arXiv:2601.03866v1 [math.PR] 7 Jan 2026

锥内二维随机游走的调和多项式及其他可精确计算的特征

DENIS DENISOV、Nikita Elizarov 和 Vitali Wachtel

Abstract. 本文研究在离开开角为 $\alpha \in (0, \pi]$ 的楔形区域时被杀死的二维格点随机游走。假设随机游走不能越过楔形区域的边界，我们证明，当且仅当 $\alpha = \pi/m$ 且某个整数 m 满足条件时，存在调和多项式。我们的证明是构造性的，因此可以给出任意整数 m 对应的调和多项式的精确表达式。此外，我们还给出了离开时间所有有限阶矩的精确表达式；该结果对所有角度 α 均成立。

1. Introduction and main results

设 $S(n) = X(1) + X(2) + \ldots + X(n)$, $n \geq 1$ 是一个 d 维随机游走，其中$\{X(k)\}$ 是向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ 的独立副本。我们始终假设

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[X_i X_j] = \delta_{ij} \text{ for all } 1 \leq i, j \leq d. \tag{1}$$

设 K 是 $\mathbb{R}^d$ 中顶点位于原点的一个开锥。对于每个 $x \in K$，我们定义

$$\tau_x := \{n \geq 1 : x + S(n) \notin K\}.$$

在论文 [2–4], 中，作者证明了对于步长为 S、离开锥 K 即被杀死的随机游走 n，正调和函数的存在性。更准确地说，这些论文给出了正函数 $V(x)$ 的不同构造，该函数满足

$$V(x) = \mathbb{E}[V(x + S(1)); \tau_x > 1], \quad x \in K. \tag{2}$$

除了知道方程 (2) 存在一个解之外，我们还知道 V 的一些渐近界，由此可推出

$$V(x) \sim u(x) \quad \text{as } \delta(x) := \operatorname{dist}(x, \partial K) \to \infty,$$

wh这里， $u(x)$ 在经典意义下是 K 上的调和函数，即 $u(x) > 0$ 在锥 K 中，并且

$$\Delta u(x) = 0, \ x \in K \quad \text{and} \quad u|_{\partial K} = 0. \tag{3}$$

但是，几乎没有能够写出函数 V 的闭式表达式的例子。本文旨在寻找一类可以显式计算 $V(x)$ 的例子。

我们主要研究 $d = 2$ 的情形，以及一族凸锥 $\{K_\alpha\}$；这些锥由其边界描述为:

$$x_2 = 0, \quad x_2 = \tan(\alpha) x_1, \quad \alpha \in (0, \pi].$$

对于每个锥 K_α，方程 (3) 的解都有闭式表达式：它们都是函数的倍数

$$u_\alpha(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\varphi/\alpha), \quad r > 0, \ \varphi \in (0, \alpha)$$

用 $K = K_\alpha$ 求解 (3)。这意味着，如果对于某个整数 m 有 $\alpha = \pi/m$，那么 $u_{\pi/m}(x)$ 是一个次数为 m 的齐次多项式。例如，

$$u_{\pi/3}(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2 - x_2^3 \tag{4}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 60G50；次要分类号 60G40。

Key words and phrases. 随机游走，调和多项式。由德国研究基金会（DFG）资助——项目编号 317210226——SFB 1283。

and

$$u_{\pi/4}(x) = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3. \tag{5}$$

接下来我们注意到，函数 $u_{\pi/m}$ 在整个平面上仍然是调和的：

$$\Delta u_{\pi/m}(x) = 0 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^2.$$

但是，这些函数对于整个平面上的离散时间随机游走并非调和函数。简单计算表明

$$\mathbb{E}[u_{\pi/3}(x+X)] = u_{\pi/3}(x) + 3\mathbb{E}[X_1^2 X_2] - \mathbb{E}[X_2^3]$$

对于满足 (1) 且具有有限三阶矩的任意随机游走，结论均成立。因此，当且仅当 $3\mathbb{E}[X_1^2 X_2] = \mathbb{E}[X_2^3]$ 时，调和性成立。不过，通过加上一个二次多项式，可以得到一个调和多项式。事实上，对于多项式 $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A(x_1+X_1)^2 + B(x_2+X_2)^2 + C(x_1+X_1)(x_2+X_2)] \\ = Ax_1^2 + Bx_2^2 + A + B + Cx_1x_2\end{aligned}$$

并选择常数 A、B 和 C，使得 $A + B = -3\mathbb{E}[X_1^2 X_2] + \mathbb{E}[X_2^3]$，我们得出多项式 $h(x) = u_{\pi/3}(x) + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_1x_2$ 满足

$$\mathbb{E}[h(x+X)] = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$

此外，容易验证，若选择

$$A = 0, \quad B = -3\mathbb{E}[X_1^2 X_2] + \mathbb{E}[X_2^3] \quad \text{and} \quad C = 3^{3/2}\mathbb{E}[X_1^2 X_2] - 3^{1/2}\mathbb{E}[X_2^3],$$

那么，除 (6) 外，对于每个 $x \in \partial K_{\pi/3}$，还有 $h(x) = 0$。因此，若考虑一个满足 $x + S(\tau_x) \in \partial K_{\pi/3}$ 的随机游走 $S(n)$，则对鞅 $h(x + S(n))$ 应用可选停止定理，可得

$$\mathbb{E}[h(x+S(n)); \tau_x > n] = \mathbb{E}[h(x + S(n \wedge \tau_x))] = h(x).$$

特别地，对于离开 $K_{\pi/3}$ 时被杀死的 $S(n)$，函数 h 是调和的。我们的第一个结果表明，对于所有楔形区域 $K_{\pi/m}$, $m \geq 1$，这一观察仍然成立。

定理 1. 假设随机游走 $S(n)$ 是格点的，即对于所有 $n) = 1$，都有 $\mathbb{P}(S(n) \in R$，其中某个 2 维格点为 R。另假设 (1) 成立，并且

$$x + S(\tau_x) \in \partial K_\alpha \quad \textit{for all } x \in R \cap \partial K_\alpha. \tag{7}$$

(a) 若对于某个 $m \geq 2$ 有 $\alpha = \pi/m$，且 $\mathbb{E}|X|^m$ 有限，则存在一个次数至多为 $(m-1)$ 的多项式 $r_m(x)$，使得 $h(x) := u_{\pi/m}(x) + r_m(x)$ 对于离开 $K_{\pi/m}$ 时被杀死的 $S(n)$ 是调和的。$r_m(x)$ 的所有系数都是混合矩 $\mathbb{E}[X_1^k X_2^l]$, $k, l \leq m$ 的线性组合。*(b)* 若一个次数为 m 的正多项式 $h(x)$ 对于离开 K_α 时被杀死的 $S(n)$ 是调和的，且 $\alpha \in (0, \pi)$ 和 $h(x)|_{R \cap \partial K_\alpha} = 0$，那么 $\alpha = \pi/m$，并且存在一个常数 c，使得 $h(x) - cu_{\pi/m}(x)$ 的次数不超过 $m - 1$。

注2. 零边界条件意味着多项式 $h(x)$ 可被 $x_2(x_2 - x_1 \tan\alpha)$ 整除。 ◇

我们研究楔形区域 K_α 的一个主要原因，是它与正象限中的格点游走组合学有关。设 $\{Y(n)\}$ 为取值于 $\mathbb{Z}^2$ 的向量 Y 的独立副本，满足 $\mathbb{E}Y = 0$ 且具有有限的二阶矩。考虑随机游走 $U(n) = Y(1) + Y(2) + \ldots + Y(n)$，它在离开正象限 $\mathbb{R}^2_+$ 时被杀死。令 ϱ 表示坐标 Y_1 和 Y_2 的相关系数，即，

$$\varrho = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{\mathbb{E}Y_1^2 \mathbb{E}Y_2^2}} \in (-1, 1).$$

（此处排除退化情形 $|\varrho| = 1$。）令

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}Y_1^2(1-\varrho^2)}}, & \frac{-\varrho}{\sqrt{\mathbb{E}Y_2^2(1-\rho^2)}} \\ 0, & \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}Y_2^2}} \end{pmatrix}.$$

于是很容易看出，向量 $X = TY$ 满足（1）。此外，

$$T\mathbb{R}^2_+ = K_{\alpha(\varrho)} \quad \text{with} \quad \alpha(\varrho) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho}\right).$$

因此，我们首先可以将定理 1 应用于在离开$K_{\alpha(\varrho)}$时被杀死的游走 $S(n) = TU(n)$。如果存在一个用于 $S(n)$ 的调和多项式，那么我们可以应用 T^{-1} 来获得一个用于 $U(n)$ 的调和多项式。我们还注意到，如果向量 Y 满足条件，则条件 (7) 得到满足

$$\mathbb{P}(Y_1 \geq -1, Y_2 \geq -1) = 1,$$

这是对一维随机游走经典左连续性的自然推广。

乍一看，我们的条件 (7) 似乎非常严格。但考察一维游走可以发现，这个条件相当自然。在一维情形中，只有两个锥：$(0, \infty)$ 和 $(-\infty, 0)$。为明确起见，我们考虑 $K = (0, \infty)$。众所周知，如果 $S(n)$ 是一个零均值的一维随机游走，那么在离开 K 时被杀死的 $S(n)$ 的调和函数，与对应于弱下降阶梯高度的更新函数成正比。假设该更新函数 H 是线性的，即对所有 $x = 0, 1, 2, \ldots$，都有 $H(x) = ax + b$。（注意，更新函数的次可加性蕴含 $b \geq a$。）那么，其差分的生成函数很容易计算：

$$\sum_{x=0}^{\infty} s^x (H(x) - H(x-1)) = b + a\frac{s}{1-s}.$$

令 $g(s)$ 表示第一个弱下降阶梯高度的生成函数。那么

$$\frac{1}{1-g(s)} = b + a\frac{s}{1-s}.$$

解这个方程，我们得到

$$g(s) = \frac{(b-1) + (a+1-b)s}{b - (b-a)s}.$$

现在很容易看出，只有以下两种可能：

- 如果 $b > a$，那么第一个阶梯高度服从平移几何分布，
- 如果 $b = a$，那么 $g(s) = \frac{b-1}{b} + \frac{1}{b}s$ 因此，第一个阶梯高度只有两个可能取值。

第一种情况对应于 X 负部的几何分布，第二种情况则对应于左连续随机游走。因此，左连续随机游走是产生线性调和函数的两种情形之一。这些简单的论证引出了以下问题：能否引入一种适当的二维类比，即具有几何左尾的随机游走？目前我们还不知道该如何做到这一点。

定理 1(a) 声称存在一个调和多项式，该多项式显然具有如下性质：

$$h(x) \sim u_{\pi/m}(x) \quad \text{as } \delta(x) \to \infty.$$

A 在 [4] 中构造的正调和函数 $V(x)$ 具有相同的渐近性质：

$$V(x) \sim u_{\pi/m}(x) \quad \text{as } \delta(x) \to \infty.$$

T因此，很自然地可以预期，调和函数 $h(x)$ 和 $V(x)$ 应当是eq相同的。以下结果证实了这一点。

定理 3。 在定理 *1(a)* 的条件下，

$$h(x) = V(x) \quad \textit{for all } x \in K_{\pi/m} \cap R.$$

特别地，$h(x) \geq 0$ 对所有 $x \in K_{\pi/m} \cap R$.

