$\operatorname{supp}(u) \subseteq \Omega$，

$$I_3, I_4, I_5, I_6 \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

将上述收敛估计用于 (2.8)，我们得到

$$\int_\Omega (\lambda_1^L - a(x))u^2\ dx \geq \lambda_{1,L}\|u\|_2^2 - \int_\Omega a(x)v^2\ dx \geq \int_\Omega a(x)(u^2 - v^2)\ dx \Longrightarrow \int_\Omega (\lambda_1^L - a(x))u^2\ dx \geq 0,$$

这是不可能的。这与我们的假设 $v \geq 0$ 属于 Ω. 矛盾。因此，方程 (2.4) 的非平凡解 v 在 Ω 中变号。

□

接下来，作为上述结果的一个应用，我们证明对应于特征值 $\lambda > \lambda_1^L$. 的特征函数的变号性质

推论 2.3. *Let $v \geq 0$ be the weak solution of the problem*

$$L_\Delta v = \lambda v \text{ in } \Omega, \quad \text{and} \quad v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \tag{2.9}$$

Then, $\lambda = \lambda_1^L$ where

$$\lambda_1^L := \min\{\mathcal{E}_L(u,u) : u \in \mathbb{H}(\Omega), \|u\|_2 = 1\}.$$

In other words, if u is any weak solution of (2.9) *with $\lambda > \lambda_1^L$, then u is a sign-changing function .*

Proof. 证明可通过在定理 2.2 中取 $a(x) \equiv \lambda$ 得出。 □

3 曲线谱的构造

本节致力于构造 L_Δ 的谱 Σ_L 中的一条非平凡曲线。为此，我们固定 $r \in \mathbb{R}$ 并定义

$$E_r(u) = \mathcal{E}_L(u,u) - r\int_\Omega (u^+)^2\,dx, \quad u \in \mathbb{H}(\Omega).$$

考虑集合

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{H}(\Omega) :\ I(u) = \int_\Omega u^2\,dx = 1\}$$

并定义 $\tilde{E}_r$ 为限制在 $\mathcal{P}$ 上的 E_r。由于 E_r 是 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中的 C^1 泛函，根据拉格朗日乘子法，我们称 $u \in \mathcal{P}$ 为 $\tilde{E}_r$ 的临界点，当且仅当存在一个 $t \in \mathbb{R}$，使得 $E_r'(u) = tI'(u)$ *i.e.*

$$\mathcal{E}_L(u,v) - r\int_\Omega u^+ v\,dx = t\int_\Omega uv\,dx, \quad \text{for all } v \in \mathbb{H}(\Omega).$$

化简后，这意味着 $u \in \mathcal{P}$ 在弱意义下满足 $(P_{r+t,t})$ *i.e.*

$$\mathcal{E}_L(u,v) = (r+t)\int_\Omega u^+ v\,dx - t\int_\Omega u^- v\,dx, \quad \text{for all } v \in \mathbb{H}(\Omega) \quad \text{and} \quad (r+t,t) \in \Sigma_L. \tag{3.1}$$

在 (3.1) 中取 $u = v$，容易看出拉格朗日乘子 t 等于相应的临界值 $\tilde{E}_r(u)$。因此得到以下结果：

引理 3.1 *For $r \in \mathbb{R}$ $r+t$ t $\in \Sigma_L$ if and only if there exists a $u \in \mathcal{P}$ which is a critical point of E_r satisfying . . . , (,) ()*
$\tilde{E}_r$ u $= t$.

接下来，为了确定 Σ_L L_Δ 的谱中的点，根据引理 3.1，我们关注约束泛函 $\tilde{E}_r$ 的临界点。第一个临界点来自对约束泛函 E_r 的全局极小化，因为对于任意 $u \in \mathcal{P}$，我们有

$$\tilde{E}_r(u) \geq \lambda_1^L \|u\|_2^2 - r\|u^+\|_2^2 \geq \lambda_1^L - r.$$

其中，φ_1 表示对应于满足 $\|\varphi_1\|_2 = 1$ *i.e.* $\varphi_1 \in \mathcal{P}$ 的第一特征值 λ_1^L 的 L_Δ 的第一特征函数。从现在起，我们假设 $r \geq 0$；这并不构成限制，因为 Σ_L 关于 (α,β) 平面上的对角线对称。以下结果讨论了 $\tilde{E}_r$ 的第一个临界点的存在性。

命题3.2。 *φ_1 is the first critical point of E_r such that*
(i) φ_1 is a global minimum of $\tilde{E}_r$ and
(ii) $\tilde{E}_r(\varphi_1) = \lambda_1^L - r$.
Thus $(\lambda_1^L,\ \lambda_1^L - r) \in \Sigma_L$ lying on the vertical line through $(\lambda_1^L,\ \lambda_1^L)$。

Proof. 显然，

$$\tilde{E}_r(\varphi_1) = E_r(\varphi_1) = \mathcal{E}_L(\varphi_1,\varphi_1) - r = \lambda_1^L - r.$$

我们回顾一下，$\lambda_1^L =$ 下确界$_{u\in\mathcal{P}}\,\mathcal{E}_L(u,\ u)$，由此进一步得到

$$\tilde{E}_r(u) = \mathcal{E}_L(u,u) - r\int_\Omega (u^+)^2\,dx \geq \lambda_1^L - r = \tilde{E}_r(\varphi_1) \quad \text{for any } u \in \mathcal{P},$$

因为 $\int_\Omega (u^+)^2\,dx \leq \int_\Omega |u|^2\,dx = 1$。利用引理 3.1，证明完成。 □

接下来，我们证明第二个临界点的存在性，该临界点是约束泛函 $\tilde{E}_r$ 的严格局部极小值。

引理 3.3。 *For any $u \in \mathbb{H}(\Omega)$,*

$$\mathcal{E}_L(u,u) \geq \mathcal{E}_L(u^+,u^+) + \mathcal{E}_L(u^-,u^-).$$

Proof. 注意，我们有

$$\begin{aligned}(u(x)-u(y))^2 &= ((u^+-u^-)(x) - (u^+-u^-)(y))^2 = ((u^+(x)-u^+(y)) - (u^-(x)-u^-(y)))^2\\ &= (u^+(x)-u^+(y))^2 + (u^-(x)-u^-(y))^2 - 2(u^+(x)-u^+(y))(u^-(x)-u^-(y))\\ &= (u^+(x)-u^+(y))^2 + (u^-(x)-u^-(y))^2 + 2u^+(x)u^-(y) + 2u^-(x)u^+(y))\\ &\geq (u^+(x)-u^+(y))^2 + (u^-(x)-u^-(y))^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}u(x)u(y) &= (u^+-u^-)(x)(u^+-u^-)(y)\\ &= u^+(x)u^+(y) + u^-(x)u^-(y) - u^-(x)u^+(y) - u^-(y)u^+(x) \leq u^+(x)u^+(y) + u^-(x)u^-(y).\end{aligned}$$

最后，将上述不等式关系代入 $\mathcal{E}_L(u,\ u)$ 的定义中，即可得到所需的断言。 □

引理 3.4. *Let* $0 \not\equiv v_k \in \mathbb{H}$（Ω） *satisfy* $v_k \geq 0$ *a.e. in* Ω *and* $|v_k > 0| \to 0$ *for* $k \in \mathbb{N}$. *Then,*

$$\frac{\mathcal{E}_L(v_k, v_k)}{\|v_k\|_2^2} \to +\infty \quad as \quad k \to \infty.$$

Proof. 记 $w_k := \frac{v_k}{\|v_k\|_2^2}$ 并反设 $\{\mathcal{E}_L(w_k, w_k)\}$ 有一个有界子序列。现在，根据 $\mathcal{E}_L(\cdot,\cdot)$ [17, 的定义、引理 3.4] 和 (1.5)，存在一个 $w \in \mathbb{H}$(Ω)，并且对一个更进一步的子序列，我们有

$$w_k \rightharpoonup w \text{ in } \mathbb{H}(\Omega) \quad \text{and} \quad w_k \to w \text{ in } L^2(\Omega).$$

由于 $w_k \geq 0$，所以 $w \geq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，且 $\int_\Omega w^2 = 1$。因此，对某个 $\epsilon > 0$， $\sigma := |w > \epsilon| > 0$ ，这进一步说明

$$|w_k > \frac{\epsilon}{2}| > \frac{\sigma}{2}, \quad \text{for } k \text{ sufficiently large.}$$

因此，当 k充分大时，

$$|v_k > 0| \geq |v_k > \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega v_k^2| > \frac{\sigma}{2}$$

这与 $|v_k > 0| \to 0$矛盾。 □

˜**命题 3.5**。 $-\varphi_1$ *is the second critical point of* E_r *such that*

(i) φ_1 *is a strict local minimum of* $\tilde{E}_r$ *and*

(ii) $\tilde{E}_r(-\varphi_1) = \lambda_1^L$.

Thus, $(\lambda_1^L + r, \ \lambda_1^L) \in \Sigma_L$ *lying on the horizontal line through* $(\lambda_1^L, \ \lambda_1^L)$。

Proof. 容易验证， $\tilde{E}_r(-\varphi_1) = \lambda_1^L$. 为证明 *(i)*，反过来，假设存在一个 $\{u_k\} \subset \mathcal{P}$ 使得$u_k \not\equiv -\varphi_1$ 对所有 k, $\tilde{E}_r(u_k) \leq \lambda_1^L$ 且

$$u_k \to -\varphi_1 \text{ in } \mathcal{H}(\Omega). \tag{3.2}$$

断言： u_k 在充分大的 k时变号。
由于 (3.2) 且 $\varphi_1 > 0$ 在 Ω 中，当 k 足够大时， u_k 必定在某个 $x \in$Ω 中为负。如果 $u_k \leq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，则

$$\tilde{E}_r(u_k) = \mathcal{E}_L(u_k, u_k) - r \int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx = \mathcal{E}_L(u_k, u_k) > \lambda_1^L,$$

因为 $u_k \not\equiv \pm\varphi_1$。这与 $\tilde{E}_r(u_k) \leq \lambda_1^L$矛盾，因此得出该断言。接下来，我们定义

$$t_k := \frac{\mathcal{E}_L(u_k^+, u_k^+)}{\int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx}$$

因此，利用引理 3.3 可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r(u_k) &\geq \mathcal{E}_L(u_k^+, u_k^+) + \mathcal{E}_L(u_k^-, u_k^-) - r \int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx = (t_k - r) \int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx + \mathcal{E}_L(u_k^-, u_k^-) \\ &\geq (t_k - r) \int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx + \lambda_1^L \int_\Omega (u_k^-)^2 \, dx.\end{aligned}$$

结合这一点与

$$\tilde{E}_r(u_k) \leq \lambda_1^L = \lambda_1^L \int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx + \lambda_1^L \int_\Omega (u_k^-)^2 \, dx,$$

我们得到

$$t_k - r \leq \lambda_1^L, \text{ since } \int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx > 0.$$

但 (3.2) 表明 $|u_k > 0| \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时，因此有 $t_k \to \infty$，这是引理 3.4 的结果。这与 $t_k - r \leq \lambda_1^L$矛盾，从而完成证明。
□

注 3.6。 *When* $r = 0$, *the two critical values* $\tilde{E}_r(\varphi_1)$ *and* $\tilde{E}_r(-\varphi_1)$ *coincides as well as the critical points in* Σ_L.

