arXiv:2601.03871v1 [math.NT] 7 Jan 2026

Hurwitz 空间的权重滤过与量子洗牌代数

Zhao Yu Ma

摘要。我们证明了本原双代数的滤过与可因子化反常层的滤过之间存在等价，从而推广了 Kapranov-Schechtman 的研究结果。在这一等价下，我们发现，Ellenberg-Tran-Westerland 所定义的量子洗牌代数的词长滤过，对应于可因子化反常层的余维滤过。此外，我们还发现，可因子化反常层的几何权过滤对应于量子洗牌代数上的一种此前文献中尚未定义的滤过，并将其称为代数权重滤过。为将这一结果应用于 Hurwitz 空间，我们证明了 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$上的 Hurwitz 空间的权重滤过之间的比较定理，推广了 Ellenberg-Venkatesh-Westerland 的比较定理。这使我们能够利用相应量子洗牌代数的代数权重滤过，明确确定 Hurwitz 空间的上同调权重。作为推论，我们发现，Hurwitz 空间的大多数权重都小于根据上同调次数所预期的权重；在某些情况下，例如当 $G = S_3$ 和 c 是对换的共轭类时，我们还证明了权重的显式非平凡上界。

目录

1. 引言 2 1.1. 动机与背景 2 1.2. 三次域的计数 3 1.3. 滤过的等价性 4 1.4. 滤过的比较 6 1.5. 权重滤过的推论 7 1.6. 致谢 8 2. 预备知识 8 2.1. Hurwitz 空间 8 2.2. 洗牌代数 10 2.3. 倾斜层 12 2.4. 权滤过 15 3. 滤过的等价性 18 3.1. 分次 $k[t]$-模的编织幺半阿贝尔范畴 $\mathcal{W}$ 18 3.2. Kapranov-Schechtman 在 $\mathcal{W}$ 19 上的等价 3.3. 提升本原双代数的滤过 20 3.4. 提升可因子化反常层的滤过 21 3.5. 谱序列 24 4. 词长滤过与余维滤过的等价性 25 4.1. 等价性证明 26 4.2. 示例 28 5. 权滤过的等价性 30 5.1. 等价性证明 30 5.2. 示例 33 6. Hurwitz 空间中权重滤过的比较定理 34 1

6.1. Hurwitz 空间的紧化6.2. 标准正交交叉的权重 35
滤过 6.3. 将其传输到 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1)$7. 权重滤过的推论 36
7.1. 代数中的权集中 7.2. 有限 Nichols 代数 参考文 38
献 38
39
41
43

1. 引言

1.1. 动机与背景。通过分析 Hurwitz 空间的上同调，采用几何方法研究函数域上的算术统计，已经带来了许多突破。该方法最初由 [EVW16; ETW17]，引入，后来 [LL25a; LL25b; LL25c] 运用同调稳定性方法，在不同情形下证明了许多猜想。其他与 Hurwitz 空间相关的工作包括： [BM24; HMW25] 证明了多项式稳定性和表示稳定性； [Tür15; Woo21; Seg25] 研究了连通分支的数量； [DP15] 证明了次数为 $d \leq 5$ 时有理皮卡群消失；以及 [Zhe23] 研究了 $d = 3$ 的稳定上同调。

该策略的大致思路是构造一族光滑的 Hurwitz 空间 X_n，由 $n = \dim(X_n)$ 编号，用来参数化我们感兴趣的算术对象。我们希望理解渐近计数 $\#X_n(\mathbb{F}_p)$，其中 $n \to \infty$。根据格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式，这一计数可以表示为一个交错和

$$\#X_n(\mathbb{F}_p) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{tr}\left(\mathrm{Frob}_q, H_c^{2n-i}((X_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\right)$$

将点计数问题归结为理解弗罗贝尼乌斯在 X_n 的 étale 上同调上的迹。由于 X_n 是光滑的，根据庞加莱对偶性，我们有 $H_c^{2n-i}(X_n, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(X_n, \mathbb{Q}_\ell)^\vee(-n)$，其中我们取了对偶并施加了 Tate 扭曲。德利涅权重理论指出，对于任意嵌入 $\mathbb{Q}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$，弗罗贝尼乌斯在 $H_c^{2n-i}(X_n, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的特征值的绝对值不超过 $q^{(2n-i)/2}$。主导项通常来自 $H_c^{2n}(X_n, \mathbb{Q}_\ell)$，其大小约为 q^n。要界定其他项的贡献，只需证明一个同调稳定性结果：对于某个常数 ϵ，$H^i(X_n, \mathbb{Q}_\ell)$ 在一段 $1 \leq i \leq \epsilon n$ 范围内消失；此外，还需给出 $i > \epsilon n$ 时贝蒂数 $\dim H^i(X_n, \mathbb{Q}_\ell)$ 的一个界。

利用比较定理，可以证明这个上同调就是 Hurwitz 空间 $X_n(\mathbb{C})$ 的奇异上同调。我们将其视为一个复流形，从而将问题转化为代数拓扑中的问题。通过考察拓扑 Hurwitz 空间的胞腔分解，[ETW17] 发现，相应的链复形实际上来自一个量子洗牌代数 $\mathfrak{A}$，其分次取值于 n，其中奇异上同调恰好是 $\mathfrak{A}$的 Ext 上同调。这一视角很有帮助，因为它提供了一种利用 Bar 复形分析上同调的具体方法，也使我们能够在量子代数领域正在开展的工作基础上继续推进。

这种几何方法已被证明，对于理解函数域上非常一般的算术统计问题的主导项极为有力；相比之下，基于数论几何或新谷ζ函数的算术方法仅适用于非常特殊的情形，例如计数次数为 ≤ 5 的域。然而，在理解这些渐近计数的次级项方面，几何方法目前仍不及算术方法。尽管如此，人们希望对这种几何方法加以改进，从而在非常一般的情形下证明低阶项。当前的问题是，我们对稳定范围之后的上同调群以及弗罗贝尼乌斯如何作用于它们的了解有限。

本文旨在通过考察这些特征值的权，为理解弗罗贝尼乌斯如何作用于这些中间上同调群开辟一条起点。德利涅权重理论实际上给出了更强的结论——对于弗罗贝尼乌斯在 $H_c^{2n-i}(X_n,\mathbb{Q}_\ell)$ 上的每个特征值，都存在一个称为权重的整数 $w \le 2n-i$，使得该特征值在任意嵌入 $\mathbb{Q}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$ 下的绝对值为 $q^{w/2}$。于是可以提出以下基本问题：

问题 1.1。对于 *Hurwitz* 空间 X_n，$H_c^{2n-i}(X_n,\mathbb{Q}_\ell)$ 的大多数权重 w 是否符合我们根据上同调次数（$w=2n-i$）的预期，还是大多数权重都低于预期（$w<2n-i$）？

我们尚未发现关于 Hurwitz 空间上同调权重的既有研究。不过，已有一些成果探讨了类似问题，即理解 $\mathcal{M}_g$的上同调权重，例如 [CGP21] 和 [BFP24]中的工作。

为回答上述问题，我们给出两个定理，作为权重通常远低于根据上同调次数所得预期的证据，即定理 1.2 和 1.8。第一个定理表明，对于一类特定的 Hurwitz 空间，存在一个线性范围，其中上同调的权重严格低于预期。第二个定理适用于一般的所有 Hurwitz 空间，大致表明，从代数的意义上说，权重集中在低于预期的位置。关于定理 1.8的讨论留到引言后面部分，我们先讨论定理 1.2 。

从上文的讨论可知，一族 Hurwitz 空间 X_n 对应于一个量子洗牌代数 $\mathfrak{A}$，二者具有相同的上同调（另见定理 1.4 及其后的讨论）。

定理 1.2。设 X_n 是一族 *Hurwitz* 空间，其对应的量子洗牌代数为 $\mathfrak{A}$，且其 *Nichols* 子代数 $\mathfrak{B}$（由次数为 1 的元素生成）是有限维的，并具有有限生成的上同调。则存在某个 $c<1$ 和 $\epsilon>0$，使得对于所有 $i>cn$，出现在 $H_c^{2n-i}(X_n,\mathbb{Q}_\ell)$ 中的任意权重 w 都满足

$$w \le (2n-i)-\epsilon(i-cn).$$

我们指出，常数 ϵ 和 c 是显式的，其取值如引理 7.1、7.2中所给，其中 $\epsilon=\delta/(1-c)$。许多简单的算术情形都满足定理 1.2的条件。为具体说明这一点，我们以计数三次域为例，因为算术方法已经取得了很好的结果，可以为次级项或低阶项的同调解释提供线索。

1.2. **三次域计数**。之上三次扩张的次级项 $\mathbb{Q}$ 最早由[TT13] 发现，[BTT23]改进了误差项。令 $N_3^{\pm}(X)$ 表示满足以下条件的三次域同构类的数量 F在 $\mathbb{Q}$ 上 $0<\pm\operatorname{disc}(F)<X$，则已证明

$$N_3^{\pm}(X)=C_1^{\pm}X+C_2^{\pm}X^{5/6}+O(X^{2/3+\epsilon})$$

其中

$$C_1^{\pm}=\frac{1}{12\zeta(3)}\begin{cases}1 & \text{if } +\\ 3 & \text{if } -\end{cases},\quad C_2^{\pm}=\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)}\begin{cases}1 & \text{if } +\\ \sqrt{3} & \text{if } -\end{cases}.$$

在函数域的情形下，有限可分的 3 次扩张 $K/\mathbb{F}_p(t)$ 对应于连通的 3 分歧覆盖 $f\colon C\to\mathbb{P}^1$。根据黎曼-赫尔维茨公式，分歧除子的次数为偶数，因此判别式具有 q^{2N}的形式。若记 $N=3m+k$ 为 $k\in\{0,1,2\}$，根据[Zha13； Kur25； Ahl25], 次数为 3 且判别式为 q^{2N} 的扩张数量为

$$N_3(2N)=C_1q^{2N}-C_2^kq^{5m}+O(q^{4N/3+\epsilon})$$

其中

$$C_1=(1+q^{-3})(1+q^{-1}),\quad C_2^k=(q^{-1}-q^{-3})\begin{cases}q+1 & \text{if } k=0\\ q^3+q^2 & \text{if } k=1\\ q^4 & \text{if } k=2\end{cases}.$$

我们可以用一个具有以下连通分支的代数栈来参数化这些次数为3 的覆盖 Y_{2N}，这些连通分支来自不同的 Hurwitz 空间。为简便起见，我们只讨论其中一个 Hurwitz 空间。某些 Y_{2N} 连通分支表现为商栈X_{2N}/G 的连通分支（详见第 2.1.2 节），其中我们令 $X_n := \mathrm{Hur}^{G,\ n}{}^{c}$对 $G = S_3$ 以及 c 对换的共轭类。我们给出定理 1.2 关于 X_n 的陈述，并明确给出常数。

定理 1.3。设 X_n 如上定义。对于 $i > 2\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$，出现在 $H_c^{2n-i}(X_n, \mathbb{Q}_\ell)$中的权重 w严格小于 $2n-i$。我们还有不等式

$$w \leq (2n-i) - \frac{3(i-n/3)}{10}.$$

我们先在误差项 $O(q^{4N/3+\epsilon})$的背景下讨论这一点。考虑 Y_{2N} 中来自 X_{2N}/G的连通分支，以及这些连通分支上来自上同调的特征值。先验地，若没有我们的定理，$H_c^{4N-i}(X_{2N}/G, \mathbb{Q}_\ell)$ 上 $i \geq \frac{4N}{3}$ 的一个特征值，其权重为 $w \leq \frac{8N}{3}$，因此该特征值的绝对值至多为 $q^{4N/3}$，这与误差项的阶相同。然而，借助定理 1.3，我们对这类特征值权重的上界可改进为 $w \leq \frac{37N}{15}$，因此该特征值的绝对值至多为 $q^{37N/30}$，比误差项小 $q^{N/10}$ 倍。这表明，权的考量或许有助于通过同调方法改进误差界。

我们也可以在次级项的背景下讨论这一问题，此时改进之处不那么显而易见。定理 1.3 告诉我们，来自 $H_c^{4N-i}(X_{2N}/G, \mathbb{Q}_\ell)$ 且具有预期权重的特征值只能来自上同调次数 $i \leq 2\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$，因此此类特征值的绝对值至少为 $q^{2N-\lfloor N/3 \rfloor}$。我们在下表中将其与次级项的量级进行比较。

判别式 q^{2N}	$\boldsymbol{q^{6m}}$	$\boldsymbol{q^{6m+2}}$	$\boldsymbol{q^{6m+4}}$
次级项的量级	q^{5m}	q^{5m+2}	q^{5m+3}
权重最小的特征值，其权重由 X_{2N} **预期**	q^{5m}	q^{5m+2}	q^{5m+4}

这意味着，当判别式为 q^{6m+4} 的形式时，如果来自此类连通分支的弗罗贝尼乌斯特征值与次级项的量级相同，那么其权重必定严格小于根据上同调次数所预期的权重。

1.3. **滤过的等价性**。我们的主要策略是利用 Hurwitz 空间与量子洗牌代数之间的桥梁，将权重信息从拓扑学传递到代数。这一方法最早由 [ETW17], 发展，但其中建立的联系仅存在于链复形层面，无法让我们将权重信息从一方传递到另一方。相反，我们以 [KS20] 为基础；该文证明了一种结构更丰富的、更一般的等价关系。本文中，令系数域 k 为特征零的代数闭域。

定理 1.4 ([KS20，定理 3.3。1])。设 $\mathcal{V}$ 为域 k上的编织幺半阿贝尔范畴，且 $\otimes$ 为双正合。则原始元双代数与其上的可因子化周反层之间存在等价关系。$\mathcal{V}$

$$PB(\mathcal{V}) \xleftrightarrow{\sim} FPS(\mathcal{V}).$$

此外，若 $A \in PB(\mathcal{V})$ 对应于 $\mathcal{F} \in FPS(\mathcal{V})$，则存在一个上同调的同构$R\Gamma^j \mathcal{F}_n \cong \mathrm{Tor}^{A}_{-j,\ n}(k, k)$。

我们将讨论特例： $\mathcal{V}$ 是一个由 k向量空间构成的编织幺半阿贝尔范畴。这里，原始双代数 PB($\mathcal{V}$) 是一类带有代数结构和余代数结构、定义在 $\mathcal{V}$ 上的分次霍普夫代数，其中包括张量代数 $T(V)$、量子洗牌代数$\mathfrak{A}(V)$和 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$，对所有 $V \in \mathcal{V}$均成立。等价的另一侧，可因子化反常层 FPS($\mathcal{V}$) 是一族倾斜层 K_n ，定义在 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 上，对每个 n其系数取自 $\mathcal{V}$；它们关于对角分层可构造。粗略地说，可因子化性表示 K_{n+m} 沿着映射 $\mathrm{Sym}^n(U) \times \mathrm{Sym}^m(V) \to \mathrm{Sym}^{n+m}(U \sqcup V)$，与不相交的 U， $V \subseteq \mathbb{C}$相容。

我们说明这如何推广了 [ETW17] 中的等价。根据我们的定义，Hurwitz 空间 X_n是 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$ 的有限 étale 覆盖，因此，一族相容的 Hurwitz 空间通过对常值层取推前，定义了一组局部系统 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_n\}_n$ 。这些局部系统的上同调可通过取 $R\Gamma j_{n*}\mathcal{L}_n$ 来计算，其中 j_n: $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$。 [KS20, 定理 3.3.3]证明，在上述等价下，可因子化 perversity 层 $j_*\mathcal{L} = \{j_{n*}\mathcal{L}_n\}_n$对应于量子洗牌代数 $\mathfrak{A}(V)$。该定理还表明，这些上同调相等，这正是 [ETW17, 定理 1.3]。

利用混合霍奇模理论，如果每个 $\mathcal{L}_n$ 都具有有限单值化，那么我们可以赋予其一个递增的权重滤过

$$\cdots \subseteq W_0 j_{n*}\mathcal{L}_n \subseteq W_1 j_{n*}\mathcal{L}_n \subseteq \cdots$$

到反常层 $j_{n*}\mathcal{L}_n$ ，其中分次部分 $\mathrm{Gr}^W_w\, j_{n*}\mathcal{L}_n$ 是权重为 w的纯对象。这里，我们对局部系统 $\mathcal{L}_n$ 作了归一化，使其权重均为 0。我们希望将这一权重滤过传递到代数侧。受此启发，我们证明了以下定理，它是本文的核心。

定理 1.5. 设 $\mathcal{V}$ 是一个由 k-向量空间构成的编织幺半阿贝尔范畴。则存在一个等价

$$\{Filtrations\ of\ A \in PB(\mathcal{V})\} \xleftrightarrow{\sim} \{Filtrations\ of\ \mathcal{F} \in FPS(\mathcal{V})\}$$

其中， A 与 $\mathcal{F}$ 在定理1.4下对应。此外， $R\Gamma^j \mathcal{F}^{gr}_n \Rightarrow R\Gamma^j \mathcal{F}_n$ 与$\mathrm{Tor}^{A^{gr}}_{-j,\ n}(k,k) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{A}_{-j,\ n}(k,k)$之间存在谱序列的同构。

我们的定理并非定理 1.4的直接推论。人们可能会天真地认为，我们可以以某种方式将该等价应用于每个分次部分或滤过部分，但问题在于，分次部分和滤过部分本身都不是本原双代数，也不是可因子化反常层。

相反，我们的证明基于这样一种思想： k-向量空间的滤过等价于自由分次 $k[t]$模。我们构造了一个编织幺半阿贝尔范畴 $\mathcal{W}$ ，其对象是有限 $\mathbb{Z}$指标图表 $\{\cdots \to V_0 \to V_1 \to \cdots\}$ ，由有限生成分次 $k[t]$模组成，并且带有$V_i \in \mathcal{V}$。然后，我们证明如下等价图表。

$$\begin{array}{ccc} \{B \in \mathrm{PB}(\mathcal{W}) \text{ 在 } k[t]\text{ 上自由} & \xleftrightarrow{\ b\ } & \{\mathcal{G} \in \mathrm{FPS}(\mathcal{W}) \text{ 带有 } \Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n), \text{ 在 } k[t]\text{ 上自由} \\ \updownarrow a & & \updownarrow c \\ \{A \in \mathrm{PB}(\mathcal{V}) \text{ 的滤过}\} & \longleftrightarrow & \{\mathcal{F} \in \mathrm{FPS}(\mathcal{V}) \text{ 的滤过}\} \end{array} \tag{1.1}$$

这里，(a) 和 (c) 本质上是上述理念的延伸。(a) 很容易证明，而 (c) 则困难得多，因为我们处理的是 $k[t]$ 上的周 pervers 层。这些层的性质并不好，因为 $\otimes$ 并非正合；例如，两个周 pervers 层的对偶 $\mathbb{D}$ 或外张量积 $\boxtimes$ 可能不再是周 pervers 层。对于 (b)，我们希望将定理 1.4 应用于 $\mathcal{W}$ ，但问题仍然在于 $\otimes$ 并非双正合——事实上，若没有这一假设，定理1.4 就不成立。尽管如此，我们通过推导所有张量积，对证明作了实质性修改，并证明 (b) 仍然

成立，这是因为两边都满足自由性条件。最后，谱序列的同构将由 (b) 中上同调的同构推出。

1.4. **比较滤过**。 我们应用定理1.5 来比较几何侧与代数侧的滤过。我们将讨论范围限定为相容局部系统推前的滤过 $j_*\mathcal{L} \in \mathrm{FPS}(\mathcal{V})$ 与量子洗牌代数的滤过 $\mathfrak{A}(V) \in \mathrm{PB}(\mathcal{V})$ 之间的等价，因为这与 Hurwitz 空间最为相关。这也与 $j_!\mathcal{L}$ 和张量代数 $T(V)$之间的等价互为对偶。我们作如下两项比较。

首先，我们考察 [ETW17] 中的词长滤过，它是由 $F^k\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{>0})^k$ 表示的递减滤过。我们发现，在几何上，更自然的做法是考察移位词长滤过：对每个代数次数 n ，定义为 $F_c\mathfrak{A}_n = F^{n-c}\mathfrak{A}_n$，此时它是递增滤过。根据定理 1.5，我们发现这对应于 $j_*\mathcal{L}$上的余维滤过，其定义使得分次部分 $\mathrm{Gr}_c\, j_*\mathcal{L}$ 由余维为c 的层上的中间延拓构成；特别地，我们有 $\mathrm{Gr}_0\, j_*\mathcal{L} = F_0 j_*\mathcal{L} = j_{!*}\mathcal{L}$。这并不令人意外，因为我们预期 $A_{\lambda_1} \times \cdots A_{\lambda_r}$中的元素来自余维为 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r - r$的部分。我们还提到一个非常轻微的推广：$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 分层上的任意滤过都会在$j_*\mathcal{L}$ 上诱导出一个滤过，该滤过对应于 $\mathfrak{A}$上的加权字长过滤。

接下来，我们讨论权重滤过。设 $\mathcal{L}_n$ 具有有限单值化，于是我们可以利用混合霍奇模在 $j_*\mathcal{L}$ 上定义几何权过滤。我们发现，它对应于量子洗牌代数上的一个递增滤过 $W_w\mathfrak{A}$ ，称为代数权重滤过。据我们所知，这一滤过此前尚未出现在文献中；我们通过如下对偶张量代数 $T = T(V^*) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(V^*)^{\otimes n}$ 来定义它。

定义 1.6。 对偶张量代数 T 上的代数权重滤过 W_wT_n 按 n归纳定义；当 $n = 0$，1 时，它由集中在权重 0 上的平凡滤过给出，即$W_0T_0 = T_0$、 $W_0T_1 = T_1$ 和 $W_{-1}T_0 = W_{-1}T_1 = \{0\}$。对于 $n \geq 2$，给定 $p < n$上的滤过 T_p ，在

$$S = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ 0<p,q<n}} T_p \otimes T_q \subseteq (T \otimes T)_n$$

并且 T_n 上的滤过定义为

$$W_wT_n = \mu(W_wS) + (\mu(W_{w+1}S) \cap P_n)\,,$$

其中 $P_n \subseteq T_n$ 是 T中的本原元，即满足 $\Delta_\star(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$的元素。

由此，我们在量子洗牌代数 $\mathfrak{A}_n$ 上得到代数权重滤过 $W_w\mathfrak{A}_n$ ，其定义为$W_w\mathfrak{A}_n = (W_{-w-1}T_n)^\perp$ ，因此分次部分 $\mathrm{Gr}_w\,\mathfrak{A}_n$ 与 $\mathrm{Gr}_{-w}\,T_n$对偶。

直观地说， W_wT_n 上的权重滤过与 T上的乘法 μ 相容，只是在本原元上的权重会降低 1。由此可见，量子洗牌代数的权重零部分 $W_0\mathfrak{A}$ 是由一次元素生成的 Nichols 子代数 $\mathfrak{B}$ 。我们将证明，在 $\mathcal{L}_n$ 具有有限单值化的假设下，代数权重滤过确实是双代数滤过，但我们猜想在一般情形下未必如此。

我们在定理 1.5 中比较滤过的方法，是借助谱序列论证。其思路是将 $j_{n*}\mathcal{L}_n$ 拆分为两部分：第一部分来自原点，第二部分则是从原点之外作中间延拓得到的。利用可因子化性，我们可以根据较低次数理解第二部分。接着，谱序列微分所受的限制有助于我们从第二部分理解第一部分。例如，对于权重滤过，我们关键地依赖这样一个性质：只有权重相差 1 的复形之间才存在非平凡微分。

1.5. **权重滤过的推论**。 既然我们已经将 $\mathbb{C}$ 上可因子化倾斜层的几何权过滤与量子洗牌代数上的代数权重滤过联系起来，为使我们的结果能够通过格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式用于计数 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$上的点，我们还需要一个关于 $\mathbb{F}_p$上的几何权过滤的比较定理。我们将讨论特例 Hurwitz 空间，并证明定理 6.1 ，该定理表明 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$ 上的权重滤过的上同调同构，从而推广了 [EVW16，命题 7.7、7.8] ，该命题比较了 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$上的 Hurwitz 空间的上同调。定理6.1 的证明使用了在 [EL25，附录 B] 中由 Dori Bejleri 和 Aaron Landesman 构造的 Hurwitz 空间正规交叉紧化。这使我们能够构造 $\mathbb{Z}_p$ 上的权重滤过，并通过消失循环论证完成证明。

这个比较定理，结合上文讨论的几何权重滤过与代数权重滤过之间的等价性，使我们能够根据相应量子洗牌代数上的代数权重滤过，显式计算 Hurwitz 空间的上同调权重，具体如下。设 X_n 是一族 Hurwitz 空间，其对应的量子洗牌代数为 $\mathfrak{A}$。我们可以分解

$$H_c^{2n-i}((X_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{w\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_W^w H_c^{2n-i}((X_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

为权重空间的直和，其中弗罗贝尼乌斯在第 w 个分次部分上按 $q^{w/2}$ 作用。另一方面，代数权重滤过 $W_w\mathfrak{A}_n$ 通过定理 1.5 中的谱序列 $\mathrm{Tor}^{\mathfrak{A}^{gr}}_{-j,n}(k,k) \Rightarrow \mathrm{Tor}^{\mathfrak{A}}_{-j,n}(k,k)$，在 $\mathrm{Tor}^{\mathfrak{A}}_{-j,n}(k,k)$ 上诱导出类似的权重分解。这里，$\mathfrak{A}^{gr}$ 是关于权重滤过的 $\mathfrak{A}$ 的伴随分次，并且相对于代数分次 n 和权重分次 w 具有双分次结构。在不翻转权重分次符号的情况下取对偶 w ，得到 Ext 上同调的分解

$$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}^{-j,n}(k,k) = \bigoplus_{w\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_W^w \mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}^{-j,n}(k,k).$$

于是，我们得到以下联系这两个分解的定理。

定理 1.7。 设 $p > |G|$ 和 $\ell > n$ 为满足 $p \neq \ell$的素数。向量空间的同构

$$H_c^{2n-i}((X_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}^{n-i,n}(k,k)$$

由 *[ETW17，定理 1。3]*诱导出权重子空间之间的同构

$$\mathrm{Gr}_W^{2n-i-w} H_c^{2n-i}((X_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{Gr}_W^w \mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}^{n-i,n}(k,k)$$

注意，上文的 $2n-i-w$和 w之间存在权重偏移。这是因为代数侧的权重来自倾斜层的权重，而这些层是导出范畴中的对象，因此此处的权重会按上同调次数发生偏移。务必区分哪些是导出权重（代数和倾斜层上的所有权重），哪些是弗罗贝尼乌斯权重。

我们的下一个目标是理解一般量子洗牌代数中 $\mathfrak{A}_n$ 的权重分布。由于权重滤过可以代数地定义，尽管它对 Hurwitz 空间有影响，这仍是一个纯代数问题。我们发现，当 $n\to\infty$时，大多数权重都集中在某个 cn附近，如下述定理所示。

定理 1.8。 设 $W_w\mathfrak{A}$ 为量子洗牌代数 $\mathfrak{A}(V)$ 上的权重滤过。那么，存在某个常数 $0 \le c \le 1$ ，使得对于任意 $c^- < c < c^+$，我们都有

$$\frac{\dim W_{c^-n}\mathfrak{A}_n}{\dim \mathfrak{A}_n} \to 0, \qquad \frac{\dim W_{c^+n}\mathfrak{A}_n}{\dim \mathfrak{A}_n} \to 1$$

如 $n\to\infty$。此外，当且仅当 $\mathfrak{A}$ 在次数 1 生成时，$c=0$，即 $\mathfrak{A}(V) = \mathfrak{B}(V)$。

可以问问　　同调中的权重集中也有类似的结论　　.