最近，Hubert 和 Raschel 在 [5] 中得到了与我们的定理（1）和定理（3）类似的结果。他们采用一种截然不同、似乎构造性较弱的方法，证明了定理 1(a) 和定理（3）中的结论。相反，我们的方法是算法性的，仅使用线性代数的标准方法就能计算调和多项式。与 [5] 的另一项区别在于，我们对随机变量 X 施加了矩条件：Hubert 和 Raschel 假设 X 只有有限次跳跃，而我们在锥 $K_{\pi/n}$ 中工作时只要求 n 阶矩。还应指出，[5] 包含了比我们的定理 1(b) 强得多的结论：其中证明了，如果存在一个渐近正调和多项式，对应于一个在离开 d 维锥 K 时被杀死的随机游走，那么 K 就是一个有限 Coxeter群的 Weyl室。

我们用来推导调和函数性质的方法，也可以用来推导离开时间 τ_x 的矩的显式表达式。

定理 4. 假设随机变量 X 满足条件 (1) 和 (7)。对于每个整数 $k < \frac{\pi}{2\alpha}$，函数 $x \mapsto \mathbb{E}[\tau_x^k]$ 是次数为 $2k$ 的多项式。特别地，

$$\mathbb{E}[\tau_x] = x_2(x_1 \tan\alpha - x_2).$$

所有高阶矩都可以递归计算。

这一结果还使我们能够确定 $S(\tau_x)$ 的矩。本文末尾将展示如何利用定理 4 推导 $S(\tau_x)$ 前两个矩的显式表达式。

2. Proof of Theorem 1

2.1. 预备结果。 我们先回顾被杀死的布朗运动的正调和函数的一些性质。

引理 5。 对于每个 $\alpha \in (0,\pi)$，函数 $u_\alpha(x_1,x_2) := \Im(x_1+ix_2)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 在 K_α 上为正，并且对于在离开 K_α 时被杀死的布朗运动是调和的，也就是说，

$$\Delta u_\alpha(x) = 0, \quad x \in K_\alpha, \quad u_\alpha\big|_{\partial K_\alpha} = 0. \tag{8}$$

此外，对于每个 $x \in K_\alpha$，都有

$$1 \le \frac{u_\alpha(x)}{|x|^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\delta(x)} \le \frac{\pi}{\alpha}. \tag{9}$$

证明。我们给出这些结果的证明，以便使论述自成一体。

由于函数 $z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上解析，$\Im z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 和 $\Re z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 在经典意义下是调和的：

$$\Delta\Im(x_1+ix_2)^{\frac{\pi}{\alpha}} = \Delta\Re(x_1+ix_2)^{\frac{\pi}{\alpha}} = 0.$$

此外，对于所有 $t \ge 0$,

$$\Im(t+i0)^{\frac{\pi}{\alpha}} = 0, \quad \Im\left(t\cos\alpha + it\sin\alpha\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = 0.$$

因此，(8) 成立。接下来注意到，对于所有 $x \in K_\alpha$.，$u_\alpha(x) > 0$。事实上，对于$x \in K_\alpha$，有 $0 < \arg(x_1+ix_2) < \alpha$，由此可得 $0 < \frac{\pi}{\alpha}\arg(x_1+ix_2) < \pi$.。因此，$u_\alpha$在 K_α.中为正。

为证明 (9)，我们将 $u_\alpha(x)$ 写成极坐标形式：

$$u_\alpha(x) = \Im(x_1+ix_2)^{\frac{\pi}{\alpha}} = \Im(re^{i\beta})^{\frac{\pi}{\alpha}} = r^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi\beta}{\alpha}\right),$$

其中 $r = |x_1+ix_2|$，且 $\beta = \arg(x_1+ix_2)$。然后

$$\frac{u_\alpha(x_1,x_2)}{r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\delta(x)} = \frac{r\sin\left(\frac{\pi\beta}{\alpha}\right)}{\delta(x)}.$$

若 $\beta \le \alpha/2$，则 $\delta(x) = r\sin\beta$，因此，

$$\frac{r\sin\frac{\pi\beta}{\alpha}}{\delta(x)} = \frac{\sin\frac{\pi\beta}{\alpha}}{\sin\beta}.$$

对于 $0 \le \beta \le \alpha/2$，我们有 $0 \le \frac{\pi\beta}{\alpha} \le \pi/2.$。由于 $\sin\varphi$ 在 $[0,\pi/2]$ 上递增，

$$\frac{\sin\frac{\pi\beta}{\alpha}}{\sin\beta} \ge 1.$$

为了得到 $\beta \le \alpha/2$ 的上界 (9)，我们注意到，由于 $\sin\varphi$ 在 $[0,\pi/2]$ 上的凹性，对于直线 $x_2 = \sin_\beta{}^{\beta} x_1$，

$$\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\beta\right) \le \frac{\pi}{\alpha}\sin\beta, \quad \beta \le \frac{\alpha}{2}.$$

如果 $\beta \ge \alpha/2$，那么 $\delta(x) = r\sin(\alpha-\beta)$. 因此，

$$\frac{r\sin\frac{\pi\beta}{\alpha}}{r\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin(\pi-\frac{\pi\beta}{\alpha})}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\frac{\pi}{\alpha}(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

现在令 $\beta' = \alpha - \beta$，我们便将问题化归为已经讨论过的情形 $\beta \le \alpha/2$。由此，引理的证明完成。□

引理 6. 设 $f(x_1,x_2)$ 是一个多项式。若对于所有满足某个$\alpha \in (0,2\pi)$ 的 $x \in R \cap K_\alpha$，都有 $f(x) = 0$，则对于所有 $x \in \mathbb{R}^2$，都有 $f(x) = 0$。

证明。令 n 表示 f 的次数。我们可以将 f 表示为若干齐次多项式之和:

$$f = f_n + f_{n-1} + \ldots + f_0,$$

其中，每个 f_k 都是次数为 k的齐次多项式。 f的边界条件意味着，对于所有 $x \in R \cap K_\alpha$ 以及每个 k，都有 $f_k(x) = 0$。

显然，只需证明 $f_n \equiv 0$即可。将 f_n 写成极坐标形式，可得

$$f_n(r\cos\beta, r\sin\beta) = r^n q_n(\beta).$$

因此，我们需要证明 $q_n \equiv 0$。反设存在 $0 < \beta_0 < \alpha$使得 $q_n(\beta_0) \ne 0.$。不失一般性，假设 $q_n(\beta_0) > 0$。由于 f_n是一个多项式，函数 q_n 是连续的，因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$q_n(\beta) > \frac{q_n(\beta_0)}{2} \quad \text{for all } \beta \in [\beta_0-\varepsilon, \beta_0+\varepsilon].$$

因此，当 $r \to \infty$趋于 $\beta \in [\beta_0-\varepsilon, \beta_0+\varepsilon]$时， $f(r\cos\beta,\ r\sin\beta) \to \infty$一致成立。这与观察结果 $f_n(x) = 0$对所有 $x \in R \cap K_\alpha$均成立相矛盾。因此，对所有 $x \in K_\alpha$，都有 $f_n(x) = 0$。由于 f_n 是多项式，我们得出结论 $f \equiv 0$。□

对于每个随机向量 X，我们定义算子 L_X 如下:

$$L_X\phi(x) := \mathbb{E}[\phi(x+X)] - \phi(x),$$

此处我们可以代入任意满足对所有 x 均有 $\mathbb{E}[|\phi(x+X)|] < \infty$ 的函数 ϕ。

引理 7. 假设 X 满足 (1)，且 $\mathbb{E}|X|^n$ 有限。那么对于每个次数为 n 的多项式 f，都存在一个次数为 $n-3$ 的多项式 g_f，使得

$$L_X f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x) + g_f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

g_f 的系数是关于 X_1 和 X_2的一些多项式的期望。

证明。根据泰勒公式，

$$\begin{aligned} f(x_1+X_1, x_2+X_2) - f(x_1,x_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)X_2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)X_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)X_1X_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)X_2^2\right) \\ &+ \sum_{k+l>2}\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x_1^k \partial x_2^l}(x_1,x_2)X_1^k X_2^l. \end{aligned}$$

根据关于 f 的假设，上一行中的和只包含有限项：所有关于 $k+l>n$ 的混合偏导数均为零。然后，假设 $\mathbb{E}|X|^n$ 使我们可以取数学期望。由此得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f(x_1+X_1,&x_2+X_2)-f(x_1,x_2)\big]=\mathbb{E}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)X_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)X_2\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)X_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)X_1X_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)X_2^2\right)\\&+\sum_{3\le k+l\le n}\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x_1^k\partial x_2^l}(x_1,x_2)X_1^kX_2^l\Big].\end{aligned}$$

根据条件 (1),

$$\mathbb{E}X_1=\mathbb{E}X_2=0,\quad \mathbb{E}X_1^2=\mathbb{E}X_2^2=1 \text{ and } \mathbb{E}X_1X_2=0.$$

Thus

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)X_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)X_2\right]=0$$

and

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)X_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)X_1X_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)X_2^2\right]=\Delta f(x_1,x_2).$$

因此,

$$L_Xf(x)=\frac{1}{2}\Delta f(x)+\sum_{3\le k+l\le n}\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x_1^k\partial x_2^l}(x_1,x_2)\mathbb{E}\left[X_1^kX_2^l\right]$$

注意到

$$\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x_1^k\partial x_2^l}(x_1,x_2)$$

对于所有 $k+l\ge 3$，它都是次数为 $n-3$ 的多项式，我们由此完成该引理的证明。 □

推论 8。 设引理 7 的条件成立。考虑多项式 f 的齐次分量的唯一分解:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}f_j(x),$$

其中每个多项式 f_j 都是 j次齐次的。若对所有
$x\in R\cap K_\alpha$， $L_Xf(x)=0$，则 $\Delta f_n\equiv 0$。

证明。 若 $f_n=0.$，结论显然成立。现在假设 $f_n\neq 0.$。根据引理 6，多项式 $L_Xf(x)=0$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^2$均成立。此外，由引理 7,

$$L_Xf(x)=\frac{1}{2}\Delta f(x)+g_f(x),$$

$_n$其中 g_f的次数不超过 $n-3.$。利用等式 $\Delta f=\sum\Delta f_i$，并注意到 $_{i=0}\ \Delta f_j$ 是 $j-2$次齐次的，我们推得

$$L_Xf(x)=\frac{1}{2}\Delta f_n(x)+\bar{g}_f(x),$$

其中， $\bar{g}_f$的次数不超过 $n-3$。结合对所有 x都有 $L_Xf(x)=0$这一事实，我们得出，对所有 x 都有 $\Delta f_n(x)=0$。□

2.2. 将问题改写为线性方程。令 $\mathbb{R}_n[x_1,x_2]$表示次数为 n的齐次多项式构成的线性空间。令 $\{v_{n,i}\}$ 表示 $\mathbb{R}_n[x_1,x_2]$中的标准基，即

$$v_{n,i} := x_2^i x_1^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n.$$

现在我们将 $\frac{1}{2}\Delta$ 视为从 $\mathbb{R}_n[x_1,x_2]$ 到 $\mathbb{R}_{n-2}[x_1,x_2]$的线性算子。为了写出对应矩阵，我们确定 $\frac{1}{2}\Delta$作用于所有基向量所得的像：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta v_{n,i} &= \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2(x_2^i x_1^{n-i})}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(x_2^i x_1^{n-i})}{\partial x_1^2}\Big)\\ &= \frac{i(i-1)}{2}x_2^{(i-2)\vee 0}x_1^{n-i} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2}x_2^i x_1^{(n-i-2)\vee 0}\\ &= \binom{i}{2}v_{n-2,(i-2)\vee 0} + \binom{n-i}{2}v_{n-2,i\wedge(n-2)}, \quad i=0,1,\dots,n.\end{aligned}$$