现在，我们旨在利用山路定理的一个版本来获得第三个临界点，参见 [7, 命题 2.5]。为此，我们推导 (*P.S.*) 条件以及泛函 E_r 在 $\mathcal{P}$. 上的几何结构。我们将 E_r 在 $\mathcal{P}$ 上的限制 E_r 在 $u \in \mathcal{P}$ 处的导数范数˜定义为

$$\|\tilde{E}_r'(u)\|_* = \min\{\|E_r'(u) - tI'(u)\|_{\mathbb{H}^*(\Omega)} : t \in \mathbb{R}\} \tag{3.3}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^*(\Omega)}$ 表示对偶空间 $\mathbb{H}$(Ω) 上的范数。

引理 **3 7** *E_r satisfies the* u_k *is bounded and ..* (*P.S.*)
$\|\tilde{E}_r' \ u_k \ \|_* \to 0$ *u_k admits a convergent subsequence.*
condition on $\mathcal{P}$ i.e. for any sequence $u_k \in \mathcal{P}$ such that $E_r()$ (),

Proof. 设 $\{u_k\} \subset \mathcal{P}$ 和 $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ 满足存在 $K > 0$ 使得

$$|E_r(u_k)| = \left| \mathcal{E}_L(u_k, u_k) - r \int_\Omega (u_k^+)^2 \, dx \right| \le K \tag{3.4}$$

and

$$\left| \mathcal{E}_L(u_k, v) - r \int_\Omega u_k^+ v \, dx - t_k \int_\Omega u_k v \, dx \right| \le \epsilon_k \|v\|, \quad \text{for all } v \in \mathbb{H}(\Omega), \tag{3.5}$$

其中 $\epsilon_k \to 0$。由于 $u_k \in \mathcal{P}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$, [17, 引理 3.4] 以及（3.4）表明，$\{u_k\}$ 在 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中有界。因此，取一个子序列（仍记为原记号），并利用（1.5），存在一个 $u \in \mathbb{H}(\Omega)$，使得 $u_k \to u$ 在 Ω 中几乎处处成立，并且

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathbb{H}(\Omega) \quad \text{and} \quad u_k \to u \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{3.6}$$

将 $v = u_k$ 代入（3.5），容易得到 $\{t_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界。然后将 $v = u_k - u$ 代入（3.5），得到

$$\mathcal{E}_L(u_k, u_k - u) = r \int_\Omega u_k^+ (u_k - u) \, dx + t_k \int_\Omega u_k (u_k - u) \, dx + O(\epsilon_k)$$

因此，由（3.6）和 $\{t_k\}$ 的有界性，我们得出

$$\lim_{k \to \infty} \mathcal{E}_L(u_k, u_k - u) = 0.$$

最后，利用算子 L_Δ 的 (S)性质（参见，[3, 引理 3.3]），我们得到 $u_k \to u$ 属于 $\mathbb{H}(\Omega)$，从而证明完毕。

□

下一个引理描述了约束泛函 $\tilde{E}_r$ 在局部极小值 $-\varphi_1$ 附近的几何结构。

引理 3.8. *Let $\epsilon_0 > 0$ be such that*

$$\tilde{E}_r(u) > \tilde{E}_r(-\varphi_1) \quad \textit{for all } u \in B_{\epsilon_0}(-\varphi_1) \cap \mathcal{P} \textit{ with } u \neq -\varphi_1 \tag{3.7}$$

where $B_{\epsilon_0}(-\varphi_1)$ denotes the ball in $\mathbb{H}(\Omega)$ of radius ε_0 centered at $-\varphi_1$. Then, for any $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$,

$$\inf\{\tilde{E}_r(u) : \ u \in \mathcal{P}, \ \|u - (-\varphi_1)\| = \epsilon\} > \tilde{E}_r(-\varphi_1). \tag{3.8}$$

Proof. 相反，假设存在一个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ $-\varphi_1 = (,)$，使得 $\{u_k\} \subset \mathcal{P}$ $\|u_k - -\varphi_1\| = \epsilon$ 上述下确界等于 $\tilde{E}_r(\lambda_1^L)$。这意味着存在一个满足 $(\,)$ 的序列，并且

$$\tilde{E}_r(u_k) \le \lambda_1^L + \frac{1}{2k^2}. \tag{3.9}$$

现在我们选择一个 $\delta > 0$ 使得 $0 < \epsilon - \delta < \epsilon + \delta < \epsilon_0$，并定义集合

$$M_\delta = \{u \in \mathcal{P} : \ \epsilon - \delta \le \|u - (-\varphi_1)\| \le \epsilon + \delta\}.$$

由于 ϵ_0 的选择以及我们的反证假设，我们很容易得到 $\inf\{\tilde{E}_r(u): \ u \in M_\delta\} = \lambda_1^L$。现在，对于每个 k，我们将˜Ekeland变分原理应用于 E_r 上的 $\mathcal{P}$，从而得到存在满足条件的 $v_k \in M_\delta$

$$\tilde{E}_r(v_k) \le \tilde{E}_r(u_k), \quad \|u_k - v_k\| \le \frac{1}{k} \tag{3.10}$$

$$\tilde{E}_r(v_k) \le \tilde{E}_r(u) + \frac{1}{k}\|u - v_k\|, \quad \text{for all } u \in M_\delta. \tag{3.11}$$

断言： $\{v_k\}$ 是 $\mathcal{P}$上的 $\tilde{E}_r$ 的（*P.S.*）序列。
只需证明此断言，因为由引理 3.7 可立即得到，对于某个子序列，$v_k \to v$ 在 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中强收敛于某个 $v \in \mathbb{H}(\Omega)$。此外，由于紧嵌入，$v \in \mathcal{P}$，再结合 (3.10) 以及 $\|u_k - (-\varphi_1)\| = \epsilon$，我们得到

$$\|v - (-\varphi_1)\| = \epsilon \text{ and } \tilde{E}_r(v) = \lambda_1^L$$

这与 (3.7) 矛盾。

由 (3.9) 和 (3.10) 易知 $\tilde{E}_r(v_k)$ 有界。接下来，为证明所需的断言，我们需要证明 $\|\tilde{E}_r(v_k)\|_* \to 0$。为此，固定 $k > \frac{1}{\delta}$，并选取与 $\mathcal{P}$ 在 v_k 处相切的 $w \in \mathbb{H}(\Omega)$，使其满足

$$\int_\Omega v_k w \, dx = 0.$$

现在，对每个 $t \in \mathbb{R}$，我们定义

$$f_t = \frac{v_k + tw}{\sigma(t)} \quad \text{and} \quad \sigma(t) = \|v_k + tw\|_2$$

因此，当 $|t|$ 足够小时，我们得到 $f_t \in M_\delta$；再利用 w 在 v_k 处与 $\mathcal{P}$ 相切这一事实，可推出

$$\sigma(t) \to 1, \quad \frac{1 - \sigma(t)}{t} \to 0 \quad \text{and} \quad \frac{1 - \sigma(t)^2}{t} \quad \text{as } t \to 0.$$

在 (3.11) 中取 $u = f_t$，并利用上述极限，我们得到

$$\begin{aligned}|\langle \tilde{E}_r'(v_k), w\rangle| &= \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{E}_r(v_k) - \tilde{E}_r(v_k + tw)}{t} \\ &\le \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{k}\frac{1}{\sigma(t)} \left\| v_k \frac{(1-\sigma(t))}{t} + w \right\| + \left(\frac{1-\sigma(t)^2}{t} \right) \frac{\tilde{E}_r(v_k + tw)}{\sigma(t)^2} \right) \\ &\le \frac{1}{k}\|w\| \end{aligned} \tag{3.12}$$

对所有满足 w 在 v_k. 处与 $\mathcal{P}$ 相切的 $w \in \mathbb{H}(\Omega)$，现在，若 w 在 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中任意取定，我们选择满足 $w - \theta_k v_k$ 在 v_k *i.e.* $\theta_k = \int$ 处与 $\mathcal{P}$ 相切的 $\theta_k \, \Omega \, v_k w \, dx$. 。在 (3.12) 中用 $w - \theta_k v_k$ 替换 w，得到

$$\left| \langle \tilde{E}_r'(v_k), w\rangle - j_n \int_\Omega v_k w \, dx \right| \le \frac{1}{k}\|w - \theta_k v_k\| \le \varepsilon_k \|w\| \quad \text{where } j_n := \langle \tilde{E}_r'(v_k), v_k\rangle \text{ and } \varepsilon_k \to 0 \text{ as } k \to 0.$$

因此，$\|\tilde{E}_r'(v_k)\|_* \to 0$，由 (3.3) 可知，所需断言得证。 □

由引理 3.7 和 3.8 以及命题 3.2 和 3.5，存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得对任意满足 $\|\varphi_1\| \ge \frac{\epsilon}{2}$ 的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，都有

$$\inf\{\tilde{E}_r(u) : u \in \mathcal{P}, \ \|u - (-\varphi_1)\| = \epsilon\} > \max\{\tilde{E}_r(-\varphi_1), \tilde{E}_r(\varphi_1)\}. \tag{3.13}$$

接下来，我们证明约束能量泛函 $\tilde{E}_r$. 存在第三个临界点

命题 3.9。 *The set*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([-1,1], \mathcal{P}) : \ \gamma(-1) = -\varphi_1, \ \gamma(1) = \varphi_1\} \tag{3.14}$$

is non empty and

$$c(r) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma[-1,+1]} E_r(u) > \lambda_1^L \tag{3.15}$$

is a critical value of $\tilde{E}_r$. *Moreover the same conclusion holds if* (3.13) *is replaced by the condition*

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma[-1,+1]} E_r(u) > \max\{\tilde{E}_r(-\varphi_1), \tilde{E}_r(\varphi_1)\}.$$

Proof. 设 $\phi \in \mathbb{H}(\Omega)$ 不为 φ_1的倍数，则考虑如下路径

$$\gamma(t) = \frac{t\varphi_1 + (1-t)\phi}{\|t\varphi_1 + (1-t)\phi\|_2}.$$

显然 $\gamma \in \Gamma$即 Γ 非空。最后，根据 [7, 命题 2.5] ，结合 (3.13) 和 [7, 注 2.6], ，我们˜得出 $c(r)$ 是 E_r 的一个临界值，其中

$$c(r) > \max\{\tilde{E}_r(-\varphi_1), \tilde{E}_r(\varphi_1)\} = \lambda_1^L.$$

□

我们结束本 节时给出以下定理，它是引理 3.1 和命题 3.9 的推论 :

定理 3.10. *The points* $(r + c(r) \ c(r)) \in \Sigma_L$ *for each* $r \ge 0$, *where* $c(r)$ *is defined in* (3.15).