问题 1.9. 是否存在某个常数 $0 \le c \le 1$，不一定与定理 1.8中的常数相同，使得对于任意 $c^- < c < c^+$，我们都有

$$\frac{\dim W_{c^- n} \operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{A}_n}(k,k)}{\dim \operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{A}_n}(k,k)} \to 0, \qquad \frac{\dim W_{c^+ n} \operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{A}_n}(k,k)}{\dim \operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{A}_n}(k,k)} \to 1$$

当 $n \to \infty$ 时?

这个上同调结论将带来如下几何推论。设 X_n 是一族 Hurwitz 空间，它们对应于某个量子洗牌代数 $\mathfrak{A}(V)$。那么当 $n \to \infty$ 时，弗罗贝尼乌斯 w 在 $H^*_c(X_n, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的几乎所有权都满足 $w \in [2n - i - c^+ n, 2n - i - c^- n]$，其中 $2n - i$ 是上同调次数。

从定理 1.8 推出上同调的权重集中这一结论时，关键问题在于：虽然我们能够控制 bar 复形的权重，但在对集中范围内的权取上同调时，可能会发生大量抵消；而对于集中范围外的权，抵消则很少，甚至完全不会发生。

最后，我们讨论定理 1.2 的证明。我们遵循 [ETW17] 中的步骤，不过现在讨论的是权重滤过，而不是词长滤过。回顾 $\mathfrak{A}^{gr}$ 是关于权重滤过的 $\mathfrak{A}$ 的伴随分次，它在 n 和 w中具有双分次，并且 Nichols 代数 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}^{gr}$ 是权重零部分。定义 $\mathfrak{C} := \mathfrak{A}^{gr} \square_{\mathfrak{B}} k$ 为余张量积。于是，我们得到三个谱序列

$$\operatorname{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k) \otimes \operatorname{Ext}_{\mathfrak{C}}(k,k) \Rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathfrak{B}}(k, \operatorname{Ext}_{\mathfrak{C}}(k,k)) \Rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathfrak{A}^{gr}}(k,k) \Rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathfrak{A}}(k,k) \tag{1.2}$$

它们分别保持代数分次、同调分次和权重分次。这给出了 Ext 上同调的权重分解，而这正是我们根据定理 1.7 所需要的。

设 $\mathfrak{B}$ 是有限维的，且 $\operatorname{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k)$ 是有限生成的。人们猜想前者蕴含后者，而这一点已在多种情形下得到证明，例如对于对角型 Nichols 代数 [AAPW22] 以及 Fomin-Kirillov 代数 $\mathcal{FK}_3$ [ŞV16]，后者对应于三次域的情形。 $\mathfrak{B}$ 的有限维性将告诉我们，在 $\mathfrak{C}$ 上，权重分次 $w \ge \delta n$随代数次数线性增长。同时，$\operatorname{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k)$ 的有限生成性告诉我们，其同调次数 $i \ge cn$ 随代数次数线性增长。将这两个不等式与谱序列链结合起来，即可得到定理1.2。

1.6. 致谢。 我谨向我的导师 Will Sawin 致谢，感谢他提出这个问题，并在研究过程中给予我许多宝贵的指导。我也要感谢 Jordan Ellenberg、Aaron Landesman 和 Craig Westerland 提供的宝贵意见。我尤其感谢 Aaron 提供了详尽的意见，使本文得到了显著改进。

2. 预备知识

2.1. Hurwitz 空间。 设 G 是一个群， c 是 G 中共轭类的并。在本节中，我们讨论 Hurwitz 空间 $\mathrm{Hur}^{G,\ c}_{n}$ 的拓扑定义，然后说明如何也可以用代数方式定义它们。

2.1.1. 拓扑 *Hurwitz* 空间。 我们遵循 [EVW16，第 2], 节，不过我们考察的是 $\mathbb{C}$ 上的构形空间，而不是圆盘 D上的构形空间，因为二者彼此同胚。首先，我们在 $S_n = \{S_\lambda\}_\lambda$ 上引入对角分层 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$，其各层由 n 的分拆编号，记作 $\lambda = (\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_p)$，其中 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = n$ 且

$$S_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \;\middle|\; x_i \text{ distinct} \right\}.$$

例如，一般层 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C}) = S_{(1^n)}$ 是由 n 个无序互异点构成的构形空间，这些点位于 $\mathbb{C}$ 上。

取 $c_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ 为选定的基点，则基本群 $\pi_1(\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C}), c_n) \cong B_n$是由 n 股组成的辫群，其表示如下

$$B_n := \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ if } |i-j| > 1 \rangle.$$

在上述同构中，生成元 σ_i 对应于半德恩扭转：通过使点i和 $i+1$ 彼此逆时针绕行来交换它们。

存在一个 B_n 作用在 c^n 上，其中生成元的作用方式为

$$\sigma_i(g_1, \ldots, g_n) = (g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_n).$$

从拓扑上看，这对应于 B_n 在 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{C} - \{1, \ldots, n\}, *), G)$上的作用，其中取某个基点 $*$，并考虑绕穿孔点的生成元 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$；通过这些生成元的像，我们可以恢复 $g_i\gamma_i$。据此，我们可以如下定义拓扑 Hurwitz 空间。

定义 2.1. 令 $\mathrm{Hur}^{G,c}_n$为 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$的有限无分歧覆盖，其纤维为 c^n，单值化由 B_n 在 c^n上的作用给出。等价地，我们有

$$\mathrm{Hur}^{G,c}_n = \widetilde{\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})} \times_{B_n} c^n$$

其中 $\widetilde{\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})} \to \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$ 是万有覆盖。

可以证明，$\mathrm{Hur}^{G,c}_n$是圆盘 D 上 n 分歧的 G 覆盖的模空间；这些覆盖在覆盖空间的边界上有一个标记点，且每个分歧点周围的局部单值化都属于 c，并且它们不一定是连通的。这里，我们需要使用从 $\mathbb{C}$ 到 D 的同胚，以便在覆盖空间的边界上标记一个点；这大致对应于在覆盖 $\mathbb{C}$ 上标记一个“接近无穷远”的点。标记这一点是为了刚化覆盖并消除 G- 自同构。为了解释前面定义与模空间诠释之间的对应关系，我们注意到，到 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$ 的投影确定了分歧点，而元组 $(g_1, \ldots, g_n)$ 则确定了覆盖的局部单值化。

同样，我们可以将连通 Hurwitz 空间 $\mathrm{CHur}^{G,c}_n \subseteq \mathrm{Hur}^{G,c}_n$定义为由参数化连通的 n-分支 G-覆盖 D 的连通分支之并。这等价于要求覆盖具有满单值化，因此它是 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$ 的覆盖，其纤维为 $C := \{(g_1, \ldots, g_n) \in c^n \mid G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle\}$，并带有相同的 B_n 作用，我们将其记作

$$\mathrm{CHur}^{G,c}_n = \widetilde{\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})} \times_{B_n} C.$$

在 $\mathrm{Hur}^{G,c}_n$和 $\mathrm{CHur}^{G,c}_n$上都有一个 G-作用，对应于移动覆盖边界上的标记点；我们可以定义商空间 $\mathrm{Hur}^{G,c}_n/G$ 和 $\mathrm{CHur}^{G,c}_n/G$。现在，它们是 D（或 $\mathbb{C}$）的无标记 n-分支 G-覆盖的模空间（因为我们不再要求有标记），其中后者还要求这些覆盖是连通的。我们将它们记作

$$\mathrm{Hur}^{G,c}_n/G = \widetilde{\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})} \times_{B_n} c^n/G,$$

$$\mathrm{CHur}^{G,c}_n/G = \widetilde{\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})} \times_{B_n} C/G.$$

2.1.2. 代数 *Hurwitz* 空间。 首先，我们在 $\mathbb{Z}$ 上代数地定义 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1)$ 及其对角分层。我们可以通过如下同构将 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1) \cong \mathbb{A}^n$ 视为：将 n 个点映射到以这些 n 为根的首一 n 次多项式（的系数）。给定 n 的任意分拆 λ，我们令S_λ 为由根按分拆 λ 给出的多项式组成的既约局部闭分层，就像 $\mathbb{C}$的情形一样。例如，$\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1) = S_{(1^n)}$ 是由没有重根的首一多项式构成的开子概形，因此将其视为 $\mathbb{A}^n$ 的子空间时，它是判别式零点轨迹的补集。

为了将有限域上的计数应用于我们的研究，我们需要建立非零特征下 Hurwitz 空间的代数理论；但首先，我们说明这些空间在 $\mathbb{C}$ 上是代数的。黎曼存在定理指出，复代数簇的有限拓扑覆盖等价于有限 étale 覆盖。将此定理应用于我们在 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}})$ 上的覆盖情形，可知 $\mathrm{Hur}^{G,\ n\ c}$，$\mathrm{CHur}^{G,\ n\ c}$，$\mathrm{Hur}^{G,\ n\ c}/G$，$\mathrm{CHur}^{G,\ n\ c}/G$ 可以定义为 $\mathbb{C}$ 上的代数簇，并且它们的$\mathbb{C}$-点与上文给出的拓扑定义一致。

在 [LL25b 的第 2 节中，作者对此进行了扩展，并证明 $\mathrm{Hur}^{G,\ n\ c}$（因此 $\mathrm{CHur}^{G,\ n\ c}$）可以定义为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ 上的概形，且其到 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1)$ 的映射是有限 étale 的。此外，他们证明了 $\mathrm{Hur}^{G,\ n\ c}/G$ （因此 $\mathrm{CHur}^{G,\ n\ c}/G$）是 $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ 上的代数栈。因此，对于所有不整除 $|G|$ 的素数 p，我们可以将这些 Hurwitz 空间定义在 $\mathbb{F}_p$ 上，作为该构造的特殊纤维。

这些 $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ 上的空间是通过模空间解释定义的。设 T 是 Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ 上的一个概形，那么 $\mathrm{Hur}^{G,c}_{,n}/G$ 的 T-点很容易定义：它们基本上是 $\mathbb{P}^1_T$ 上的有限 G-覆盖，其中 $\mathbb{A}^1_T$ 上某点的局部单值化属于 c；更多细节见同上文献的定义 2.1.1。这与前文讨论的拓扑模空间类似。$\mathrm{Hur}^{G,\ c}_{,n}$ 的模空间则更复杂，因为我们需要在覆盖中标记一个“靠近无穷远处”的非分歧点。如果 ∞ 不是分歧点，这就不是问题，因为我们可以直接标记无穷远处上方的一个已有的非分歧点。另一方面，如果 ∞ 是一个惯性群阶为 e 的分歧点，那么同上文献的定义 2.1.3 使用沿着 $\mathbb{P}^1$ 的 ∞ 的 e 阶根栈（定义见 [Cad07，定义 2.2.4] ）来完成这一标记。我们省略细节，但直观来说，这种技巧让我们能够“标记一个分歧点的 $1/e$”。

最后，我们更详细地说明引言第1.2 节中的讨论。来自 X_{2N} 的 Y_{2N} 的连通分支，是在无穷远处不分歧的 $\mathrm{CHur}^{G,\ c}_{,n}/G$ 的连通分支（因此判别式仍为 $2N$）；在这里，我们有 $n = 2N$、$G = S_3$以及 c对换的共轭类。我们取 $\mathrm{CHur}^{G,\ c}_{,n}$，因为在 $\mathbb{F}_p(t)$上计数三次域时，我们只需要连通覆盖；随后通过取 G-商去掉标记点（更多细节请参见 [LL25a，第 10] 节）。$\mathrm{CHur}^{G,\ c}_{,n}/G$ 的上同调，恰好是 $\mathrm{CHur}^{G,\ c}_{,n}$的 G-不变上同调，它作为 $\mathrm{Hur}^{G,\ c}_{,n}$的上同调的一个子空间出现。因此，定理1.3中关于 $\mathrm{Hur}^{G,\ c}_{,n}$的权界，同样适用于 $\mathrm{CHur}^{G,\ c}_{,n}/G$。

2.2. **洗牌代数**。这里，我们在编织单值阿贝尔范畴的背景下定义本原双代数，并讨论张量代数的三个重要例子 $T(V)$、量子洗牌代数 $\mathfrak{A}(V)$ 以及 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$。我们的阐述遵循 [ETW17第 2]节以及 [KS20第 2, 3]节。

2.2.1. 编织单值阿贝尔范畴。我们首先讨论 k 上编织向量空间的概念。

定义 2.2。设 k 上的一个编织向量空间 (V, R) 由一个有限维 k-向量空间V及一个编织 R: $V \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V$构成，后者满足杨–巴克斯特方程

$$(R \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes R) \circ (R \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes R) \circ (R \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes R).$$

这一关系恰好保证 $V^{\otimes n}$ 是 B_n 的一个表示，其中 σ_i 通过 R 作用于 i 和 $i+1$ 份 V 上。

例 2.3。我们给出几个一般性逐渐增强的辫向量空间示例（V， R）。

(a) 平凡编织向量空间。其编织由交换各项 $R(v \otimes w) = w \otimes v$ 给出。(b) 对角型编织向量空间。设 $\{x_i\}_i$ 是 V的一组基，且 (q_{ij}) 是一个元素取自 $k^\times$的矩阵。我们在基 $x_i \otimes x_j$ 上定义编织为 $R(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i$。

(c) 架型编织向量空间。架是一个集合 S，配有二元运算 $(a,b)\mapsto b^a$，满足 (i) $(c^a)^{b^a}=(c^b)^a$，以及 (ii) 对每个 $a,b\in S$，存在唯一的 $c\in S$，使得 $c^a=b$，我们将其记作 $c={}^ab$。架 2-余循环是一个函数 $x\colon S\times S\to k^\times$，满足$x_{ab}x_{a^bc}=x_{ac}x_{a^cb^c}$。给定一个架及相应的余循环，我们可以定义编织向量空间 $V(S,x)=kS$，其编织为 $R(a\otimes b)=x_{ab}(b\otimes a^b)$。

我们不再只考虑某个特定的编织向量空间，而是希望考虑范畴中对象之间相容的编织，这引出了下面的定义。

定义 2.4。一个 编织幺半阿贝尔范畴 $(\mathcal{V},\otimes,1,R)$ 在 k 上是一个幺半 k-线性阿贝尔范畴 $(\mathcal{V},\otimes,1)$，并且对于任意 $V,W\in\mathcal{V}$，都存在一个编织 $R_{V,W}\colon V\otimes W\xrightarrow{\sim}W\otimes V$它满足编织公理，参见 [HS20，定义 3.2。1]。

我们看到，如果 $\mathcal{V}$ 是一个由 k-向量空间构成的编织幺半阿贝尔范畴，那么每个对象都可以赋予编织向量空间结构。与 Hurwitz 空间相关的主要例子是 Yetter-Drinfeld 模范畴 $\mathcal{YD}_G$，我们将在第 2.3.3 节末尾看到。

例 2.5。设 G 是一个有限群。Yetter-Drinfeld G-模是一个有限维的 G-分次k-向量空间 $V=\bigoplus_{g\in G}V_g$，满足 $V_g\cdot h\subseteq V_{h^{-1}gh}$。这些构成范畴 $\mathcal{YD}_G$的对象，其中 $\otimes$ 为通常的分次张量积，编织由 $R(v\otimes w)=w\otimes(v\cdot h)$ 给出，其中$v\in V_g$ 且 $w\in V_h$。Yetter-Drinfeld G-模的例子包括例 2.3(c) 中的架型编织向量空间，其中架 S 作为集合是群G 中若干共轭类的并，且 $g^h=h^{-1}gh$。

2.2.2. 张量代数、量子洗牌代数与 *Nichols* 代数。设 $V\in\mathcal{V}$ 是 k上的一个编织幺半阿贝尔范畴中的对象，其编织为 $R=R_{V,V}\colon V\otimes V\xrightarrow{\sim}V\otimes V$。例如，$(V,R)$ 可以是一个编织向量空间。

对于任意置换 $\sigma\in S_n$，都有一个松本提升 $\tilde{\sigma}\in B_n$，它是通过将 σ 表示为对换 $s_i=(i,i+1)$ 中长度最短（约化）的字，并将这些对换替换为辫σ_i而得到的。该定义良好，因为任意两个约化字都可通过 $s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1}$ 或$s_is_j=s_js_i$ 相互转换（其中 $|i-j|>1$），而它们恰好就是辫关系。由此我们可以定义编织$R_\sigma\colon V^{\otimes n}\xrightarrow{\sim}V^{\otimes n}$，其方法是将 R 作用于松本提升 $\tilde{\sigma}$。

定义（$p,\ q$）-洗牌的集合为

$$\mathrm{Sh}(p,q):=\{\sigma\in S_{p+q}\colon\sigma(1)<\cdots<\sigma(p)\text{ and }\sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q)\}$$

它们是保持前 p 个元素和最后 q 个元素各自顺序不变的排列。（$p,\ q$）-洗牌的逆恰好是（$p,\ q$）-反洗牌，我们将其记为 $\mathrm{USh}(p,\ q)$。

张量代数 $T(V)=\bigoplus_{n=0}^\infty V^{\otimes n}$ 具有自由乘法 μ，也就是说，它的分量 $\mu_{p,\ q}\colon V^{\otimes p}\otimes V^{\otimes q}\xrightarrow{\sim}V^{\otimes p+q}$ 由恒等映射给出。余乘法 Δ 是唯一一个扩张 $\Delta|_{T^1(V)}=1\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes 1$ 的代数映射；具体而言，它在各分量上的定义为

$$\Delta_{p,q}(v)=\sum_{\sigma\in\mathrm{USh}(p,q)}R_\sigma v$$

这里我们将右端解释为 $V^{\otimes p}\otimes V^{\otimes q}$ 中经恒等映射 $V^{\otimes p+q}\xrightarrow{\sim}V^{\otimes p}\otimes V^{\otimes q}$ 得到的元素。我们称之为反洗牌余乘法，有时为了清楚起见将其记作 $\Delta=\Delta_\star$。

对偶地，量子洗牌代数（或余张量代数）$\mathfrak{A}(V)=\bigoplus_{n=0}^\infty V^{\otimes n}$ 具有自由余乘法，其分量为$\Delta_{p,\ q}\colon V^{\otimes p+q}\xrightarrow{\sim}V^{\otimes p}\otimes V^{\otimes q}$ 由恒等映射给出；乘法$\mu=\mu_\star$ 的分量为$\mu_{p,\ q}(v,\ w)$由洗牌积给出

$$v\star_{p,q}w=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(p,q)}R_\sigma(v\otimes w).$$

假设 $V \in \mathcal{V}$ 可对偶化，且其对偶为 V^*。例如，所有编织向量空间（V， R）都有对偶（V^*， R^*）。那么，张量代数 $T(V)$与量子洗牌代数 $\mathcal{A}(V^*)$互为对偶。

最后，Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$ 定义为双代数态射$T(V) \to \mathfrak{A}(V)$的像，该态射由将 $T^1(V) = V$映射到 $\mathfrak{A}^1(V) = V$并取恒等映射唯一确定。换言之，它是由一次元素在洗牌积下生成的 $\mathfrak{A}(V)$ 的子代数。

在 [KS20], 中，张量代数、量子洗牌代数和 Nichols 代数分别记为 $T_!(V)$、$T_*(V)$ 和 $T_{!*}(V)$，因为它们分别对应于命题 2.10(b) 中的 $j_!\mathcal{L}$、 $j_*\mathcal{L}$ 和 $j_{!*}\mathcal{L}$。

2.2.3. 本原双代数。 设 $\mathcal{V}$ 是一个定义在 k 上的编织幺半阿贝尔范畴，且满足 $V \in \mathcal{V}$。张量代数 $T(V)$、量子洗牌代数 $\mathfrak{A}(V)$ 和 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$ 是 $\mathcal{V}$中的本原双代数的例子，下面我们将对其进行定义。

定义 2.6. $\mathcal{V}$ 中的本原双代数是一个分次双代数 $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$，它既连通又余连通。本原双代数范畴 PB($\mathcal{V}$) 的对象为上述结构，态射则保持双代数结构。

更具体地说，本原双代数 A 具有连通分次代数的结构，其单位为η：$A_0 = k \hookrightarrow A$，乘法为 μ：$A \otimes A \to A$，并且乘法保持分次；它还具有余连通分次余代数的结构，其余单位为 ϵ：$A \twoheadrightarrow k = A_0$，余乘法为 Δ：$A \to A \otimes A$，且满足相容条件： Δ是代数态射。这里， $A \otimes A$ 的代数结构中的乘法定义为 $(\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes R_{A,A} \otimes \mathrm{id})$: $(A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \to A \otimes A$。对于非负整数 p, q，令 $\mu_{p,q}$：$A_p \otimes A_q \to A_{p+q}$ 和 $\Delta_{p,q}$：$A_{p+q} \to A_p \otimes A_q$ 分别为 A 中乘法与余乘法的分量。还可以通过根据乘法和余乘法定义对蹠，证明本原双代数是分次霍普夫代数 [KS20，命题 2.4。11]

对任意本原双代数，我们都可以关联以下 n 次 bar 复形和 n 次 cobar复形：

$$B_n(A) = \left\{ A_1^{\otimes n} \to \cdots \to \bigoplus_{\substack{p+q+r=n \\ 0<p,q,r<n}} A_p \otimes A_q \otimes A_r \to \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ 0<p,q<n}} A_p \otimes A_q \to A_n \right\},$$

$$B_n^\dagger(A) = \left\{ A_n \to \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ 0<p,q<n}} A_p \otimes A_q \to \bigoplus_{\substack{p+q+r=n \\ 0<p,q,r<n}} A_p \otimes A_q \otimes A_r \to \cdots \to A_1^{\otimes n} \right\},$$

其中，复形的分次经过归一化，使得 A_n 分别处于 -1 次和 1 次。 n次 bar 复形（分别地，cobar复形）源自 n次 bar 立方体（分别地，余条立方体）；后者是一个超立方体图表，包含 2^{n-1} 个顶点，其条目为 $A_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes A_{\lambda_m}$，其中 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = n$ 和 $\lambda_i > 0$，边由乘法（分别地，余乘法）给出。我们将 bar 立方体和余条立方体中的映射合并，同时加入 Koszul 符号扭转，从而分别得到 bar 复形和 cobar复形。

2.3. **反常层**。 我们先给出反常层的一般定义，然后定义 $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ 上的可因子化反常层的概念，并更详细地解释定理 1.4 。

2.3.1. 定义。倾斜层可以在各种不同但相关的框架下定义，例如：

(1) 分析地。当 X 是一个系数取自阿贝尔范畴 $\mathcal{V}$(例如 k-向量空间）的复（或实解析）流形时，存在 $D_c^b(X, \mathcal{V})$ 以及 $\mathrm{Perv}(X, \mathcal{V})$，如 [KS90中所述；KS20]。

(2) 代数地。当 X 是域 K 上的一个概形，系数取自 $\mathbb{Q}_\ell$（也包括 $\mathbb{Z}_\ell$、$\mathbb{Q}_\ell$ 等），且满足 $\ell \neq \mathrm{char}(K)$ 时，可以按照 [BBD82 构造导出范畴 $D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell)$ 和倾斜层 $\mathrm{Perv}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell)$；KW10]。
(3) 代数情形的相对版本。当 $X \to S$ 是概形在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]$ 上的一个有限表示态射，系数取自 $\mathbb{Q}_\ell$（也包括 $\mathbb{Z}_\ell$、$\mathbb{Q}_\ell$ 等）时，存在 $D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 和 $\mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q}_\ell)$，如 [HS23] 中所述。 —

我们注意到，当 X 是有限型复代数簇时，存在一个解析化函子 $D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell) \to D_c^b(X^{an}, \mathbb{Q}_\ell)$，它将代数情形（2）映到解析情形（1），且本质上满射；对于 $\mathbb{Z}_l$，$\mathbb{Q}_\ell$ 系数 [BBD82第 6]节的情况也同样如此。

本文将以某种方式运用这三种构造。这是因为我们希望在（2）的背景下研究 $\mathbb{F}_p$ 上概形的权重，同时运用 [KS20] 在（1）的背景下发展出的理论工具。我们将在第6 节借助相对代数情形（3）来衔接这两种情况。不过，除这一部分和第2.4.1节外，本文其余部分只讨论解析情形中的倾斜层。因此，我们将遵循 [KS20第 1.1.1 节，在解析情形中介绍倾斜层。4],代数情形则留待类比处理，读者可参阅上述参考文献。