因此，对应矩阵 M_n 的大小为 $(n+1)\times(n-1)$，其第 i行的形式为：

$$\big(\underbrace{0,\ \dots,\ 0}_{i-1},\ \tbinom{n-i+1}{2},\ 0,\ \tbinom{i+1}{2},\ \underbrace{0,\ \dots,\ 0}_{n-i-1}\big).$$

显然，所有行都线性无关，因此该矩阵的秩为$n-1$。现在我们在该矩阵中再添加两行，稍后它们将描述 ∂K_α上的边界条件：

$$\big(1,\ 0,\ \dots,\ 0,\ \dots,\ 0\big), \tag{10}$$

$$\big(1,\ b,\ \dots,\ b^i,\ \dots,\ b^n\big), \tag{11}$$

其中 $b=\tan\alpha$。由此，我们得到一个大小为 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩阵 $M_{n,\,b}$。

例 9. 考虑特殊情形 $n=3$, $n=4$，其中 $\alpha=\frac{\pi}{4}$。对于这个α 值，我们有 $b=1$. 因此得到矩阵

$$M_{3,1}=\begin{pmatrix}3&0&1&0\\0&1&0&3\\1&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} \quad and \quad M_{4,1}=\begin{pmatrix}6&0&1&0&0\\0&3&0&3&0\\0&0&1&0&6\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

我们的下一个目标是找出能够保证以下线性方程组存在唯一解的条件：

$$M_{n,b}\begin{pmatrix}a_{n,0}\\ \vdots\\ a_{n,n-2}\\ a_{n,n-1}\\ a_{n,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{n-2,0}\\ \vdots\\ c_{n-2,n-2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $c_{n-2,\,0}$，.....，$c_{n-2,\,n-2}$和 b是任意实数。我们对矩阵 $M_{n,\,b}$ 的构造使得可以将（12）重新表述为拉普拉斯算子的边值问题。事实上，令

$$f(x_1,x_2):=\sum_{i=0}^{n}a_{n,i}v_{n,i}\in\mathbb{R}_n[x_1,x_2], \quad g(x_1,x_2):=\sum_{i=0}^{n-2}c_{n-2,i}v_{n-2,i}\in\mathbb{R}_{n-2}[x_1,x_2]$$

并且 $b=\tan\alpha$，则（12）等价于

$$\frac{1}{2}\Delta f=g \quad \text{with boundary conditions} \quad f(t,0)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0,\ t\in\mathbb{R}.$$

命题 10. 假设 $n\geq 3$ 且 $b\neq\tan\frac{q\pi}{n}$ 对所有 $q\in\mathbb{N}$均成立。那么，方程组 (12) 对任意实数 $c_{n-2,0},\dots,c_{n-2,n-2}$都有唯一解。此外，若 $b=\tan\frac{q\pi}{n}$，其中 $q\in\mathbb{N}$，则 $M_{n,b}$ 的核是 1 维的。

证明. 从矩阵 $M_{n,b}$ 中前几行（$n-1$）的结构可立即看出，可以将变量 $a_{n,i}$ 按指标的奇偶性 i分开。

我们首先证明，可以利用递推公式唯一确定变量 $a_{n,2k}$、 $k=0$、.....、 $\left[\frac{n}{2}\right]$。事实上，倒数第二个方程意味着 $a_{n,0}=0$。此外，对于每个 $k=1$、.....、 $\left[\frac{n}{2}\right]$，都有以下递推关系：

$$\binom{n-2k+2}{2}a_{n,2k-2}+\binom{2k}{2}a_{n,2k}=c_{n,2k-2},$$

这等价于

$$a_{n,2k}=\frac{c_{n,2k-2}-\binom{n-2k+2}{2}a_{n,2k-2}}{\binom{2k}{2}}.$$

这个递推关系使我们能够唯一确定所有指标为偶数的数 $a_{n,i}$ i。现在我们转而讨论指标为奇数的变量。令

$$n_{odd}=\left\lceil\frac{n-3}{2}\right\rceil \quad \text{and} \quad r_{n-2}:=-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b^{2k}a_{n,2k}.$$

于是，关于 $\{a_{2k+1}\}$ 的方程组可以写成矩阵形式

$$M_{n,b}^{odd}\begin{pmatrix}a_{n,1}\\a_{n,3}\\\vdots\\a_{n,2k-1}\\\vdots\\a_{n,2n_{odd}-1}\\a_{n,2n_{odd}+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{n-2,1}\\c_{n-2,3}\\\vdots\\c_{n-2,2k-1}\\\vdots\\c_{n-2,2n_{odd}-1}\\r_{n-2}\end{pmatrix},$$

其中， $i\le n_{odd}$ 时的第 i 行等于

$$\big(\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{i-1},\ \binom{n-2i+1}{2},\ \binom{2i+1}{2},\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{n_{odd}-i}\big)$$

最后一行由下式给出

$$\big(b,\ \ldots,\ b^{2i+1},\ \ldots,\ b^{2n_{odd}+1}\big).$$

现在，我们通过应用所谓的初等行加法矩阵来简化这个方程组。下面回顾相应的定义。

定义 11. 令 E_n 表示 n 维单位矩阵，并令 $\{e_{n,i}\}$ 为 $\mathbb{R}^n$中的标准基。形如

$$E_n(i,j,\lambda):=E_n+\lambda e_{n,i}e_{n,j}^T$$

称为具有参数 i、 j 和 λ的 n 维初等行加法矩阵。将此矩阵左乘，会得到一个矩阵，其中第 j 行乘以 λ 后加到第 i 行。

我们将使用这种行加法矩阵，把矩阵 $M_{n,\,b}$ 转换为上三角矩阵。

引理 12. 设

$$\lambda_{n,1}=(-1)\cdot\frac{b}{\binom{n-1}{2}} \quad \textit{and} \quad \lambda_{n,k+1}=(-1)\cdot\frac{b^{2k+1}+\lambda_{n,k}\binom{2k+1}{2}}{\binom{n-2k-1}{2}},\ 2\le k\le n_{odd}-1.$$

于是我们有

$$UM_{n,b}^{odd} := \overleftarrow{\prod_{k=1}^{n_{odd}}} E_{n_{odd}+1}(n_{odd}+1,k,\lambda_{n,k}) \cdot M_{L,n,b}^{odd}$$
$$= \begin{pmatrix} \binom{n-1}{2} & \binom{3}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \binom{n-2k-1}{2} & \binom{2k+1}{2} & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \binom{n+1-2n_{odd}}{2} & \binom{2n_{odd}+1}{2} \\ 0 & & \cdots & 0 & C(n)\cdot u_{\pi/n}(1,b) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中 $C(n)$ 仅取决于 n，而 $\overleftarrow{\prod}$ 表示矩阵的左乘积，即

$$\overleftarrow{\prod_{k=1}^{l}} A(k) := A(l) \overleftarrow{\prod_{k=1}^{l-1}} A(k),$$

对于任意矩阵族 $\{A(k)\}$.

证明。我们需要证明，用矩阵 $E_{n_{odd+1}}(n_{odd}+1,k,\lambda_{n,k})$ 相乘会消去最后一行的所有非对角元素。根据定义，从左侧乘以 $E_{n_{odd+1}}(n_{odd}+1,k,\lambda_{n,k})$，等价于将第 k 行乘以 $\lambda_{n,k}$ 后加到最后一行。由 $M_{n\,b}^{odd}$ 的定义可知，第 k 次操作会改变最后一行的第 k 个和第 $(k+1)$ 个元素。令 θ_k 表示经过 k 次操作后最后一行的第 $(k+1)$ 个元素。显然，

$$\theta_k = b^{2k+1} + \lambda_{n,k}\binom{2k+1}{2}$$

因此，经过 k 次操作后，第 k 个元素的值等于 $\theta_{k-1} + \lambda_{n,k}\binom{n-2k+1}{2}$。回顾 $\lambda_{n,k}$ 的定义，可知该值为零。因此，剩下要计算的是 $\theta_{n_{odd}}$，即完成所有操作后最后一行的最后一个元素。为此，我们用归纳法证明

$$\lambda_{n,k} = \frac{\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+1}b^{2(k-1-l)+1}\prod_{i=0}^{k-l-2}\binom{n-1-2i}{2}\prod_{j=0}^{l-1}\binom{2k-1-2j}{2}}{\prod_{s=0}^{k-1}\binom{n-1-2s}{2}}.$$

显然，这个表示对于 $k=1$成立。因此，归纳法的基础情形已得到验证。现在假设该结论对于某个 $k \geq 1$成立。那么，根据$\lambda_{n\text{的定义},\ k+1}$，

$$\lambda_{n,k+1} = -\frac{b^{2k+1} + \lambda_{n,k}\binom{2k+1}{2}}{\binom{n-2k-1}{2}}$$
$$= -\left[\frac{b^{2k+1}}{\binom{n-2k-1}{2}} + \frac{\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+1}b^{2(k-1-l)+1}\prod_{i=0}^{k-l-2}\binom{n-1-2i}{2}\prod_{j=0}^{l-1}\binom{2k-1-2j}{2}}{\prod_{i=0}^{k-1}\binom{n-1-2i}{2}} \cdot \frac{\binom{2k+1}{2}}{\binom{n-2k-1}{2}}\right]$$
$$= \left[-b^{2k+1}\cdot\prod_{s=0}^{k-1}\binom{n-1-2s}{2} + \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+2}b^{2(k-1-l)+1}\prod_{i=0}^{k-l-2}\binom{n-1-2i}{2}\right.$$
$$\left.\times\prod_{j=0}^{l-1}\binom{2k-1-2j}{2}\binom{2k+1}{2}\right]\frac{1}{\prod_{s=0}^{k-1}\binom{n-1-2s}{2}\cdot\binom{n-2k-1}{2}}.$$

将指标 l 和 j平移，可得

$$\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+2}b^{2(k-1-l)+1}\prod_{i=0}^{k-l-2}\binom{n-1-2i}{2}\prod_{j=0}^{l-1}\binom{2k-1-2j}{2}\binom{2k+1}{2}$$
$$=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}b^{2((k+1)-1-l)+1}\prod_{i=0}^{(k+1)-l-2}\binom{n-1-2i}{2}\prod_{j=0}^{l-1}\binom{2(+1)k-1-2j}{2}.$$

利用这个等式，并注意到

$$-b^{2k+1}\prod_{i=0}^{k-1}\binom{n-1-2i}{2}=(-1)^1b^{2(k+1)-1}\prod_{i=0}^{(k+1)-2}\binom{n-1-2i}{2},$$

我们完成了归纳步骤的证明。因此，

$$\theta_{n_{odd}}=b^{2n_{odd}+1}+\lambda_{n,n_{odd}}\binom{2n_{odd}+1}{2}$$
$$=b^{2n_{odd}+1}$$
$$+\frac{\sum_{l=0}^{n_{odd}-1}(-1)^{l+1}b^{2(n_{odd}-1-l)+1}\prod_{i=0}^{n_{odd}-l-2}\binom{n-1-2i}{2}\prod_{j=0}^{l-1}\binom{2n_{odd}-1-2j}{2}}{\prod_{s=0}^{n_{odd}-1}\binom{n-1-2s}{2}}\binom{2n_{odd}+1}{2}.$$