这为 $r > 0$ 在 Σ_L 中、经过（r，0）的平行于对角线的直线上产生了第三个临界点（$r + c$（r） c（r））。由于 Σ_L 关于（α，β）平面内的对角线对称，因此根据定理 3.10，我们定义如下曲线，该曲线属于 Σ_L：

$$\mathcal{C} := \{(r + c(r), c(r)), (c(r), r + c(r)) : \ r \ge 0\}.$$

4 第一条非平凡曲线

本节旨在说明，对于给定的 $r \ge 0$， $\mathcal{C}$中的点是第一个非平凡点；该 $r \ge 0$ 位于 Σ_L 与直线（r，0）$+t$(1，1)的交集上，其中任意实数 t均适用。为证明这一点，我们首先证明以下引理。

引理 4.1. *The following statements hold true:*

(i) $\rho_N \ge 0$ *if* $N \ge 2$ *and* $\rho_1 = -2\gamma \approx -1.154$ *where* $\gamma = -\Gamma'(1)$ *is the Euler-Mascheroni constant.*(ii) $\lambda_1^L + c_N|\Omega| \ge 0$ *for all* $N \ge 1$.

Proof. 根据 ρ_N的定义，并利用 $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$ 和 $\psi(1) = -\gamma$，我们得到

$$\rho_1 = 2\ln 2 + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \gamma = -2\gamma,$$

and

$$\rho_2 = 2\ln 2 + \psi(1) - \gamma = 2\ln 2 - 2\gamma > 0.$$

现在，对于 $N \geq 3$，利用 ψ 是递增函数，我们有

$$\rho_N = 2\ln 2 + \psi\left(\frac{N}{2}\right) - \gamma \geq 2\ln 2 + \psi(1) - \gamma = 2\ln 2 - 2\gamma > 0 \quad \text{for } N \geq 3.$$

根据 [4, 定理 1.2 (i)], , 我们有

$$\lambda_1^L + d_N|\Omega| \geq 0, \quad \text{where} \quad d_N := \frac{2\omega_{N-1}}{N^2(2\pi)^N},\ N \geq 1.$$

现在，为了证明 (ii)，只需证明 $c_N \geq d_N$ 对所有 $N \geq 1$.

$$c_n \geq d_N \iff \frac{2}{\omega_{N-1}} \geq \frac{2w_{N-1}}{N^2(2\pi)^N} \iff N(2\pi)^{\frac{N}{2}} \geq \omega_{N-1} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \iff 2^{\frac{N}{2}-1}N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \geq 1$$

其中，最后一个不等式对每个 $N \geq 1$. 都成立

□

定理 4 2 *There does not exist any sequence $\alpha_k\ \beta_k \in \Sigma_L$ with $\alpha_k\ \beta_k \in \Sigma_L$ satisfying $\alpha_k\ \beta_k > \lambda_1^L$ converges.. (,) (,), (,) to $\lambda_1^L\ \lambda_1^L$. This means the lines $\lambda_1^L \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{R} \times \lambda_1^L$ are isolated in Σ_L.*

Proof. 相反，假设存在一个序列 $(\alpha_k,\ \beta_k) \in \Sigma_K$，满足 $\alpha_k,\ \beta_k > \lambda_1^L$，使得 at

$$(\alpha_k, \beta_k) \to (\alpha, \beta) \text{ with } \alpha = \lambda_1^L \text{ or } \beta = \lambda_1^L$$

并且 u_k 表示关于 (α_k, β_k)、对应于 $(P_{\alpha,\beta})$ 的解，满足 $\|u_k\|_2 = 1$。由此得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_L(u_k, u_k) = \alpha_k \int_\Omega (u_k^+)^2\ dx + \beta_k \int_\Omega (u_k^-)^2\ dx \\
\implies &\mathcal{E}(u_k, u_k) \leq \alpha_k \int_\Omega (u_k^+)^2\ dx + \beta_k \int_\Omega (u_k^-)^2\ dx + c_N \iint_{|x-y|\geq 1} \frac{u_k(x)u_k(y)}{|x-y|^N}\ dx\ dy
\end{aligned}$$

由此容易推出 $\{u_k\}$ 在 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中有界，因为 $\|u_k\|_2 = 1$。因此，对某个 $u \in \mathbb{H}$，$u_k \rightharpoonup u$ 在 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中弱收敛，并在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛。不妨设 $\alpha = \lambda_1^L$。按照引理 3.7 的做法，利用算子 L_Δ 的 (S)性质（见 [3, 引理 3.3]），我们可推出 u 是下列问题的弱解

$$L_\Delta u = \lambda_1^L u^+ - \beta u^- \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \tag{4.1}$$

用 u^+ 测试上述问题，并利用

$$(u(x) - u(y))(u^+(x) - u^+(y)) = (u^+(x) - u^+(y))^2 + u^+(x)u^-(y) + u^+(y)u^-(x) \tag{4.2}$$

对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 以及对称性性质，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{c_N}{2} \iint_{|x-y|\leq 1} \frac{(u^+(x) - u^+(y))^2}{|x-y|^N} + c_N \iint_{|x-y|\leq 1} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^N} - c_N \iint_{|x-y|\geq 1} \frac{u^+(x)u^+(y)}{|x-y|^N} \\
&\qquad + c_N \iint_{|x-y|\geq 1} \frac{u^-(x)u^+(y)}{|x-y|^N} + \rho_N \int_\Omega (u^+)^2 = \lambda_1^L \int_\Omega (u^+)^2 \\
&\implies \mathcal{E}_L(u^+, u^+) + c_N \iint_{|x-y|\leq 1} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^N} + c_N \iint_{|x-y|\geq 1} \frac{u^-(x)u^+(y)}{|x-y|^N} = \lambda_1^L \int_\Omega (u^+)^2 \\
&\implies \mathcal{E}_L(u^+, u^+) \leq \lambda_1^L \int_\Omega (u^+)^2 \leq \mathcal{E}_L(u^+, u^+).
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\mathcal{E}_L(u^+, u^+) = \lambda_1^L \int_\Omega (u^+)^2$$

这意味着 $u^+ \equiv 0$ 或 $u^+ = \varphi_1$。若 $u^+ \equiv 0$ *i.e.* $u \leq 0$，则 (4.1) 告诉我们，u 是 L_Δ的非正特征函数。由推论 2.3 可知，$\beta = \lambda_1^L$ 且 $u = -\varphi_1$。因此无论哪种情况

$$u_k \to \varphi_1 \text{ or } -\varphi_1 \text{ strongly in } L^2(\Omega).$$

这意味着当 $k \to \infty$,

$$\text{either } |\{x \in \Omega :\ u_k(x) < 0\}| \to 0 \text{ or } |\{x \in \Omega :\ u_k(x) > 0\}| \to 0. \tag{4.3}$$

考虑 $|\{x\in\Omega:\ u_k(x)>0\}|\to 0$. 根据定理 2.2， u_k 在 $(\alpha_k,\beta_k)\in\Sigma_K$ 且 $\alpha_k,\beta_k>\lambda_1^L$ 时变号。现在我们通过反证来否定 (4.3)。由于 u_k 弱满足 $(P_{\alpha,\beta})$，以 u_k^+ 作为测试函数，我们得到

$$\begin{aligned}\|u_k^+\|=\mathcal{E}(u_k^+,u_k^+)&\le\alpha_k\int_\Omega(u_k^+)^2\,dx+c_N\iint_{|x-y|\le1}\frac{u_k^+(x)u_k^+(y)}{|x-y|^N}\,dx\,dy-\min\{\rho_N,0\}\int_\Omega u_k^2\,dx\\&\le(\alpha_k+c_N|\Omega|-\min\{\rho_N,0\})\int_\Omega(u_k^+)^2.\end{aligned}$$

根据引理 4.1，我们有 $\lambda_1^L+c_N|\Omega|-\min\{\rho_N,0\}>0$。现在，选取足够大的 k，使得 $d_k:=(\alpha_k+c_N|\Omega|-\min\{\rho_N,0\})>0$，并应用 H¨older 不等式，可得

$$\|u_k^+\|^2=\mathcal{E}(u_k^+,u_k^+)\le(\alpha_k+c_N|\Omega|-\min\{\rho_N,0\})\int_\Omega(u_k^+)^2\le2d_k\|(u_k^+)^2\|_{\psi,\Omega}\,\|\mathbf{1}_{\{u_k(x)>0\}}\|_{\psi^*,\Omega}\tag{4.4}$$

其中 $\psi:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$，使得

$$\psi(t):=t\ln(e+t^{\frac12}),\quad \psi(t^2)\le\phi(t):=t^2\ln(e+t)\text{ for all }t\ge0\quad\text{and}\quad\frac{\psi^{-1}(t)}{t}\to0\text{ as }t\to+\infty,\tag{4.5}$$

ψ^* 是一个共轭函数 ψ，且 $\|\cdot\|_{\varphi,\ \Omega}$ 表示由（见 [16, 定义 3.2.1）定义的卢森堡范数])

$$\|u\|_{\varphi,\Omega}=\inf\left\{\lambda>0\ :\ \varrho_\varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right)\le1\right\}.$$