设 X 是一个连通复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$，并设 $S = \{X_\alpha\}$ 是 X的复解析惠特尼分层。本文中我们只使用前面介绍过的 $\mathrm{Sym}^n \mathbb{C}$ 的对角分层。设 $\mathcal{V}$ 是一个阿贝尔范畴，例如 k-向量空间范畴，或一个定义在 k上的编织幺半阿贝尔范畴。令 $\mathrm{Shv}(X, \mathcal{V})$ 表示以 $\mathcal{V}$为值的 X 上的层的阿贝尔范畴。我们按通常方式定义层：将其视为一个反变函子 $\mathcal{F}$，从 X中的开集范畴到 $\mathcal{V}$，并满足层公理，其中 $0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ 是正合的。

令 $\mathrm{Shv}(X, S, \mathcal{V})$ 为 $\mathrm{Shv}(X, \mathcal{V})$ 的阿贝尔子范畴，其对象是层 $\mathcal{F}$，这些层关于 S可构造，即 $\mathcal{F}$ 在每个分层 X_α上局部常值。令$C^b(X, S, \mathcal{V})$ 表示 $\mathrm{Shv}(X, S, \mathcal{V})$ 的有界链复形范畴，由此可通过将所有拟同构取逆，构造有界导出范畴 $D^b(X, S, \mathcal{V})$。注意，对于所有 $K \in D^b(X, S, \mathcal{V})$，其上同调层 $\mathcal{H}^i(K)$ 都属于 $\mathrm{Shv}(X, S, \mathcal{V})$。我们可以在导出范畴中定义六个导出函子 $f_*, f_!, f^*, f^!, \otimes^{\mathbf{L}}, \mathbb{D}$。

令 $\mathrm{Perv}(X, S, \mathcal{V}) \subseteq D^b(X, S, \mathcal{V})$ 为周 pervers t-结构的心，参见 [KS90；KW10] 以了解更多详情。明确地说，复形 $K \in D^b(X, S, \mathcal{V})$ 是周 pervers 的，当且仅当对于每个分层 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow X$ 上同调层同时满足：$\mathcal{H}^i(i_\alpha^* K) = 0$ 对于 $i > -\dim_{\mathbb{C}}(X_\alpha)$，以及 $\mathcal{H}^i(i_\alpha^! K) = 0$ 对于 $i < -\dim_{\mathbb{C}}(X_\alpha)$。文献中定义倾斜层的一种常见方式是使用对偶而不是余茎。我们避免采用这种方式，因为当 $\otimes$ 在 $\mathcal{V}$ 中不是双正合时，这并不是正确的概念。

我们记 $D_c^b(X, \mathcal{V}) = \bigcup_S D^b(X, S, \mathcal{V})$ 为可构造导出层的有界范畴，并记 $\mathrm{Perv}(X, \mathcal{V}) = \bigcup_S \mathrm{Perv}(X, S, \mathcal{V})$ 为倾斜层的子范畴，其中我们对所有可能的分层取并。

对于一个复形 $K \in D^b(X, S, \mathcal{V})$，我们可以取其反常上同调 ${}^p\mathcal{H}^i(K) \in \mathrm{Perv}(X, S, \mathcal{V})$。对于局部闭嵌入 $j\colon U \hookrightarrow X$，$K \in \mathrm{Perv}(U, \mathcal{V})$ 的中间延拓定义为$j_{!*}K = \mathrm{Im}({}^p\mathcal{H}^0(j_! K) \to {}^p\mathcal{H}^0(j_* K)) \in \mathrm{Perv}(X, \mathcal{V})$。它将简单周变上同调层映为简单周变上同调层；反过来，$\mathrm{Perv}(X, S, \mathcal{V})$ 中的任意简单周变上同调层必然具有如下形式$j_{!*}\mathcal{L}$ 其中 $j\colon X_\alpha \hookrightarrow X$，且 $\mathcal{L}$ 是分层 X_α 上的局部系统。

2.3.2. 可因子化倾斜层。现在令 $\mathcal{V}$ 为 k 上的编织幺半阿贝尔范畴，并进一步假设 $\otimes$ 是双正合的。根据 Koszul 符号规则，$\mathcal{V}$ 的编织数据可扩展到有界链复形$C^b(\mathcal{V})$，其中 $R_{V[m],\, W[n]} = (-1)^{mn} R_{V,\, W}[m+n]$。由于 $\otimes$ 是双正合的，编织结构可下降到 $D^b(\mathcal{V})$。通过外张量积，这将在倾斜层上诱导出如下编织幺半结构。设 $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(X, \mathcal{V})$ 和 $\mathcal{G} \in \mathrm{Perv}(Y, \mathcal{V})$ 是倾斜

系数取自 $\mathcal{V}$的层，则我们有外编织同构 sm

$$R_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\colon \mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}\to\pi^*(\mathcal{G}\boxtimes\mathcal{F})$$

其中 $\pi\colon\ X\times Y\xrightarrow{\sim}Y\times X$。

我们可以从幺半群视角来理解这一点，详见 [KS20 第 3.2A 节] 。令 E_2为 $\mathbb{C}$中的小 2-圆盘幺半群，因此元素 $(U_1,\ \ldots\ldots,\ U_m)\in E_2(m)$ 是单位开圆盘 D内一组互不相交的圆形开圆盘。我们可以将外部编织同构理解为一族连续的外张量积 $\boxtimes_{(U_1,\ldots,U_m)}\ \mathcal{F}_i$ ，其由$E_2(m)$中的元素索引，其中 $m\geq 0$。例如，粗略地说，通过半德恩扭转交换 U_i 和 U_{i+1} ，等同于对相应因子 $\mathcal{F}_i$、 $\mathcal{F}_{i+1}$应用 $R_{\mathcal{F}_i,\ \mathcal{F}_{i+1}}$ 。

这对我们定义可因子化反常层很重要。回顾一下，我们在 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 上有对角分层 $S_n=\{S_\lambda\}_\lambda$ 。将其对所有 $n\geq 0$合并，可得到 $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ 上的分层 S 。此外，对于任意开集 $U\subseteq\mathbb{C}$，分层 S、 S_n 分别限制为 $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ 上的分层 S_U，以及 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 上的分层 S_n、$_U$。定义 $\mathrm{Perv}(\mathrm{Sym}(U)\ S_U,\mathcal{V})$ 为范畴 $\mathrm{Perv}(\mathrm{Sym}^n(U)\,S_n,_U,\mathcal{V})$ 的乘积，因此对象 $\mathcal{F}\in\mathrm{Perv}(\mathrm{Sym}(U)\ S_U,\mathcal{V})$ 是一列 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$，其中每个都是 $\mathrm{Perv}(\mathrm{Sym}^n(U)\,S_n,_U,\mathcal{V})$ 中的反常层。令 $a\colon\ \prod_{i=1}^m\mathrm{Sym}(U_i)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sym}\left(\bigsqcup_{i=1}^m U_i\right)$ 为由合并这些元组所给出的同构。

定义 2.7。 A 可因子化反常层 是对象 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_n\in\mathrm{Perv}(\mathrm{Sym}(\mathbb{C})\ S,\ \mathcal{V})$，并附带一个同构

$$\mu_{U_1,\ldots,U_m}\colon\ \boxtimes_{(U_1,\ldots,U_m)}\mathcal{F}|_{\mathrm{Sym}(U_i)}\xrightarrow{\sim}a^*(\mathcal{F}|_{\mathrm{Sym}(\sqcup U_i)})$$

对于每个 U_1，$\ldots\ldots$，U_m，这些同构关于算子组合相容。可因子化反常层的范畴 $\mathrm{FPS}(\mathcal{V})$ 的对象为上述对象，态射则需保持上述同构的数据。

备注 2.8。 在第 3.1.1 节中，我们将把此定义推广到 $\otimes$不是双正合的情形，方法是将 $\boxtimes$ 替换为其导出版本 $\boxtimes^{\mathbf{L}}$。

我们给出将要用到的可因子化反常层的主要例子。

例 2.9。 给定一个编织向量空间 $V\in\mathcal{V}$，我们定义相容局部系统 $\mathcal{L}(V[1])=(\mathcal{L}_n(V[1]))_n$ 如下。设 $\mathcal{L}_n(V[1])$ 是 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$ 上由 B_n- 表示 $(V[1])^{\otimes n}$ 给出的局部系统。由于 Koszul 符号扭转，这等于 $(V^{\otimes n}\otimes\mathrm{sgn})[n]$。显然， $\mathcal{L}(V[1])$ 是一个可因子化反常层。

此外，设 $j\colon\mathrm{Sym}^{\neq}(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ 且 $j_n\colon\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$。那么可以证明， $j_*\mathcal{L}(V[1])$、 $j_!\mathcal{L}(V[1])$ 和 $j_{!*}\mathcal{L}(V[1])$ 都是可因子化反常层。

2.3.3. ***Kapranov-Schechtman*** 等价。 我们将更详细地阐述定理 1.4 中的等价。设 $\mathcal{V}$ 是一个定义在 k 上的编织幺半阿贝尔范畴，且 $\otimes$ 是双正合的。那么， [KS20] 构造函子

$$\mathrm{PB}(\mathcal{V})\underset{\Phi}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\mathrm{FPS}(\mathcal{V})$$

它们给出了这两个范畴之间的一个等价。

我们概述构造过程，更多详情请参见 [KS20，第 4]节。给定一个本原双代数 A，可因子化反常层 $L(A)=(\mathcal{E}_n^\bullet(A))_n$ 由 Cousin 复形 $\mathcal{E}_n^\bullet(A)$ 构成，其构造如下。对于 n的一个分拆 α ，考虑虚部分层 $X_\alpha^\jmath$ ，它是沿虚部映射 $\mathrm{Im}:\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})\to\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R})$ 对 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R})$ 上分层 α 取原像所得。考虑实部投影 $\rho_\alpha\colon\ X_\alpha^\jmath\to\prod\mathrm{Sym}^{\alpha_v}(\mathbb{R})$,˜并令 $\mathcal{E}^\alpha(A)$ 为沿 ρ_α 对 $\mathrm{Sym}^{\alpha_v}(\mathbb{R})$ 上的可构造层之积作拉回所得，其中每个

˜由第 α_v个余条立方体给出。然后，将 Cousin层 $\mathcal{E}^\alpha(A)$ 定义为把 $\mathcal{E}^\alpha(A)$ 推前到 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 所得的层，而第 n个 Cousin 复形定义为

$$\mathcal{E}_n^\bullet(A) = \left\{ \mathcal{E}^{(1^n)}(A) \to \bigoplus_{l(\alpha)=n-1} \mathcal{E}^\alpha(A) \to \cdots \to \mathcal{E}^{(n)}(A) \right\}$$

带有 Cousin层之间的自然映射，并附有 Koszul 符号扭转，且经过归一化，使得$\mathcal{E}^{(n)}(A)$处于次数 -1。另一方面，给定 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$，我们构造 $\Phi(\mathcal{F}) = \oplus_{n\geq 0}\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{F}_n)$，使其成为原点 $0^n \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$处的总消失循环。更准确地说， $\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{F}_n)$是相对于系数 $a_2 = \sum_{i\neq j} x_i x_j$， 在 $\mathcal{F}_n|_{\mathrm{Sym}_0^n(\mathbb{C})}$ 中原点处的消失循环，其中 $\mathrm{Sym}_0^n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 是满足 $a_1 = \sum_i x_i = 0$ 的子集。余乘法由泛化映射给出，而乘法则通过重构 Cousin复形并考察微分得到。

由于这一构造相当冗长，我们通常依赖这一等价的性质，而不详细展开构造过程。以下列出我们将要用到的性质，参见 [KS20，定理 3.3.1，3.3。3]。回顾相容局部系统的定义 $\mathcal{L}(V[1])$ 并令 $j\colon \mathrm{Sym}^{\neq}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(\mathbb{C})$。

命题 2.10. 该等价还满足以下性质 .

(a) 在一般层上， $L(A)|_{\mathrm{Sym}^{\neq}(\mathbb{C})} \cong \mathcal{L}(A_1[1])$。*(b)* 我们有 $L(T(V)) \cong j_!\mathcal{L}(V[1])$、 $L(\mathfrak{A}(V)) \cong j_*\mathcal{L}(V[1])$ 以及 $L(\mathfrak{B}(V)) \cong j_{!*}\mathcal{L}(V[1])$。*(c)* 总消失循环 $\Phi_{\mathrm{tot}}(L_n(A)) \cong A_n$。*(d)* $L_n(A)$ 在原点处的茎是第 n 个 *bar* 复形 $B_n(A)$。*(e)* 假设 A 可对偶化，其对偶为 A^*，则 $L_n(A^*) \cong \mathbb{D}L_n(A)$。

我们仿照 [KS20 的推论 3.3 及其证明，讨论 (d) 如何推出定理 1.4 中关于上同调的结论。4] 对于本原双代数 A，bar 复形 $H^jB_n(A)$ 的上同调与 $\mathrm{Tor}^A_{-j,n}(k,k)$ 同构。另一方面，对于任意 $\mathcal{F}_n \in \mathrm{Perv}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) S_n, \mathcal{V})$，其茎 $(\mathcal{F}_n)_0$ 在原点处准同构于 $R\Gamma\mathcal{F}_n$，这是因为对角分层具有拟齐次性（换言之，由于收缩 $\mathbb{C}^*$ 作用），因此 (d) 给出一个同构

$$R\Gamma^j L_n(A) \cong \mathrm{Tor}^A_{-j,n}(k,k).$$

在特殊情形 $A = \mathfrak{A}(V)$ 下，使得如 (b) 中所示， $L_n(A) = j_{n*}\mathcal{L}_n(V[1])$，我们看到左端为

$$R\Gamma^j(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}), j_{n*}\mathcal{L}_n(V[1])) = R\Gamma^j(\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C}), \mathcal{L}_n(V[1])) = H^j(B_n, V^{\otimes n}\otimes \mathrm{sgn})[n],$$

因此我们得到 [ETW17定理 1 的对偶。3] 再乘以一个符号扭曲：

$$H^j(B_n, V^{\otimes n}\otimes \mathrm{sgn}) \cong \mathrm{Tor}^{\mathfrak{A}(V)}_{n-j,n}(k,k).$$

最后，回顾一下，拓扑 Hurwitz 空间是有限 étale 覆盖 $\pi_n\colon \mathrm{Hur}_n^{G,c} \to \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$，由 B_n-表示 c^n 给出。回顾例 2.3 和 2.5， c 是一个架，具有 $g^h = h^{-1}gh$，并且存在相应的编织向量空间 $V_\epsilon = V(c,-1) \in \mathcal{YD}_G$，其中我们取余循环$x_{ab} \equiv -1$。 B_n-表示 c^n 与 $V_\epsilon^{\otimes n}\otimes \mathrm{sgn}$ 上的 B_n 表示相同，因为符号表示与负余循环相互抵消。因此，Hurwitz 空间的上同调为

$$H^j(\mathrm{Hur}_n^{G,c}, k) \cong H^j(B_n, c^n) \cong H^j(B_n, V_\epsilon^{\otimes n}\otimes \mathrm{sgn}) \cong \mathrm{Tor}^{\mathfrak{A}(V_\epsilon)}_{n-j,n}(k,k).$$

2.4. **权滤过**。 我们将在两种不同的情形下介绍权滤过：首先是在 $\mathbb{F}_p$上利用弗罗贝尼乌斯特征值，然后是在 $\mathbb{C}$ 上利用混合霍奇模理论。在第 6节中，我们将证明一个比较定理，在 Hurwitz 空间的情形下将二者联系起来。

2.4.1. $\mathbb{F}_p$上的权滤过。现在我们简要解释 $\mathbb{F}_p$ 上的代数情形中的德利涅权重理论，遵循 [BBD82; KW10]。设 X 是 $\mathbb{F}_p$上的一个概形，设 $\mathcal{F}$ 是一个可构造的$\mathbb{Q}_\ell$-层，满足 $\ell \neq p$，并固定一个同构 ι: $\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$。对于一个闭点 $x \in X$，其剩余域为k_x，并取几何点 $\bar{x}$，根据可构造性，茎 $\mathcal{F}_x$ 是一个有限维的 $\mathbb{Q}_\ell$ 向量空间，并且具有几何弗罗贝尼乌斯 Frob$_x$的作用。若对于所有这样的闭点 $x \in X$，Frob$_x$ 在 $\mathcal{F}_x$ 上的特征值 α 满足 $|\iota(\alpha)| = (\#k_x)^{w/2}$，则称 $\mathcal{F}$ 权纯为 w。若存在 $\mathcal{F}$ 的一个有限滤过，使得每个分次部分都是纯的，则称 $\mathcal{F}$ 为混合；我们令 $w(\mathcal{F})$为 $\mathcal{F}$的最大权重。

回想一下，类比第2.3.1 节，我们可以在代数情形中定义可构造层 $D^b_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 的有界导出范畴及其倾斜层子范畴$\mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q}_\ell)$。我们称复形 $K \in D^b_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 是点态权纯，权重为 w，如果每个上同调层 $\mathcal{H}^i(K)$ 都是权纯，权重为 $w+i$；这里要注意，权重会因上同调次数而发生偏移。遗憾的是，点态权纯的定义在导出函子作用下表现不佳，因此我们需要定义另一种纯性概念。

我们称 K 为混合的，如果每个上同调层 $\mathcal{H}^i(K)$都是混合的，并令 $w(K)$为 $w(\mathcal{H}^i(K)) - i$ 在所有 i上的最大值。令两个子范畴 $D^b_{\leq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$和 $D^b_{\geq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$分别由满足 $w(K) \leq w$ 和 $w(\mathbb{D}K) \leq -w$ 的混合复形组成。可以证明，$w(\mathbb{D}K) \leq -w$ 蕴含 $w(K) \geq w$，但反之不成立。若 K 属于 $D^b_{\leq w}(X, \mathbb{Q}_\ell) \cap D^b_{\geq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$，我们称其为权重 w 的纯复形。

逐点纯与纯这两个概念一般并不一致，但在一些重要的特殊情形下二者确实相同。例如，当 X 光滑且 $\mathcal{H}^i K$ 为局部系统时，我们有 $\mathcal{H}^i \mathbb{D}K \cong (\mathcal{H}^{2d-i}K)^\vee(d)$，其中 $d =$ 维 X；此时可以直接比较弗罗贝尼乌斯特征值，并证明这两个概念相同。最重要的是，这意味着当 X 是一个点时，任意复形 K都满足这两个概念相同。

六个导出函子 f_*、$f_!$、f^*、$f^!$、$\otimes^{\mathbf{L}}$、$\mathbb{D}$都保持混合复形。根据定义可知，f^* 保持 $D^b_{\leq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$；由韦伊猜想可知，$f_!$ 也保持 $D^b_{\leq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$；因此，根据对偶性，$f_*$和 $f^!$ 都保持 $D^b_{\geq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$。根据定义，对偶性 $\mathbb{D}$ 将$D^b_{\leq -w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$与 $D^b_{\geq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$互换。对于局部闭嵌入，中间延拓 $j_{!*}$ 保持权重（即同时保持 $D^b_{\leq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$和 $D^b_{\geq w}(X, \mathbb{Q}_\ell)$），因此任何简单混合倾斜层必定是纯的，因为它是一个局部系统的中间延拓。由于我们使用的是几何弗罗贝尼乌斯，Tate 扭曲（d）会使权重降低 $2d$。

对于任意混合反常层 $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q}_\ell)$，可以证明存在一个规范且唯一的递增权重滤过

$$\cdots \subseteq W_{-1}\mathcal{F} \subseteq W_0\mathcal{F} \subseteq W_1\mathcal{F} \subseteq \cdots$$

其中分次分量 $\mathrm{Gr}^W_w \mathcal{F}$ 是权重为 w的纯反常层。

2.4.2. 关于 $\mathbb{C}$的权重滤过。在 $\mathbb{C}$ 上也有一套类似的权重理论，由 [Sai88; Sai90]在混合霍奇模的背景下发展而来，推广了 [Del71; Del74]中的混合霍奇结构理论。在这一框架下，权重的概念并非源自弗罗贝尼乌斯作用，因此该理论的形式结构有很大不同，尽管其整体行为与有限域情形十分相似。下面对其作一概述。

对于 $\mathbb{C}$ 上的分离约化代数簇 X，存在一个混合霍奇模的阿贝尔范畴 MHM(X)，以及函子

$$\mathrm{rat}\colon D^b(\mathrm{MHM}(X)) \to D^b_c(X^{an}, \mathbb{Q})$$

该函子限制为一个正合忠实函子 MHM(X) $\to$ Perv($X^{an}, \mathbb{Q}$)。此外，$D^b_c(X^{an}, \mathbb{Q})$ 中的导出函子 $f_*, f_!, f^*, f^!, \otimes^{\mathbf{L}}, \mathbb{D}$ 可提升至 D^b(MHM(X))。

根据定义，每个混合霍奇模块 $M \in$ MHM(X) 都配备一个有限递增滤过 W_iM，称为权重滤过，其分次部分记为 $\mathrm{Gr}^W_w M$。我们定义

$D^b_{\le w}(\mathrm{MHM}(X))$（分别为 $D^b_{\ge w}(\mathrm{MHM}(X))$）由满足以下条件的 $M \in D^b(\mathrm{MHM}(X))$ 构成：对 $i > j+w$，$\mathrm{Gr}^W_i H^j M = 0$（分别为 $i < j+w$）。若 M 属于两者的交集，即对 $i \neq j+w$，$\mathrm{Gr}^W_i H^j M = 0$，则称其为权 纯。许多与有限域情形类似的定理同样成立。例如，我们再次有 $f_!$，f^*保持 $D^b_{\le w}(\mathrm{MHM}(X))$，$f_*$，$f^!$保持 $D^b_{\ge w}(\mathrm{MHM}(X))$；对偶性 $\mathbb{D}$将 $D^b_{\le -w}(\mathrm{MHM}(X))$ 与 $D^b_{\ge w}(\mathrm{MHM}(X))$ 互换；此外，Tate 扭曲和次数平移也具有类似性质。

关键在于，若要在反常层 $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(X^{an}, \mathbb{Q})$ 上定义权重滤过，我们首先将其提升为一个具有权重滤过的混合霍奇模块 $M \in \mathrm{MHM}(X)$，然后再将其投影下来，得到 $\mathcal{F}$ 的权重滤过。只要 $\mathcal{F}$“来自几何”，这种做法就应该可行。在我们的情形中，我们要为 $\mathrm{Sym}^{\neq}(\mathbb{C})$ 上的相容局部系统 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(V[1])$ 构造 $j_*\mathcal{L} = (j_{n*}\mathcal{L}_n)_n$ 的权重滤过，其中 V 是一个编织 k-向量空间，如例 2.9 所述。第一步是将 $\mathcal{L}_n$ 提升为一个具有平凡霍奇结构、类型为 (0, 0) 的混合霍奇模块 M。然而，$\mathcal{L}_n$ 可能并非定义在 $\mathbb{Q}$ 上；即使它定义在 $\mathbb{Q}$ 上，也并非每个 $\mathbb{Q}$-局部系统都能提升为混合霍奇模块。

因此，我们施加条件：对每个 n，$\mathcal{L}_n$ 都具有 有限单值化。我们考虑一个这样的 $\mathcal{L}_n$；由于单值化有限，它定义在某个数域 $K/\mathbb{Q}$ 上，因此可以写作 $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_K \otimes_K k$。这里值得注意的是，如果 V 是定义在 K 上的编织向量空间，那么所有 $\mathcal{L}_n$ 都定义在同一个 K 上。将 K- 混合霍奇模块定义为混合霍奇模块范畴中的一个 K-模；也就是说，它是一个通常的混合霍奇模块 M，并带有一个 $\mathbb{Q}$-代数同态 $K \to \mathrm{End}_{\mathrm{MHM}}(M)$。函子 rat 自然地扩展为 rat_K，它将一个 K-混合霍奇模块映为 $\mathrm{Perv}(X, \mathbb{Q})$ 中的一个 K-模，而这实际上就是 $\mathrm{Perv}(X, K)$ 的一个对象。

我们证明，不可约的 K-局部系统 $\mathcal{L}_K$ 唯一地提升为一个 K-型为 $(0,0)$的混合霍奇模块。事实上，底层反常层为局部系统的混合霍奇模块（称为光滑混合霍奇模块），正是 [SZ85；Kas86]意义下的可容许可极化霍奇结构变分。此外，由于我们的单值化是有限的，可容性条件变得平凡；又因为我们要求型为 $(0,0)$，这不过是一个可赋予定义在 $\mathbb{Q}$上的单值化不变的对称正定双线性型的局部系统。注意，我们只要求存在这样的型，而不需要选定一个型。带有 K-模结构后，它是一个 K-局部系统；但由于混合霍奇模块范畴中的态射不必保持极化，我们只需双线性型定义在 $\mathbb{Q}$ 上，而非 K上。这样的型总是存在，因为单值化群 G 是有限的，因此对任意对称正定型在 G上取平均，即可得到一个单值化不变的型。

由此，我们可以通过将 $\mathcal{L}_n$ 提升到 K-混合霍奇模块 M_K 并取推前 $j_{n*}M_K$，在 $j_{n*}\mathcal{L}_n$上定义权重滤过，这会在 $\mathrm{rat}(j_{n*}M_K) = j_{n*}\mathcal{L}_K$上给出典范权重滤过。将其张量到 k后，我们便得到 $j_{n*}\mathcal{L}_{n*}$上的权重滤过。