再次将指标 l 和 j 平移后，我们得到

$$\theta_{n_{odd}}=\frac{\sum_{l=0}^{n_{odd}}(-1)^{l}b^{2(n_{odd}-l)+1}\prod_{i=0}^{n_{odd}-l-1}\binom{n-1-2i}{2}\prod_{j=0}^{l-1}\binom{2n_{odd}+1-2j}{2}}{\prod_{s=0}^{n_{odd}-1}\binom{n-1-2s}{2}}.$$

注意到

$$\prod_{t=0}^{N}\binom{M-2t}{2}=\frac{M!}{(M-2N-2)!}2^{-N-1},$$

对于所有 M，$N\geq 0$，我们可以进一步简化上面的表达式：

$$\theta_{n_{odd}}=\frac{1}{\binom{n}{2n_{odd}+1}}\sum_{l=0}^{n_{odd}}(-1)^{l}b^{2n_{odd}+1-2l}\binom{n}{2n_{odd}+1-2l}.$$

回想起 $u_{\pi/n}(x_1,x_2)=\Im(x_1+ix_2)^n$，我们可推知

$$\theta_{n_{odd}}=\frac{1}{\binom{n}{2n_{odd}+1}}u_{\pi/n}(1,b).$$

这就完成了该引理的证明。 □

正如我们已经看到的，所有具有偶数指标的 $a_{n,j}$ 都由数值 $c_{n,j}$ 唯一确定。现在，引理 12 表明，对于所有满足 $u_{\pi/n}(1,b)$ 不为零的 b，矩阵 $M^{odd}_{n\,b}$, 都是可逆的。但根据定义可立即得知，$u_{\pi/n}(1,b)$ 的所有零点都具有 $b=\tan(q\pi/n)$，$q\in\mathbb{N}$ 的形式。因此，第一个断言得证。引理 12 也表明，当 $b=\tan(q\pi/n)$ 时，核 $M_{n,b}$ 是一维的。至此，命题的证明完成。□

以下断言可由 $M_{n,\tan(\pi/n)}$ 的核是一维这一事实立即得出。

推论 13. 设 f 是次数为 n 的齐次多项式。若 $\Delta f=0$ 且 $f|_{\partial K_{\pi/n}}=0$，则对于某个常数 $c\in\mathbb{R}.$，有 $f=cu_{\pi/n}$

2.3. 定理 1 的证明。 设 h 是次数为 m 的多项式。利用基 $\{v_{k,j}\}$，我们可以将 h 表示如下

$$h(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{m}h_k(x_1,x_2),$$

其中

$$h_k(x_1,x_2):=\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}v_{k,j}\quad k=0,1,\dots,m.$$

注意到条件

$$h(t,0)=h(t\cos(\pi/m),t\sin(\pi/m))=0\quad\text{for all } t$$

等价于

$$h_k(t,0)=h_k(t\cos(\pi/m),t\sin(\pi/m))=0\quad\text{for all } t \text{ and all } k.$$

为了构造所需的多项式并证明其唯一性，我们将使用“逆向”归纳法，并证明以下陈述。对于每一个 $l\le m$ 都存在唯一的、相差一个常数倍的数 $\{a_{i,j}\}$ 满足 $l\le i\le m$ 以及 $0\le j\le i$ 使得

(a) $\deg L_X\left(\sum_{k=l}^{m}h_k\right)\le l-3,$

(b) $h_k(t,0)=h_k\big(t\cos(\pi/m),t\sin(\pi/m)\big)=0$ *for all* t *and all* $l\le k\le m.$

我们首先检验基础情形 $l=m$。根据引理 5，多项式 $Q_m(x)=u_{\pi/m}(x)$ 具备所有所需性质。设 $h_m(x)$ 是任意满足 (a) 和 (b) 的 m-齐次多项式。结合 (a) 与引理 7，我们可推得 $\Delta h_m(x)=0$。由于 h_m 满足 (b) 中的边界条件，我们可以应用推论 8 得出 $h_m=cQ_m$。

现在假设该陈述对某个 $l+1\le m$ 成立。那么存在数值$\{c_{i,j}\}$ 使得

$$L_X\left(\sum_{k=l+1}^{m}h_k\right)=\sum_{i=0}^{l-2}\sum_{j=0}^{i}c_{i,j}v_{i,j}.$$

根据命题 10，线性方程组

$$M_{l,b}\begin{pmatrix}a_{l,0}\\ \vdots\\ a_{l,l-2}\\ a_{l,l-1}\\ a_{l,l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_{l-2,0}\\ \vdots\\ -c_{l-2,l-2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

有唯一解。换言之，存在唯一的 l-齐次多项式 h_l使得

$$\frac{1}{2}\Delta h_l=-\sum_{i=0}^{l-2}c_{l-2,i}v_{l-2,i}$$

and

$$h_l(t,0)=h_l\big(t\cos(\pi/m),t\sin(\pi/m)\big)=0\quad\text{for all } t.$$

结合引理 7，我们推断出 $L_X\left(\sum_{k=l}^{m}h_k\right)$ 的次数不超过$l-3$。因此，归纳法的步骤得证。

我们在上文证明的断言意味着，存在唯一的（相差一个常数倍）次数为 m 的多项式 $h(x)$，使得

$$L_Xh(x)=0\text{ for all }x\in\mathbb{R}^2\text{ and }h|_{\partial K_{\pi/m}}=0.$$

此外， h 的 m-齐次部分与 $u_{\pi/m}$ 成正比。

若条件 (7) 成立，则对于每个 $x\in R\cap K_{\pi/m}$，有

$$\{x+X\notin K_{\pi/m}\}=\{x+X\in\partial K_{\pi/m}\}.$$

因此，对于每个 $x \in R \cap K_{\pi/m}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[h(x+X), x+X \in K_{\pi/m}\big] &= \mathbb{E}\big[h(x+X)\big] - \mathbb{E}\big[h(x+X), x+X \notin K_{\pi/m}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[h(x+X)\big] - \mathbb{E}\big[h(x+X), x+X \in \partial K_{\pi/m}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[h(x+X)\big],\end{aligned}$$

在最后一步中，我们用到了等式 $h|_{\partial K_{\pi/m}} = 0$。注意到 $L_X h = 0$ 等价于 $\mathbb{E}\big[h(x+X)\big] = h(x)$，由此可知，对于在离开 $K_{\pi/m}$时被杀死的 $S(n)$， h 是调和的。所有系数都可以用矩表示，这一点可由引理 7 得出。因此，定理的第一部分得证。

我们的方法使我们能够证明以下结果。

推论 14. 设 f 是一个满足以下条件的多项式

$$L_X f = 0 \quad and \quad f|_{\partial K_{\pi/m}} = 0. \tag{14}$$

若 f 的次数小于 m ，则 $f = 0$.

证明. 设 $r < m$ 表示多项式 f的次数。照例，我们将 f分解为齐次部分： $f = \sum_{j=0}^{r} f_r$。根据推论 8， $\Delta f_r = 0$。此外，$f_r|_{\partial K_{\pi/m}} = 0$。我们可以将这些等式改写为线性方程:

$$M_{r,b} \begin{pmatrix} a_{r,0} \\ \vdots \\ a_{r,r-2} \\ a_{r,r-1} \\ a_{r,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中，$a_{r,\,j}$ 是 f_r 在基 $v_{r,\,j}$下的系数。假设 $r < m$意味着，对于所有 $q \in \mathbb{N}$，都有 $b = \tan(\pi/m) \neq \tan(q\pi/r)$。因此，应用命题 10，我们推断出，对于所有 j ，$a_{r,\,j} = 0$ 是上述方程组的唯一解。换言之，$f_r = 0$。这意味着， $f - f_r$ 满足（14）中的所有条件。重复相同的论证，我们得出所有分量 f_j 均等于零。□

现在我们转向定理 1(b) 的证明。

设 h 是关于 $S(n)$ 的次数为 m 的正调和多项式，在离开 K_α 时取零，即 ，

$$\mathbb{E}[h(x+X); x+X \in K_\alpha] = h(x) \quad \text{and} \quad h(x) \geq 0 \quad \text{for all } x \in R \cap K_\alpha.$$

边界条件 $h|_{R\cap\partial K_\alpha} = 0$ 和假设（7）意味着

$$L_X h(x) = 0 \quad \text{for all } x \in R \cap K_\alpha.$$

然后，应用推论 8，我们得出

$$\Delta h_m(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{and} \quad h_m|_{\partial K_\alpha} = 0$$

其中， h_m 表示 h 的 m次齐次部分。将这个边值问题写成线性方程的形式，我们得到

$$M_{m,b} \begin{pmatrix} a_{m,0} \\ \vdots \\ a_{m,m-2} \\ a_{m,m-1} \\ a_{m,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其中， $b = \tan\alpha$ 和 $\{a_{m,i}\}$ 是 h_m 在标准基 $\{v_{m,ik}\}$下的系数，即$h_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_{m,\,i} v_{m,\,i}$。

命题 10 表明，如果方程组 (15) 存在非平凡解，那么$\alpha = q\pi/m$ 对某个 $q \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$成立。因此，接下来只需证明 $q = 1$。假设这不成立，即 $q \geq 2$。正如我们在命题 10 中所证明的，矩阵 $M_{m,\tan(q\pi/m)}$ 的核是一维的。注意到 $u_{\pi/m}$ 是 (15) 的一个解，我们可推知所有非平凡解都具有形式 $cu_{\pi/m}$ ，因此 $h_m(x) = c_0 u_{\pi/m}$, 其中某个 c_0为正数。若 $q \geq 2$ ，则函数 $u_{\pi/m}(x_1, x_2)$ 对所有 x_1, x_2均为负数

使得 $\arg(x_1+ix_2)\in(\pi/m,2\pi/m)$。但这与 h_m 为正数这一假设矛盾。因此，$q=1$，证明完毕。

3. Proof of Theorem 3

我们首先通过推导在离开 K_α时被杀死的随机游走的一些性质，为定理的证明做准备。

引理15。假设(1) 和(7) 成立。那么，对于每个 $x\in K_\alpha\cap R$，以下性质之一成立：

- $\mathbb{P}\big(x+X\in\partial K_\alpha|X\neq 0\big)=1$,
- 对于每个 $M>0$，都存在 $n_0=n_0(M)$ 使得
$$\mathbb{P}\big(\max\{x_1+S_1(n_0),x_2+S_2(n_0)\}>M,\tau_x>n_0\big)>0.$$