断言 1: $\|(u_k^+)^2\|_{\psi,\ \Omega}\le\|u_k^+\|^2_{\phi,\ \Omega}\le C\|u_k^+\|^2$ 对于某个 $C>0$.记

$$v_k:=\frac{u_k^+}{\|u_k^+\|_{\phi,\Omega}}\quad\text{such that}\quad\|v_k\|_{\phi,\Omega}=1.$$

利用范数的单位球性质（见 [16, 引理 3.2.3]）、(4.5) 和 [1, 定理 3.6], ，我们有

$$\int_\Omega\phi(v_k)\,dx\le1\quad\Longrightarrow\quad\int_\Omega\psi(v_k^2)\,dx\le1\quad\Longrightarrow\quad\|v_k^2\|_{\psi,\Omega}\le1\quad\Longrightarrow\quad\|(u_k^+)^2\|_{\psi,\Omega}\le\|u_k^+\|^2_{\phi,\Omega}\le C\|u_k^+\|^2.$$

断言 2: $\|\mathbf{1}_{\{u_k(x)>0\}}\|_{\psi^*,\Omega}=\quad\frac{1}{(\psi^*)^{-1}(|\{u_k(x)>0\}|^{-1})}\le C|\{u_k(x)>0\}|\ \psi^{-1}\left(|\{u_k(x)>0\}|^{-1}\right)$

根据卢森堡范数的定义和 [16, 命题 2 .4.9 和定理 2 .4.8], 我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{\{u_k(x)>0\}}\|_{\psi^*,\Omega}&=\inf\left\{\lambda:\int_\Omega\psi^*\left(\frac{\mathbf{1}_{\{u_k(x)>0\}}}{\lambda}\right)\,dx\le1\right\}=\inf\left\{\lambda:\psi^*\left(\frac{1}{\lambda}\right)|\{u_k(x)>0\}|\le1\right\}\\&=\inf\left\{\lambda:\psi^*\left(\frac{1}{\lambda}\right)\le\frac{1}{|\{u_k(x)>0\}|}\right\}=\inf\left\{\lambda:\frac{1}{\lambda}\le(\psi^*)^{-1}\left(|\{u_k(x)>0\}|^{-1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{(\psi^*)^{-1}\left(|\{u_k(x)>0\}|^{-1}\right)}\le C_1|\{u_k(x)>0\}|\ \psi^{-1}\left(|\{u_k(x)>0\}|^{-1}\right)\end{aligned}$$

对某个 $C_1>0$. 现在，利用 (4.3)、**断言 1** 和 **断言 2** 于 (4.4)、(4.5)， ψ 的定义以及$d_k>0$ 有上界这一事实，我们得到

$$1\le2C_0d_k|\{u_k(x)>0\}|\ \psi^{-1}\left(|\{u_k(x)>0\}|^{-1}\right)\to0\text{ as }k\to\infty$$

这就产生了矛盾。对情形 $|\{x\in\Omega:\ u_k(x)<0\}|\to0$，通过用 u_k^- 测试方程 $(P_{\alpha,\beta})$，重复上述相同的论证，我们将得到矛盾。因此，断言成立。 □

类比 [7], 中的引理 3.5，我们现在提出以下关于 $\mathcal{P}$的拓扑结果。

引理 4.3. *The following holds concerning $\mathcal{P}$-*

(i) $\mathcal{P}$ is locally arcwise connected.

(ii) Any open connected subset $\mathcal{O}$ of $\mathcal{P}$ is arcwise connected.

(iii) If $\mathcal{O}'$ is a connected component of an open subset $\mathcal{O}$ of $\mathcal{P}$ then $\partial\mathcal{O}'\cap\mathcal{O}=\emptyset$,

下一个结果也可以仿照 [7] 中引理 3.6 的证明，通过将 $\|.\|_{1,p}$ 替换为 $\|.\|$，将 $\tilde{J}_s$ 替换为$\tilde{}E_r$，并将 $\mathcal{O}$ 定义为

$$\mathcal{O}:=\{u\in\mathcal{P}:\ \tilde{E}_r(u)<\alpha\}$$

其中 α为某个实数。

引理 4.4. *Any connected component of $\mathcal{O}$ contains a critical point of $\tilde{E}_r$.*

下面我们通过证明本节的主要结果来结束本节。

定理 4 5 *For any $r\ge0$ the point $r+c\ r\quad c\ r$ is the first non trivial point of Σ_L which lies in the intersection. . .,(()()) (,) of Σ_L and the line parallel to the diagonal through $r\ 0$.*

Proof. 相反，设 $(r+\theta,\theta)$ 属于 Σ_L，其中 $\theta \in (\lambda_1^L, c(r))$，且 θ 是满足该条件的最小量。根据定理 4.2以及 Σ_L 是闭集，可以作出这样的选择。我们的目标是在 Γ 中构造一条路径，使得 $\tilde{E}_r(\cdot) \le \theta$，这将与式 (3.15) 中 $c(r)$ 的定义矛盾。

首先注意到，我们的反设表明，$\tilde{E}_r$ 在 $\theta \in$ 处有一个临界值（λ_1^L，$c(r)$），而 $\tilde{E}_r$ 在 $(\lambda_1^L,\ \theta)$ 内没有临界值。设 $u \in \mathcal{P}$ 为 $\tilde{E}_r$ *w.r.t.* 临界值 θ对应的临界点。那么，根据定理 2.2，u 变号，且满足

$$\mathcal{E}_L(u,v) = (r+\theta)\int_\Omega u^+ v - \theta \int_\Omega u^- v, \quad \text{for all } v \in \mathbb{H}(\Omega).$$

取 $v = u^+$ 和 $v = u^-$，得到

$$\mathcal{E}_L(u,u^+) = (r+\theta)\int_\Omega (u^+)^2\ dx \tag{4.6}$$

$$\mathcal{E}_L(u,u^-) = -\theta \int_\Omega (u^-)^2\ dx. \tag{4.7}$$

化简后，得到

$$\mathcal{E}_L(u^+,u^+) + h(u^+,u^-) = (r+\theta)\int_\Omega (u^+)^2\ dx \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_L(u^-,u^-) + h(u^+,u^-) = \theta \int_\Omega (u^-)^2\ dx. \tag{4.8}$$

其中

$$h(u^+,u^-) = c_N \iint_{|x-y|\le 1} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^N}\ dx\ dy + c_N \iint_{|x-y|\ge 1} \frac{u^-(x)u^+(y)}{|x-y|^N}\ dx\ dy \ge 0,$$

此外，得到

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_r(u) &= \theta \\
\tilde{E}_r\left(\frac{u^+}{\|u^+\|_2}\right) &= \theta - \frac{h(u^+,u^-)}{\|u^+\|_2^2} = \tilde{E}_r\left(\frac{-u^-}{\|u^-\|_2^2}\right) \le \theta \\
\tilde{E}_r\left(\frac{u^-}{\|u^-\|_2}\right) &= \theta - r - \frac{h(u^+,u^-)}{\|u^-\|_2^2} \le \theta - r.
\end{aligned}$$

接下来，我们考虑 $\mathcal{P}$ 中的三条路径，它们分别从 u 到 $\frac{u^+}{\|u^+\|_2^2}$、从 $\frac{u^+}{\|u^+\|_2^2}$ 到 $\frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}$，以及从 $\frac{-u^-}{\|u^-\|_2^2}$ 经由以下各点到 u:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \frac{tu^+ + (1-t)u}{\|tu^+ + (1-t)u\|_2} = \frac{u^+ - (1-t)u^-}{\|u^+ - (1-t)u^-\|_2}, \quad \gamma_1(0) = u, \quad \gamma_1(1) = \frac{u^+}{\|u^+\|_2^2}, \\
\gamma_2(t) &= \frac{u^+ - tu}{\|tu^- + (1-t)u^+\|_2} = \frac{tu^- + (1-t)u^+}{\|tu^- + (1-t)u^+\|_2}, \quad \gamma_2(0) = \frac{u^+}{\|u^+\|_2^2}, \quad \gamma_2(1) = \frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}, \\
\gamma_3(t) &= \frac{tu - (1-t)u^-}{\|tu - (1-t)u^-\|_2} = \frac{tu^+ - u^-}{\|tu^+ - u^-\|_2}, \quad \gamma_3(0) = \frac{-u^-}{\|u^-\|_2}, \quad \gamma_3(1) = u.
\end{aligned}$$

接下来，我们分别考察下文中 $i = 1,2$ 和 3。沿所有路径 γ_i 的 $\tilde{E}_r$ 水平。**路径的估计**

$[0,1] \ni t \mapsto \gamma_1(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_r(\gamma_1(t))\|tu^+ + (1-t)u\|_2^2 &= \mathcal{E}\left(u^+ - (1-t)u^-, u^+ - (1-t)u^-\right) \\
&\quad - c_N \iint_{|x-y|\ge 1} \frac{(u^+ - (1-t)u^-)(x)(u^+ - (1-t)u^-)(y)}{|x-y|^N}\ dx\ dy \\
&\quad + \rho_N \int_\Omega (u^+ - (1-t)u^-)^2\ dx - r\int_\Omega (u^+ - (1-t)u^-)^2\ dx.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

注意

$$\begin{aligned}
\left[(u^+ - (1-t)u^-)(x) - (u^+ - (1-t)u^-)(y)\right]^2 &= \left[(u^+(x) - u^+(y)) - (1-t)(u^-(x) - u^-(y))\right]^2 \\
&= \left[u^+(x) - u^+(y)\right]^2 + (1-t)^2\left[u^-(x) - u^-(y)\right]^2 + 2(1-t)\left[u^+(x)u^-(y) + u^-(x)u^+(y)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(u^+ - (1-t)u^-)(x)(u^+ - (1-t)u^-)(y) \\
&\qquad = u^+(x)u^+(y) + (1-t)^2 u^-(x)u^-(y) - (1-t)\left[u^+(x)u^-(y) + u^-(x)u^+(y)\right],
\end{aligned}$$

and

$$(u^+ - (1-t)u^-)^2(x) = (u^+)^2(x) + (1-t)^2(u^-)^2(x)$$

将上述估计代入式（4.9）、（4.8）和 $h(u^+,\ u^-)\geq 0$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r(\gamma_1(t))\|tu^+ + (1-t)u\|_2^2 &= \mathcal{E}_L(u^+,u^+) + (1-t)^2\mathcal{E}_L(u^-,u^-) + 2(1-t)h(u^+,u^-)\\ &\quad - r(1-t)^2\int_\Omega (u^+)^2\,dx - r\int_\Omega (u^-)^2\,dx\\ &= (r+\theta)\int_\Omega (u^+)^2\,dx + \theta(1-t)^2\int_\Omega (u^-)^2\,dx - h(u^+,u^-) - (1-t)^2h(u^+,u^-)\\ &\quad + 2(1-t)h(u^+,u^-) - r\int_\Omega (u^+)^2\,dx - r(1-t)^2\int_\Omega (u^-)^2\,dx\\ &= \theta\|tu^+ + (1-t)u\|_2^2 - r(1-t)^2\|u^-\|_2^2 - t^2h(u^+,u^-).\end{aligned}$$