我们将讨论一种不同的几何方法，来获得 $\mathcal{L}_n$（进而获得 $j_{n*}\mathcal{L}_n$）上的混合霍奇模块结构；这种方法将在第6节中用于 Hurwitz 空间。有限单值化条件告诉我们，存在一个有限 étale 覆盖 π_n: $X_n \to \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$，使得 $\mathcal{L}_n$ 是$\pi_{n*}k_{X_n}[n]$的一个直和项。我们可以构造 $\mathbb{Q}$ 的典范提升 $\mathbb{Q}^H \in \mathrm{MHM}(\mathrm{pt})$，使其具有平凡霍奇结构。将其拉回到 X_n，得到 $\mathbb{Q}^H_{X_n}(n/2)[n] \in \mathrm{MHM}(X_n)$；我们对次数进行平移，使其仍为反常层，并添加一个 Tate 扭曲，使其权重归一化为零。将其推前，便得到混合霍奇模块 $M = \pi_{n*}\mathbb{Q}^H_{X_n}(n/2)[n]$，其类型为平凡型 (0,0)，底层反常层为 $\pi_{n*}\mathbb{Q}_{X_n}[n]$。在存在 $\mathcal{L}_n = \pi_{n*}k_{X_n}[n]$的情形下，例如 Hurwitz 空间的情形，$\mathcal{L}_n$ 已定义在 $\mathbb{Q}$ 上，而 M 是$\mathcal{L}_{n,\mathbb{Q}}$的一个提升。在一般情形下，我们将$M \otimes_{\mathbb{Q}} K$ 作基变换到一个足够大的数域上，之后便可将$\mathcal{L}_n$ 的 K-混合霍奇模块提升恢复为一个直和项。

3. 滤过的等价性

本节的目标是按照方程1.5 中概述的策略证明定理(1.1)。令 $\mathcal{V}$ 为一个由 k-向量空间构成的编织幺半阿贝尔范畴；这意味着 $\mathcal{V}$ 的底层对象是 k-向量空间，且张量积由 $\otimes_k$ 作为 k-向量空间的张量积给出。我们关心的主要应用是 $\mathcal{V} = \mathcal{YD}_G$ 为 Yetter-Drinfeld 模范畴的情形。

我们首先介绍相应的编织幺半阿贝尔范畴 $\mathcal{W}$，它们是有限的$\mathbb{Z}$-索引图表，取值于 $\mathcal{V}$。这类似于从 $k[t]$-向量空间构造分次 k-模。等价性 (a) 立即由定义得到；等价性 (b) 对 [KS20] 中的证明作了调整，以适用于 $\mathcal{W}$，其中 $\otimes$ 并非双正合，因而实质上是将张量积替换为导出张量积。等价性 (c) 最为复杂，需要证明关于取值于 $\mathcal{W}$ 的导出层的更多技术性引理，尤其是对导出外张量积进行细致分析。最后，我们利用这一构造证明：计算代数及倾斜层的上同调的谱序列是同构的。

3.1. 取值于分次 $\mathcal{W}$-模的编织幺半阿贝尔范畴 $k[t]$。 我们如下定义与 $\mathcal{W}$ 相关的编织幺半阿贝尔范畴 $\mathcal{V}$。其对象是 $\mathbb{Z}$-索引的有限图表 $M = \{\cdots \to M_0 \to M_1 \to \cdots\}$，满足 $M_s \in \mathcal{V}$；其中“有限”意味着，对于 $M_s = 0$，有 $s \ll 0$，且 $M_s \xrightarrow{\sim} M_{s+1}$ 是 $s \gg 0$的同构。我们可以将其视为分次 $k[t]$-模，其中 V_s 位于分次 s 中，而次数为 1 的元素 t 通过图表中的箭头作用；从这一角度看，有限图表条件等价于 M 作为 $k[t]$-模是有限生成的（等价地，是有限表示的）。态射是保持次数的图表交换映射。即使带有有限生成条件，这仍是一个 k-线性阿贝尔范畴，因为 $k[t]$ 是诺特的。为方便记号，对于任意 $V \in \mathcal{V}$ 和 $s \in \mathbb{Z}$，我们令
$V\{t\} = \{\cdots \to 0 \to V \xrightarrow{\sim} V \xrightarrow{\sim} \cdots\} \in \mathcal{W}$为在次数 ≥ 0中由 V构成的图表；对于图表$M \in \mathcal{W}$，我们记 $t^s M$ 为向右移动 s 个位置后的 M。这分别类似于与$k[t]$ 作张量积以及乘以 t^s。

我们在 $\mathcal{W}$ 上定义张量积结构，使其底层分次 $k[t]$-结构上的张量积就是在 $k[t]$上取张量积。给定 M，$N \in \mathcal{W}$，张量积 $M \otimes_{\mathcal{W}} N$ 的次数为 s 的项定义为

$$\left(\bigoplus_{u+v=s} M_u \otimes_k N_v\right) \Big/ (t \otimes_k 1 - 1 \otimes_k t) \left(\bigoplus_{u+v=s-1} M_u \otimes_k N_v\right) \tag{3.1}$$

这里我们用 t 表示图表映射 $M_u \to M_{u+1}$ 和 $N_v \to N_{v+1}$。连续次数之间的映射由 $t \otimes_k 1 = 1 \otimes_k t$ 给出。由于 M和 N都是有限生成的，因此对于某个有界范围内的 u，v，我们可以将无限直和替换为有限直和，所以这确实是阿贝尔范畴 $\mathcal{V}$中的一个元素。$\mathcal{W}$ 中的单位是 $k\{t\}$，其中 k 是 $\mathcal{V}$中的单位。编织 $R_{M,\,N}\colon M \otimes_{\mathcal{W}} N \to N \otimes_{\mathcal{W}} M$ 可以在每个次数上定义为对上述有界 u，v 对应的编织 $R_{M_u,\,N_v}$ 取直和，然后再下降到商上。

3.1.1. 在 $\mathcal{W}$ 上的可因子化反常层。 我们可以像第 $\mathcal{W}$ 节那样定义本原双代数范畴 PB(2.2.3。然而，在第 2.3.2 节中，我们定义可因子化反常层范畴时，假设 $\otimes$ 是双正合的；但在这里我们考虑的是 $k[t]$-模，因此情况并非如此。我们通过改用导出张量积 $\otimes^{\mathbf{L}}$ 来解决这个问题。

回顾一下，对于 K，$L \in D^b(\mathcal{W})$，导出张量积 $K \otimes^{\mathbf{L}} L$ 的计算方法是将 K或 L 中的任意一个替换为自由消解，然后取张量积。每个对象 $M \in \mathcal{W}$ 都有一个长度至多为 1 的自由消解，我们通过取一个满射来构造它

$$\bigoplus_{s \in I} t^s M_s\{t\} \twoheadrightarrow M$$

对于某个有界区间 I，因为 M 是有限生成的。其核在 $k[t]$上也是自由的，因为主理想整环上任意自由模的子模都是自由模。正因如此，我们称 $k[t]$ 的 Tor 振幅为 1。

现在我们仿照第 2.3.2 节 [KS20 的第 3 节。2], 将 $\otimes$替换为 $\otimes^{\mathbf{L}}$。上的编织 $\mathcal{W}$ 下降为 $D^b(\mathcal{W})$ 上的导出编织

$$R_{K,L}\colon K \otimes^{\mathbf{L}} L \xrightarrow{\sim} L \otimes^{\mathbf{L}} K.$$

对于 K, $L \in D^b(\mathcal{W})$，我们将 K 或 L 之一替换为自由消解，然后在投射分解上定义带有 Koszul 符号扭转的编织。接着，同样地，我们得到外部编织同构

$$R_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\colon \mathcal{F} \boxtimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G} \to \pi^*(\mathcal{G} \boxtimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F})$$

其中 $\pi\colon\ X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$，之后我们可以采用幺半群视角来定义 $\boxtimes^{\mathbf{L}}_{(U_1,\dots,U_m)}\mathcal{F}_i$，因此我们可以像定义 $\mathcal{W}$ 那样定义一个关于 2.7 的可因子化 perversity 层，只需将 $\boxtimes$替换为 $\boxtimes^{\mathbf{L}}$。

3.2. **在 $\mathcal{W}$ 上的 Kapranov-Schechtman 等价。** 在本小节中，我们证明公式 (1.1)中的 (b)，它是定理 1.4 针对 $\mathcal{W}$ 的对应结果。

命题 3.1。 我们有如下等价关系

$$\{B \in PB(\mathcal{W})\ free\ over\ k[t]\} \xleftrightarrow{\sim} \{\mathcal{G} \in FPS(\mathcal{W})\ with\ \Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n)\ free\ over\ k[t]\}\,.$$

此外，我们还有命题 *2.10(d)* 的类似结论，即若 B 对应于 $\mathcal{G}$，则原点处的茎 $(\mathcal{G}_n)_0$ 同构于 n 次 *bar* 复形 $B_n(B)$。

回想一下，在 $\mathcal{W}$ 的情形下，我们不能直接应用定理 1.4 来证明这一点，因为 $\otimes$ 不是双正合的。事实上，若没有自由性条件，对应关系 PB($\mathcal{W}$) $\xleftrightarrow{\sim}$FPS($\mathcal{W}$) 并不成立。关键在于，$\boxtimes^{\mathbf{L}}$ 可能不保持 perversity。为了更详细地说明这一点，反过来假设定理 1.4 和命题 2.10 对 $\mathcal{W}$ 成立。于是，取 B 为一个原始双代数，使得 B_1 不是自由的。由命题 2.10(a)，我们有 $L_1(B)$ 是一个取值为 $B_1[1]$ 的常值层。但这意味着 $L_1(B)|_{U_1} \boxtimes^{\mathbf{L}} L_1(B)|_{U_2}$ 是一个取值为 $(B_1 \otimes^{\mathbf{L}} B_1)[2]$, 的常值层；然而，由于 B_1 不是自由的，它现在支撑在次数 -2 和 -3 上，因此不是 perverse。与此同时，可因子化条件告诉我们，$L_1(B)|_{U_1} \boxtimes^{\mathbf{L}} L_1(B)|_{U_2} \cong a^*(L_2(B)|_{U_1\times U_2})$，而这是 perverse 的，于是得到矛盾。

如果我们在上面的例子中要求 B_1 自由，那么就不会有问题，因为 $B_1 \otimes^{\mathbf{L}} B_1$ 完全处于零次。事实上，我们将看到，B 的自由性，以及相应地，对所有 n，$\Phi_{\mathrm{tot}}(L_n(B))$ 的自由性，恰好就是使其成为等价的条件。

命题的证明*3.1.* 我们沿用[KS20] 中给出的两个方向上的函子构造，这些构造我们已在第2.3.3 节略作介绍；不过，我们将所有张量积 $\otimes$ 和外张量积 $\boxtimes$ 都替换为它们的导出版本 $\otimes^{\mathbf{L}}$ 和 $\boxtimes^{\mathbf{L}}$。大多数步骤都能照常进行，因为 [KS20]主要是在导出范畴中工作；我们只需关注由于 $k[t]$的 Tor 振幅，某些对象可能未集中在正确的次数上，并检查自由性条件能否解决这一问题。归根结底，这基本上就是要验证原本应当是非导出的表达式仍然是非导出的，并且原本是 perverse 的层仍然是 perverse 的。

首先，考虑正向函子 L。令 $B \in$PB($\mathcal{W}$) 在 $k[t]$上是自由的，这意味着每个代数分次 B_n 都是一个 $k[t]$-模。构造 Cousin 复形时，[KS20] 包含如下形式的张量积 $\bigotimes_i A_{\lambda_i}$，这里指的是非导出张量积。在我们的语境中，尽管我们将张量积导出化为 $\bigotimes_i^{\mathbf{L}} B_{\lambda_i}$，它仍然等于非导出版本 $\bigotimes_i B_{\lambda_i}$，因为$B$ 是自由的。由于这些张量积仍集中在零次，bar 复形和 cobar 复形也仍集中在零次。因此，[KS20，推论 4.1.13] 中的断言，即 $\mathcal{E}^\alpha(B)$ 属于

零次，以及 [KS20，命题4.217] 中的断言，即 $\mathcal{E}_n^\bullet(B)$ 是反常层，这两者仍然成立。其余部分均按预期进行，因此我们得到一个可因子化 perversity 层 $\mathcal{G} = (\mathcal{E}_n^\bullet(B))_n$，其消失循环为 $\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n) \cong B_n$，它在 $k[t]$上是自由的。

对于逆函子 Φ，从某个 $\mathcal{G} \in \mathrm{FPS}(\mathcal{W})$ 开始，且 $\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n)$ 在 $k[t]$上自由，显然， B 我们得到的本原双代数在 $k[t]$ 上按定义是自由的。与上一段类似，由于自由性，原本不取导出的张量积仍处于零次。构造的其余部分已涉及导出函子，且只用到不要求 $\otimes$具有双正合性的结果，因此证明依然成立。命题 2.10(d) 的类似结论也成立。 □

3.3. **本原双代数的滤过提升**。 我们首先仔细定义 $\mathcal{V}$ 和 PB($\mathcal{V}$) 中对象的滤过概念。按照惯例，我们只考虑递增滤过，因为任何递减滤过都可以转换为递增滤过。

定义 3.2。 $V \in \mathcal{V}$上的有限递增滤过是一个序列 $\cdots \subseteq F_0V \subseteq F_1V \subseteq \cdots$，满足 $F_sV = 0$ （对于 $s \ll 0$ ）以及 $F_sV = V$（对于 $s \gg 0$）。 $A \in \mathrm{PB}(\mathcal{V})$ 上的递增滤过是一个序列 $\cdots \subseteq F_0A \subseteq F_1A \subseteq \cdots$，使得伴随分次 $A^{gr} = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_s A$ 也是一个尊重分次 s 的本原双代数，并且对于每个代数次数 n，滤过 F_sA_n 都是有限的。

我们将 A^{gr} 是双代数这一条件展开如下。乘法和余乘法都需要下降到 $\mu^{gr}\colon\ A^{gr} \otimes A^{gr} \to A^{gr}$ 和 $\Delta^{gr}\colon\ A^{gr} \to A^{gr} \otimes A^{gr}$，这等价于满足 $\mu(F_s(A\otimes A)) \subseteq F_sA$ 且 $\Delta(F_sA) \subseteq F_s(A\otimes A)$，其中 $F_s(A\otimes A) = \bigcup_{u+v=s} F_uA\otimes F_vA \subseteq A\otimes A$。单位和余单位应处于分次 $s = 0$ 中，即 $F_{-1}A_0 = \{0\}$ 和 $F_0A_0 = A_0 = k$。一旦满足这些条件， A^{gr} 的相容条件便会自动从 A 的相容条件下降而来。

现在，我们通过将这些滤过提升到 $B \in \mathrm{PB}(\mathcal{W})$来证明方程(1.1) 中的 (a)。事实证明，这相当于同义反复，因为有限生成对应于有限滤过条件，而 A^{gr} 是本原双代数这一条件，对应于 B 是本原双代数这一条件。

命题 3.3. 我们有如下等价

$$\{Filtrations\ of\ A \in PB(\mathcal{V})\} \xleftrightarrow{\sim} \{B \in PB(\mathcal{W})\ free\ over\ k[t]\}\,.$$

证明。 设有一个滤过 F_sA。由此定义 $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$，其中 $B_n = \{\cdots \hookrightarrow F_0A_n \hookrightarrow F_1A_n \hookrightarrow \cdots\}$ 是与 F_sA_n相关联的图表。每个 B_n 都是自由的，因为图表映射是包含映射；并且是有限生成的，因为每个 A_n 上的滤过都是有限的。

由等式(3.1)可知，次数为 s 的部分（相对于 $k[t]$ 上的分次） $B \otimes_{k[t]} B$ 为

$$\left(\bigoplus_{u+v=s} F_uA \otimes_k F_vA\right) \Big/ (t \otimes_k 1 - 1 \otimes_k t) \left(\bigoplus_{u+v=s-1} F_uA \otimes_k F_vA\right),$$

其中映射 t h　　这里的映射只是包含映射。显然，在 $A \otimes A$ 内部观察时，这就是

$$F_s(A \otimes A) = \bigcup_{u+v=s} F_uA \otimes_k F_vA$$

因为商会将 $A \otimes A$ 中相同的元素视为同一元素。

回顾一下，由于 A^{gr} 是本原双代数，我们有 $\mu_A\colon\ F_s(A \otimes A) \to F_sA$ 以及 $\Delta_A\colon\ F_sA \to F_s(A \otimes A)$。由此，我们可以分别定义 μ_B 和 Δ_B 的次数为 s 的部分，因此 B 确实是 $\mathcal{W}$中的本原双代数。

反过来，从本原双代数 B 出发，我们可以通过考察 B 的 s 次部分来恢复 F_sA 。同样的论证表明，这确实是一个滤过。□

3.4. **可因子化周 pervers 层的提升滤过。** 我们首先以类似于定义 $(\mathcal{V})$ 的方式，在 FPS3.2 上定义滤过。

定义 3.4. $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_n \in \mathrm{FPS}(\mathcal{V})$ 的一个滤过是一个序列 $\cdots \subseteq F_0\mathcal{F} \subseteq F_1\mathcal{F} \subseteq \cdots$，使得其伴随分次 $\mathcal{F}^{gr}=\bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_s\mathcal{F}$ 是一个可因子化反常层，并且对于每个 n，滤过 $F_s\mathcal{F}_n$ 都是有限的，也就是说 $F_s\mathcal{F}_n=0$ 对于 $s\ll 0$，且 $F_s\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_n$ 对于 $s\gg 0$。

我们要证明方程(1.1)中的 (c)，如下所示。

命题 3.5. 我们有如下等价关系

$$\{Filtrations\ of\ \mathcal{F}\in FPS(\mathcal{V})\} \xleftrightarrow{\sim} \{\mathcal{G}\in FPS(\mathcal{W})\ with\ \Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n)\ free\ over\ k[t]\}\,.$$

事实证明，这是三个等价关系中最复杂的一个，在证明之前我们需要做一些准备。

3.4.1. 取值于 $\mathcal{W}$ 的层。 我们将说明， $\mathcal{W}$ 中的（可构造、导出、周 pervers）层由取值于 $\mathcal{V}$ 的有限图表所给出，其中图表的对象是（可构造、导出、周 pervers）层。

令 $\mathrm{Shv}(X,S,\mathcal{C})$ 表示关于 S、取值于 $\mathcal{C}$ 的 X 上的可构造层。回忆一下，阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 中一个以 $\mathbb{Z}$ 为指标的有限图表是 $\{\cdots\to C_0\to C_1\to\cdots\}$，其中 $C_s=0$ 对于 $s\ll 0$，且 $C_s\xrightarrow{\sim} C_{s+1}$ 对于 $s\gg 0$。

下面的命题基本上说明，取 $\mathbb{Z}$ 指标的有限图表与导出范畴的构造以及导出函子 $f^*, f_*, f^!, f_!$, Φ_{tot} 可交换。这并不令人意外，因为这些构造在某种意义上是“几何的”：它们只关心底层的向量空间结构，而该结构不过是对所有 t 次数取直和，并不涉及 $\mathcal{W}$ 中的张量积； $k[t]$ 的代数结构正是在此处发挥作用。

命题 3.6. 设 S 是 X 的一个有限分层。以下成对的范畴之间存在等价。

(a) $Shv(X,S,\mathcal{W})$ 以及 $Shv(X,S,\mathcal{V})$ 中由 $\mathbb{Z}$ 索引的有限图表。(b) $C^b(X,S,\mathcal{W})$ 以及 $C^b(X,S,\mathcal{V})$ 中由 $\mathbb{Z}$ 索引的有限图表。(c) $D^b(X,S,\mathcal{W})$ 以及 $D^b(X,S,\mathcal{V})$ 中由 $\mathbb{Z}$ 索引的有限图表。(d) $Perv(X,S,\mathcal{W})$ 以及 $Perv(X,S,\mathcal{V})$ 中由 $\mathbb{Z}$ 索引的有限图表。

此外， *(c)* 中的等价与导出函子 $f^*, f_*, f^!, f_!$ 以及 Φ_{tot} 交换 .

证明。 对于 (a)，给定一个由 $\mathbb{Z}$ 索引的有限图表 $\{\cdots\to\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_1\to\cdots\}$，其取值于 $\mathrm{Shv}(X,S,\mathcal{V})$，我们按如下方式构造 $\mathcal{G}\in\mathrm{Shv}(X,S,\mathcal{W})$。对于任意开集 $U\subseteq X$，令 $\mathcal{G}(U)=\{\cdots\to\mathcal{F}_0(U)\to\mathcal{F}_1(U)\to\cdots\}\in\mathcal{W}$由于它是一个有限图表。我们可以逐次数检查它是否满足层条件。反过来，给定 $\mathcal{G}\in\mathrm{Shv}(X,S,\mathcal{W})$，我们将 $\mathcal{F}_s(U)$ 定义为 $\mathcal{G}(U)$ 的次数 s 部分，同样， $\mathcal{F}_s$ 也满足层性质。对于每个 U，都有 $\mathcal{F}_s(U)=0$ 对于 $s\ll 0$，而且 $\mathcal{F}_s(U)\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_{s+1}(U)$ 对于 $s\gg 0$。由于我们的分层是有限的，这意味着 $\mathcal{F}_s=0$对于 $s\ll 0$，且 $\mathcal{F}_s\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_{s+1}$ 对于 $s\gg 0$，因此相应的图表是有限的。

(b) 和 (c) 可由 (a) 形式地推出：选取一个表示它的链复形，并检查两边的拟同构相一致。有限图表条件保证我们的链复形仍然有界。对于 (d)，我们可以通过茎和余茎检查 perversity；这很容易归结为如下陈述：在 $D^b(X,S,\mathcal{W})$ 中取茎，与逐点在图表中取茎相同，而这正是我们接下来要证明内容的一个特例。

剩下要证明的是，(c) 中的等价与上面列出的函子相容。根据我们的构造，等价 (a) 与非导出的 f_* 和 $f_!$ 相容，因此，导出函子也与 (c) 相容，因为我们可以用每个对象的内射分解替换图表中的对象。由此，我们得出结论，(c) 中的等价通过伴随与 f^* 和 $f^!$ 相容，并且也与Φ_{tot} 相容，因为它可以表示为前面四个函子的复合。□

3.4.2. 取值于 $\mathcal{W}$ 的层上的导出张量。与上面的函子不同，张量积的情况并不那么简单，因为它并非完全几何性的，还涉及 $k[t]$ 的代数结构。这里的讨论将类似于分次 $k[t]$-模上的导出张量积。回想一下，要取 $\mathcal{F}\boxtimes^{\mathbf{L}}\mathcal{G}$，我们需要先用平坦分解替换 $\mathcal{F}$ 或 $\mathcal{G}$，然后取通常的$\boxtimes$。对于 $K\in D^b(X,S,\mathcal{V})$，定义 $K\{t\}\in D^b(X,S,\mathcal{W})$，并仿照第 3.1 节开头，在 $D^b(X,S,\mathcal{W})$ 中将 t^s 平移。

展开层的张量积的定义后，容易看出 $t^sK\{t\}$是一个平坦复形。此外，给定 $M=\{\cdots\to M_0\to M_1\to\cdots\}\in D^b(Y,\ T,\ \mathcal{W})$，我们有$t^sK\{t\}\boxtimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{W}}M=t^sK\{t\}\boxtimes_{\mathcal{W}}M=t^sK\boxtimes_{\mathcal{V}}M$ 其中记 $K\boxtimes_{\mathcal{V}}M=\{\cdots\to K\boxtimes_{\mathcal{V}}M_0\to K\boxtimes_{\mathcal{V}}M_1\to\cdots\}$，其中 $K\boxtimes_{\mathcal{V}}M_0$处于次数 t^s。当上下文足够清楚时，我们将省略 $\boxtimes$上的下标 $\mathcal{V}$和 $\mathcal{W}$。

给定 $\mathcal{F}=\{\cdots\to\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_1\to\cdots\}\in\mathrm{Perv}(X,\ S,\ \mathcal{W})$，我们可以在$D^b$中构造一个平坦分解（$\mathrm{Perv}(X,\ S,\ \mathcal{W}))=D^b(X,\ S,\ \mathcal{W})$，其形式为

$$\left\{\bigoplus_{s\in I}t^{s+1}\mathcal{F}_s\{t\}\to\bigoplus_{s\in I}t^s\mathcal{F}_s\{t\}\right\}$$

其中复形的周 pervers 次数为 -1,0。这里，映射定义为 $t^{s+1}\mathcal{F}_s\{t\}\to t^s\mathcal{F}_s\{t\}\oplus t^{s+1}\mathcal{F}_{s+1}\{t\}$ 其中在次数 t^i 时，对于 $i\geq s+1$，它是 $\mathcal{F}_s\to\mathcal{F}_s\oplus\mathcal{F}_{s+1}$ 其中第一个分量是恒等映射，第二个分量由 $\mathcal{F}$中的图表映射给出。同样，这里我们可以将对 s 的求和限制在有限区间 I内。为证明这确实与 $\mathcal{F}$准同构，我们注意到复形 $\{t^{s+1}\mathcal{F}_s\{t\}\to t^s\mathcal{F}_s\{t\}\}$ 在周 pervers 次数 0 时与 $t^s\mathcal{F}_s$ 准同构；并且由于映射的定义方式，将所有 s组合起来时，我们可以恢复 $\mathcal{F}$。

因此，如果我们有 $\mathcal{G}=\{\cdots\to\mathcal{G}_0\to\mathcal{G}_1\to\cdots\}\in\mathrm{Perv}(Y,T,\mathcal{W})$，就可以通过以下方式得到 $\mathcal{F}\boxtimes^{\mathbf{L}}\mathcal{G}$

$$\left\{\bigoplus_{s\in I}t^{s+1}\mathcal{F}_s\boxtimes_{\mathcal{V}}\mathcal{G}\to\bigoplus_{s\in I}t^s\mathcal{F}_s\boxtimes_{\mathcal{V}}\mathcal{G}\right\}$$

在变态度 -1，0 中。在次数 t^s 时，这将是

$$\left\{\bigoplus_{u+v=s-1}\mathcal{F}_u\boxtimes G_v\to\bigoplus_{u+v=s}\mathcal{F}_u\boxtimes G_v\right\}\tag{3.2}$$

由 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$中的映射诱导。同样，对 u 和 v 求和可以使其成为有限和。在反常上同调的变态度 0取上同调后，我们得到方程(3.1) 的类似结论

$$\left(\bigoplus_{u+v=s}\mathcal{F}_u\boxtimes\mathcal{G}_v\right)\Big/(t\boxtimes1-1\boxtimes t)\left(\bigoplus_{u+v=s-1}\mathcal{F}_u\boxtimes\mathcal{G}_v\right),\tag{3.3}$$