证明。令 v_1 和 v_2 为 R的生成元，即
$$R=\{\lambda_1v_1+\lambda v_2,\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{Z}\}.$$
假设 (7) 表明，我们可以取 $v_1,\ v_2\in\partial K_\alpha$。因此，存在一个线性变换 ϕ 使得
$$\phi(v_1)=(1,0),\quad \phi(v_2)=(0,1)\quad\text{and}\quad \phi(K_\alpha)=\mathbb{R}^2_+.$$
经过此变换后，$\phi(R)=\mathbb{Z}^2$ 且 $\phi(K_\alpha\cap R)=\mathbb{Z}^2_+$.。令 $X^\phi:=\phi(X)$，并令 $S^\phi(k)=\phi(S(k))$ 对每个 $k\in\mathbb{N}_0$成立。结合 (1) 与 ϕ的线性性，我们得到
$$\mathbb{E}[X_1^\phi]=\mathbb{E}[X_2^\phi]=0.$$
此外，(7) 表明该随机游走 S^ϕ 满足
$$\mathbb{P}(x+S^\phi(\tau_x^\phi)\in\partial\mathbb{R}^2_+)=1\quad\text{for all } x\in\mathbb{Z}^2_+,\tag{16}$$
其中
$$\tau_x^\phi:=\inf\{n\geq 1:x+S^\phi(n)\notin\mathbb{R}^2_+\}.$$
首先假设存在 $a,\ b\geq 0$，使得 $a+b>0$ 且
$$\mathbb{P}\big(X^\phi=(a,b)\big)>0.$$
那么存在 n_0 使得
$$\mathbb{P}\big(\max\{x_1+S_1(n_0),x_2+S_2(n_0)\}>M,\tau_x>n_0\big)>0,\quad x\in K_\alpha\cap R;$$
只需在开始时有大量步数 $\phi^{-1}((a,b))$。

因此，剩下只需考虑这样的情形：对所有 $a,b\geq 0$，都有 $\mathbb{P}\big(X^\phi=(a,b)\big)=0$，其中$a+b>0$。换言之，$X^\phi$ 的所有非零跳跃都具有 $(a,-1)$ 和 $(-1,b)$ 的形式，其中 $a,\ b\geq -1$。（注意，由于 (16)，a,b 不可能取更小的值。）接下来注意到，a,b 中至少有一个值必须严格大于 1。确实，若 $a,b\leq 1$，则所有非零跳跃都位于半平面 $\{(x_1,x_2):x_1+x_2\leq 0\}$ 中。但这与假设 (1) 矛盾。

不失一般性，假设对于某个 $a>1$，有 $\mathbb{P}(X^\phi=(a,-1))>0$。此外，$\mathbb{E}X_1^\phi=\mathbb{E}X_2^\phi=0$ 意味着存在 $b\geq 1$，使得 $\mathbb{P}(X^\phi=(-1,b))>0$。若起始点 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2_+$ 满足这样的条件 $x_2>1$，则我们可以交替进行跳跃 $\phi^{-1}((a,-1))$ 和 $\phi^{-1}((-1,b))$，从而得出对于每个充分大的 n_0，$\mathbb{P}(x_1+S_1(n_0)>M,\tau_x>n_0)$ 为正。若 $x=(x_1,1)$，其中 $x_1>1$，则我们先进行一步$\phi^{-1}((-1,b))$，将问题化归为起始点满足 $x_2>1$ 的情形。因此，剩下只需考虑起始点 $x=(1,1)$。但显然，$\mathbb{P}((1,1)+X^\phi\in\partial R^2_+|X\neq 0)=1$。引理得证。□

注 16. 在前一个引理的证明中，我们已经证明，如果(7) 成立，那么存在 n_0 使得
$$\mathbb{P}\left(\max\{x_1+S_1(n_0),x_2+S_2(n_0)\}>M,\tau_x>n_0\right)>0$$

对所有 $x \neq \phi^{-1}(\widehat{x})$均成立，其中 $\widehat{x} = \phi^{-1}((1,1))$。此外，当 X^ϕ 在 $[0,\infty)^2$处有非零跳跃时，$\widehat{x}$ 也具有相同的性质。结合 *[7],*中的引理 ***4***，我们得到非负调和函数 V 的如下下界

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E}[V(x+S(n_0)); \tau_x > n_0] \\ &\geq \mathbb{E}[V(x+S(n_0)); \max\{x_1+S_1(n_0), x_2+S_2(n_0)\} > M\tau_x > n_0] \\ &\leq \delta\mathbb{P}\left(\max\{x_1+S_1(n_0), x_2+S_2(n_0)\} > M, \tau_x > n_0\right) > 0. \end{aligned}$$

因此，函数 V 在 $(K_{\pi/m} \cap R) \setminus \{\widehat{x}\}$ 上严格为正。此外，$V(\widehat{x}) > 0$，如果 X^ϕ 在 $[0,\infty)^2$ 中有非零跳跃。

最后，如果 X^ϕ 的所有非零跳跃都具有 $(a,-1)$ 和 $(-1,b)$ 的形式，那么

$$\mathbb{P}(\tau_{\widehat{x}} > n) = (\mathbb{P}(X=0))^n, \quad n \geq 1.$$

该概率的指数衰减意味着 $V(\widehat{x}) = 0$。 ◇

在下一个引理中，我们将描述定理 1(a) 中构造的多项式 h 的渐近行为。

引理 17. 设 h 为定理 *1* 中构造的多项式。则以下三个陈述成立。

(a) 存在一个常数 C 使得

$$|h(x)| < C\delta(x)|x|^{m-1}, \quad x \in K_{\pi/m}.$$

(b) 存在 $M > 0$ 使得

$$h(x) > \frac{1}{2}\delta(x)|x|^{m-1} \quad \textit{for all } x \in K_{\pi/m} \textit{ with } |x| \geq M.$$

(c) 有

$$\lim_{\delta(x)\to\infty} \frac{h(x) - u_{\pi/m}(x)}{|x|^{m-1}\delta(x)} = 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{\delta(x)\to\infty} \frac{h(x)}{u_{\pi/m}(x)} = 1.$$

证明。由对称性，只需对 $x = (x_1, x_2) \in K_{\pi/m}$且 $\arg(x_1 + ix_2) \leq \frac{\pi}{2m}$证明这三个结论。对于这样的点 x，有 $\delta(x) = x_2$。

根据定理 1(a)，$h(x) = u_{\pi/m}(x) + r_m(x)$，且 r_m 的次数不超过 $m-1$。边界条件 $h(x_1,0) = u_{\pi/m}(x_1,0) = 0$ 意味着多项式 $u_{\pi/m}$ 和 r_m 可被 x_2整除。因此，$h(x) = x_2(\widetilde{u}_m(x) + \widetilde{r}_m(x))$，其中$\widetilde{u}_{\pi/m}(x) = \frac{u_{\pi/m}(x)}{x_2}$是次数为 $m-1$ 的齐次多项式，而 $\widetilde{r}_m(x)$ 是次数为$m-2$的多项式。

现在，$|h|$的上界显而易见。事实上，根据三角不等式，

$$|h(x)| \leq x_2\left(\left|\widetilde{u}_{\pi/m}(x)\right| + |\widetilde{u}_m(x)|\right) \leq Cx_2|x|^{m-1}.$$

为了得到 (b) 中的下界，我们需要从下方估计差值$\widetilde{u}_{\pi/m}(x) - \widetilde{r}_m(x)$。由于 $\widetilde{r}_m(x)$ 的次数为 $m-2$，因此对于某个常数 C_1，有 $|\widetilde{r}_m(x)| \leq C_1|x|^{m-2}$。此外，利用极坐标，我们得到

$$\widetilde{u}_{\pi/m}(x) = \frac{|x|^m \sin(m\beta)}{|x|\sin\beta},$$

其中 $\beta = \arg(x_1 + ix_2)$。我们在引理 5 的证明中已证明，对于所有 $\beta \in [0, \pi/(2m)]$，$\frac{\sin(m\beta)}{\sin\beta} \geq 1$。这意味着

$$\widetilde{u}_{\pi/m}(x) \geq |x|^{m-1} \quad \text{for all} \quad x \in K_{\pi/m} \quad \text{with} \quad \arg(x_1+ix_2) \leq \frac{\pi}{2m}.$$

因此，

$$\widetilde{u}_{\pi/m}(x) - \widetilde{r}_m(x) \geq |x|^{m-1} - C_1|x|^{m-2}$$

对于所有满足 $\arg(x_1 + ix_2) \leq \frac{\pi}{2m}$ 的 $x \in K_{\pi/m}$，结论成立。因此，取$M \geq 2C_1$，(b) 中的界便成立。

接下来我们注意到

$$\frac{h(x) - u_{\pi/m}(x)}{x_2|x|^{m-1}} = \frac{\widetilde{r}_m(x)}{|x|^{m-1}}.$$

由于 $\tilde{r}_m$ 的次数为 $m-2$，前一个不等式右边在 $\delta(x)\to\infty$ 时趋于零。这就得到了 (c) 中的第一个关系。为了证明 (c) 中的第二个极限，我们写出

$$\frac{h(x)}{u_{\pi/m}(x)} = 1 + \frac{h(x)-u_{\pi/m}(x)}{u_{\pi/m}(x)} = 1 + \frac{h(x)-u_{\pi/m}(x)}{\delta(x)|x|^{m-1}}\frac{\delta(x)|x|^{m-1}}{u_{\pi/m}(x)}.$$

现在应用式 (9) 中的下界，我们推得

$$\left|\frac{h(x)}{u_{\pi/m}(x)} - 1\right| \le \frac{h(x)-u_{\pi/m}(x)}{\delta(x)|x|^{m-1}}.$$

我们已经证明，右端的比值趋于零。因此，第二个等式也得到了证明。□

现在我们可以证明定理 3。

定理 3 的证明。 首先假设 $x\in K_{\pi/m}\cap R$ 满足以下条件：$V(x)>0$。

令 $\widehat{\mathbb{P}}_x$ 表示随机游走 $S(n)$ 在离开 $K_{\pi/m}$ 时被杀死后，其分布的 Doob h-变换。在这个新测度下，$S(n)$ 是一个转移核为

$$\widehat{P}(x,y) = \frac{V(y)}{V(x)}\mathbb{P}(x+S(1)=y,\tau_x>1), \quad x,y\in K_{\pi/m}\cap R.$$

考虑随机变量序列

$$W_x(n) := \frac{h(x+S(n))}{V(x+S(n))}, \quad n\ge 0.$$

结合 [7], 中的引理 17 和引理 4，我们推得这些随机变量被某个常数 C 所界。此外，根据 $\widehat{\mathbb{P}}_x$ 的定义，

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}_x\left[W_x(n+1)|x+S(n)=y\right] &= \sum_{z\in K_{\pi/m}\cap R}\frac{h(z)}{V(z)}\widehat{\mathbb{P}}(y,z)\\ &= \sum_{z\in K_{\pi/m}\cap R}\frac{h(z)}{V(z)}\frac{V(z)}{v(y)}\mathbb{P}(y+X=z)\\ &= \frac{1}{V(y)}\mathbb{E}[h(y+X); y+X\in K_{\pi/m}].\end{aligned}$$

回想一下，h 是调和的，我们得出

$$\widehat{\mathbb{E}}_x\left[W_x(n+1)|x+S(n)=y\right] = \frac{h(y)}{V(y)}.$$

因此，序列 $W_x(n)$ 在 $\widehat{\mathbb{P}}_x$ 下是一个鞅，特别地，

$$\widehat{\mathbb{E}}_x[W_x(n)] = W_x(0) = \frac{h(x)}{V(x)}, \quad n\ge 0.$$

接下来，我们计算序列 $\mathbb{E}[W_x(n)]$ 的极限。首先将这个期望分成两部分：

$$\widehat{\mathbb{E}}_x[W_x(n)] = \widehat{\mathbb{E}}_x[W_x(n);\delta(x+S(n))\le\log^2 n] + \widehat{\mathbb{E}}_x[W_x(n);\delta(x+S(n))>\log^2 n].$$