进一步得到

$$\tilde{E}_r(\gamma_1(t)) \leq \theta \quad \text{for all } t\in[0,1].$$

路径 $[0,1]\ni t\mapsto \gamma_2(t)$ 的估计：

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r(\gamma_2(t))\|tu^- + (1-t)u^+\|_2 &= \mathcal{E}\left(tu^- + (1-t)u^+, tu^- + (1-t)u^+\right)\\ &\quad - c_N\iint_{|x-y|\geq 1}\frac{(tu^- + (1-t)u^+)(x)(tu^- + (1-t)u^+)(y)}{|x-y|^N}\,dx\,dy\\ &\quad + \rho_N\int_\Omega (tu^- + (1-t)u^+)^2\,dx - r\int_\Omega (tu^- + (1-t)u^+)^2\,dx.\end{aligned}\tag{4.10}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\left[(tu^- + (1-t)u^+)(x) - (tu^- + (1-t)u^+)(y)\right]^2 = \left[(1-t)(u^+(x)-u^+(y)) + t(u^-(x)-u^-(y))\right]^2\\ &= (1-t)^2\left[u^+(x)-u^+(y)\right]^2 + t^2\left[u^-(x)-u^-(y)\right]^2 - 2t(1-t)\left[u^+(x)u^-(y) + u^-(x)u^+(y)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(tu^- + (1-t)u^+)(x)(tu^- + (1-t)u^+)(y)\\ &\qquad = (1-t)^2u^+(x)u^+(y) + t^2u^-(x)u^-(y) + t(1-t)\left[u^+(x)u^-(y) + u^-(x)u^+(y)\right],\end{aligned}$$

and

$$(tu^- + (1-t)u^+)^2(x) = (1-t)^2(u^+)^2(x) + t^2(u^-)^2(x)$$

将上述估计代入（4.10）和（4.8），得到

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r(\gamma_2(t))\|tu^- + (1-t)u^+\|_2^2 &= (1-t)^2\mathcal{E}_L(u^+,u^+) + t^2\mathcal{E}_L(u^-,u^-) - 2t(1-t)h(u^+,u^-)\\ &\quad - rt^2\int_\Omega (u^-)^2\,dx - r(1-t)^2\int_\Omega (u^+)^2\,dx\\ &= \theta\|tu^- + (1-t)u^+\|_2^2 - h(u^+,u^-) - rt^2\int_\Omega (u^-)^2\,dx.\end{aligned}$$

现在，利用事实 $h(u^+,\ u^-)\geq 0$ 和 $r\geq 0$，可得

$$\tilde{E}_r(\gamma_2(t)) \leq \theta \quad \text{for all } t\in[0,1].$$

路径 $[0,1]\ni t\mapsto \gamma_3(t)$ 的估计：

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r(\gamma_3(t))\|tu^+ - u^-\|_2 &= \mathcal{E}\left(tu^+ - u^-, tu^+ - u^-\right) - c_N\iint_{|x-y|\geq 1}\frac{(tu^+ - u^-)(x)(tu^+ - u^-)(y)}{|x-y|^N}\,dx\,dy\\ &\quad + \rho_N\int_\Omega (tu^+ - u^-)^2\,dx - r\int_\Omega (tu^+ - u^-)^2\,dx.\end{aligned}\tag{4.11}$$

注意，

$$\begin{aligned}&\left[(tu^+ - u^-)(x) - (tu^+ - u^-)(y)\right]^2 = \left[t(u^+(x)-u^+(y)) - (u^-(x)-u^-(y))\right]^2\\ &= t^2\left[u^+(x)-u^+(y)\right]^2 + \left[u^-(x)-u^-(y)\right]^2 + 2t\left[u^+(x)u^-(y) + u^-(x)u^+(y)\right],\end{aligned}$$

$$(tu^+ - u^-)(x)(tu^+ - u^-)(y) = t^2u^+(x)u^+(y) + u^-(x)u^-(y) - t\left[u^+(x)u^-(y) + u^-(x)u^+(y)\right],$$

and

$$(tu^+ - u^-)^2(x) = t^2(u^+)^2(x) + (u^-)^2(x)$$

将上述估计代入 (4.11)、(4.8) 和 $h(u^+,u^-)\geq 0$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r(\gamma_3(t))\|tu^+ - u^-\|_2^2 &= t^2\mathcal{E}_L(u^+,u^+) + \mathcal{E}_L(u^-,u^-) + 2th(u^+,u^-) - rt^2\int_\Omega (u^+)^2\,dx\\ &= \theta\|tu^+ + (1-t)u^-\|_2^2 - (1-t)^2h(u^+,u^-) - r\|u^-\|_2^2.\end{aligned}$$

进一步可得

$$\tilde{E}_r(\gamma_3(t)) \le \theta \quad \text{for all } t \in [0,1].$$

利用上述路径，我们可以在保持处于层级 $\le \theta$ 的情况下，从 u 到 $\frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}$（经过 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$）。现在我们需要研究低于 $\theta - r$ 的层级，因此定义集合

$$\mathcal{O} = \{v \in \mathcal{P} : \ \tilde{E}_r(v) < \theta - r\}.$$

根据我们的假设以及命题 3.2 和 3.5，我们指出，当 $\lambda_1^L < \theta - r$ 时，$\varphi_1 \in \mathcal{O}$，而 $-\varphi_1 \in \mathcal{O}$。此外，根据 θ 的选取和引理 3.1，$\pm\varphi_1$ 是 $\mathcal{O}$ 中 $\tilde{E}_r$ 唯一可能的临界点。显然，因此 $\frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}$ 是 $\tilde{E}_r$ 的正则点，故存在 $\varepsilon > 0$ 和一条 C^1 路径

$$f : [-\epsilon, +\epsilon] \to S \ \text{ with } \ f(0) = \frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}, \quad \frac{d}{dt}(\tilde{E}_r(f(t)))|_{t=0} \neq 0.$$

沿着这条路径向正方向或负方向前进，都会到达某个 $w \in \mathcal{P}$，在那里 $\tilde{E}_r(w) < \theta - r$，即 $w \in \mathcal{O}$。将引理 4.3 和引理 4.4 应用于包含 w 的 $\mathcal{O}$ 的连通分支，并牢记我们的假设，可得 φ_1 或 $-\varphi_1$ 位于该连通分支中。不失一般性，假设 φ_1 位于该连通分支中，这意味着我们可以在保持处于层级 $< \theta - r$ 的情况下，沿着 $\mathcal{P}$ 中的一条路径从 $\frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}$ 移动到 w，然后从 w 移动到 $+\varphi_1$。因此，我们构造出了一条位于 $\mathcal{P}$ 中的路径，它连接 u 和 φ_1。我们将这条路径中连接 $\frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}$ 和 $+\varphi_1$、且层级保持为 $\le \theta - r$ 的部分称为 $\gamma_4(t)$。接着，其对称路径 $-\gamma_4(t)$ 连接 $\frac{-u^-}{\|u^-\|_2^2}$ 和 $-\varphi_1$，并满足

$$|\tilde{E}_r(\gamma_4(t)) - \tilde{E}_r(-\gamma_4(t))| \le r$$

由此可得

$$\tilde{E}_r(-\gamma_4(t)) \le \tilde{E}_r(\gamma_4(t)) + r \le (\theta - r) + r = \theta.$$

总而言之，我们构造了一条位于 $\mathcal{P}$ 中的路径，从 u 到 $\frac{u}{\|u^-\|_2^2}$，并从 $\frac{u}{\|u^-\|_2^2}$ 到 $+\varphi_1$，且始终处于层级 $\le \theta - r$。$-\gamma_4(1-t)$ 使我们能够在保持层级为 $\le \theta$ 的情况下，从 $-\varphi_1$ 到达 $-\frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}$。最后，$-\gamma_3(t)$ 使我们能够在保持层级为 θ 的情况下，从 $-\frac{u^-}{\|u^-\|_2^2}$ 回到 u。结合上述构造的路径，我们实际上构造了一条位于 $\mathcal{P}$ 中的路径，从 $-\varphi_1$ 到 $+\varphi_1$，且始终处于层级 $\le \theta$，从而完成了本定理的证明。 □

作为定理 4.5 的一个应用，接下来我们给出第二特征值 λ 的变分刻画 $\frac{L}{2}$. 此外，曲线 $\mathcal{C}$ 在 $r = 0$. 处经过点 $(\lambda_2^L, \ \lambda_2^L)$

推论 4.6. *One has*

$$\lambda_2^L := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,1]} \mathcal{E}_L(u,u)$$

where Γ *is the family of all continuous paths in* $\mathcal{P}$ *going from* $-\varphi_1$ *to* φ_1.