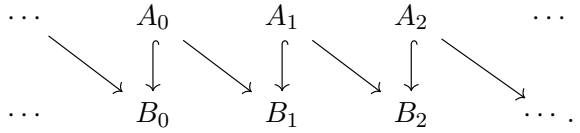
同样，滥用记号，我们在此用 t 表示 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$中的映射。这并不令人意外，因为导出张量积在零次的反常上同调应当就是经典张量积。

对于变态度 -1 的上同调，我们证明以下引理。若 $\mathcal{F}=\{\cdots\to\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_1\to\cdots\}\in\mathrm{Perv}(X,\ S,\ \mathcal{W})$ 中所有映射都是单态射，则称其为自由。

引理 3.7。若 $\mathcal{F}$ 或 $\mathcal{G}$ 是自由的，则外积 $\mathcal{F}\boxtimes^{\mathbf{L}}\mathcal{G}$ 是反常的，即变态度 -1 的上同调消失。

证明。假设 $\mathcal{F}_u\hookrightarrow\mathcal{F}_{u+1}$ 在 $\mathcal{F}$ 中是单态射。由于 $\otimes$ 对 $\mathcal{V}$ 是双正合的，外积 $\boxtimes$ 也具有双正合性，因此我们有单态射 $\mathcal{F}_u\boxtimes\mathcal{G}_v\hookrightarrow\mathcal{F}_{u+1}\boxtimes\mathcal{G}_v$。我们要证明

that 方程(3.2) 是一个单态射，它是以下形式的映射的有限直和



我们证明这在任意阿贝尔范畴中都是单态射。假设我们处于阿贝尔群范畴中，那么它是单射，因为若 $(x_i) \in \bigoplus_{i\in I} A_i$ 映到零，其中 I 是一个有限区间，那么我们考虑满足 $x_i \neq 0$的最低指标 i，但它映到 B_i 中的一个非零元素，而$x_{i-1} = 0$ 映到 B_i中的零，从而导出矛盾。对于一般的阿贝尔范畴，我们通过米田引理来调整证明：考察从对象 Z 出发的 Hom，它们是阿贝尔群；并利用这样一个事实：映射 $A \to B$ 是单态射，当且仅当对所有 Z，$\mathrm{Hom}(Z, A) \to \mathrm{Hom}(Z, B)$ 都是单态射。□

引理有如下自然推广。

引理 3.8。若 *bo th* $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是自由的，那么反常层 $\mathcal{F} \boxtimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G}$ 是自由的。此外，我们有 e

$$(\mathcal{F} \boxtimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G})_s / (\mathcal{F} \boxtimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G})_{s-1} = \bigoplus_{u+v=s} (\mathcal{F}_u/\mathcal{F}_{u-1}) \boxtimes (\mathcal{G}_v/\mathcal{G}_{v-1}).$$

证明。 由前一个引理可知， $\mathcal{F} \boxtimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G}$ 是周 pervers，因此它等于方程0 （3.3）所给出的反常上同调。从次数 t^{s-1} 到 t^s 的映射是 $t \boxtimes 1 = 1 \boxtimes t$ 由于这两个映射在商中都已得到识别，我们要验证这是一个单态射，其商如上面的方程所示。

与前一个引理一样，我们想象自己正在阿贝尔群范畴中工作，将倾斜层 $\mathcal{F}_u, \mathcal{G}_v$ 换成阿贝尔群 A_u, B_v，并将 $\boxtimes$ 换成 $\otimes$，其中$A_u \hookrightarrow A_{u+1}$ 且 $B_v \hookrightarrow B_{v+1}$ 对所有 u, v都成立。如果这是真的，那么方程（3.3）就只是 $(\bigcup_u A_u) \otimes (\bigcup_v B_v)$ 中的并集$\bigcup_{u+v=s} A_u \otimes B_v$，证明命题 3.3 时也使用了同样的论证。于是，显然我们有单射 $\bigcup_{u+v=s-1} A_u \otimes B_v \hookrightarrow \bigcup_{u+v=s} A_u \otimes B_v$。此外，显然商为 $\bigoplus_{u+v=s}(A_u/A_{u-1}) \otimes (B_v/B_{v-1})$，正如所需。

为归结到阿贝尔群的情形，我们再次考察来自 $\mathrm{Perv}(X \times Y, S \times T, \mathcal{W})$ 中对象的 Hom。根据 [Lyu01],，范畴 $\mathrm{Perv}(X \times Y, S \times T, \mathcal{V})$ 是阿贝尔范畴 $\mathrm{Perv}(X, S, \mathcal{V}) \boxtimes \mathrm{Perv}(Y, T, \mathcal{V})$ 的德利涅张量积，该结果见 [Del90, Proposition 5.13],，且外张量积与德利涅张量积相对应。因此，对于 $\mathcal{K} \in \mathrm{Perv}(X, S, \mathcal{V})$ 和$\mathcal{L} \in \mathrm{Perv}(Y, T, \mathcal{V})$，我们有 $\mathrm{Hom}(\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}, \mathcal{F}_u \boxtimes \mathcal{G}_v) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F}_u) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{G}_v)$，所以确实可以取$A_u = \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{F}_u)$ 和 $B_v = \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{G}_v)$。不过，我们只能检验来自形如 $\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}$ 的对象的 Hom。为解决这一问题，令 $\mathcal{K} = \bigoplus_{u\in I} \mathcal{F}_u$ 为有限范围 I 内的 u 的直和，并令 $\langle \mathcal{K} \rangle$为由投射生成元 $\mathcal{K}$ 生成的 $\mathrm{Perv}(X, S, \mathcal{V})$ 的阿贝尔子范畴，参见 [Del90, Section 5.12],，它包含所有 $\mathcal{F}_u$。类似地，定义 $\mathcal{L} = \bigoplus_{v\in J} \mathcal{G}_v$ 和 $\langle \mathcal{L} \rangle$。那么，阿贝尔子范畴 $\langle \mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle \boxtimes \langle \mathcal{L} \rangle$ 包含我们所处理的所有相关对象。此外，存在一个投射生成元 $P = \mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L}$，因此对任意对象 $Z \in \langle \mathcal{K} \boxtimes \mathcal{L} \rangle$，都有一个投射分解 $P^{\oplus m} \to P^{\oplus n} \to Z \to 0$，由此我们可以从 $0 \to \mathrm{Hom}(Z, -) \to \mathrm{Hom}(P^{\oplus n}, -) \to \mathrm{Hom}(P^{\oplus m}, -)$ 恢复 Hom 集，而单射性由四引理保持。□

3.4.3. 等价性证明。我们将所有内容汇总起来，完成证明。

命题 3.5 的证明。假设我们有一个 $F_s\mathcal{F}_n$ $\mathcal{F} \in \mathrm{FPS}(\mathcal{V})$ 的滤过。根据命题 3.6，在每个代数次数 n 中，我们可以将图表 $\{\cdots \hookrightarrow F_0\mathcal{F}_n \hookrightarrow F_1\mathcal{F}_n \hookrightarrow \cdots\}$ 视为 $\mathcal{G}_n \in \mathrm{Perv}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \ S_n, \mathcal{W})$。由于它与 Φ_{tot} 交换，我们看到 $\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n) = \{\cdots \hookrightarrow \Phi_{\mathrm{tot}} F_0\mathcal{F}_n \hookrightarrow \Phi_{\mathrm{tot}} F_1\mathcal{F}_n \hookrightarrow \cdots\}$ 在 $k[t]$ 上是自由的，因为 Φ_{tot} 是正合的。

接下来，我们检查 $\mathcal{G}=(\mathcal{G}_n)$ 的可因子化性。根据结合律，只需检查对于两个层的乘积，该映射

$$\mathcal{G}_n|_{\mathrm{Sym}^n(U)} \boxtimes^{\mathbf{L}}_{(U,V)} \mathcal{G}_m|_{\mathrm{Sym}^m(V)} \xrightarrow{\sim} a^*(\mathcal{G}_{n+m}|_{\mathrm{Sym}^n(U)\times\mathrm{Sym}^m(V)}) \tag{3.4}$$

是一个同构。将左端记为 $\mathcal{K}=\{\cdots\to\mathcal{K}_0\to\mathcal{K}_1\to\cdots\}$，将右端记为 $\mathcal{L}=\{\cdots\to\mathcal{L}_0\to\mathcal{L}_1\to\cdots\}$。由引理 3.8，由于左侧的两个层都是自由的，$\mathcal{K}$ 是周 pervers 且自由的，其商由以下对象给出

$$\mathcal{K}_s/\mathcal{K}_{s-1}=\bigoplus_{u+v=s}\mathrm{Gr}_u\,\mathcal{F}_n|_{\mathrm{Sym}^n(U)}\boxtimes\mathrm{Gr}_v\,\mathcal{F}_m|_{\mathrm{Sym}^m(V)}.$$

另一方面，我们有

$$\mathcal{L}_s/\mathcal{L}_{s-1}=a^*(\mathrm{Gr}_s\,\mathcal{F}_{n+m}|_{\mathrm{Sym}^n(U)\times\mathrm{Sym}^m(V)})$$

而它们是同构的，因为我们在定义3.4中要求 $\mathcal{F}^{gr}$ 是一个可因子化反常层。现在，存在某个 $s\ll 0$，其中 $\mathcal{K}_s=\mathcal{L}_s=0$，由此我们可以使用五引理得出 $\mathcal{K}_s\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_s$ 对所有 s都成立。由于 $\mathcal{F}^{gr}$ 与算子组合相容，因此这与算子组合相容，从而完成了可因子化性的证明。

反过来，假设我们有 $\mathcal{G}\in$FPS($\mathcal{W}$)，且对所有 n，$\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n)$ 在 $k[t]$ 上都是自由的。我们先证明，对所有 n，$\mathcal{G}_n$ 都是自由的。否则，取最小的 n，使得某个 $\mathcal{G}_n$ 不是自由的。注意，我们不可能有 $n=0$，因为此时 $\mathrm{Sym}^0(\mathbb{C})$ 是平凡的，所以 $\mathcal{G}_0=\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_0)$ 是自由的（事实上，由可因子化性可知，对于所有 $\mathcal{G}\in$FPS($\mathcal{W}$)，必有 $\mathcal{G}_0=k\{t\}$ ）。因此，我们有 $n>0$，并考虑核 $0\to K\to(\mathcal{G}_n)_{s-1}\to(\mathcal{G}_n)_s$，其中某个 s 满足 $K\neq 0$。由可因子化性，对于 $p+q=n$，我们有 $a^*(\mathcal{G}_n|_{\mathrm{Sym}^p(U)\times\mathrm{Sym}^p(V)})\cong\mathcal{G}_p|_{\mathrm{Sym}^p(U)}\boxtimes^{\mathbf{L}}_{(U,V)}\mathcal{G}_q|_{\mathrm{Sym}^q(V)}$；由 n 的极小性，右端的层是自由的，而由引理 3.8，这意味着左端也自由。由于限制到一个开集是 t-正合的，这意味着 K 在任何 $\mathrm{Sym}^p(U)\times\mathrm{Sym}^p(V)$ 上都没有支撑；特别地，K 集中在对角线 $\{x_1=x_2=\cdots=x_n\}$ 上。另一方面，应用 t-正合函子 Φ_{tot}，我们得到 $\Phi_{\mathrm{tot}}(K)=0$，因为根据假设，$\Phi_{\mathrm{tot}}\mathcal{G}_n$ 是自由的，所以 $\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n)_{s-1}\hookrightarrow\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}_n)_s$。结合这两个事实可得 $K=0$，因为邻近圈和消失循环都为零，所以对角线处的茎也为零。

现在，我们可以通过如下方式定义 $\mathcal{F}$上的滤过：$\mathcal{G}_n=\{\cdots\hookrightarrow F_0\mathcal{F}_n\hookrightarrow F_1\mathcal{F}_n\hookrightarrow\cdots\}$ 这是一个有限图表，因此满足定义 3.4中的有限性条件。$\mathcal{F}^{gr}$ 可分解这一事实，直接由 $\mathcal{G}$ 可分解推出：只需在等式 t^s中，用 t^{s-1} 项除以次数 (3.4)中的项即可。□

定理 1.5 的第一部分由命题 3.1、3.3 和 3.5立即得出。

3.5. **谱序列**。接下来需要证明定理 1.5中的谱序列结论，我们将在此证明。从命题 3.1可知，若 $B\in$PB($\mathcal{W}$) 在其中所述的等价关系下对应于 $\mathcal{G}\in\mathrm{FPS}(\mathcal{W})$，则有同构 $(\mathcal{G}_n)_0\cong B_n(B)$。注意，该分层是准齐次的，因此 $R\Gamma\mathcal{G}_n\cong(\mathcal{G}_n)_0$，与第 2.3.3 节末尾的情形相同。

现在，我们分别利用命题 3.3、3.5，将 B 和 $\mathcal{G}$ 转化为 $A\in$ PB($\mathcal{V}$) 和 $\mathcal{F}\in$FPS($\mathcal{V}$) 的滤过。在上述证明中，我们构造了 $B_n=\{\cdots\hookrightarrow F_0A_n\hookrightarrow F_1A_n\hookrightarrow\cdots\}$ 和 $\mathcal{G}_n=\{\cdots\hookrightarrow F_0\mathcal{F}_n\hookrightarrow F_1\mathcal{F}_n\hookrightarrow\cdots\}$。由此可见，bar 复形 $B_n(B)$ 只是由 A上的滤过诱导出的 $B_n(A)$ 的 bar 复形滤过。同样，$R\Gamma\mathcal{G}_n$ 只是 $R\Gamma\mathcal{F}_n$上的滤过。

因此，$B_n(A)$ 和 $R\Gamma\mathcal{F}_n$ 上的滤过同构，因此它们的谱序列 s

$$\begin{aligned}E_1^{p,q}&=R\Gamma^{p+q}\mathcal{F}_n^{gr}\cong R\Gamma^{p+q}(\mathrm{Gr}_p\,\mathcal{F}_n)\Rightarrow R\Gamma^{p+q}\mathcal{F}_n\\ E_1^{p,q}&=\mathrm{Tor}^{A^{gr}}_{-(p+q),n}(k,k)\cong H^{p+q}(\mathrm{Gr}_p\,B_n(A))\Rightarrow H^{p+q}(B_n(A))\cong\mathrm{Tor}^{A}_{-(p+q),n}(k,k)\end{aligned} \tag{3.5}$$

同构。这就完成了定理 1.5的证明。

最后，我们证明两个不同滤过之间的一项额外相容性结果，稍后证明命题 5.1时将用到。设 F_sA 和 G_sA 是 $A \in \mathrm{PB}(\mathcal{V})$上的两个滤过，分别对应于 $\mathcal{F} \in \mathrm{FPS}(\mathcal{V})$上的滤过 $F_s\mathcal{F}$ 和 $G_s\mathcal{F}$。考虑双重滤过$H_{u,\ v}A_n = F_uA_n \cap G_vA_n$ 和 $H_{u,\ v}\mathcal{F}_n = F_u\mathcal{F}_n \cap G_v\mathcal{F}_n$，其中第二个交是在周 pervers 层的阿贝尔范畴中取的。于是，下面的命题将我们先前的讨论推广到双重滤过的情形。

命题 3.9. *bar* 复形上的诱导双滤过 $H_{u,v}B_n(A)$ 与双滤过 $R\Gamma H_{u,v}\mathcal{F}_n$ 同构。

证明. 我们通过将本节中的论证调整到双滤过情形来证明这一点：用 $k[x,y]$-模替换$k[t]$-模，并用 $\mathbb{Z}^2$-索引图表替换 $\mathbb{Z}$-索引图表。正如有限复数域向量空间上的滤过可以视为分次 $k[t]$-模，有限复数域向量空间上的双滤过也可以视为分次 $k[x,y]$-模。我们需要的关键事实是，这个$k[x,y]$-模是自由的。对于三重滤过，这一点并不成立。例如，考虑一个二维向量空间及其上的三个不同的二级滤过。

我们如下证明自由性。设 V是一个基为 $e_1,\dots,e_n$, $G = \mathrm{GL}(V)$ 的向量空间，并且$H_{u,v}V = F_uV \cap G_vV$是 V 上的一个双滤过。为简单起见，我们假设 $0 = F_0V \subsetneq F_1V \subsetneq$

$\cdots \subsetneq F_nV = V$和 $0 = G_0V \subsetneq G_1V \subsetneq \cdots \subsetneq G_mV = V$，现在我们可以将它们视为旗 $g_1 \in G/P_1$ 和 $g_2 \in G/P_2$，分别位于相应的旗簇中。更准确地说， P_1 和 P_2 是标准抛物子群，它们稳定具有正确维数子空间的标准旗；其中，标准旗的定义是：一个 d 维子空间的基为 e_1、……、e_d。然后，滤过 F_uV和 G_vV分别通过将 g_1 和 g_2 作用于标准旗而得到。利用将 $(g_1,g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$ 映射到 $G/P_1 \times G/P_2 \cong P_1\backslash G/P_2$ 的同构，我们看到，这样的双滤过对应于一个双陪集。然而，根据抛物子群的 Bruhat 分解，我们可以将 $P_1\backslash G/P_2$ 写成关于置换矩阵 w的 P_1wP_2 的不交并。特别地，对于某个 w有 $g_1^{-1}g_2 \in P_1wP_2$；展开这一点可知，存在一个基 f_i（通过将 g_1 作用于 e_i 得到），使得 F_uV是关于此基的标准旗，而 G_vV是关于基 $f_{w^{-1}(i)}$ 的标准旗。于是显然，与双滤过$H_{u,\ v}V$对应的分次 $k[x,y]$-模是自由的，其生成元 f_i 分别置于次数 (u,v) 中，其中 u、v 是满足$f_i \in H_{u,\ v}V$的最小整数。

回到我们的情形，令 $\mathcal{W}'$ 为一个编织幺半阿贝尔范畴，其对象是由 $\mathbb{Z}^2$ 索引的有限图表，并且将其视为 $k[x,y]$-模时是有限生成的。由双滤过 $H_{u,v}A_n$，我们基本按照命题 3.3 的证明，通过令 n 次分次部分 B'_n 为一个由 $\mathbb{Z}^2$ 索引、条目为 $H_{u,v}A_n$ 的图表，以同样的方式定义 $B' \in \mathrm{PB}(\mathcal{W}')$。同理可验证 B' 确实是一个本原双代数；此外，根据上文的讨论，它关于 $k[x,y]$ 是自由的。另一方面，我们按照命题 3.5 的证明，以同样的方式定义 $\mathcal{G}' \in \mathrm{FPS}(\mathcal{W}')$，令 $\mathcal{G}'_n$ 为一个由 $\mathbb{Z}^2$ 索引、条目为 $H_{u,v}\mathcal{F}_n$ 的图表。对该处证明稍作调整，即可得到类似的可因子化性。由于 Φ_{tot} 是正合的，它与交相交换，因此 $\Phi_{\mathrm{tot}}(\mathcal{G}'_n)$ 关于 $k[x,y]$是自由的。命题 3.1 对 $\mathcal{W}'$ 和 $k[x,y]$ 的类比成立，并且容易看出 B' 对应于 $\mathcal{G}'$，因此根据陈述的后半部分， $R\Gamma\mathcal{G}_n$ 同构于 $B_n(B')$，这说明双滤过正如所需彼此相同。□

4. 词长与余维滤过的等价

在本节中，我们证明在定理 1.5 的等价下，移位词长滤过与余维滤过相对应。设 $\mathcal{V}$ 是由 k-向量空间构成的编织幺半阿贝尔范畴， $V \in \mathcal{V}$ 是一个编织向量空间。令 $j\colon \mathrm{Sym}^{\neq}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(\{v8)$，以及 $j_n\colon \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$。回顾命题 2.10(b)， $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(V) \in \mathrm{PB}(\mathcal{V})$ 与 $j_*\mathcal{L} \in \mathrm{FPS}(\mathcal{V})$ 相对应，其中 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(V[1])$ 在例 2.9 中定义。命题 2.10(e) 告诉我们，对偶张量代数 $T = T(V^*) \in \mathrm{PB}(\mathcal{V})$ 与对偶层 $\mathbb{D}j_*\mathcal{L} = j_!\mathcal{L}^\vee \in \mathrm{FPS}(\mathcal{V})$ 相对应。将定理

1.5 应用于这一情形，我们看到， $\mathfrak{A}$ 上的滤过与 $j_*\mathcal{L}$ 上的滤过相对应，而 T上的滤过与 $j_!\mathcal{L}^\vee$上的滤过相对应。

回顾引言中的内容，我们将递增的移位词长滤过定义为

$$F_c\mathfrak{A}_n = ((\mathfrak{A}_{>0})^{n-c})_n$$

对于 $0 \leq c < n$，其中 $F_{-1}\mathfrak{A}_n = \{0\}$ 以及 $F_n\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n$。换言之， $F_c\mathfrak{A}_n$ 在代数分次 n 中包含这样的元素：它们可以表示为 $n-c$ 个字的洗牌积的线性组合。注意， $F_0\mathfrak{A}$ 正是由 1 次生成的子代数，即 Nichols 代数 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(V)$，这也是我们选择使用移位滤过的原因之一。

我们需要检查这确实是定义 3.2意义下的滤过。显然，它满足有限性条件，并且根据定义，乘法保持分次。此外，[ETW17，第 4 节。2] 说明了余乘法为何保持未移位滤过；尽管他们是在 Yetter-Drinfeld 模的语境下进行论证的，但我们注意到，可以在其证明中去掉这一假设，因为编织总是将 $\mathfrak{A}_{>0} \otimes \mathfrak{A}$ 映射到 $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}_{>0}$。由此显然可知，余乘法同样保持移位滤过。

在几何侧，我们如下定义余维滤过。令 $\mathcal{F} = j_*\mathcal{L}$ 和$\mathcal{F}_n = j_{n*}\mathcal{L}_n$。现在，固定某个 n，令 V_c 为分层 S_n 中所有余维 $\leq c$ （即维数为 $\geq n-c$）的层的并。例如，我们有 $V_0 = \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$ 和 $V_n =$Sym$^n(\mathbb{C})$。令 $u_c\colon \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C}) \hookrightarrow V_c$ 以及 $v_c\colon V_c \hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$。我们希望过滤分量 $F_c\mathcal{F}_n$ 来自余维为 $\leq c$ 的层的中间延拓，因此我们定义

$$F_c\mathcal{F}_n = v_{c!*}u_{c*}\mathcal{L}_n,$$

对于 $0 \leq c \leq n$ ，根据中间延拓的性质，这恰好是 $j_{n*}\mathcal{L}_n$的子对象，由所有支撑在 V_c上的合成因子组成。我们令 $F_{-1}\mathcal{F}_n = 0$，并注意到$F_0\mathcal{F}_n = j_{n!*}\mathcal{L}_n$ 和 $F_n\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n$。因此， $j_*\mathcal{L}$ 的次数 0 部分恰好是 $j_{!*}\mathcal{L}$，这与上文代数的情形类似；我们预期如此，因为 $j_{!*}\mathcal{L}$ 对应于 $\mathfrak{B}$。

我们验证这确实是定义3.4意义下的一个滤过。有限性条件显然成立，且这些层显然是周 pervers，因此只需验证 $\mathcal{F}^{gr}$ 具有可因子化性。由$\mathcal{F}$的可因子化性可得

$$\mathcal{F}_n|_{\mathrm{Sym}^n(U)} \boxtimes^{\mathbf{L}}_{(U,V)} \mathcal{F}_m|_{\mathrm{Sym}^m(V)} \xrightarrow{\sim} a^*(\mathcal{F}_{n+m}|_{\mathrm{Sym}^n(U)\times\mathrm{Sym}^m(V)})$$

只需验证这诱导了子商之间的一个同构

$$\bigoplus_{u+v=s} \mathrm{Gr}_u\mathcal{F}_n|_{\mathrm{Sym}^n(U)} \boxtimes_{(U,V)} \mathrm{Gr}_v\,\mathcal{F}_m|_{\mathrm{Sym}^m(V)} \xrightarrow{\sim} a^*(\mathrm{Gr}_{u+v}\,\mathcal{F}_{n+m}|_{\mathrm{Sym}^n(U)\times\mathrm{Sym}^m(V)}). \tag{4.1}$$

由引理3.8可知，左端是 $\mathcal{F}_n|_{\mathrm{Sym}^n(U)} \boxtimes_{(U,V)} \mathcal{F}_m|_{\mathrm{Sym}^m(V)}$上某个滤过的一个分次部分。我们验证两边的合成因子相同。这是因为分次部分 $\mathrm{Gr}_u\,\mathcal{F}_n$ 恰好由那些从余维u 层作中间延拓得到的合成因子组成，$\mathrm{Gr}_v\,\mathcal{F}_n$ 和 $\mathrm{Gr}_{u+v}\,\mathcal{F}_{n+m}$的情形也类似。由于外张量积与中间延拓可交换，左端包含所有从余维 $u+v$ 作中间延拓得到的合成因子，这恰好就是右端。因此，我们可以得出它们同构。

4.1. 等价性证明。 我们证明上述定义的两个滤过相对应。

命题 4.1。 移位词长滤过 $F_c\mathfrak{A}_n$ 对应于余维滤过$F_c\mathcal{F}_n$ 在定理*1.5*下。

证明。 令 $F'_c\mathfrak{A}_n$ 为定理 1.5 下与余维滤过对应的滤过，并证明 $F'_c\mathfrak{A}_n = F_c\mathfrak{A}_n$。我们对 n 进行归纳。 $n=0$ 的基例显然成立，因为要使伴随分次成为定义 3.2 中的原始代数，单位必须处于滤过次数 0。

现在假设，对于某个 n ，当代数次数小于 $n>0$ 时，这两个滤过相等。回顾第 3.5 节，bar 复形 $B_n(\mathfrak{A})$ 上诱导的滤过与茎 $i_0^*\mathcal{F}_n$ 上的滤过同构，其中 $i_0\colon \{0\}\hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 是原点的嵌入。我们将$F_c'B_n(\mathfrak{A})\cong i_0^*F_c\mathcal{F}_n$ 写作复形

$$\left\{\cdots\to \bigoplus_{\substack{p+q+r=n\\0<p,q,r<n}} F_c(\mathfrak{A}_p\otimes\mathfrak{A}_q\otimes\mathfrak{A}_r)\to \bigoplus_{\substack{p+q=n\\0<p,q<n}} F_c(\mathfrak{A}_p\otimes\mathfrak{A}_q)\to F_c'\mathfrak{A}_n\right\}$$