回想一下，$W_x(n)$ 是有界的，我们得到

$$\widehat{\mathbb{E}}_x[W_x(n);\delta(x+S(n))\le\log^2 n] \le C\widehat{\mathbb{P}}(\delta(x+S(n))\le\log^2 n).$$

将此结果与 [7], 中的命题3结合，我们推断

$$\widehat{\mathbb{E}}_x[W_x(n);\delta(x+S(n))\le\log^2 n]\to 0 \quad \text{as } n\to\infty. \tag{17}$$

根据 [4] 中的定理2以及我们的引理13，

$$\lim_{\delta(y)\to\infty}\frac{V(y)}{u_{\pi/m}(y)} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\delta(y)\to\infty}\frac{h(y)}{u_{\pi/m}(y)} = 1. \tag{18}$$

因此，存在 $\varepsilon_n\to 0$ 使得在事件 $\{\delta(x+S(n))>\log^2 n\}$ 上，$|W_x(n)-1|\le\varepsilon_n$。于是，

$$\widehat{\mathbb{E}}_x[W_x(n);\delta(x+S(n))>\log^2 n]\to 1 \quad \text{as } n\to\infty.$$

结合 (17)，我们得出 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[W_x(n)] = 1$。但我们知道，对于每个 n，$\mathbb{E}_x[W_x(n)] = W_x(0)$。这意味着，对于所有满足$V(x) > 0$的 x，都有 $h(x) = V(x)$。根据注 16，只需在假设 X^ϕ 的所有非零跳跃均为 $(a, -1)$ 和 $(-1, b)$ 的形式时，考虑点 $\widehat{x}$。在此假设下，我们有

$$h(\widehat{x}) = \mathbb{E}[h(\widehat{x} + X); \widehat{x} + X \in K_{\pi/m}] = h(\widehat{x})\mathbb{P}(X = 0).$$

由于 X 是非退化的，该方程只有一个解：$h(\widehat{x}) = 0$。因此，证明完毕。□

4. Moments of τ_x: proof of Theorem 4

我们首先为矩 $\mathbb{E}[\tau_x^k]$推导上界。

引理 18。 对于每个整数 $k < \frac{\pi}{2\alpha}$，存在一个常数 C，使得

$$\mathbb{E}\big[\tau_x^k\big] \le C\delta(x)|x|^{2k(p_\alpha-1)/p_\alpha}, \quad x \in K_\alpha \cap R,$$

其中 $p_\alpha = \pi/\alpha$。

证明。根据 [4], 中的定理 3，对于每个固定的 $x_0 \in K_\alpha$，存在 $M > 0$ 以及一个常数 C，使得

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \le \frac{Cu_\alpha(x + Mx_0)}{n^{p_\alpha/2}}.$$

将此结果与（9）中的上界结合，并注意到存在 $\delta_0 > 0$ 使得$|x| \ge \delta(x) \ge \delta_0$ 对所有 $x \in K_\alpha \cap R$成立，我们便得到

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \le C\frac{|x|^{p_\alpha-1}\delta(x)}{n^{p_\alpha/2}}, \quad x \in K_\alpha \cap R \tag{19}$$

其中某个 $C > 0$.

令 $p_k(z) := (z+1)^k - z^k$. 于是有

$$\sum_{z=0}^{n-1} p_k(z) = n^k$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n)\mathbb{P}(\tau_x > n) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_k(n)\Big[\sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_x = j)\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_x = j)\sum_{i=0}^{j-1} p_k(i) = \sum_{j=1}^{\infty} j^k\mathbb{P}(\tau_x = j) \\ &= \mathbb{E}[\tau_x^k].\end{aligned}$$

这些等式表明，对每个 $n_x \ge 1$,

$$\mathbb{E}[\tau_x^k] \le n_x^k + \sum_{n=n_x}^{\infty} p_k(n)\mathbb{P}(\tau_x > n).$$

注意到对所有 $n \ge 1$，$p_k(n) \le k2^{k-1}n^{k-1}$ 成立，并应用（19），我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_x}^{\infty} p_k(n)\mathbb{P}(\tau_x > n) &\le C_1|x|^{p_\alpha-1}\delta(x)\sum_{n=n_x}^{\infty} n^{k-1-p_\alpha/2} \\ &\le C_2|x|^{p_\alpha-1}\delta(x)n_x^{k-p_\alpha/2}\end{aligned}$$

对每个 $k < \frac{p_\alpha}{2} = \frac{\pi}{2\alpha}$均成立。因此,

$$\mathbb{E}[\tau_x^k] \le n_x^k + C|x|^{p_\alpha-1}\delta(x)n_x^{k-p_\alpha/2}.$$

现在选取 $n_x = 1 + \lfloor |x|^{2(p_\alpha-1)/p_\alpha} \rfloor$，并再次使用界 $|x| \ge \delta(x) \ge \delta_0 > 0$，即可得到所需的不等式。□

接下来，我们将表述一个结果，该结果将我们构造调和多项式的方法推广到方程 $L_X G = g$ 右端项为多项式的情形。

命题 19。 假设定理 *4* 的所有条件均成立。对于每个次数为 $n-2$ 且满足 $n < \frac{\pi}{\alpha}$ 的多项式f（x），存在唯一一个次数为 n 的多项式 F（x），使得

$$L_X F(x) = f(x), \quad x \in K_\alpha \cap R$$

and

$$F(x) = 0, \quad x \in \partial K_\alpha \cap R.$$

证明。 照例，我们将所有多项式分解为齐次分量：

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k(x) \quad \text{and} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} f_k(x).$$

与命题 10 的证明类似，我们从首项部分 F_n 开始，递归地确定各分量 F_k。根据引理 7，

$$L_X F(x) = \frac{1}{2}\Delta F_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\Delta F_k(x) + g_F(x),$$

其中 $\widehat{g}_F$ 是一个次数为 $n-3$ 的多项式。于是，我们可以将方程 $L_X F = f$ 改写为：

$$\frac{1}{2}\Delta F_n(x) = f_{n-2}(x) + \sum_{k=0}^{n-3} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\Delta F_k(x) - g_F(x).$$

多项式 $\frac{1}{2}\Delta F_n(x)$ 和 $f_{n-2}(x)$ 的次数为 $n-2$，右侧的其他所有多项式次数都较低。因此，我们得到方程

$$\frac{1}{2}\Delta F_n(x) = f_{n-2}(x) \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\Delta F_k(x) = \sum_{k=0}^{n-3} f_k(x) - g_F(x).$$

我们已经知道，对于所有 $x \in \partial K_\alpha \cap R$，边界条件 $F(x) = 0$ 意味着每个分量 F_k 在 $K_\alpha \cap R$ 上都为零。因此，最高阶分量 F_n 应满足

$$\frac{1}{2}\Delta F_n(x) = f_{n-2}(x) \quad \text{and} \quad F_n(x) = 0, \quad x \in \partial K_\alpha \cap R.$$

用线性方程表示，我们得到

$$M_{n,b} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ \vdots \\ a_{n,n-2} \\ a_{n,n-1} \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-2,0} \\ \vdots \\ p_{n-2,n-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} v_{n,i}$, $f_{n-2}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} p_{n-2,i} v_{n-2,i}$ 且 $b = \tan\alpha$。条件 $n < \pi/\alpha$ 意味着 $b < \tan(\pi/n)$。于是，根据命题 10，矩阵 $M_{n,b}$ 可逆，且方程组有唯一解。

已知 F_n 并再次利用引理 7，我们得出方程 $L_X F = f$ 等价于

$$L_X(F - F_n)(x) = \sum_{k=0}^{n-3} f_k(x) - g_{F_n}(x).$$

此外，对所有 $x \in \partial K_\alpha \cap R$，我们还有边界条件 $(F - F_n)(x) = 0$。多项式 $\sum_{k=0}^{n-3} f_k(x) - g_{F_n}(x)$ 的次数为 $n-3$，而多项式 $F - F_n$的次数为$n-1$。因此，重复相同的论证 $n-1$ 次，我们确定所有分量F_k。 □

定理 *4* 的证明。 我们首先对离开时间的定义进行形式上的修改，令

$$\tau_x := \inf\{n \geq 0 : x + S(n) \notin K_\alpha\}.$$

该定义使我们能够考虑不属于 K_α 的起始点。显然，对于所有 $x \notin K_\alpha$， $\tau_x = 0$ 。

对于每个 $l \geq 1$，我们设

$$G_l(x) := \mathbb{E}[\tau_x^l], \quad x \in K_\alpha \cap R.$$

我们先求出函数 $G_1(x)$的精确表达式。根据马尔可夫性质，

$$\begin{aligned} G_1(x) = \mathbb{E}[\tau_x] &= \sum_{y \in R} \mathbb{E}[\tau_x, x + S(1) = y] \\ &= 1 + \sum_{y \in K_\alpha \cap R} \mathbb{E}[\tau_y] = 1 + \mathbb{E}[G_1(x + X); x + X \in K_\alpha]. \end{aligned}$$

换言之，

$$L_X G_1(x) = -1, \ x \in K_\alpha \cap R \quad \text{and} \quad G_1(x) = 0, \ x \in \partial K_\alpha \cap R.$$

根据命题 19，存在一个二次多项式 F_1，它满足相同的边值问题。由于 F 在 K_α 的边界上为零，因此 F_1 可被$x_2(x_2 - x_1 \tan \alpha)$整除。回想一下， F_1 是二次的，我们得出 $F_1(x) = Cx_2(x_2 - x_1 \tan \alpha)$。从方程 $L_X F_1(x) = -1$ 容易看出 $C = -1$。因此，$F_1(x) = x_2(x_1 \tan \alpha - x_2)$。现在显然，

$$|F_1(x)| \leq C|x|\delta(x), \quad x \in K_\alpha. \tag{20}$$

由于 F_1 和 G_1 满足同一个方程，它们的差对于离开 K_α时被杀死的随机游走是调和的：

$$L_X(F_1 - G_1)(x) = 0, \ x \in K_\alpha \cap R \quad \text{and} \quad F_1(x) - G_1(x) = 0, \ x \in \partial K_\alpha \cap R.$$

结合引理 18、 $k = 1$、(20) 和 (18)，我们得出

$$\lim_{\delta(x) \to \infty} \frac{F_1(x) - G_1(x)}{V(x)} = 0. \tag{21}$$

此外，由 [7] 中的 $k = 1$、(20) 和引理 4 可推出

$$\sup_{x : V(X) > 0} \frac{|F_1(x) - G_1(x)|}{V(x)} < \infty. \tag{22}$$

To 为证明 $G_1(x) = F_1(x)$，我们仿照定理 3 的证明，考虑序列

$$W_x^{(1)}(n) := \frac{F_1(x + S(n)) - G_1(x + S(n))}{V(x + S(n))}, \quad n \geq 0.$$

分子和分母中的函数的调和性意味着，序列 $W_x^{(1)}(n)$ 在测度 $\widehat{\mathbb{P}}_x$ 下是一个鞅，特别是，

$$\widehat{\mathbb{E}}_x[W_x^{(1)}(n)] = W_x^{(1)}(0) = \frac{F_1(x) - G_1(x)}{V(x)}, \quad n \geq 0.$$