5 非平凡曲线的性质 $\mathcal{C}$

本节中，我们研究第一个非平凡曲线 $\mathcal{C}$ 的单调性和正则性，以及它的渐近行为。

命题 5.1. *The curve* $r \mapsto c(r)$ *for* $r \in \mathbb{R}^+$ *is non-increasing and Lipschitz continuous.*

Proof. 证明可通过采用与 [7, 命题 4.1] 相同的论证得到。为完整起见，我们给出详细证明。设 $r < r'$. 由于，对于任意 $u \in \mathcal{P}$，$\tilde{E}_r(u) \ge \tilde{E}_{r'}(u)$，因此我们有 $c(r) \ge c(r')$. 现在设 $\varepsilon > 0$. 那么，存在一条路径 $\gamma \in \Gamma$ 使得

$$\max_{u \in \gamma[-1,1]} \tilde{E}_{r'}(u) \le c(r') + \varepsilon.$$

因此，我们有

$$0 \le c(r) - c(r') \le \max_{u \in \gamma[-1,1]} \tilde{E}_r(u) - \max_{u \in \gamma[-1,1]} \tilde{E}_{r'}(u) + \varepsilon$$

设 w_0 是 $\gamma[-1,1]$ 中的一个点，E_r 在 $\gamma[-1,1]$ 上取得最大值，则有

$$0 \le c(r) - c(r') \le \tilde{E}_r(w_0) - \tilde{E}_{r'}(w_0) + \varepsilon \le (r' - r) + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得到所给映射的 Lipschitz 性质。 □

引理 5.2。 *Let* A, B *be two bounded open sets in* $\mathbb{R}^N$, *with* $A \subset B$ *and* B *is connected then* $\lambda_1^L(A) > \lambda_1^L(B)$。

Proof. 证明可由第一特征值的变分刻画 λ_1^L 得出。 □

引理 5.3。 *Let* $(\alpha,\ \beta)\ \in \mathcal{C}$ *and let* $a_1,\ a_2 \in L^\infty(\Omega)$ *such that*

$$\lambda_1^L \le a_1(x) \le \alpha \quad \textit{and} \quad \lambda_1^L \le a_2(x) \le \beta \ \textit{a.e. in}\ \Omega. \tag{5.1}$$

Assume that

$$\lambda_1^L < a_1(x) \quad \textit{and} \quad \lambda_1^L < a_2(x) \quad \textit{on subsets of positive measure.} \tag{5.2}$$

Then, any non-trivial solution u *of*

$$\begin{cases} L_\Delta u \ = a_1(x)u^+ - a_2(x)u^- & \textit{in}\ \ \Omega, \\ \quad u = 0 & \textit{in}\ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_{a_1,a_2}}$$

changes sign in Ω *and*

$$a_1(x) = \alpha \ \textit{a.e. on}\ \{x \in \Omega : u(x) > 0\}, \quad a_2(x) = \beta \ \textit{a.e. on}\ \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$$

(and consequently u *is an eigenfunction associated to the point* (α,β) *of* $\mathcal{C}$*).*

Proof. 设 u 是方程 (P_{a_1,a_2}) 的一个非平凡解。若有必要，将 u 替换为 $-u$，我们可以假设点 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{C}$ 满足 $\alpha \ge \beta$.。我们首先证明 u 在 Ω. 中变号。反设结论不成立；不失一般性，假设 $u \ge 0$ 在 Ω 中几乎处处成立（相反情形可类似处理）。于是 u满足

$$L_\Delta u = a_1(x)u \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

由于 a_1 满足 (5.1) 和 (5.2)，由定理 2.2， u是一个变号函数，这与假设矛盾。因此， u 在 Ω. 中变号。现在，我们反设以下两种情形之一成立:

$$|\{x \in \Omega : a_1(x) < \alpha \text{ and } u(x) > 0\}| > 0 \tag{5.3}$$

or

$$|\{x \in \Omega : a_2(x) < \beta \text{ and } u(x) < 0\}| > 0. \tag{5.4}$$

这里，与前文一样， $|\cdot|$ 表示勒贝格测度。假设 (5.3) 成立（类似的论证也适用于 (5.4)）。令 $\alpha - \beta = r \ge 0$.。于是， $\beta = c(r)$, 其中 $c(r)$由 (3.15) 给出。我们将证明存在一条路径 $\gamma \in \Gamma$，使得

$$\max_{u\in\gamma[-1,1]} \tilde{E}_r(u) < \beta, \tag{5.5}$$

w这与 $c(r)$的定义矛盾。 为了构造一条路径 γ，我们证明 t

$$\frac{\mathcal{E}_L(u^+,u^+)}{\|u^+\|_2^2} < \alpha \quad \text{and} \quad \frac{\mathcal{E}_L(u^-,u^-)}{\|u^-\|_2^2} < \beta. \tag{5.6}$$

将 u^+ 和 $-u^-$ 作为测试函数代入 (P_{a_1,a_2})，得到

$$\mathcal{E}_L(u^+,u^+) \le \mathcal{E}_L(u^+,u^+) - \mathcal{E}_L(u^-,u^+) = \mathcal{E}_L(u,u^+) = \int_\Omega a_1(x)(u^+)^2\ dx < \alpha\|u^+\|_2^2 \tag{5.7}$$

and

$$\mathcal{E}_L(u^-,u^-) \le \mathcal{E}_L(u^+,-u^-) + \mathcal{E}_L(-u^-,-u^-) = \mathcal{E}_L(u,-u^-) = \int_\Omega a_2(x)(u^-)^2\ dx < \beta\|u^+\|_2^2 \tag{5.8}$$

由于 $\mathcal{E}_L(u^-,u^+) \le 0$，我们得到断言 (5.6)。此外，我们有

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right) &= \frac{\mathcal{E}_L(u,u)}{\|u\|_2^2} - r\int_\Omega \frac{(u^+)^2}{\|u\|_2^2} = \frac{\mathcal{E}_L(u^+,u^+)}{\|u\|_2^2} + \frac{\mathcal{E}_L(u^-,u^-)}{\|u\|_2^2} - 2\frac{h(u^+,u^-)}{\|u\|_2^2} - r\int_\Omega \frac{(u^+)^2}{\|u\|_2^2}\ dx \\ &\le \frac{\mathcal{E}_L(u^+,u^+)}{\|u\|_2^2} + \frac{\mathcal{E}_L(u^-,u^-)}{\|u\|_2^2} - r\int_\Omega \frac{(u^+)^2}{\|u\|_2^2}\ dx \\ &\le (\alpha - r)\int_\Omega \frac{(u^+)^2}{\|u\|_2^2}\ dx + \beta\int_\Omega \frac{(u^-)^2}{\|u\|_2^2}\ dx = \beta. \end{aligned}$$

其中

$$h(u^+,u^-) = c_N \iint_{|x-y|\le 1} \frac{u^+(x)u^-(y)}{|x-y|^N} + c_N \iint_{|x-y|\ge 1} \frac{u^-(x)u^+(y)}{|x-y|^N} \ge 0.$$

类似地，我们有

$$\tilde{E}_r\left(\frac{u^+}{\|u^+\|_2}\right) < \alpha - r = \beta \quad \text{and } \tilde{E}_r\left(\frac{u^-}{\|u^-\|_2}\right) < \beta - r.$$

现在，利用引理 4.4，我们知道集合 $O = \{u \in \mathcal{P}\colon\ \tilde{E}_r(u) < \beta - r\}$ 的连通分支中存在 $\tilde{E}_r$ 的一个临界点。由于点 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{C}$， $\tilde{E}_r$ 唯一可能的临界点是 φ_1，因此我们可以完全按照定理 4.5 中的方式构造一条从 φ_1 到 $-\varphi_1$ 的路径，使其满足 (5.5)，从而得证。

□

推论 **5 4** *Let* $\alpha\ \beta\ \in \mathcal{C}$ *and* $a_1\ a_2 \in L^\infty$ *satisfying* 5 1 *and* 5 2 x *or* $a_2\ x\ < \beta$ .. (,) ,(Ω) (.) (.). *If either* a_1( ) *a.e. in then* $P_{a_1\ a_2}$ *has only the trivial solution.* $< \alpha$ *a.e. in* Ω ( ) Ω (,)

Proof. 这可直接由引理 5.3 得出。 □

命题 **5 5** *The curve $r \mapsto r + c\ r\ \ c\ r\ \ $ for $r \in \mathbb{R}^+$ is continuous and strictly decreasing in the sense that.. (( ) ( )) 0 ( ) 0 ( ) $r < r'$ implies $r + c\ r\ < r' + c\ r'\ $ and $c\ r\ > c\ r'$.*

Proof. 映射 $r \mapsto (r + c(r)\ c(r))$ 的连续性由命题 5.1 得出。为证明曲线严格递减，我们将使用推论 5.4。令 $r < r'$。反设

$$\text{either} \quad r + c(r) \geq r' + c(r') \quad \text{or} \quad c(r) \leq c(r').$$

在第一种情况下，我们有

$$r + c(r) \geq r' + c(r') > r + c(r') \quad \Longrightarrow \quad c(r) > c(r').$$

现在，在推论 5.4 中取 $(\alpha, \beta) = (r + c(r)\ c(r))$，便得到问题

$$L_\Delta v = (r' + c(r'))v^+ - c(r')v^- \ \text{ in } \ \Omega, \quad v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega$$

只有平凡解，这与 $(r' + c(r')\ c(r')) \in \Sigma_L$. 的事实矛盾。另一方面，如果 $c(r) \leq c(r')$ 蕴含 $r + c(r) < r' + c(r')$. 现在，再次在推论 5.4 中取 $(\alpha, \beta) = (r' + c(r')\ c(r'))$，便得到问题

$$L_\Delta v = (r + c(r))v^+ - c(r)v^- \ \text{ in } \ \Omega, \quad v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega$$

只有平凡解，这与（$r + c(r)\ c(r)$）$\in \Sigma_L$.这一事实矛盾 □

命题 5.6. *The limit of $c(r)\ $ as $r \to +\infty$ is λ_1^L.*

Proof. 反设存在一个 $\delta > 0$ ，使得对所有 $\gamma \in \Gamma$ 和所有$s \geq 0.$ ，$\max_{u \in \gamma[-1,1]} \tilde{E}_r(u) \geq \lambda_1^L + \delta$ 。令 $\varphi \in \mathbb{H}(\Omega)$在某个 $x_1 \in$ 的邻域内无上界，且不存在一个 $r \in \mathbb{R}$ 使得 $\varphi \leq r\varphi_1$ 在Ω中几乎处处成立，并考虑由下式定义的路径 $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma(t) = \frac{t\varphi_1 + (1 - |t|)\varphi}{\|t\varphi_1 + (1 - |t|)\varphi\|_2}, \quad t \in [-1, 1].$$