在 $F_c'\mathfrak{A}_n$ 次数中，其中我们注意到，根据归纳假设，在直和中有 $F_c'(\mathfrak{A}_p\otimes\mathfrak{A}_q)=F_c(\mathfrak{A}_p\otimes\mathfrak{A}_q)$，因为 $p,q<n$，对于 $F_c'(\mathfrak{A}_p\otimes\mathfrak{A}_q\otimes\mathfrak{A}_r)$ 等情况同样如此。

首先考虑 $c<n$ 的情形。我们断言，该复形在 -1 次数的上同调为零，即有 $H^{-1}i_0^*F_c\mathcal{F}_n=0$。令 $i\colon \mathbb{C}\hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 为对角线的嵌入，则根据平移不变性，只需证明 $\mathcal{H}^{-1}i^*F_c\mathcal{F}_n={}^p\mathcal{H}^0i^*F_c\mathcal{F}_n=0$。这里，由于对角线上的反常 t-结构（其维数为1）是平移 1 后的通常的 t-结构，因此次数平移了 1 。但这成立是因为 $F_c\mathcal{F}_n$ 是从不包含对角线的开集 V_c 进行的中间延拓，而中间延拓具有这样的性质：这类中间延拓的茎的 0 次反常上同调为零，参见 [KW10, 引理 III.5.1(b)]。

因此，我们得出映射到 $F_c'\mathfrak{A}_n$ 必为满射。根据 bar 复形的定义，该映射由洗牌积诱导，因此我们得出， $F_c'(\mathfrak{A}_n)$ 恰好是将 $\bigoplus F_c(\mathfrak{A}_p\otimes\mathfrak{A}_q)$ 与 $p+q=n$ 和 p、$q>0$ 上的直和通过洗牌积所得的像。但这些恰好是 $p+q-c=n-c$ 字的乘积的线性组合，因此 $F_c'\mathfrak{A}_n=F_c\mathfrak{A}_n$对于 $c<n$。

对于 $c=n$，我们有 $F_n'B_n(\mathfrak{A})\cong i_0^*F_n\mathcal{F}_n\cong i_0^*\mathcal{F}_n$，根据命题 2.10 这就是 $B_n(\mathfrak{A}_n)$，因此我们得出 $F_n'\mathfrak{A}_n=F_n\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_n$。 □

让我们尽可能地推广这一对应关系。注意，余维滤过直接来自 Sym(ℂ) 的分层上的一个滤过，其中我们将余维为 c 的层指定为属于第 c 个分次部分。我们分析 Sym(ℂ) 的分层上的所有可能滤过。任何这样的分层都由一个函数 f 确定，该函数将分拆$\lambda=(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_p)$赋给整数 $f(\lambda)$。据此，我们可以在与 f 对应的反常层 $j_*\mathcal{L}$ 上构造几何滤过，方式与余维滤过类似，不过现在令 V_c 为所有满足 $f(\lambda)\leq c$ 的层 λ 的并。我们称之为与 f相关联的加权余维滤过。

函数 f 需要满足一些性质。首先，由可因子化性可知，必须有 $f(\lambda\sqcup\lambda')=f(\lambda)+f(\lambda')$。换言之， f由其在整数 $f(n)$ 上的取值决定。接下来，我们要求 V_c是一个开子概形，这相当于满足 $f(n)+f(m)\leq f(n+m)$。为将其归一化为非负次数，我们可以令 $f(1)=0$，这会迫使 $f(n)\geq 0$ 对 $n\geq 0$成立。余维滤过简单地对应于函数 $f(n)=n-1$。

不出所料，对应的代数过滤是与 f 相对应的加权（移位）词长滤过，其中 $F_c\mathfrak{A}_n$ 中的元素是长度为 λ_1、……、λ_p 的字的洗牌积的线性组合，其中 $\sum_{i=1}^p f(\lambda_i)\leq c$。显然，上述证明可以推广到加权余维滤过与加权字长过滤之间的等价性。

这个思想实验的目的是说明，如果我们只考虑来自分层 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1)$ 的几何的滤过，就无法走得太远。例如，我们无法通过这样的论证得到权重滤过。

4.2. **例子。** 我们将在三个量子洗牌代数的背景下描述移位词长滤过。这将使我们能够在第 5.2 节中进一步阐明词长滤过与权重滤过的区别。

首先，考虑编织向量空间 $V = k$，其编织 R: $V \otimes V \to V \otimes V$由乘以 $q \in k^\times$给出。接着，量子洗牌代数 $\mathfrak{A}(V)$ 同构于量子除幂代数 $\Gamma_q[x]$，如 [ETW17第 3 节所述。5] 以及 [Cal06]。代数 $\Gamma_q[x]$ 定义为由元素 x_n 在次数 n上加法生成，其乘法定义为

$$x_n \star x_m = \binom{n+m}{m}_q x_{n+m}$$

其中，量子二项式系数定义为 $\binom{a}{b}_q = \frac{[a]_q \cdots [a-b+1]_q}{[b]_q \cdots [1]_q}$，且 $[r]_q = \frac{1-q^r}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{r-1}$。在上述同构中，$x_n$ 对应于词 $1^{\otimes n} \in V^{\otimes n} = \mathfrak{A}_n$。

在 $\Gamma_q[x]$ 上显式给出的环结构见 [ETW17命题 3，以及 12] 和 [Cal06引理 3，4],具体描述如下。如果 q 不是单位根，则有 $\Gamma_q[x] \cong k[x_1]$；如果 q 是一个本原m阶单位根，则 $\Gamma_q[x] = k[x_1]/x_1^m \otimes \Gamma[x_m]$ 其中 $\Gamma[x] = \Gamma_1[x]$ 是通常的除幂代数。

因此，如果 q 不是单位根，那么 $\mathfrak{A}$ 由次数1的元素生成，所以 Nichols 代数 $\mathfrak{B}$ 就是整个代数，并且权重滤过集中在零次，其中 $F_0\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$。如果 q 是一个m阶单位根，则次数 $n = um + v$中的元素 $0 \le v < m$可以表示为至多 $u + v$ 个非负次数字的乘积，因此它处于滤过次数 $c = n - (u + v) = u(m - 1)$。我们在下方的图 1 中绘制了 $m = 3$，并注意到滤过每隔 $m - 1$ 个 m代数次数便跳跃一次。

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_6$	$\mathfrak{A}_7$	$\mathfrak{A}_8$
Gr_0	1	1	1						
Gr_1									
Gr_2				1	1	1			
Gr_3									
Gr_4							1	1	1

图 1. $V = k$ 与 q 三次单位根情形下移位词长滤过的维数。

作为第二个例子，我们考虑通常的洗牌代数，其中 V的基为 $v_1, \ldots, v_d$和R: $V \otimes V \to V \otimes V$只需通过交换基 $v_i \otimes v_j \mapsto v_j \otimes v_i$来定义。显然，Nichols 子代数 $\mathfrak{B}(V)$是 Sym(V)，因为一次元素的洗牌积 $x_1 \star \cdots \star x_n$ 恰好是 n个由 $x_1, \ldots, x_n$置换而成的字之和。这告诉我们第一个过滤分量 $F_0\mathfrak{A}$ 是什么；但若要更清楚地了解滤过的其余部分，我们需要转向对偶张量代数。回顾一下，$T = T(V^*)$上的对偶滤过是由 $F^{c+1}T_n = (F_c\mathfrak{A}_n)^\perp$ 定义的递减滤过，因此 $\dim(\mathrm{Gr}^c T_n) = \dim(\mathrm{Gr}_c \mathfrak{A}_n)$。我们试图理解最小的非零过滤分量 $F^{n-1}T_n = (F_{n-2}\mathfrak{A}_n)^\perp = (((\mathfrak{A}_{>0})^2)_n)^\perp$。换言之，$z \in F^{n-1}T_n$ 当且仅当对任意 x、$y \in \mathfrak{A}_{>0}$，都有 $(x \star y,\ z) = 0$。但根据对偶性，$(x \star y,\ z) = (x \otimes y,\ \Delta_\star(z))$，所以这当且仅当 z 是原始元。

令 $P = P(T(V^*)) \subseteq T$为本原子空间，因此 $F^{n-1}T_n = P_n$。由于我们讨论的是通常的非编织 Hopf 代数，P 具有李代数结构，其交换子为$[x, y] = xy - yx$。此外，在我们的张量代数情形下，[MM65，定义 618] 告诉我们$P(T(V^*)) \cong L(V^*)$是由 V^*生成的自由李代数。根据 Milnor-Moore 定理 [MM65],

从 P的泛包络代数到 $U(P) \to T$的自然映射是同构。回顾一下，泛包络代数$U(P)$上存在自然的庞加莱–伯克霍夫–维特（PBW）滤过，其中 $F_sU(P)$由 P中至多 s 个元素的乘积构成，这就在张量代数上给出了一个递增滤过$F_sT = F_sU(P)$。人们可能会猜想，这与移位词长滤过一致，而事实确实如此。

命题4.2. 移位词长滤过与 *PBW* 过滤之间的关系为 $F^cT_n = F_{n-c}T_n$。

证明。 我们首先证明 $F_{n-c}T_n \subseteq F^cT_n$。展开定义后，只需证明 s 本原元 $P_1 \cdots P_s$ 的乘积（拼接）与所有 $x_1 \star \cdots \star x_{s+1}$ 在 $x_i \in \mathfrak{A}_{>0}$下正交。这等价于证明 $\Delta^s_\star(P_1 \cdots P_s) \in I$，其中令 $I = k \otimes T \otimes \cdots \otimes T + \cdots + T \otimes \cdots \otimes T \otimes k$。对于通常的洗牌代数，容易通过归纳法看出， $\Delta^s_\star(P_1 \cdots P_s)$ 是若干项之和，每一项对应于将 P分成 $s+1$ 组。更确切地说，这些字的形式为 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s+1}$，其中 $a_k = P_{i^k_1} \cdots P_{i^k_{b_k}}$，其中 $i^k_1 < \cdots < i^k_{b_k}$，且所有 j，k的指标并集为 $\{1, \ldots, s\}$。由此显然可知 $\Delta^s_\star(P_1 \cdots P_s) \in I$，因为必有某一组为空。

现在，我们证明 $F_{n-c}T_n \supseteq F^cT_n$，这归结为证明：一个满足 $z \in T_n$ with$\Delta^s_\star(z) \in I$ 的元素必然是 $\leq s$ 个原始元之积的和。根据 PBW 定理，我们可以将 z 写成若干项 $P_1 \cdots P_t$ 的和，其中，对于 P 的某种基排序， $P_1 \leq \cdots \leq P_t$。如果 $t > s$，那么 $\Delta^s_\star(P_1 \cdots P_t)$ 中包含一个形如 $P_1 \otimes \cdots \otimes P_s \otimes P_{s+1} \cdots P_t$ 的张量积，而它不属于 I。然而，由于我们规定了排序 $P_1 \leq \cdots \leq P_t$，没有其他项能够对这个张量积作出贡献。因此， z 是 $\leq s$ 个原始元之积的和。□

我们在图 $\dim(V) = 3$ 中绘出了滤过的维数2。注意，$\dim(\mathrm{Gr}_0 \mathfrak{A}_n) = \binom{n+2}{2}$是 $\mathrm{Sym}^n(V)$ 的维数，而对角线上的 $\dim(\mathrm{Gr}_{n-1} \mathfrak{A}_n) = \dim(L(V^*)n)$ 则是长度为 n 、取自大小为 的字母表的 Lyndon 词的数量V。

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_5$
Gr_0	1	3	6	10	15	21
Gr_1			3	9	18	30
Gr_2				8	30	66
Gr_3					18	78
Gr_4						48

图2. 当维数为 $= 3$ 时，通常的洗牌代数的移位词长滤过的维数。

作为第三个也是最后一个例子，我们考虑编织向量空间 $V(c, x)$，它对应于架 c 中的对换 $G = S_3$。若余循环 $x = -1$，则这对应于 Hurwitz 空间 $\mathrm{Hur}^G_{,n}$ ^{c}的情形。我们计算了 $x = 1$ 和 $x = -1$ 的滤过维数，计算范围截至 $n = 5$，并将结果绘制于图 3。

对于 $x = 1$，我们看到 $\mathfrak{A}_2$、$\mathfrak{A}_3$中没有本原元；但2 维本原元空间对应 $\mathfrak{A}_4$，而6 维空间对应 $\mathfrak{A}_5$，这导致分次1和2之间出现间隔。对于 $x = -1$，我们注意到 Nichols 代数 $\mathfrak{B} = F_0\mathfrak{A}$ 是有限维的，且在$n = 4$处终止。这就是 12 维的 Fomin-Kirillov 代数 $\mathcal{FK}_3$，最初由 [FK99]中定义。

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_5$
Gr_0	1	3	9	27	79	225
Gr_1						
Gr_2						
Gr_3					2	12
Gr_4						6

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_5$
Gr_0	1	3	4	3	1	
Gr_1			5	21	42	51
Gr_2				3	32	132
Gr_3					6	51
Gr_4						9

图3. 移位词长滤过的维数：左侧为带余循环 $x=1$ 的 S_3 换位架，右侧为 $x=-1$ 。

5. 权重滤过的等价性

我们给出定理1.5中所建立等价关系的另一个例子，即权重滤过的情形。本节中，设 $V\in\mathcal{V}$ 是一个编织向量空间，使得 $\mathcal{L}_n(V[1])$ 具有有限单值化；这是定义几何权过滤所必需的。照例，设 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(V)$ 为量子洗牌代数， $T=T(V^*)$ 为对偶张量代数，而 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(V)$ 为 Nichols 代数。

首先，我们讨论 $\mathcal{F}_n=j_{n*}\mathcal{L}_n$ 上的几何权过滤及其对偶 $\mathbb{D}\mathcal{F}_n=j_{n!}\mathcal{L}_n^\vee$。我们使用第 2.4.2 节中的构造定义权重滤过 $W_w\mathcal{F}_n$ ，这里利用了局部系统具有有限单值化这一事实。用 $j_{n!}\mathcal{L}_n^\vee$ 替代 $j_{n*}\mathcal{L}_n$，可以用同样的方式定义该权重滤过 $W_w\mathbb{D}\mathcal{F}_n$ ；不难看出，根据以下意义，它与权重滤过 $\mathbb{D}\mathrm{Gr}_w\mathcal{F}_n\cong\mathrm{Gr}_{-w}\mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 及 $\mathbb{D}W_w\mathcal{F}_n\cong\mathbb{D}\mathcal{F}_n/W_{-w-1}\mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 对偶。 $\mathcal{F}_n$ 上的权重滤过和 $\mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 分别集中在权重 ≥ 0 和 ≤ 0 上。正如第 4 节中一样，我们可以验证二者都是定义 3.4 意义下的可因子化周 pervers 层的滤过。事实上，等式 (4.1) 的左端恰好包含权重为 $u+v$ 的合成因子，因为 $\boxtimes$ 增加权重，右端也是如此。

回想一下，我们在定义 $W_w\mathfrak{A}_n$ 和 W_wT_n 1.6中定义了递增的代数权重滤过，并且 $\mathfrak{A}_n$ 和 T_n 中的权重分别集中在次数 ≥ 0 和 ≤ 0 上。我们无法证明这构成了适用于所有量子洗牌代数的双代数滤过，并且我们猜想存在一些量子洗牌代数，使得这并非双代数滤过。粗略来说，证明余乘法保持滤过时遇到的问题是， $T\otimes T$ 上的扭曲乘法取决于编织，因此我们需要检查编织R: $T\otimes T\to T\otimes T$是否保持权重滤过；而这只有在编织相对于本原元表现良好时才会成立。尽管如此，在有限单值化的情形下，命题5.1将推出这确实是一个双代数滤过。

5.1. 等价性证明。 回想一下，我们假设局部系统 $\mathcal{L}(V[1])$ 具有有限单值化，在此假设下，我们证明如下对应关系。

命题 5.1. 代数权重滤过 $W_w\mathfrak{A}_n$ 对应于几何权过滤$W_w\mathcal{F}_n$ 在定理*1.5*所述的等价下。 W_wT_n 对偶地，对应于 $W_w\mathbb{D}\mathcal{F}_n$。

证明。 令 W'_wT_n 为对应于 $W_wj_{n!}\mathcal{L}_n^\vee$的权重滤过，我们将对 n使用归纳法证明$W'_wT_n=W_wT_n$ 。设对于某个 $n>0$，两个滤过在低于 n 的代数次数上相等。

令 $V=\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})\setminus\mathbb{C}$为对角线补集，其中 $u\colon\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})\hookrightarrow V$, $v\colon V\hookrightarrow\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 且 $i\colon\mathbb{C}\hookrightarrow\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$。回顾余维滤过 $F_c\mathcal{F}_n$ ，我们有 $F_{n-1}\mathcal{F}=v_{!*}u_*\mathcal{L}_n=v_{!*}v^*\mathcal{F}_n$，并且根据中间延拓的性质，商 $\mathrm{Gr}_n^F\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_n/F_{n-1}\mathcal{F}_n$

支撑在对角线上。因此，我们有一个正合序列

$$0 \to v_{!*}v^*\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n \to i_*C_n \to 0$$

由平移不变性可知， C_n 是对角线上的常值层。此外，正如命题 4.1的证明中所示，从第 3.5 节可知， $i_0^*\mathrm{Gr}_n^F \mathcal{F}_n \cong \mathrm{Gr}_n^F B_n(\mathfrak{A}_n)$ 其中i_0: $\{0\} \hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$。由此可知， C_n 是次数为 -1 、取值于 $\mathfrak{A}_n/\mu(\bigoplus \mathfrak{A}_p \otimes \mathfrak{A}_q)$ 的常值层，其中直和取遍满足 $p+q=n$ 的 $0<p,\ q<n$。取对偶，得到

$$0 \to i_*C_n^\vee \to \mathbb{D}\mathcal{F}_n \to v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n \to 0$$

注意到， $C_n^\vee$ 现在是次数为 -1 、取值于本原元 $P_n \subseteq T_n$ 的层，它是 $\mathfrak{A}_n/\mu(\bigoplus \mathfrak{A}_p \otimes \mathfrak{A}_q)$ 的对偶。

现在考虑 $i_*C_n^\vee$ 和 $v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 上的权重滤过，记为

$$0 = W_{-a}v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n \subseteq \cdots \subseteq W_0 v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n = v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n$$

$$0 = W_{-b}i_*C_n^\vee \subseteq \cdots \subseteq W_0 i_*C_n^\vee = i_*C_n^\vee$$

其中，为了便于记号，我们选取一些足够大的指标 a, b。然后，通过上面的短正合序列，将它们直接拼接成一个滤过

$$G_{-a-b}\mathbb{D}\mathcal{F}_n \subseteq \cdots \subseteq G_0\mathbb{D}\mathcal{F}_n$$

其中 $\mathrm{Gr}_{w-a}^G \mathbb{D}\mathcal{F}_n = \mathrm{Gr}_w^W i_*C_n^\vee$ 对应 $-b < w \leq 0$ ，而 $\mathrm{Gr}_w^G \mathbb{D}\mathcal{F}_n = \mathrm{Gr}_w^W v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 对应 $-a < w \leq 0$。通过重新排列合成因子，可以得到权重滤过 $W_w\mathbb{D}\mathcal{F}_n$。事实上，由于（可极化）纯霍奇模的半单性 [Sai88，推论 5.2，13], 我们有

$$\mathrm{Gr}_w^W \mathbb{D}\mathcal{F}_n = \mathrm{Gr}_w^W i_*C_n^\vee \oplus \mathrm{Gr}_w^W v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n.$$

原则上，利用可因子化性，我们可以根据较低的代数次数理解 $v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n$ （因而也能理解 $v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n$）上的权重滤过，因为我们可以用形如 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$ 与 $\mathrm{Sym}^p(U) \times \mathrm{Sym}^q(V)$ 的开集覆盖 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$ 。另一方面，我们并不知道 $i_*C_n^\vee$ 上的权重滤过，因此需要通过下面的谱序列论证来推导它。

考虑谱序列

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(i_0^* \mathrm{Gr}_p^G \mathbb{D}\mathcal{F}_n) \Rightarrow H^{p+q}(i_0^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n)$$

这里回顾一下，由于准齐次性（收缩 $\mathbb{C}^*$ 作用），对于任意$K \in D_c^b(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \ S_n,\ \mathcal{V})$，都有 $R\Gamma K \cong i_0^*K$ 。这个谱序列具有以下两个有用性质。首先，根据零延拓的性质，我们有 $i_0^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n \cong i_0^*j_{n!}\mathcal{L}_n^\vee = 0$ ，因此终项为零。其次，只有相同权重的项之间的微分才非零。为说明这一点，注意每个 $\mathrm{Gr}_p^G \mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 都具有纯权，因此 $i_0^* \mathrm{Gr}_p^G \mathbb{D}\mathcal{F}_n \cong R\Gamma\mathrm{Gr}_p^G \mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 必定是相同权重的纯结构，因为拉回只能降低权重，而推前只能提高权重。于是，$H^{p+q}i_0^*\mathrm{Gr}_p^G \mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 是一个纯霍奇结构，而纯霍奇结构之间的映射只有在它们具有相同权重时才可能非零。

要写出谱序列，请注意，根据第 3.5 节，我们知道 $i_0^*\mathrm{Gr}_w^W \mathbb{D}\mathcal{F}_n \cong \mathrm{Gr}_w^W B_n(T)$ 是 T上的 bar 复形的分次部分

$$\left\{ \cdots \to \bigoplus_{\substack{p+q+r=n \\ 0<p,q,r<n}} \mathrm{Gr}_w^W(T_p \otimes T_q \otimes T_r) \to \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ 0<p,q<n}} \mathrm{Gr}_w^W(T_p \otimes T_q) \to \mathrm{Gr}_w^{W'} T_n \right\} \tag{5.1}$$

其中 $\mathrm{Gr}_w^{W'} T_n$位于次数 -1，并且我们使用了归纳假设：对于 $m < n$， $W'_w T_m = W_w T_m$。这与直和 $i_0^* \mathrm{Gr}_w^W i_*C_n^\vee \oplus i_0^*\mathrm{Gr}_w^W v_{!*}v^*\mathbb{D}\mathcal{F}_n$准同构，但先验而言，并不清楚这些能否表示为上述复形的子复形。为此，我们回想起 $i_*C_n = \mathrm{Gr}_n^F \mathcal{F}_n$ 是余维滤过的一个分次部分，因此对偶地， $i_*C_n^\vee = \mathrm{Gr}_F^n \mathbb{D}\mathcal{F}_n$,

结合第 3.5 节和上文的讨论，我们看到 $i_0^* i_* C_n^\vee$ 同构于 $B_n(T)$ 的子复形，该子复形在次数 -1处为 P_n 。根据命题 3.9，余维滤过和权重滤过对应的 bar 复形同构彼此相容。因此，我们确实可以将 $i_0^* \operatorname{Gr}_w^W i_* C_n^\vee$识别为次数 -1 处的子复形 $P_n \cap \operatorname{Gr}_w^{W'} T_n$，并将 $i_0^* \operatorname{Gr}_w^W v_{!*} v^* \mathbb{D}\mathcal{F}_n$识别为上文给出的子复形，只需将等式 (5.1) 的最后一项修改为 $\operatorname{Gr}_w^{W'} T_n / P_n$。此外，注意到 $\operatorname{Gr}_w^W v_{!*} v^* \mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 的合成因子是来自非对角分层的中间延拓，因此 ${}^p\mathcal{H}^0(i^* \operatorname{Gr}_w^W v_{!*} v^* \mathbb{D}\mathcal{F}_n) = 0$，这意味着 $H^{-1}(i_0^* \operatorname{Gr}_w^W v_{!*} v^* \mathbb{D}\mathcal{F}_n) = 0$，故指向 $\operatorname{Gr}_w^{W'} T_n / P_n$ 的映射在 $i_0^* \operatorname{Gr}_w^W v_{!*} v^* \mathbb{D}\mathcal{F}_n$ 的子复形中必为满射。

这样，我们可以画出 E_0 图 4中的页面，它正是与滤过 G 相对应的 bar 复形的分次部分；该滤过是通过重新排列上述子复形得到的。为方便记号，我们还取指标 $b = a + 1$。