此外，(22) 表明这个鞅有界。

重复定理 3 证明中的论证，并用 (21) 代替 (18)，^我们得出，当 $n \to \infty$ 时， $\mathbb{E}_x[W_x(n)] \to 0$ 。因此，对于所有满足 $V(x) > 0$ 的 x，都有 $F_1(x) = G_1(x)$。我们已经知道，函数 V 仅在点 $\phi^{-1}(1, 1)$ 处为零。当且仅当 X^ϕ 的所有跳跃均为 $(-1, a)$ 或 $(b, -1)$ 时，这种情况才会发生。但在此情形下，$\tau_{\phi^{-1}(1,1)} = 1$ 以概率 1，即 $G_1(\phi^{-1}(1, 1))$。另一方面，关于跳跃的这个条件意味着 $L_X F_1(\phi^{-1}(1, 1)) = -F_1(\phi^{-1}(1, 1))$。结合等式 $L_X F_1 = -1$，我们得出 $F_1(\phi^{-1}(1, 1)) = 1.$。因此，函数 G_1 和 F_1 在整个集合 $K_\alpha \cap R$ 上重合。

要推导高阶矩的上述性质，可以采用以下递归论证。

假设定理 4 对所有 $l \leq k - 1$ 都已证明，即每个 G_l 都是次数为 $2l$ 的多项式。利用马尔可夫性质，我们得到下列等式，适用于

函数 G_k:

$$\begin{aligned}G_k(x) &:= \mathbb{E}[\tau_x^k] = \sum_{y\in R}\mathbb{E}[(1+\tau_y)^k]\mathbb{P}(x+X=y)\\ &= 1+\sum_{y\in K_\alpha\cap R}\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}\mathbb{E}[\tau_y^l]\mathbb{P}(x+X=y)\\ &= 1+\sum_{y\in K_\alpha\cap R}\mathbb{E}[\tau_y^k]\mathbb{P}(x+X=y)+\sum_{y\in K_\alpha\cap R}\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\mathbb{E}[\tau_y^l]\mathbb{P}(x+X=y)\\ &= 1+\mathbb{E}[G_k(x+X); x+X\in K_\alpha]+\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\mathbb{E}[G_l(x+X); x+X\in K_\alpha].\end{aligned}$$

由于所有函数 G_l 在 K_α的边界上均等于零，(7) 得出

$$\mathbb{E}[G_l(x+X); x+X\in K_\alpha] = L_X G_l(x) + G_l(x).$$

利用这些等式，我们推断函数 G_k 满足方程

$$L_X G_k(x) = -1 - \sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\left(G_l(x)+L_X G_l(x)\right), \quad x\in K_\alpha\cap R.$$

显然，函数 $g_k(x) := -1-\sum^{k-1}\binom{k}{l}(G_l(x)+L_X G_l(x))$ 是一个次数为$_{l=1}2k-2$的多项式。根据命题 19，存在唯一一个次数为 $2k$ 的多项式 F_k，满足

$$L_X F_k(x) = g_k(x) \quad \text{and} \quad F_k(x) = 0 \quad \text{for all} \quad x\in\partial K_\alpha\cap R.$$

边界条件意味着

$$F_k(x) = x_2(x_1\tan\alpha - x_2)\widetilde{F}_k(x),$$

~其中 $F_k(x)$ 是一个次数为 $2k-2$的多项式。这个表示意味着

$$|F_k(x)| \le C\delta(x)|x|^{2k-1}.$$

结合引理 18，我们推知

$$\lim_{\delta(x)\to\infty}\frac{F_k(x)-G_k(x)}{V(x)} = 0. \tag{23}$$

这使我们能够重复在 $k=1$ 情形中使用的论证，并得出对于所有 $x\in K_\alpha\cap R$，均有 $G_k(x)$ $=F_k(x)$。因此，证明完毕。□

推论20。

(a). 对于所有满足 $0<\alpha<\pi$ 的 $x\in\mathcal{K}_\alpha$，都有

$$\mathbb{E}\big[x_1+S_1(\tau_x)\big] = x_1, \quad \mathbb{E}\big[x_2+S_2(\tau_x)\big] = x_2.$$

(b). 对于所有满足 $0<\alpha<\pi/2$ 的 $x\in\mathcal{K}_\alpha$，都有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(x_1+S_1(\tau_x))^2\big] &= x_1^2 + x_2(x_1\tan\alpha - x_2),\\ \mathbb{E}\big[(x_2+S_2(\tau_x))^2\big] &= x_2^2 + x_2(x_1\tan\alpha - x_2).\end{aligned}$$

证明。 </style}假设 $\mathbb{E}X=0$ 意味着序列 $\{x_j+S_j(n)\}$ 是一个鞅。应用可选停止定理，我们得到，对于每个 $n\ge 1$,

$$\begin{aligned}x_j &= \mathbb{E}\big[x_j+S_j(\tau_x\wedge n)\big]\\ &= \mathbb{E}\big[x_j+S_j(\tau_x), \tau_x\le n\big] + \mathbb{E}\big[x_j+S_j(n), \tau_x>n\big].\end{aligned} \tag{24}$$

注意到 $x_j+S_j(\tau_x)$ 只取非负值或只取非正值，并应用单调收敛定理，我们得出

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big[x_j+S_j(\tau_x), \tau_x\le n\big] = \mathbb{E}\big[x_j+S_j(\tau_x)\big]. \tag{25}$$

固定某个 $\varepsilon \in (0, \frac{p_\alpha - 1}{2})$，并将 (24) 右侧的第二个加数拆分如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[|x_j + S_j(n)|, \tau_x > n\big] &\le |x_j|\mathbb{P}(\tau_x > n) + \mathbb{E}\big[|S_j(n)|; |S_j(n)| \le n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\big] \\ &\quad + \mathbb{E}\big[|S_j(n)|, |S_j(n)| > n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\big] \\ &\le (|x_j| + n^{1/2+\varepsilon})\mathbb{P}(\tau_x > n) \\ &\quad + \mathbb{E}\big[|S_j(n)|, |S_j(n)| > n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\big].\end{aligned}$$

利用 [7] 中的引理 9，结合 $p = q = 2$ 和 $r = \frac{1+4\varepsilon}{4\varepsilon}$，我们得到

$$\mathbb{E}\Big[|S_j(n)|; |S_j(n)| > n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\Big] \le C\left(n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\big(\tau_x > i-1\big) + n^{-\varepsilon}\right).$$

此外，根据 [7]，中的引理 12，存在一个常数 C'，使得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(\tau_x > i) \le C'\begin{cases} 1, & p_\alpha > 2, \\ \log n, & p_\alpha = 2, \\ n^{1-p_\alpha/2}, & p_\alpha \in (1,2), \end{cases} \tag{26}$$

对于某个 $C' > 0.$，这意味着若 ε 足够接近 $\frac{p_\alpha - 1}{2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big[|x_j + S_j(n)|; |S_j(n)| > n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tau_x > n\Big] = 0.$$

根据 [4], 中的定理 3

$$\mathbb{P}(\tau_x > n) \sim \varkappa\frac{V(x)}{n^{p_\alpha/2}}. \tag{27}$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty}(|x_j| + n^{1/2+\varepsilon})\mathbb{P}(\tau_x > n) = 0.$$

因此，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big[x_j + S_j(n), \tau_x > n\big] = 0$$

将此式和（25）代入（24），可得

$$x_j = \mathbb{E}[x_j + S_j(\tau_x)].$$

这等价于所需的等式。

为证明 (b) 部分，我们对鞅 $S_j^2(n) - n$ 应用可选停止定理：

$$\mathbb{E}\big[S_j^2(\tau_x \wedge n) - (\tau_x \wedge n)\big] = 0.$$

根据单调收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\tau_x \wedge n] = \mathbb{E}\tau_x.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}S_j^2(\tau_x \wedge n) = \mathbb{E}\tau_x. \tag{28}$$

再次利用单调收敛定理，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[S_j^2(\tau_x); \tau_x \le n\right] = \mathbb{E}[S_j^2(\tau_x)]. \tag{29}$$

与 (a) 部分的证明类似，我们将 $\mathbb{E}\big[S_j^2(n)\ \tau_x > n\big]$ 分成两部分：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[S_j^2(n), \tau_x > n\big] \\ &\quad = \mathbb{E}\big[S_j^2(n), |S_j(n)| \le n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\big] + \mathbb{E}\big[S_j^2(n), |S_j(n)| > n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\big] \\ &\quad \le n^{1+2\varepsilon}\mathbb{P}(\tau_x > n) + \mathbb{E}\big[S_j^2(n), |S_j(n)| > n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\big].\end{aligned}$$

鉴于（27），

$$\lim_{n\to\infty} n^{1+2\varepsilon}\mathbb{P}(\tau_x > n) = 0 \tag{30}$$

对每个 $\varepsilon \in (0, \frac{p_\alpha - 2}{4})$. 此外，在 [7], 中应用引理 9，我们得到，对每个 $q \in (2, p_\alpha]$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[S_j^2(n); |S_j(n)| > n^{1/2+\varepsilon}, \tau_x > n\Big] \\ &\le C(r,q)\left(n^{(1/2+\varepsilon)(2-q)}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\big(\tau_x > i-1\big) + n^r \frac{2r}{2r-1} n^{(1/2+\varepsilon)(2-2r)}\right).\end{aligned}$$

在 $p_\alpha > 2$ 处应用 (26)，并选取 $r > \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big[S_j^2(n); |S_j(n)| > n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tau_x > n\Big] = 0.$$

将此关系与 (30) 结合，得到

$$\lim_{n\to\infty}[S_j^2(n); \tau_x > n] = 0.$$

将此式和 (29) 代入 (28)，最终得到

$$\mathbb{E}[S_j^2(\tau_x)] = \mathbb{E}[\tau_x].$$

现在利用 (a) 部分和定理 4，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x_j + S_j(\tau_x))^2 &= x_j^2 + 2x_j\mathbb{E}S_j(\tau_x) + \mathbb{E}S_j^2(\tau_x) \\ &= x_j^2 + x_2(x_1\tan\alpha - x_2).\end{aligned}$$

因此，推论的证明结束。 □

5. An alternative approach to the construction of harmonic polynomials.

定理 1 的证明背后有一个相当清晰的思路。为了构造在离开锥 $K_{\pi/m}$ 时被杀死的随机游走 $S(n)$ 的调和多项式，我们从函数$h_m(x)$出发，该函数对于离开同一锥时被杀死的布朗运动是调和的。如果函数$L_X h_m$为零，那么函数 h_m对于 $S(n)$ 也同样是调和的。如果 $L_X h_m$不为零，我们就构造第一个修正项 h_{m-1}，使得 $-\Delta h_{m-1}$ 等于 $L_X h_m$ 的 $m-3$ 次齐次部分。换句话说， h_{m-1} 消去了 $L_X h_m$ 中次数最高的部分。接着，下一个修正项 h_{m-2} 消去 $L_X(h_m + h_{m-1})$ 中所有次数最高的部分，以此类推。修正项 h_n 通过求解适当的线性方程组来构造。

本节介绍一种替代性的数值方法，可用于构造修正项 $h_{n+2}, n = 0, 1, \ldots\ldots, m-3$。正如前面所述，我们需要消去由满足 $j+k=n$ 的单项式 $x_1^j x_2^k$ 构成的线性组合。因此，只需说明如何消去每个单项式。我们将这一步分成两部分。首先，构造一个多项式 $f_{j,\,k}$，使得 $\Delta f_{j,\,k} = x_1^j x_2^k$. 。其次，求一个多项式 $g_{j,\,k}$，使得

$$\begin{cases}\Delta g_{j,k} = 0 \\ g_{j,k}(x_1, 0) = -f_{j,k}(x_1, 0), \\ g_{j,k}(x_1, x_1\tan(\pi/m)) = -f_{j,k}(x_1, x_1\tan(\pi/m)).\end{cases}$$