$\tilde{E}_r$ 在 $\gamma[-1, 1]$ 上的最大值在某个 t_r. 处取得。令 $v_{t_r} = t_r\varphi_1 + (1 - |t_r|)\varphi$，于是有

$$\mathcal{E}_L(v_{t_r}, v_{t_r}) - r\int_\Omega (v_{t_r}^+)^2\ dx \geq (\lambda_1^L + \delta)\int_\Omega |t_r\varphi_1 + (1 - |t_r|)\varphi|^2\ dx \quad \text{for all } r \geq 0. \tag{5.9}$$

令 $r \to +\infty$，对一个子序列可设 $t_r \to t_0 \in [-1, 1].$。由于当 $r \to +\infty$时， v_{t_r}在 $\mathbb{H}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$中保持有界，由 (5.9) 可得$\int_\Omega (v_{t_r}^+)^2\ dx \to 0.$因此，由 $\mathbb{H}(\Omega)$到 $L^2(\Omega)$的紧嵌入可得

$$\int_\Omega ((t_0\varphi_1 + (1 - |t_0|)\varphi)^+)^2\ dx = 0,$$

根据 φ 的选取，这是不可能的，除非 $t_0 = -1.$。因此， $t_r \to -1.$。最后，在 (5.9) 中取极限，得到

$$\lambda_1^L \int_\Omega |\varphi_1|^2\ dx = \mathcal{E}_L(\varphi_1, \varphi_1) \geq (\lambda_1^L + \delta)\int_\Omega |\varphi_1|^2\ dx$$

这就产生了矛盾。 □

6 $\mathcal{C}$ 与 $(\lambda_1^L, \lambda_1^L)$ 之间的非共振

本节研究以下问题

$$\begin{cases} L_\Delta u\ = f(x, u) & \text{in } \ \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{in } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P_Δ}$$

其中，$\frac{f}{(x,u)}\,u$ 渐近地位于 $(\lambda_1^L, \lambda_1^L)$ 与 (α, β) 之间。$\in \mathcal{C}$. 设 $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 Carathéodory函数。给定一点 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}$，我们作如下假设

$$\gamma_\pm(x) \leq \liminf_{s \to \pm\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \Gamma_\pm(x) \tag{6.1}$$

关于 x一致成立，其中 $\gamma_\pm$ 和 $\Gamma_\pm$ 是满足以下条件的有界函数

$$\begin{cases} \lambda_1^L \leq \gamma_+(x) < \Gamma_+(x) \leq \alpha \text{ a.e. in } \Omega \\ \lambda_1^L \leq \gamma_-(x) < \Gamma_-(x) \leq \beta \text{ a.e. in } \Omega. \end{cases} \tag{6.2}$$

我们还假设以下条件

$$\delta_\pm(x) \leq \liminf_{s \to \pm\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \limsup_{s \to \pm\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \Delta_\pm(x), \quad \text{where} \quad F(x, s) = \int_0^s f(x, t)\ dt \tag{6.3}$$

关于 x 一致成立，其中 $\delta_{\pm}(x)$ 和 $\Delta_{\pm}(x)$ 是满足以下条件的有界函数

$$\begin{cases} \lambda_1^L \le \delta_+(x) \le \Delta_+(x) \le \alpha \text{ a.e. in } \Omega \\ \lambda_1^L \le \delta_-(x) \le \Delta_-(x) \le \beta \text{ a.e. in } \Omega \\ \lambda_1^L < \delta_+ \text{ and } \lambda_1^L < \delta_- \text{ on subsets of positive measure} \\ \text{either } \Delta_+(x) < \alpha \text{ a.e. in } \Omega \text{ or } \Delta_-(x) < \beta \text{ a.e. in } \Omega. \end{cases} \tag{6.4}$$

定义能量泛函 $\Psi : \mathbb{H}(\Omega) \to \mathbb{R}$ 为

$$\Psi(u) = \frac{\mathcal{E}_L(u,u)}{2} - \int_\Omega F(x,u)\, dx.$$

那么， Ψ 是 $\mathbb{H}(\Omega)$上的一个 C^1 泛函，并且

$$\big\langle \Psi'(u), v \big\rangle = \mathcal{E}_L(u,v) - \int_\Omega f(x,u)v\, dx$$

而且， Ψ 的临界点恰好是（P_Δ）的弱解。

引理 6.1。 *The functional Ψ satisfies the (PS) condition in $\mathbb{H}(\Omega)$。*

Proof. 令 $\{u_k\}$ 为一个 Palais–Smale 序列（简称（PS）序列）

$$|\Psi(u_k)| \le c, \quad \text{and } (\Psi'(u_k), \phi) \le \varepsilon_k \|\phi\| \tag{6.5}$$

其中 $c > 0$ 和 $\varepsilon_k \to 0$ 为 $k \to \infty$. 只需证明 Palais–Smale 序列是有界的。反设 $\{u_k\}$ 不是有界序列。定义 $v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$, 这是 $\mathbb{H}(\Omega)$中的有界序列。 于是，存在 $\{v_k\}$ 的一个有界子序列（仍记为原记号）以及一个 $v_0 \in \mathbb{H}(\Omega)$，使得 $v_k \rightharpoonup v_0$ 在 $\mathbb{H}(\Omega)$ 中弱收敛，并且 $v_k \to v_0$ 在 $L^2(\Omega)$ 中以及 $v_k \to v_0$ 在 Ω 中几乎处处成立。 现在，利用（ 6.1 ） — （ 6.2 ），可得 $f_{\frac{x\ u_k}{\|u_k\|}} \rightharpoonup f_{0,)}$ (x) 属于 $L^2(\Omega)$。 取 $\phi = v_k - v_0$，除以 $\|u_k\|$ 并利用算子 $\overline{L_\Delta}$的（S）性质（见 [3, 引理 3.3]），我们得到 $v_k \to v_0$ 在 $\mathbb{H}(\Omega)$中。 特别地， $\|v_0\| = 1$ 且 $v_0 \not\equiv 0$. 由（6.5）可进一步得到

$$\mathcal{E}_L(v_0, \phi) - \int_\Omega f_0(x)\phi\, dx = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathbb{H}(\Omega).$$

现在，根据假设 (6.1) 及标准论证， $f_0(x) = a_1(x)v_0^+ - a_2(x)v_0^-$ ，其中 a_1 和 a_2 是满足 (5.1) 的有界函数。在 $f_0(x)$ 的表达式中， $\{x$ 上 $a_1(x)$（分别为 $a_2(x)$）的取值： $v_0(x) \le 0\}$ （分别为$\{x$： $v_0(x) \ge 0\}$）无关紧要，因此我们可以假设

$$a_1(x) > \lambda_1^L \quad \text{on } \{x : v_0(x) \le 0\} \quad \text{and} \quad a_2(x) > \lambda_1^L \quad \text{on } \{x : v_0(x) \ge 0\}. \tag{6.6}$$

于是，由引理 5.3 可知，以下情况至少有一种成立：(i)： $a_1(x) = \lambda_1^L$ 在 Ω 中几乎处处成立；或 (ii)： $a_2(x) = \lambda_1^L$ 在 Ω 中几乎处处成立；或 (iii)： v_0 是与 $\mathcal{C}$ 的点 (α, β) 对应的特征函数。我们将看到，每种情况都会导致矛盾。若 (i) 成立，则由 (6.6) 可得 $v_0 > 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，而 (P_{a_1,a_2}) 意味着

$$\mathcal{E}_L(v_0, v_0) = \lambda_1^L \int_\Omega v_0^2\, dx. \tag{6.7}$$

现在，将 (6.5) 除以 $\|u_k\|^2$，令 $k \to \infty$ 时取极限，并利用 (6.3)，我们得到

$$\lambda_1^L \int_\Omega v_0^2\, dx = \mathcal{E}_L(v_0, v_0) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{2F(x,u_k)}{\|u_k\|^2}\, dx \ge \int_\Omega \delta_+(x)v_0^2\, dx$$

这与 (6.4) 矛盾。情形 (ii) 可类似处理。现在，若 (iii) 成立，则由 (6.3) 可推得 t

$$\int_\Omega \big(\alpha(v_0^+)^2 + \beta(v_0^-)^2\big)\, dx = \mathcal{E}_L(v_0, v_0) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{2F(x,u_k)}{\|u_k\|^2}\, dx \le \int_\Omega \Delta_+(x)v_0^2 + \Delta_-(x)v_0^2\, dx$$

由于根据引理 (5.3)， v_0 在 Ω 中变号，因此这再次与假设 (6.4) 矛盾。故 $\{u_k\}$ 是 $\mathbb{H}(\Omega)$. 中的有界序列。

□

接下来，我们研究能量泛函 Ψ. 的山路几何

引理 6.2。 *There exists a $R > 0$ such that*

$$\max\{\Psi(R\varphi_1), \Psi(-R\varphi_1)\} \le \max_{u\in\gamma[-1,1]} \Psi(u) \tag{6.8}$$

for any $\gamma \in \Gamma_R := \{\gamma \in C([-1,1],\ \mathbb{H}(\Omega)) :\ \gamma(1) = R\varphi_1,\ \gamma(-1) = -R\varphi_1\}$.