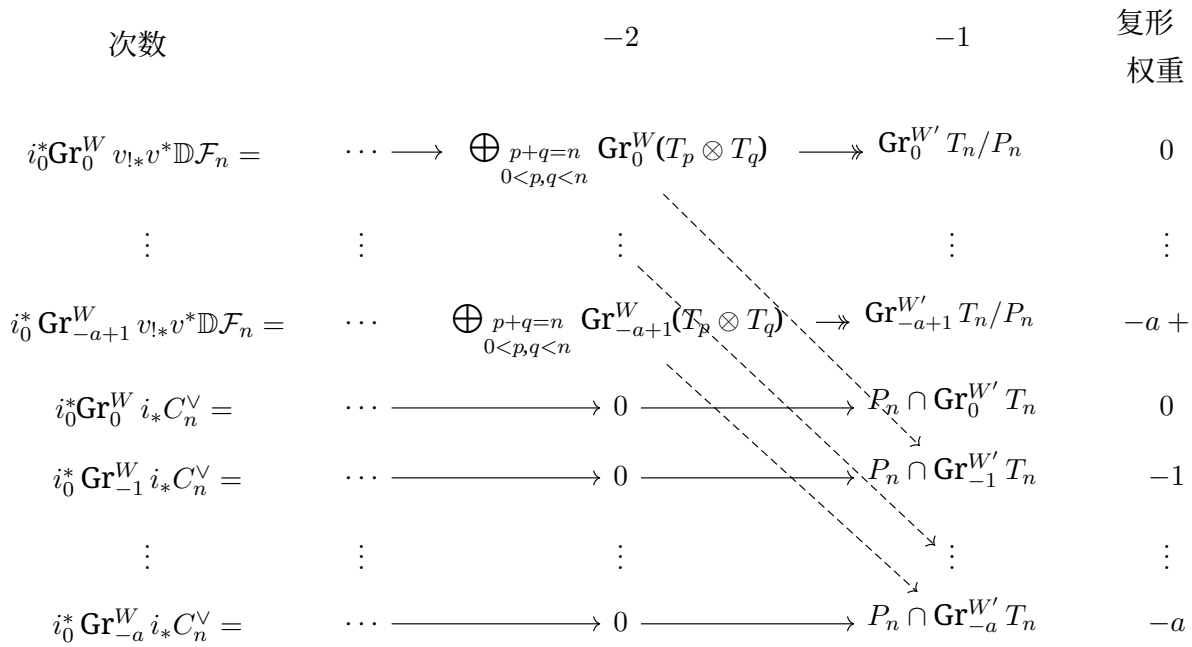


图4. 谱序列的第 E_0 页。

谱序列中的微分总是从上同调次数 d 到 $d+1$。在第 E_m 页，它们向右移动一格，并向下移动 m 行。所有微分都由拼接诱导，因为该谱序列来自 bar 复形的滤过，而其映射由拼接给出。在第 E_0 页，我们沿实线箭头取微分，以得到这些复形的上同调。从第 E_1 页开始，从次数 d 到 $d+1$ 的非零微分在复数（导出）权重上必须从 w 到 $w-1$，因此它们连接的是具有相同权重 $d + w =$ （$d + 1$） + （$w - 1$）的纯霍奇结构。这里，我们回顾第 2.4.2 节的内容：复形 $K \in D^b$（MHM（X））具有复数（导出）权重 w，当且仅当每个 H^j（K）都具有权重 $w + j$; 并且不同权重的纯霍奇结构之间不存在映射。

由此，我们可以在图中用虚线箭头画出从第 E_1 页开始、所有从次数 -2 到次数 -1 的可能非零微分。次数 d 到次数 $d+1$ 之间也可能存在微分，其中 $d < -2$，但这些微分不会影响次数 -1 的项，而且它们只会将次数 -2 的项替换为一个商，因此与我们无关，我们不予考虑。可以看到，这些虚线箭头位于第 E_{a+1} 页，向右一格并向下 $a+1$ 行。

在第 E_1 页上，也可能存在从次数 -2 到 -1 的非平凡微分，因为它们从权重为 w 的复形映到权重为 $w-1$ 的复形。不过，这些微分最终都证明是平凡的：要么次数 -1 的项在第 E_0 页被一个满射消去（图中的前 a 行），要么次数 -2 的项已经为零（图中的最后 $a+1$ 行）。

如前所述，我们知道该谱序列收敛到零，因此图表中虚线箭头所示的微分必须消去形如 $P_n \cap \mathrm{Gr}_{-a}^{W'} T_n$ 的项。我们先来看最低项 $P_n \cap W'_{-a} T_n$。该微分来自 $\ker(\bigoplus \mathrm{Gr}_{-a+1}^{W}(T_p \otimes T_q) \to \mathrm{Gr}_{-a+1}^{W'} T_n/P_n)$ 的一个商，并由拼接给出，因此必有 $P_n \cap W'_{-a} T_n = P_n \cap \mu(\bigoplus \mathrm{Gr}_w^W(T_p \otimes T_q))$。沿着图表逐步向上推导，我们得到

$$P_n \cap W'_w T_n = P_n \cap \mu\left(\bigoplus \mathrm{Gr}_{w+1}^W (T_p \otimes T_q)\right)$$

对所有 w，同理可得。最后，由于到 $\mathrm{Gr}_w^{W'} T_n/P_n$ 的映射是满射，我们可知

$$W'_w T_n/P_n = \mu\left(\bigoplus \mathrm{Gr}_w^W (T_p \otimes T_q)\right)$$

对所有 w。结合这两个等式可知，$W'_w T_n = W_w T_n$ 与代数权重滤过一致，从而完成证明。□

5.2. **示例**。我们采用第 4.2 节中的相同三个例子，将代数权重滤过与移位词长滤过进行比较。我们将看到，尽管在某些特殊情况下二者一致，但它们确实是不同的滤过。

对于第一个例子，其中 $V = k$ 的编织由 $q \in k^\times$给出，注意到当且仅当 q 是单位根时，单值化有限。在这种情况下，回忆一下，我们有一个显式表达式$\mathfrak{A} \cong k[x_1]/x_1^m \otimes \Gamma[x_m]$。由此很容易看出，$T$ 中代数分次为 $n>1$ 的唯一原始元是 $1^{\otimes m}$，它对应于 x_m^*。因此，$1^{\otimes m}$ 下降一个分次至 $W_{-1}T$，此后的所有项都由遵循权重分次的拼接确定。特别地，对于 $0 \le v < m$的$n = um + v$，我们可以写成 $1^{\otimes m} = (1^{\otimes m})^{\otimes u} \otimes 1^{\otimes v}$，所以 $1^{\otimes m}$ 的权重为 $-u$。将其视为量子洗牌代数 $\mathfrak{A}$中的元素时，权的符号会反转。我们在图5中绘出了$m=3$ 的维数，并注意到与图 1相比，此处的权每次只增加 1。

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_6$	$\mathfrak{A}_7$	$\mathfrak{A}_8$
Gr_0	1	1	1						
Gr_1				1	1	1			
Gr_2							1	1	1

图5。 $V = k$ 和 q 三次单位根的权重滤过维数。

接下来，我们考察通常的洗牌代数。回顾第 4.2 节中的讨论，原始元空间 $P \subseteq T$ 是由 $L(V^*)$ 生成的自由李代数 V^*。我们在命题 4.2 中证明，对于 $W_w T_n = F^{-w} T_n = F_{n+w} T_n$，这里的权重滤过与移位词长滤过和 PBW过滤均一致 $n>0$。事实上，根据 PBW 定理，T中的每个元素都可唯一表示为若干项的线性组合 $P_1 \cdots P_t$，其中 $P_1 \le \cdots \le P_t$；由此，结合归纳法和权重滤过的定义，即可得到结论。因此，滤过的维数如图 2所示。

最后，我们计算了编织向量空间 $V(c,\ x)$ 的维数，其中 c 是 $G = S_3$中的共轭类。当 $x=-1$ 时，权重滤过与移位词长滤过一致，直到图 $n=5$ 右侧的 3，不过我们无法证明一般情况下二者一致。对于 $x=1$，维数有所不同，如图 6所示。当 $n=4$时，

T_4 中本原元构成的二维空间位于权重 -1，因此 $\mathfrak{A}_4$中权重 1 也有一个相应的二维空间。对于 $n=5$， T_5中本原元构成的六维空间与由 T_4中的本原元生成的十二维空间相结合，从而得到 $\mathfrak{A}_5$ 中权重 1 的十八维空间。

	$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_5$
Gr_0	1	3	9	27	79	225
Gr_1					2	18

图6。带有余循环 $x=1$ 的 S_3 换位架的权重滤过维数。

权重滤过的结构完全取决于张量代数中的本原元。然而，一般来说，要确定编织代数中的本原元并不容易。例如，与通常的洗牌代数不同，本原元不再具有简单的李代数结构。 [Wes25] 对此进行了更深入的研究，在编织霍普夫代数的背景下发展了 PBW 理论和 Cartier-Milnor-Moore 理论的相应版本。特别是，他们定义了编织本原算子 $\mathrm{BrPrim}(n)$ ，它们从 n 不同元素构造本原元。$\mathrm{BrPrim}(2)$ 很容易理解；本质上，该理论告诉我们，从元素 x、 y 可以构造出本原元

$$\frac{1}{2n}\left(\mu(x\otimes y)-\mu(R(x\otimes y))+\cdots-\mu(R^{2n-1}(x\otimes y))\right)$$

如果 $R^{2n}(x\otimes y)=x\otimes y$。然而，$\mathrm{BrPrim}(n)$ 中可能存在无法由此生成的运算。事实上，对于上文的 $V(c,\ 1)$，我们就能看到这种情况：第一个本原元出现在 4 次，由 BrPrim(4) 中的一个运算生成；而从一次元素出发，反复应用 BrPrim(2) 中的运算，则无法得到这些 4 次本原元。不过，似乎有一大类来自 Hurwitz 空间的洗牌代数具有这样的性质：所有本原元都可以从一次元素出发，通过反复应用 BrPrim(2) 生成，或许这背后存在几何原因。若此猜想成立，我们或许就能对权重滤过的结构作出更多说明。

6. Hurwitz 空间中权重滤过的比较定理

在上一节中，我们证明了通过定义在 $j_*\mathcal{L}(V[1])$ 上的混合霍奇模构造的几何权过滤 $\mathbb{C}$ ，对应于量子洗牌代数 $\mathfrak{A}(V)$上的代数权重滤过。回想一下，我们希望将其应用于有限域上的点计数，因此需要比较 $j_*\mathcal{L}(V[1])$ 在 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$上的权重滤过。一般而言，这很难做到，因此本节将讨论 V 来自 Hurwitz 空间的情形。这将使我们能够证明定理1.7，从而利用量子洗牌代数计算 Hurwitz 空间的上同调权重。

固定一个整数 $n\geq 1$、一个群 G、一组共轭类 $c\subseteq G$，以及素数 $p>|G|$和 $\ell>n$ ，满足 $p\neq\ell$。固定一个同构 $\iota\colon \mathbb{Q}_\ell\xrightarrow{\sim}k$ ，并在下文中默认将两个系数域视为相同。从现在起，我们将在 $S=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ 上工作，并分别将 s、 η 称为特殊点和一般点。

注意，根据第 2.1.2 节，我们可以将 $\mathrm{Hur}^{G}_{n}{}^{c}$as Hurwitz 空间视为 $\mathbb{Z}_p$ 上的概形，$\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1)$ 和 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A})$ 这些空间也同样如此。令 $\pi\colon \mathrm{Hur}^{G}_{n}{}^{c}\to\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1)$，并回顾 $j_n\colon \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1)\hookrightarrow\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1)$。回顾第 2.3.3 节末尾的讨论可知，Hurwitz 空间对应的编织向量空间是 $V_\epsilon=V(c,-1)\in\mathcal{YD}_G$，而 $\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{C})$ 上的 $\mathcal{L}_n=\mathcal{L}_n(V_\epsilon[1])$ 是次数为 $-n$ 、由 B_n-表示 c^n 给出的局部系统。另请回顾第 2.4.2 节，我们希望 $\mathcal{L}_n$ 满足

将其归一化，使其作为复形具有权重 0，因此在 $\mathbb{C}$ 上有 $\mathcal{L}_n = \pi_* k_{\mathrm{Hur}^{G,n,c}}(n/2)[n]$。这样，我们便可以用相同的公式在 $\mathbb{Z}_p$ 上定义 $\mathcal{L}_n$。

我们分别按照第 $j_{n*}\mathcal{L}_n$ 节中的方式，在 $\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$ 上定义了权重滤过2.4，并指出，对于 $\mathcal{L}_n$ 在 $\mathbb{C}$ 上的有限单值假设成立，因为它来自一个有限 étale 覆盖。因此，我们有两个谱序列，分别对应这两种情形：

$$
\begin{aligned}
E_1^{p,q} &= R\Gamma^{p+q}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}), \mathrm{Gr}_p^W(j_{n*}\mathcal{L}_n)_{\mathbb{C}}) \Rightarrow R\Gamma^{p+q}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}), (j_{n*}\mathcal{L}_n)_{\mathbb{C}}),\\
E_1^{p,q} &= R\Gamma_{\text{ét}}^{p+q}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}), \mathrm{Gr}_p^W(j_{n*}\mathcal{L}_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \Rightarrow R\Gamma_{\text{ét}}^{p+q}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}), (j_{n*}\mathcal{L}_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}).
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

特别地，这两个谱序列都在终项上诱导出相应的权重滤过。

我们可以用量子洗牌代数的语言，非常明确地理解 $\mathbb{C}$ 上的第一个谱序列。事实上，根据命题 5.1，它与定理 1.5 中关于 Tor 同调的谱序列同构。对于第二个谱序列，由于 $R\Gamma j_{n*}\mathcal{L}_n = R\Gamma j_{n*}\pi_* k_{\mathrm{Hur}^{G,n,c}}(n/2)[n] = R\Gamma k_{\mathrm{Hur}^{G,n,c}}(n/2)[n]$，我们有

$$
R\Gamma_{\text{ét}}^{p+q}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}), (j_{n*}\mathcal{L}_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \cong H_{\text{ét}}^{p+q+n}(\mathrm{Hur}^{G,c}_{n,\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(n/2).
$$

因此，我们可以通过上述同构将权重滤过传递到 Hurwitz 空间的上同调上。$R\Gamma^{p+q}_{\text{ét}}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}), (j_{n*}\mathcal{L}_n)_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ 的 w 分次部分的 Frobenius 特征值将以 $q^{(w+p+q)/2}$ 作用（因为权重是在导出意义下定义的，而在点的情形下，纯即逐点纯，见第 2.4.1 节）。因此，在考虑 Tate 扭曲和次数平移后，$H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Hur}^{G,n,c}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的 w 分次部分上的特征值将为 $q^{(w+i)/2}$；于是，$H_c^{2n-i}(\mathrm{Hur}^{G,n,c}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Hur}^{G,n,c}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\vee(n)$ 上相应的特征值的绝对值至多为 $q^{(2n-i-w)/2}$。

因此，根据以上讨论，要完成定理1.7 的证明，还需弥合 $\mathbb{F}_p$ 与 $\mathbb{C}$之间的权重谱序列的差距。以下定理将给出解决方法，并推广了 [EVW16中的比较定理（命题 7.7，7。8]。

定理 6.1。定　　两条谱序列之间存在自然同构，见等式(6.1　　).

本节余下部分将专门证明定理6.1。我们首先回顾 [EL25附录 B], 中构造的 Hurwitz 空间正规交叉紧化，该构造使用了 [AV01中提出的扭曲稳定映射概念；ACV03] 这一概念则受到容许覆盖 [HM82]的启发。在这一正规交叉情形下，容易构造常值层推前的权重滤过，并由此通过推前和拉回，推导出 $j_{n*}\mathcal{L}_n$在 $\mathbb{Z}_p$ 上的权重滤过。最后，我们利用关于 $\mathbb{Z}_p$ 的消失循环论证，证明特殊纤维 $\mathbb{F}_p$ 与一般纤维 $\mathbb{C}$上的权重滤过比较定理。

6.1. Hurwitz 空间紧化。

我们陈述 $\mathrm{Hur}^{G,n,c}$ 的正规交叉紧化及其若干性质。

命题 6.2. 存在一个正规交叉紧化 $u\colon \mathrm{Hur}^{G,n,c} \hookrightarrow \overline{\mathrm{Hur}}^{G,n,c}$，其定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上，其中$\overline{\mathrm{Hur}}^{G,n,c}$是一个光滑的真 *Deligne–Mumford* 叠，并且存在一个笛卡尔图

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hur}^{G,c}_{n'} & \hookrightarrow & \overline{\mathrm{Hur}}^{G,c}_{n'} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1) & \hookrightarrow & \mathrm{Sym}^n(\mathbb{P}^1)。
\end{array}
$$

证明。第一个结论由 [EL25，推论 B.1 得出。4] 令 $B = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$，$C = \mathbb{P}^1$ 且 $Z = \infty$。我们通过将 $\mathrm{Hur}^{G}_{,n}{}^{c}$ 中的一个 G-覆盖映射到其 n 个不同的分歧点，并类似地将 $\mathrm{Hur}^{G}_{,n}{}^{c}$ 中的一个平衡扭曲稳定映射映射到基曲线 C 上的 n 个标记点，来构造该笛卡尔图。显然，根据构造，若这些标记点彼此不同且不位于 ∞，则该平衡扭曲稳定映射必定是一个实际的 G-覆盖。□

我们首先将在 $u_* k_{\mathrm{Hur}^{G,n}{}^{c}}(n/2)[n]$ 上构造一个权重滤过，随后将由此推出 $j_{n*}\mathcal{L}_n$ 的权重滤过。上文构造的 $\mathrm{Hur}^{G}_{,n}{}^{c}$ 的紧化在 étale 局部看起来是标准正规交叉情形，其中 $\mathbb{A}^n$，且边界是坐标超平面的并集。在下一小节中，我们将在标准正规交叉情形下 étale 局部地构造权重滤过，然后证明这些构造可以粘合在一起。

6.2. 标准正规交叉的权重滤过。我们考虑 $\mathbb{Z}_p$ 上的如下标准正规交叉情形。设 $X = \mathbb{A}^n$ 的坐标为 $x_1, \ldots, x_n$，边界除子为 $D = D_1 \cup \cdots \cup D_d$，其中对于 $d \le n$，有 $D_i = \{x_i = 0\}$。设 $U = X \setminus D$，其包含映射为 $u\colon U \hookrightarrow X$。此外，对于任意子集 $I \subseteq J$，记 $D_I = \bigcap_{i\in I} D_i$，其包含映射为 $i_I\colon D_I \hookrightarrow X$ 和 $w_I\colon X \setminus D_I \hookrightarrow X$。为简化记号，记 $i_j = i_{\{j\}}$ 和 $w_j = w_{\{j\}}$。

我们想要定义 $\mathcal{F} = u_* k_U(n/2)[n]$ 在 X 上的紧化 $\mathbb{Z}_p$的权重滤过。在这种正规交叉情形下，权重滤过就是 X上的通常余维滤过，正如第 4 节所述，这并不令人意外。令 $V_c = X \setminus \bigcup_{|I|=c+1} D_I$ 为余维$\le c$层的并，并令 $u_c\colon U \hookrightarrow V_c$, $v_c\colon V_c \hookrightarrow X$。我们将权重滤过定义为

$$W_c\mathcal{F} = v_{c!*} u_{c*} \underline{k}_U(n/2)[n] \tag{6.2}$$

因此 $W_{-1}\mathcal{F} = 0$, $W_0\mathcal{F} = u_{!*} k_U(n/2)[n]$ 和 $W_n\mathcal{F} = \mathcal{F}$。

为了理解 $\mathbb{Z}_p$上的中间延拓，我们需要 [HS23] 发展的相对 perversity 理论，它等价于每个几何纤维上的 perversity。与通常情形一样，相对倾斜层构成一个阿贝尔范畴，我们可以用相同的方式构造中间延拓。

我们注意到，以下几条基变换性质对我们的情形很有用。根据适当基变换，零延拓 $f_!$ 与取纤维可交换。此外，根据 [DK73，第 XIII 章，定理 2.1。10], 若 f 是具有正规交叉边界的开浸入，f_* 则与取纤维可交换（这也可由下文的引理推出）。这说明，将上面的权重滤过基变换到几何纤维 s，η 并注意到 u_{c*} 是仿射开浸入，因此在每个纤维上都是 t-正合的，就可知权重滤过中的每一项都是相对周 pervers 的。

下面的引理给出了权重滤过中的分次片。

引理 6.3。我们有

$$\mathrm{Gr}^W_c \mathcal{F} = \bigoplus_{|I|=c} i_{I*} \underline{k}_{D_I}(n/2 - c)[n - c].$$

由基变换可知，这些对象显然是相对周 pervers 的。这里我们保留 Tate 扭曲，因为它对权的考量很重要。证明思路是通过归纳方式跨越因子作延拓，从而得到 $u_* k_U[n]$ 的一个合成列，然后将其重新排列为权重滤过。

证明. 我们对 d进行归纳，其中 $d = 0$是平凡的基例。现在假设命题对 $d-1$成立，并尝试证明它对 d成立。我们先忽略超平面 D_d，只考察超平面$D_1, \ldots, D_{d-1}$。令 $K = \{1, \ldots, d-1\}$、$D' = \bigcup_{i\in K} D_i$、$U' = X \setminus D'$和 $u'\colon U' \hookrightarrow X$。考虑反常层 $\mathcal{F}' = u'_* k_{U'}(n/2)[n]$，它具有一个按与方程相同的方式定义的滤过

(6.2)但仅有 $d-1$ 超平面。由归纳假设，分次片由此给出。

$$\mathrm{Gr}_c^{W'}\mathcal{F}' = \bigoplus_{|I|=c, I\subseteq K} i_{I*}\underline{k}_{D_I}(n/2-c)[n-c].$$

我们考虑特异三角

$$i_{d*}i_d^!\mathcal{F}' \to \mathcal{F}' \to w_{d*}w_d^*\mathcal{F}' \xrightarrow{+1},$$

并注意到 $w_{d*}w_d^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ 正是我们所需要的，因此经过平移后得到

$$\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to i_{d*}i_d^!\mathcal{F}'[1] \xrightarrow{+1}.$$

我们看到，滤过 $W_c'\mathcal{F}'$在 $i_{d*}i_d^!\mathcal{F}'[1]$上诱导出一个由相对变态层构成的滤过 $i_{d*}i_d^!W_c'\mathcal{F}'[1]$。为说明这一点，回忆包含映射 $i\colon D_{I\cup\{d\}}\hookrightarrow D_I$是光滑簇的一个嵌入，因此由纯性可得 $i^!k_{D_I} = k_{D_{I\cup\{d\}}}(-1)[-2]$。于是，对 $i_{I*}k_{D_I}(n/2-c)[n-c]$应用 $i_{d*}i_d^!$并进行平移 $[1]$，其中该对象是 $\mathrm{Gr}_c^{W'}\mathcal{F}'$的一个因子，我们得到 $i_{I\cup\{d\}*}k_{D_{I\cup\{d\}}}(n/2-c-1)[n-c-1]$，它是相对变态的。由于导出范畴中倾斜层的扩张必然仍是倾斜层，$i_{d*}i_d^!\mathcal{F}'[1]$ 也同样是相对变态的，因为其滤过的分次部分都是相对变态的。

结合 $\mathcal{F}'$和 $i_{d*}i_d^!\mathcal{F}'[1]$上的滤过，我们得到 $\mathcal{F}$上的相对变态层滤过。合并后的合成列中的因子有两种形式：第一种是来自 $\mathcal{F}'$的 $i_{I*}k_{D_I}(n/2-c)[n-c]$，第二种是来自 $i_{d*}i_d^!\mathcal{F}'[1]$的 $i_{I\cup\{d\}*}k_{D_{I\cup\{d\}}}(n/2-c-1)[n-c-1]$，两种情况下我们都取 $I\subseteq K$。不过请注意，我们本可以选择任何其他的 $d-1$ 子集 $K\subseteq\{1,\dots,d\}$，因此相同大小的合成因子不会有任何一个严格排在另一个之前；换句话说，它们会分裂并构成一个直和。

因此，我们可以构造一个滤过，使 $\mathrm{Gr}_c\mathcal{F} = \bigoplus_{|I|=c} i_{I*}\underline{k}_{D_I}(n/2-c)[n-c]$ 如所需。为检验这与中间延拓的描述一致，请注意，$v_{c!*}u_{c*}k_U(n/2)[n]$ 是 $\mathcal{F}$ 的极大子对象，其中不包含任何支撑在 $X\setminus V_c$上的简单周变上同调层；根据上面描述的合成因子，这一点确实成立。□

为了说明称其为权重滤过是合理的，我们需要检查其纤维是否与之前的定义一致。回顾第 2.4.2 节，$\mathbb{C}$ 上的权重滤过是通过将倾斜层提升为混合霍奇模块来确定的。在本例中，我们将常值层 $\mathbb{Q}_{U_\mathbb{C}}$ 提升到$\mathbb{Q}^H_{U_\mathbb{C}}$，得到 $u_*\mathbb{Q}^H_{U_\mathbb{C}}(n/2)[n]$上的权重滤过，应用函子 rat，并与 k张量。

引理 6.4。在 $\mathbb{Z}_p$ 上由方程 (6.2)定义的权重滤过，取在 $\mathbb{F}_p$ 和$\mathbb{C}$ 上的纤维后，与第2.4节中在两种情形下先前定义的权重滤过一致。

证明。我们首先通过基变换证明，权重滤过的纤维仍满足上述相同的公式，即对于 $x\in\{s,\eta\}$，我们有 $(W_c\mathcal{F})_x = v_{c,\,x!*}u_{c,\,x*}k_{U_x}(n/2)[n]$ 以及 $(\mathrm{Gr}_c^W\mathcal{F})_x = \bigoplus_{|I|=c} i_{I,\,x*}k_{(D_I)_x}(n/2-c)[n-c]$。第二个等式由适当基变换显然成立。对于第一个等式，回顾 $W_c\mathcal{F} = \mathrm{Im}({}^p\mathcal{H}^0(v_{c!}u_{c*}k_U[n]) \to {}^p\mathcal{H}^0(u_*k_U[n]))(n/2)$。相对于两种倾斜结构，取纤维都是 t-正合的，并且 $v_{c!}$，u_{c*}，u_* 都与取纤维交换，因此第一个等式成立。

在特殊纤维 $s=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 上，显然，$(\mathrm{Gr}_c^W\mathcal{F})_x$ 中的倾斜层作为复形具有权重 c，因此这确实是权重滤过。对于一般纤维 $\eta=\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$，我们可以在混合霍奇模块范畴中重复引理 6.3 的证明，并使用 [Sai90 第 4.4、4.5] 节中陈述的类似性质，其中包括局部化三角和纯性。这给出了 $u_*\mathbb{Q}^H_{U_\mathbb{C}}(n/2)[n]$ 上的一个滤过；经投影并张量到 k 后，它与 $(W_c\mathcal{F})_\eta$ 一致。由引理 6.3 的类似结论可知，这显然是混合霍奇模块上的权重滤过。□

6.3. 传递到 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1)$。现在我们回到第 6.1 节的设定，仍在 $\mathbb{Z}_p$ 上，其中u: $\mathrm{Hur}^{G,c}_n \hookrightarrow \overline{\mathrm{Hur}^{G,c}_n}$，并令 $\mathcal{F} = u_* k_{\overline{\mathrm{Hur}^{G,c}_n}}(n/2)[n]$。由公式 (6.2) 或引理 6.3 可知，上一小节中的构造可以粘合为 $\mathrm{Hur}^{G,c}_n$ 上的权重滤过，我们将其记为 $\mathrm{Gr}^W_w \mathcal{F}$；引理 6.4 告诉我们，它与在$\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$上定义的权重滤过一致。