那么，多项式 $F_{j,k} := f_{j,k} + g_{j,k}$ 满足

$$\begin{cases}\Delta F_{j,k} = x_1^j\, x_2^k, \\ F_{j,k}(x_1, 0) = 0, \\ F_{j,k}(x_1, x_1\tan\pi/m) = 0.\end{cases}$$

这意味着 $F_{j,k}$ 消去了 $x_1^j x_2^k$。

构造 $f_{j,\,k}$。 为了构造$f_{j,\,k}$ 我们使用极坐标:

$$x_1 = r\cos\beta, \qquad x_2 = r\sin\beta.$$

Then

$$x_1^j x_2^k = r^{j+k}\cos^j\beta\sin^k\beta.$$

拉普拉斯算子为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

我们希望找到如下形式的解

$$f_{j,k}(r,\beta) = r^{n+2}\sum_{l=0}^{n}\big(\kappa_l \cos(l\beta) + \mu_l \sin(l\beta)\big),$$

其中 $n = j + k$。于是

$$\Delta f_{j,k}(r,\beta) = r^n \sum_{l=0}^{n}\big((n+2)^2 - l^2\big)\big(\kappa_l \cos(l\beta) + \mu_l \sin(l\beta)\big). \tag{31}$$

利用等式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

我们得到

$$\cos^j x \sin^k x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^j \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^k = \frac{1}{2^{j+k}\, i^{\,k}}(e^{ix} + e^{-ix})^j (e^{ix} - e^{-ix})^k.$$

根据二项式公式,

$$(e^{ix} + e^{-ix})^j = \sum_{w=0}^{j}\binom{j}{w} e^{\,i(j-2w)x}, \qquad (e^{ix} - e^{-ix})^k = \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s e^{\,i(k-2s)x}.$$

Thus

$$\cos^j x \sin^k x = \frac{1}{2^{j+k} i^k}\sum_{w=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}\binom{j}{w}\binom{k}{s}(-1)^s e^{\,i\,(j+k-2(w+s))x}. \tag{32}$$

由于 $i^{-k} = e^{-ik\pi/2}$，我们有

$$i^{-k} e^{\,i(j+k-2(w+s))x} = e^{\,i\left((j+k-2(w+s))x - k\pi/2\right)}.$$

对 (32) 右侧取实部，得到

$$\cos^j x \sin^k x = \frac{1}{2^{j+k}}\sum_{w=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}\binom{j}{w}\binom{k}{s}(-1)^s \cos\Big((j+k-2(w+s))x - \tfrac{j\pi}{2}\Big).$$

利用这个等式和 (31)，我们可以将方程 $\Delta f_{j,\ k} = x_1^j x_2^k$ 写成如下形式:

$$\sum_{l=0}^{n}\big((n+2)^2 - l^2\big)\big(\kappa_l \cos(l\beta) + \mu_l \sin(l\beta)\big)$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{w=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}\binom{j}{w}\binom{k}{s}(-1)^s \cos\Big((n-2(w+s))\beta - \tfrac{k\pi}{2}\Big). \tag{33}$$

注意，项 $\cos\Big((n-2(w+s))\beta - \frac{k\pi}{2}\Big)$ 要么是 $\cos\Big((n-2(w+s))\beta\Big)$，要么是 $\sin\Big((n-2(w+s))\beta\Big)$。由于函数 $\sin(l\beta)$ 和 $\cos(l\beta)$ 线性无关，(33) 唯一确定了数值 κ_l，μ_l。此外，注意到 $n-2(w+s)$ 与 n具有相同的奇偶性，我们推断，只有当 l 与 n具有相同的奇偶性时，κ_l，μ_l 才可能非零。这使我们能够在转换回欧几里得坐标时得到该多项式。事实上，对于切比雪夫多项式 T_l 和 U_l，我们进一步写出

$$r^n \cos(l\beta) = r^{n-l} r^l T_l(\cos\beta) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-l}{2}} r^l T_l(\cos\beta).$$

这里，$(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-l}{2}}$ 是一个多项式，因为 n 和 l 具有相同的奇偶性。利用恒等式 $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$，我们可以进一步将 $r^l T_l(\cos\beta)$改写为关于 x_1，x_2 的次数为l的多项式。同理,

$$r^n \sin(l\beta) = r^{n-l} r^l \sin(\beta) U_{l-1}(\sin\beta).$$

因此，我们得到一个次数为 $n+2$ 的齐次多项式$f_{j,\ k}$，它满足

$$\Delta f_{j,k} = x_1^j x_2^k.$$

构造$g_{j,\ k}$。 由于 $f_{j,\ k}$ 是次数为 $n+2$的齐次函数，因此我们有

$$f_{j,k}(x_1, 0) = A x_1^{n+2}$$

对于某个常数 $A.$。此外，在直线 $x_2 = (\tan\alpha)x_1$ 上，我们有

$$f_{j,k}(x_1, (\tan\alpha)x_1) = B x_2^{n+2}$$

对于某个常数 B。注意，调和函数 $g_1(r,\ \beta) = r^{n+2}\sin\big((n+2)\beta\big)$，用欧几里得坐标表示时，在直线 $x_2 = 0$ 上为零，且满足

$$g_1(x_1, (\tan\alpha)\, x_1) = \tilde{A}\, x_2^{n+2}.$$

˜由于 $n+2 < m$，我们得出 $A \neq 0$。

类似地，我们可以构造一个调和函数 g_2，它在直线 $x_2 = (\tan\alpha)\, x_1$ 上为零，并且在直线 $x_2 = 0$上非零。于是

$$g_{j,k} = \hat{A} g_1 + \hat{B} g_2,$$

ˆˆ 其中常数 A 和 B 经过适当选取，满足

$$g_{j,k}(x_1, x_2) = -f_{j,k}(x_1, x_2)$$

在直线 $x_2 = 0$ 和 $x_2 = (\tan\alpha)\ x_1$ 上。

6. Appendix

下面给出一个用于数值计算正离散调和多项式系数的算法伪代码。

调和多项式的计算

b:=tan $\frac{\pi}{m}$, $m_{even} := \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$
对于 $k \leftarrow 0, m_{even}$ **do**
$a_{m,2k} := 0$
结束循环
$m_{odd} := \lceil \frac{m-3}{2} \rceil$
对于 $k \leftarrow 0, m_{odd}$ **执行**
$a_{m,\ 2k+1} := (-1)^k \binom{m}{2k+1}$
结束循环
$n \leftarrow m-1$
当 $n > 1$ **时执行**
对于 $s \leftarrow 0, n-2$ **执行**
$c_{n-2,s} := 0$
对于 $i \leftarrow n+1,\ m$ **执行**
对于 $j \leftarrow 0,\ i$ **执行**
$c_{n-2,\ s} \leftarrow c_{n-2,\ s} - \binom{j}{s}\binom{i-j}{n-2-s}\mathbb{E}\left[X_2^{\max\{j-s,0\}} X_1^{\max\{i-j-n+2+s,0\}}\right] \cdot a_{i,\ j}$
结束循环
结束循环
结束循环
$n_{even} := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$a_{n,0} \leftarrow 0$
对于 $k \leftarrow 1, n_{even}$ **do**
$a_{n,\ 2k} \leftarrow \left(c_{n-2,\ 2k-2} - \binom{n-2k+2}{2} \cdot a_{n,\ 2k-2}\right) \cdot \frac{1}{\binom{2k}{2}}$
结束循环
$n_{odd} := \lceil \frac{n-3}{2} \rceil$, $r_{n-2} := 0$
对 $k \leftarrow 0$ **执行循环**, n_{even} **do**
$r_{n-2} \leftarrow -b^{2k} \cdot a_{n,2k}$
结束循环
$\lambda_{n,1} := \frac{-b}{\binom{n-1}{2}}$
对 $k \leftarrow 1$ **执行循环**, n_{odd} **do**
$r_{n-2} \leftarrow r_{n-2} + \lambda_{n,2k-1} \cdot c_{n-2,2k-1}$
如果 $k+1 \le n_{odd}$ **，则**
$\lambda_{n,\ k+1} := (-1) \cdot \frac{b^{2k+1} + \lambda_{n,\ k} \cdot \binom{2k+1}{2}}{\binom{n-2k-1}{2}}$
结束 if
结束 for
$C(n) := \frac{1}{\binom{n}{2n_{odd}+1}}$, $\mu_{n,\ n_{odd}} = \frac{-\binom{2n_{odd}+1}{2}}{C(n) \cdot Q_n(1,\ b)}$
$c_{n-2,2n_{odd}-1} \leftarrow c_{n-2,2n_{odd}-1} + r_{n-2} \cdot \mu_{n,\ n_{odd}}$
对于 $k \leftarrow n_{odd}-1, 1$ **do**
$\mu_{n,\ k} := \frac{-\binom{2k}{2}}{\binom{n-2k-1}{2}}$
$c_{n-2,2k-1} \leftarrow c_{n-2,2k-1} + c_{n-2,2k+1} \cdot \mu_{n,k}$
结束循环
对于 $k \leftarrow 1, n_{odd}-1$ **执行**
$a_{n,2k+1} := \frac{c_{n-2,2k+1}}{\binom{n-1-2k}{2}}$
结束 for 循环
$a_{n,2n_{odd}+1} := \frac{r_{n-2}}{C(n) \cdot Q_n(1,b)}$
结束 while 循环

References

[1] Axler, S.、Bourdon, P. 和 Ramey, W. *Harmonic Function Theory*。第 2 版，《数学研究生教材》第 137 卷，Springer，纽约，2001 年。[2] Denisov, D. 和 Wachtel, V. 锥内随机游走。 *Ann. Probab.*, **43**: 992–1044, 2015。[3] Denisov, D. 和 Wachtel, V. 锥内随机游走调和函数的替代构造。 *Electron. J. Probab.*, **24**, 第 92 号论文，2019 年。[4] Denisov, D. 和 Wachtel, V. 再论锥内随机游走。

Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. , : – 。[5]

Stat. **60** 126 166, 2024

Humbert, E. 和 Raschel, K. 多维正交象限中的离散调和多项式。 *arXiv*

preprint arXiv:2505.19622 2025

, 。[6] Duraj, J.; Raschel, K.; Tarrago, P.; Wachtel, V. 凸锥中随机游走的 Martin 边界。*Annales Henri Lebesgue*, **5**: 559–609, 2022 年。

[7] Elizarov, N. 和 Wachtel, V. 随机环境中分枝种群的共存。 *arXiv*

preprint arXiv:2502.18572 2025

, 。[8]

Denisov, D. 和 FitzGerald, W. 有序指数随机游走。 *arXiv* *preprint*

arXiv:2205.02556 2023

, 。

Department of Mathematics, University of Manchester, UK
Email address: denis.denisov@manchester.ac.uk

Faculty of Mathematics, Bielefeld University, Germany
Email address: nelizarov@math.uni-bielefeld.de

Faculty of Mathematics, Bielefeld University, Germany
Email address: wachtel@math.uni-bielefeld.de