Proof. 鉴于（$P_{a_1,\ a_2}$），我们首先考虑与函数 $\Delta_\pm$ 相关的以下泛函，其定义为

$$J(u) = \mathcal{E}_L(u,u) - \int_\Omega \Delta_+(x)u^2\ dx - \int_\Omega \Delta_-(x)u^2\ dx$$

并断言

$$d := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma[-1,1]} J(u) > 0 \tag{6.9}$$

其中， Γ 定义于（3.14）中。记 $r = \alpha - \beta \geq 0$。由于（$\alpha,\ \beta$） $\in \mathcal{C}$，因此对于任意 $\gamma \in \Gamma$,

$$\max_{u\in\gamma[-1,1]} \tilde{E}_r(u) \geq c(r) = \beta \quad \Longrightarrow \quad \max_{u\in\gamma[-1,1]} \left(\mathcal{E}_L(u,u) - \alpha\int_\Omega (u^+)^2\ dx - \beta\int_\Omega (u^-)^2\ dx\right) \geq 0.$$

由（6.4）可进一步推出 $\max_{u\in\gamma[-1,1]} J$（$u$） > 0。因此， $d \geq 0$. 另一方面，由于 $\delta_\pm$（x） $\leq \Delta_\pm$（x）在 Ω中几乎处处成立，我们有

$$J(\pm\varphi) \leq \int_\Omega (\lambda_1^L - \delta_\pm(x))\varphi^2\ dx < 0.$$

˜因此，对于限制 J of J 到 $\mathcal{P}$，我们具有山路几何，

$$\max\{\tilde{J}(\varphi_1), \tilde{J}(-\varphi_1)\} < 0 \leq \max_{u\in\gamma[-1,1]} \tilde{J}(u)$$

对于任意路径 $\gamma \in \Gamma$，按照引理 3.7 中的方法可验证 J 满足 $\mathcal{P}$上的（PS）条件。然后，按照命题 3.9 中的方法使用山路定理，我们得到 d 是 $\tilde{J}$的临界值， *i.e.* 存在 $u \in \mathcal{P}$ 和 $\mu \in \mathbb{R}$，使得

$$J(u) = d \quad \text{and} \quad (J'(u),\phi) = \mu(I'(u),\phi) \text{ for all } \phi \in \mathbb{H}(\Omega).$$

反证法 得出 $d = 0$. 取 $\phi = u$ 上述结果，可推得 $\mu = 0$，因此 u 是一个非平凡解 of

$$L_\Delta u = \Delta_+(x)u^+ - \Delta_-(x)u^- \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

现在，利用 (6.4) 和引理 5.3，我们得到矛盾，从而证明了 (6.9) 中的断言。由 (6.3) 可知，对于任意 $\zeta > 0$，存在 $a_\zeta \in L^1(\Omega)$, 使得对几乎处处的 x,

$$\begin{cases} (\delta_+(x) - \zeta)\frac{s^2}{2} - a_\zeta(x) \leq F(x,s) \leq (\Delta_+(x) + \zeta)\frac{s^2}{2} + a_\zeta(x), & s > 0 \\ (\delta_-(x) - \zeta)\frac{s^2}{p} - a_\zeta(x) \leq F(x,s) \leq (\Delta_-(x) + \zeta)\frac{s^2}{2} + a_\zeta(x), & s < 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

由 (6.10) 中左侧的不等式可知，对于任意 $R > 0$ 和 $\zeta > 0$,

$$\Psi(\pm R\varphi_1) \leq \frac{R^2}{2}\int_\Omega (\lambda_1^L - \delta_\pm(x))\varphi_1^2\ dx + \frac{\zeta R^2}{2} + \|a_\zeta\|_1$$

这进一步意 味着，利用 (6.4) 并选取充分小的 ζ，可得 $\Psi(\pm R\varphi_1) \to -\infty$，当 $R \to \infty$. 固定 ζ 足够 h 使得 $0 < \zeta < d$ 一个 并选择 $R = R(\zeta)$，使得

$$\Psi(\pm R\varphi_1) \leq -\|a_\zeta\|_1 \tag{6.11}$$

其中 a_ζ 通过 (6.10) 与 ζ 相关联。现在，考虑 $\gamma \in \Gamma_R$中的一条路径。若 $0 \in \gamma[-1,1]$，则由 (6.11) 并利用 $\Psi(0) = 0$, 可得 (6.8) 中的断言。另一方面，若 $0 \notin \gamma[-1,1]$，则我们可以考虑归一化路径 $\tilde{\gamma}(t) = {}^{\gamma(t)}/_{\|\gamma(t)\|}$，它属于 Γ. 。由于根据 (6.10),

$$\Psi(u) \geq \frac{J(u) - \zeta\|u\|_2^2}{2} - \|a_\zeta\|_1$$

我们得到

$$\max_{u\in\gamma[-1,1]} \frac{2\Psi(u) + 2\|a_\zeta\|_1 + \zeta\|u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \geq \max_{v\in\tilde{\gamma}[-1,1]} J(v) \geq d$$

因此，根据 ζ 的选取及 (6 11), .

$$\max_{u\in\gamma[-1,1]} \frac{2\Psi(u) + 2\|a_\zeta\|_1}{\|u\|_2^2} \geq d - \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \max_{u\in\gamma[-1,1]} \Psi(u) > -\|a_\zeta\|_1 \geq \Psi(\pm R\varphi_1).$$

因此，所需的断言得证。 □

定理 6.3。 *Let* (6.1)-(6.4) *hold and* ($\alpha,\ \beta$) $\in \mathcal{C}$. *Then the problem* (P_Δ) *admits atleast one solution* u *in* $\mathbb{H}(\Omega)$。

Proof. 证明可通过应用山路定理并结合引理 6.1 和 6.2 中的断言得出。

□

致谢

第一作者感谢印度国家研究基金会（ANRF）通过编号为 ANRF/ARGM/2025/000272/MTR 的资助提供经费支持。本研究始于第一作者访问焦特布尔印度理工学院数学系期间，第一作者感谢该系于2025年5月给予的热情接待。

伦理审批

不适用。

利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

作者贡献

作者对本研究的贡献相同。

数据和材料的可用性

本文不适用数据共享，因为本研究未创建或分析任何新数据。

参考文献

[1] R. Arora、J. Giacomoni 和 A. Vaishnavi， *The Brezis-Nirenberg and logistic problem for the logarithmic Laplacian*，预印本，arXiv:2504.18907。2, 3, 12[2] R. Arora、J. Giacomoni、H. Hajaiej 和 A. Vaishnavi， *Sharp embeddings and existence results for logarithmic p-Laplacian equations with critical growth* 2510 26286 2 ，预印本，arXiv: . .[3] R. Arora、H. Hajaiej 和 K. Perera， *Nonlocal Dirichlet problems involving the Logarithmic p-Laplacian*，预印本，arXiv:2512.21959。9, 11, 18[4] H. Chen 和 L. V´eron， *Bounds for eigenvalues of the Dirichlet problem for the logarithmic Laplacian*，《Adv. Calc. Var.》，16 (2023)，第 541–558 页。11[5] H. Chen 和 T. Weth， *The Dirichlet Problem for the logarithmic Laplacian*，《Comm. Partial Diff. Equations》，44(11) (2019)，第 1111–1131 页。1, 2, 4, 5[6] E. Correa 和 A. De Pablo， *Nonlocal operators of order near zero*，《J. Math. Anal. Appl.》，461(1) (2018)，第 837–867 页。2[7] M. Cuesta、D. de Figueiredo 和 J.-P. Gossez， *The beginning of the Fučik spectrum for the p-Laplacian*，《J. Differ- ential Equations》，159，212-238，(1999)。2, 3, 8, 10, 12, 15[8] B. Dyda、S. Jarohs 和 F. Sk， *The Dirichlet problem for the logarithmic p-Laplacian*，已被《Trans. Amer. Math. Soc.》接收（2025），预印本，arXiv:2411.11181。5[9] P. A. Feulefack 和 S. Jarohs， *Nonlocal operators of small order* 4 **202** 2023 4, ，《 1501 1529 2 Ann. Mat. Pura Appl.》（ ）（ ），第 - 期。[10] G. Foghem， *Stability of complement value problems for p-Lévy operators*，《NoDEA 非线性微分方程及其应用》32 (1)，论文编号 1，106，2025。2[11] A. Fu˘c´ık， *Nonlinear eigenvalue problems*，《Czech. Math. J.》，14 (1964)，第 226–251 页。2[12] R. L. Frank、T. K ¨ *Classification of solutions of an equation related to a conformal log Sobolev* onig 和 *inequality* **375** 2020 107395, 27 2 H. Tang， ，《Adv. Math.》（ ），第 [13] D. Goel、S. Goyal 和 K. Sreenadh， *First curve of Fučík spectrum for the p-fractional Laplacian operator with nonlocal normal boundary conditions* **2018 74** 2018 1 21 2 ，《电子微分方程杂志》，: ( )，–。[14] S. Goyal 和 K. Sreenadh， *On the Fučík spectrum of nonlocal elliptic operators*，《非线性微分方程及其应用》NoDEA，21 (2014)，567–588。2, 3[15] D.G. de Figueiredo 和 J. P. Gossez， *On the first curve of the Fučík spectrum of an elliptic problem*，《Differential Integral Equations》7 (1994)，第 5-6 期，1285–1302。2[16] P. Harjulehto 和 P. H¨ast¨o，《Orlicz空间与广义Orlicz空间》，数学讲义，2236，Springer，Cham，2019。x+167 第 12 页[17] V. Hernandez Santamaria 和 A. Saldana， *Small order asymptotics for nonlinear fractional problems*，《Calc. Var. Partial Diff. Equations》，61(3) (2022)，第 1-26 页。8, 9[18] V. Hernandez Santamaria、L. F. Lopez Ros 和 A. Saldana， *Optimal boundary regularity and a Hopf-type lemma for Dirichlet problems involving the logarithmic Laplacian* 45 1 2024 1 36 2, ，《 Discrete Contin. Dyn. Syst.》，( ) ( )，第 – 页。5

[19] S. Jarohs 和 T. Weth, *On the strong maximum principle for nonlocal operators*, 《数学时代》1–31 (2018)。5[20] A. Laptev 和 T. Weth, *Spectral properties of the logarithmic Laplacian*, 《分析数学与物理》, 11(3) (2021), 文章 24。2[21] S. Malhotra、S. Goyal 和 K. Sreenadh, *On the eigenvalues and Fučík spectrum of the p-Laplace local and nonlocal problem with mixed Hardy terms* 2025 2 , 《微分方程进展》, 即将刊出（）。[22] B. Pellacci 和 G. Verzini, *Best dispersal strategies in spatially heterogeneous environments: optimization of the principal eigenvalue for indefinite fractional Neumann problems* **76** 2018 6, 1357 1386 2 , 《数学生物学杂志》（）, 第 – 期。[23] H. ˇSiki´c、R. Song 和 Z. Vondracˇek, *Potential theory of geometric stable processes*, 《概率论及相关领域》**135** (2006), 第 4 期, 547–575。2[24] K. Perera, *Resonance problems with respect to the Fučík spectrum of the p-Laplacian* **36**, 。《电子微分方程杂志》（电子版）（）。[25] K. Perera, *On the Fučík spectrum of the p-Laplacian*, 《非线性微分方程及其应用》NoDEA, **11** (2) (2004), 259-270。2[26] J. Sprekels 和 F. Valdinoci, *A new type of identification problems: optimizing the fractional order in a nonlocal evolution equation* **55** 2017 1, 70 93 2 , 《SIAM控制与优化杂志》（）, 第 – 期。[27] K. Sreenadh, *On the Fučík spectrum of the Hardy–Sobolev operator*, 《非线性分析》, **51** (2002), 1167–1185。2