回顾一下，我们希望在 $j_{n*}\mathcal{L}_n$上构造一个权重滤过。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hur}^{G,c}_n & & \xrightarrow{\quad u \quad} & & \overline{\mathrm{Hur}^{G,c}_n} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathrm{Sym}^n_{\neq}(\mathbb{A}^1) & \xrightarrow{j_n} & \mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1) & \xrightarrow{v} & \mathrm{Sym}^n(\mathbb{P}^1). \end{array}$$

我们有 $j_{n*}\mathcal{L}_n = j_{n*}\pi_* k_{\mathrm{Hur}^{G,c}_n}(n/2)[n] = v^*\rho_* u_* k_{\mathrm{Hur}^{G,c}_n}(n/2)[n] = v^*\rho_*\mathcal{F}$，因此我们需要先对 $\mathcal{F}$ 上的权重滤过进行推前，再进行拉回。

映射 ρ_* 是 proper 的，因而保持权重，但它仅是 t-左正合的，所以 $\rho_*\mathrm{Gr}^W_w \mathcal{F}$ 可能不是周 pervers。不过，我们知道 $\rho_*\mathcal{F} = v_* j_{n*}\mathcal{L}_n$ 是 perverse 的，因为仿射开浸入是 t-正合的。因此，与权重滤过相关联的谱序列

$$E_1^{r,s} = {}^p\mathcal{H}^{r+s}(\rho_* \mathrm{Gr}^W_r \mathcal{F}) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{r+s}(\rho_*\mathcal{F}) \tag{6.3}$$

在终项 $\rho_*\mathcal{F} = {}^pH^0(\rho_*\mathcal{F})$上诱导出一个滤过。然后，我们将其拉回到 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A}^1)$，这同时保持权重和 perversity，从而得到 $j_{n*}\mathcal{L}_n$上的权重滤过。利用与引理 6.4中类似的论证，很容易看出，该滤过的纤维与 $\mathbb{F}_p$ 上以及 $\mathbb{C}$上的权重滤过一致。我们在以下命题中陈述结果。

命题 6.5。存在一个权重滤过$\mathrm{Gr}^W_w j_{n*}\mathcal{L}_n$ 定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上，使得在$\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{C}$ 上的纤维分别与第 2.4 节中在这两种情形下此前定义的权重滤过一致。

既然我们已经在 $\mathbb{Z}_p$上构造了权重滤过，接下来将证明特化映射诱导出定理 6.1中的权重谱序列同构。

定理 6.1 的证明。我们从引理 6.3 给出的、在 étale 局部定义的分次部分 $\mathrm{Gr}^W_w \mathcal{F}$ 开始分析。由于因子 D_I 在 $\mathbb{Z}_p$上光滑且适当，关于 $\mathbb{Z}_p$ 的消失循环 $R\Phi k_{D_I}$为零。由于消失循环与适当推前交换，且可在 étale 局部进行检验，因此有 $R\Phi\rho_* \mathrm{Gr}^W_{-r}\mathcal{F} = 0$。于是，我们得到 $i_s^*\rho_*\mathrm{Gr}^W_{-r}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\Psi\rho_* \mathrm{Gr}^W_{-r}$，从而得到公式 (6.3) 中特殊纤维与邻近圈的第一页同构，这说明谱序列同构。因此，终项也同构，并且有 $i_s^*\mathrm{Gr}^W_w \rho_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\Psi\,\mathrm{Gr}^W_w \rho_*\mathcal{F}$。通过 v^*拉回，得到 $i_s^*\mathrm{Gr}^W_w j_{n*}\mathcal{L}_n \xrightarrow{\sim} R\Psi\,\mathrm{Gr}^W_w j_{n*}\mathcal{L}_n$。在两边取 $R\Gamma$ 后，得到公式 (6.1) 的第一页；其中我们使用了关于 $\mathbb{C}$ [BBD82 第 6.1 节上 étale 上同调与解析上同调的比较定理.2]。因此，我们按要求得到谱序列同构。□

7. 权重滤过的推论

最后，正如引言中所承诺的，我们将给出权重滤过构造的两个应用。首先，我们将证明定理 1.8所述的权重集中；随后，我们将限定在有限维 Nichols 代数的情形，并证明定理1.2 ，其中定理 1.3 是其特例。

7.1. **代数中的权集中。** 本小节将证明定理1.8 。设 $V \in \mathcal{V}$为一个编织向量空间，照例令 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(V)$、$T = T(V^*)$、 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(V)$。注意，本小节不要求有限单值化条件，因为我们不需要几何权过滤，也不会用到代数权重滤过是双代数过滤这一性质。只需对张量代数 T 证明同样的结论，但分次取负号，即

$$\frac{\dim W_{-c^+n} T_n}{\dim T_n} \to 0, \qquad \frac{\dim W_{-c^-n} T_n}{\dim T_n} \to 1. \tag{7.1}$$

我们做一些简单的观察。由定义可知， T_n 上的代数权重滤过集中于权重 $-n+1 \le w \le 0$。此外，每个本原元都会使 T 上的滤过降低一级，因此直观来说， T 含有的本原元越多， T上的滤过就越低。然而，我们无法控制本原元的数量，因此在这个证明中，我们基本上只用到拼接保持权重滤过这一点。

定理 *1.8* 的证明。 对于每个代数次数 n，我们将 T_n 的平均权定义为

$$a(n) = \frac{1}{\dim(T_n)} \sum_w w \cdot \dim(\mathrm{Gr}_w T_n).$$

注意， $a(n) \le 0$ ，因为张量代数的权重总是 ≤ 0。

取一组与权重滤过相容的字基 x_1、……、 x_d，它属于 T_n；换言之，我们要求，对于每个 w ，这些元素的某个子集都是 $W_w T_n$的一组基。令 w_i 为满足 $x_i \in W_{w_i} T_n$的最小整数。假设我们将其中 m 个字拼接起来，构成$x = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$。那么，由于权重滤过是代数滤过，且乘法由拼接给出，对于 $w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_m}$，必有 $x \in W_w T_{nm}$。考虑所有可能的长度为 m 的拼接，它们构成 T_{nm}的一组基；根据上述论证，这组基的平均权满足

$$a(nm) \le m \cdot a(n). \tag{7.2}$$

此外，我们也可以改为将 T_m 的一组基与 T_1 的一组基拼接；同样，由于拼接保持权重滤过，因此必有

$$a(n+1) \le a(n), \tag{7.3}$$

即 $a(n)$ 非递增。

由这两个不等式，通过分析可知极限 $\lim_{n\to\infty} a(n)/n$ 存在，且等于 $\inf_n a(n)/n$。我们作如下说明。令 $-c = \inf_n a(n)/n$；由于 T_n 中的权重滤过集中于权重 $-n+1$ 至 0，因此这是良定义的，且 $0 \le c \le 1$。对于每个充分小的 $\epsilon > 0$，都存在某个 n，使得 $a(n)/n \le -c + \epsilon$。现在，对于任意整数 $N > n/\epsilon$，我们有

$$\frac{a(N)}{N} \le \frac{a(n\lfloor \frac{N}{n} \rfloor)}{N} \le (1-\epsilon)\frac{a(n\lfloor \frac{n'}{n} \rfloor)}{n\lfloor \frac{n'}{n} \rfloor} \le (1-\epsilon)\frac{a(n)}{n} \le (1-\epsilon)(-c+\epsilon),$$

其中第一个不等式用到了公式 (7.3)，第三个不等式用到了公式 (7.2)，由此可证极限确实为 $-c$。

在命题中取这个 $0 \le c \le 1$，使得 $-c = \inf_n a(n)/n = \lim_{n\to\infty} a(n)/n$。若 $c = 0$，则对所有 n，必有 $a(n) = 0$，因此张量代数中不存在本原元。这对应于 $\mathfrak{A}(V) = \mathfrak{B}(V)$ 由 1 次元素生成的情形。

我们首先证明等式 (7.1)对 c^-成立。同样，对于任意充分小的 $\epsilon > 0$，取某个 n，其中 $a(n)/n \le -c + \epsilon$，并取一组基 $x_1, \ldots, x_d$，其属于 T_n，且与上述权重滤过相容。考虑独立同分布的随机变量 $Y_1, \ldots, Y_m$，每个都从 $\{1, \ldots, d\}$中均匀选取。

拼接 $x_{Y_1}\cdots x_{Y_m}$ 属于 $W_w T_{nm}$，其中 $w = w_{Y_1} + \cdots + w_{Y_m}$ 是随机变量之和。根据大数弱律，

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{w}{m} - a(n)\right| < \epsilon\right) \to 1$$

如 $m \to \infty$。这意味着，对于所有充分大的 m，几乎所有拼接都位于 $W_w T_{nm}$中，适用于 $w = m(a(n) + \epsilon) \leq nm(-c + 2\epsilon)$；当我们取 $\epsilon \to 0$ 时，这就完成了关于 $\dim(W_{-c^- n}T_n)/\dim(T_n) \to 1$ 的论证。

现在我们证明关于 c^+ 的结论。对于每个充分小的 $\epsilon > 0$，我们可以取 $c^- = c - \epsilon$，并由上述论证推得，当 n 充分大时，$\dim(W_{-c^- n}T_n) \geq (1-\epsilon)\dim(T_n)$。若令 $\dim(W_{-c^+ n}T_n) = d_n \dim(T_n)$，则有

$$-c \leq \frac{a(n)}{n} \leq -c^+ d_n - c^-(1 - \epsilon - d_n)$$

整理后得到

$$d_n \leq \frac{c - (c-\epsilon)(1-\epsilon)}{c^+ - c + \epsilon}$$

因此，取 $\epsilon \to 0$ 后即可得证。 □

我们指出，我们的证明并未给出任何有效的收敛速率，因为若不进一步理解本原元，我们就不知道 $a(n)/n$ 收敛到极限的速度有多快。此外，正如引言中所讨论的，我们不知道如何证明上同调的类似结论。

7.1.1. 例子。 让我们在第5.2节的三个例子的背景下讨论这一点。对于带有如下编织的一维向量空间 $V = k$，其编织由一个 m次单位根 $q \in k^\times$给出，从图5 中可以清楚地看出， $c = 1/m$。

对于通常的洗牌代数，我们将证明 $c = 1$。回顾一下，在这种情况下，我们证明了权重滤过与词长滤过相同，而根据命题4.2，后者又与 $U(L(V^*))$上的PBW过滤相同。我们证明了$\dim(W_{-n+1}T_n) = \dim(L(V^*))$等于字母表大小为 $d = \dim(V)$、长度为 n 的Lyndon词数量，其由公式$I(n) = \frac{1}{n}\sum_{k|n}\mu(k)d^{n/k} \approx d^n/n$给出。然而，这还不足以证明 $c = 1$，我们需要更强的结果。注意到$\dim(W_{-n+m}T_n) = \dim(F_m U(L(V^*))_n)$，其中 F_m 是PBW过滤，而这恰好是 $\sum_{k\leq m} M(k,n)$，其中 $M(k,n)$表示由 k个Lyndon词组成且其长度之和为 n的多重集数量。可以利用 $I(n)$构造一个生成函数来计算$M(k,n)$。事实证明，如果 $d = q$是素数幂，那么 $I(n)$的同一公式也计算了 $\mathbb{F}_q$ 上的次数为 n 的不可约多项式数量；在这里， $M(k,n)$表示具有 k 个不可约因子的次数为 n 的多项式数量。在这种情况下，该问题已有深入研究， [FS90中的推论 1]告诉我们，随机多项式的不可约因子数量服从高斯分布，其均值为$\log n$，标准差为 $\sqrt{\log n}$。其中所使用的生成函数方法在 d 不是素数时同样有效，因此我们得出，当 $m = a\log n$ for $a > 1$时，$\dim(W_{-n+m}T_n) = \sum_{k\leq m} M(k,n) \to 1$，从而有 $c = 1$。

最后，对于 S_3中与对换架相关联的编织向量空间，我们可以计算 $a(n)/n$ 的值，它们是 $-c$的上界。当余循环为 $x = 1$时，我们看到$a(5)/5 = -0.0148$ 非常小，因为次数不超过 $n = 5$的本原元很少。与此同时，对于 $x = -1$，我们有 $a(5)/5 = -0.415$。这表明，$\mathrm{Hur}^{G}{}_{n}{}^{c}$的上同调权重平均而言比根据上同调次数所预期的低 $0.415n$以上。

7.2. **有限 Nichols 代数。** 我们的目标是在此证明定理 1.2 和1.3，证明思路遵循引言中给出的概要。考虑一个 Hurwitz 空间 $\mathrm{Hur}^{G,\ c}_{\ n}$，它具有相关联的编织向量空间 $V_\epsilon = V(c,\ -1) \in \mathcal{YD}_G$，其局部系统必然具有有限单值化。令 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(V_\epsilon)$、$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(V_\epsilon)$、 $\mathfrak{A}^{gr}$ 为 $\mathfrak{A}$ 关于权重滤过的伴随分次，并将余张量积定义为$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{gr}\square_{\mathfrak{B}}k$。注意， $\mathfrak{A}^{gr}$ 既有代数分次 n，也有权重分次 w；同样，子代数 $\mathfrak{B} = W_0\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^{gr}$ 和余张量积 $\mathfrak{C}$也具有这两种分次。

这里，我们采用分次约定 $\mathrm{Tor}^A_{n-i,n}(k,k)$ 和 $\mathrm{Ext}^{n-i}_{\ ,A\ \ \ n}(k,k)$，其中 n 是代数次数， i 是上同调次数。采用这一约定的原因是，正如定理 1.7 中所见， i 将对应于 Hurwitz 空间的上同调次数。如果双代数 A 还带有权重分次，那么 Tor 和 Ext 也带有权重分次。在这种情况下，请记住，从 $\mathrm{Tor}^A_{n-i,n}(k,k)$ 取对偶得到 $\mathrm{Ext}^{n-i}_{\ ,A\ \ \ n}(k,k)$ 时，我们保留相同的权重分次，不改变其符号。

接下来的两个引理给出了 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{C}$ 上不同分次之间的不等式，假设 Nichols 代数满足有限性条件。

引理 7.1。 若 $\mathfrak{B}$ 是有限维的，则在 $\mathfrak{C}$ 上，权重分次和代数分次满足 $w \geq \delta n$，其中某个 $\delta > 0$。

证明。假设 $\mathfrak{B}$ 的最大代数次数为 m，那么我们将证明 $\delta = 1/(m+1)$ 的陈述。由于 $W_0\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$，这意味着 $W_0\mathfrak{A}_{m+1} = 0$，因此对偶地有 $W_{-1}T_{m+1} = T_{m+1}$。由于拼接保持权重滤过，这意味着 $W_{-k}T_{k(m+1)} = T_{k(m+1)}$，所以 $W_{k-1}\mathfrak{A}_{k(m+1)} = 0$。根据 [ETW17 定理 4.1]，，我们有一个同构 $\mathfrak{C}\otimes\mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}^{gr}$，且它保持权重、上同调分次和代数分次。反设 $\mathfrak{C}_n$ 中有某个元素的权重为 $w < \delta n$，于是 $w(m+1) < n$。然后，我们可以将其与 $\mathfrak{B}_m$ 中一个权重为 0 的元素作张量积，从而得到 $\mathfrak{A}^{gr}$ 中一个权重为 w 且次数大于 $w(m+1)+m$ 的元素，但这与上文的讨论矛盾。□

引理 7.2. 若$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k)$ 是有限生成的，那么其上同调分次和代数分次满足$i \leq cn$，其中某个 $c < 1$。

证明. 这几乎是显然的。设其生成元的上同调次数为 i_j，代数次数为n_j。显然，根据我们的指标约定， $n_j - i_j > 0$，因此 i_j/n_j 存在最大值，记为 c。注意到 $c < 1$，且 $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k)$ 中的所有元素都满足 $i \leq cn$，因为生成元满足该不等式。□

现在，我们结合这两个不等式，完成定理1.的证明。 2.
定理 1.2 的证明。取引理 7.1 和 7.2 中的常数 c 和 δ，并取$\epsilon = \delta/(1-c)$。设元素 $x \in \mathrm{Ext}^{n-i}_{\mathfrak{A}\ \ \ n}(k,k)$ 的权重为 w。如定理陈述所述，假设 $i > cn$。公式 (1.2) 中的谱序列三元组与三个分次相容，因此 x 必定来自形如 $u\otimes v \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k)\otimes\mathrm{Ext}_{\mathfrak{C}}(k,k)$ 的元素的线性组合。假设 u 和 v 的分次分别为 w_1, i_1, n_1 和 w_2, i_2, n_2，那么这些分次之和必定为 w, i, n。然而，由于我们假设定理陈述中的有限性条件，引理 7.1 和 7.2 告诉我们， $i_1 \leq cn_1$ 且$w_2 \geq \delta n_2$。此外，还有显然的界 $n_2 \geq i_2$。结合这些不等式，我们得到

$$i_2 = i - i_1 \geq i - cn_1 = i - cn + cn_2 \geq i - cn + ci_2$$

因此我们有 $i_2 \geq \frac{i-cn}{1-c}$ 从而 $w \geq w_2 \geq \delta i_2 \geq \epsilon(i-cn)$。最后，定理1.7 告诉我们，代数上的权重分次 w 对应于 Frobenius 权重 $2n-i-w$，至此证明完毕。□

最后，我们将其专门化到 $G = S_3$ 和 c 是对换的共轭类的情形。

定理 1.3 的证明。定理 1.3 中的显式常数如下得出： $\mathfrak{B}$ 是 Fomin-Kirillov 代数 $\mathcal{FK}_3$，其最大代数次数为 4，由此在引理 7.1 的证明中得到 $\delta = 1/5$；而 $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k)$ 由次数为 $(n-i,n)$ =(1,1)、(1, 1)、(1, 1)、(4, 6) 的元素 [ŞV16], 生成，因此我们可以在引理 7.2 中取 $c = 1/3$，从而得到 $\epsilon = 3/10$，进而得到所需的不等式。

定理第一部分中的下取整1.3 源于对不等式更细致的分析，因为若权重符合预期，则必有 $w_2 = n_2 = i_2 = 0$，也就是说，上同调完全来自$\mathrm{Ext}_{\mathfrak{B}}(k,k)$；但从生成元可以看出 $i_1 \le 2\lfloor \underline{\frac{n_1}{6}} \rfloor$，所以必有 $i \le 2\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$。□

参考文献

[AAPW22] N. Andruskiewitsch、I. Angiono、J. Pevtsova 和 S. Witherspoon。《阿贝尔群上有限维尖点霍普夫代数的上同调环》。发表于：《数学科学研究》9.1（2022年1月）。doi：10.1007/s40687-021-00287-y。[ACV03] Dan Abramovich、Alessio Corti 和 Angelo Vistoli。《扭曲丛与容许覆盖》。发表于：《代数通讯》31.8（2003年1月），第 3547–3618 页。doi：10.1081/ agb-120022434。[Ahl25] Victor Ahlquist。三次函数域的计数函数。2025年。arXiv：2504。12160 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2504.12160。[AV01] Dan Abramovich 和 Angelo Vistoli。《稳定映射空间的紧化》。发表于：美国数学会杂志 15.1（2001年7月），第 27–75 页。doi：10. 1090/s0894-0347-01-00380-0。[BBD82] A. A. Beilinson、J. Bernstein 和 P. Deligne。反常层。吕米尼会议；会议日期：1981年6月7日至1981年7月11日。1982年。[BFP24] Jonas Bergström、Carel Faber 和 Sam Payne。《稳定曲线模空间上的多项式点计数与奇次上同调消失》。发表于：《数学年刊》199.3（2024年5月）。doi：10.4007/annals.2024.199.3.7。[BM24] Andrea Bianchi 和 Jeremy Miller。《赫维茨空间同调的多项式稳定性》。发表于：数学年刊 391.3（2024年10月），第 4117–4144 页。doi：10.1007/s00208-024-03009-1。[BTT23] Manjul Bhargava、Takashi Taniguchi 和 Frank Thorne。《达文波特–海尔布隆定理的改进误差估计》。发表于：数学年刊 389.4（2023年10月），第 3471–3512 页。doi：10.1007/s00208-023-02684-w。[Cad07] Charles Cadman。《利用堆叠对曲线施加相切条件》。发表于：美国数学杂志 129.2（2007年4月），第 405–427 页。doi：10.1353/ajm.2007.0007。[Cal06] Filippo Callegaro。《经典辫群的米尔诺纤维同调》。发表于：代数与几何拓扑 6.4（2006年11月），第 1903–1923 页。doi：10.2140/agt. 2006.6.1903。[CGP21] Melody Chan、Søren Galatius 和 Sam Payne。《$\mathcal{M}_g$的热带曲线、图复形与最高权上同调》。发表于：美国数学会杂志 34.2（2021年2月），第 565–594 页。doi：10.1090/jams/965。[Del71] Pierre Deligne。《霍奇理论 II》。发表于：高等科学研究所数学出版物 40.1（1971年12月），第 5–57 页。doi：10.1007/bf02684692。[Del74] Pierre Deligne。《霍奇理论 III》。发表于：高等科学研究所数学出版物 44.1（1974年1月），第 5–77 页。doi：10.1007/bf02685881。[Del90] P. Deligne。《坦纳范畴》。发表于：《格罗滕迪克纪念文集》第二卷。数学进展 87（1990年），第 111–195 页。doi：10.1007/978-0-8176-4575-5_3。[DK73] P. Deligne 和 N. Katz。《代数几何中的单值群（SGA 7 II）》。发表于：数学讲义（1973年）。doi：10.1007/bfb0060505。[DP15] Anand Deopurkar 和 Anand Patel。《次数至多为五的赫维茨空间的皮卡秩猜想》。发表于：代数与数论 9.2（2015年3月），第 459–492 页。doi：10.2140/ant.2015.9.459。[EL25] Jordan S. Ellenberg 和 Aaron Landesman。函数域上二次扭曲族中广义赫维茨空间与塞尔默群的同调稳定性。2025年。arXiv：2310。16286 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2310.16286。[ETW17] Jordan S. Ellenberg、TriThang Tran 和 Craig Westerland。Fox-Neuwirth-Fuks 胞腔、量子洗牌代数与函数域上的 Malle 猜想。2017年。arXiv：1701。04541 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/1701.04541。

[EVW16] Jordan Ellenberg、Akshay Venkatesh 和 Craig Westerland。“函数域上 Hurwitz 空间的同调稳定性与 Cohen–Lenstra 猜想”。载于：《数学年刊》183.3（2016年5月），第 729–786 页。doi: 10.4007/annals.2016.183.3.1。[FK99] Sergey Fomin 和 Anatol N. Kirillov。“二次代数、Dunkl 元与舒伯特演算”。载于：《几何学进展》（1999），第 147–182 页。doi: 10.1007/978-1-4612- 1770-1_8。[FS90] Philippe Flajolet 和 Michèle Soria。“组合结构中分量数的高斯极限分布”。载于：《组合理论杂志》A辑 53.2（1990年3月），第 165–182 页。doi: 10.1016/0097-3165(90)90056-3。[HM82] Joe Harris 和 David Mumford。“关于曲线模空间的 Kodaira 维数”。载于：Selected Papers（1982年），第 171–234 页。doi: 10.1007/978-1-4757-4265-7_8。[HMW25] Zachary Himes、Jeremy Miller 和 Jennifer C. H. Wilson。有序 Hurwitz 空间的表示稳定性。2025年。arXiv：2509.05516 [math.AT]。网址：https://arxiv. org/abs/2509.05516。[HS20] István Heckenberger 和 Hans-Jürgen Schneider。Hopf 代数与根系。美国数学学会，2020年。[HS23] David Hansen 和 Peter Scholze。“相对 perversity”。载于：《美国数学学会通讯》3.9（2023年8月），第 631–668 页。doi: 10.1090/cams/21。[Kas86] Masaki Kashiwara。“混合 Hodge 结构变分的研究”。载于：《数学科学研究所刊》22.5（1986年10月），第 991–1024 页。doi: 10.2977/prims/1195177264。[KS20] Mikhail Kapranov 和 Vadim Schechtman。“洗牌代数与倾斜层”。载于：《纯粹与应用数学季刊》16.3（2020），第 573–657 页。doi: 10.4310/pamq. 2020.v16.n3.a9。[KS90] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。流形上的层。Springer-Verlag，1990年。[Kur25] Michael Kural。算术统计中次级项的几何。2025年。arXiv：2504.17909 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2504.17909。[KW10] Reinhardt Kiehl 和 Rainer Weissauer。Weil 猜想、倾斜层与 l’adic Fourier 变换。Springer，2010年。[LL25a] Aaron Landesman 和 Ishan Levy。Hurwitz 空间的同调稳定性及其应用。2025年。arXiv：2503.03861 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/2503. 03861。[LL25b] Aaron Landesman 和 Ishan Levy。通过非分裂 Hurwitz 空间的稳定同调研究函数域上的 Cohen–Lenstra 矩。2025年。arXiv：2410.22210 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2410.22210。[LL25c] Aaron Landesman 和 Ishan Levy。Hurwitz 模的稳定同调及其应用。2025年。arXiv：2510.02068 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/ 2510.02068。[Lyu01] V. V. Lyubashenko。“倾斜层的外张量积”。载于：《乌克兰数学杂志》53.3（2001年3月），第 354–367 页。doi: 10.1023/a:1012384019661。[MM65] John W. Milnor 和 John C. Moore。“关于 Hopf 代数的结构”。载于：《数学年刊》81.2（1965年3月），第 211 页。doi: 10.2307/1970615。[Sai88] Morihiko Saito。“可极化的 Hodge 模”。载于：《数学科学研究所刊》24.6（1988年12月），第 849–995 页。doi: 10.2977/prims/1195173930。[Sai90] Morihiko Saito。“混合霍奇模”。载于：《数学科学研究所刊》26.2（1990年4月），第 221–333 页。doi: 10.2977/prims/1195171082。[Seg25] Béranger Seguin。“Hurwitz 空间分支的计数”。载于：《以色列数学杂志》（2025年11月）。doi: 10.1007/s11856-025-2848-5。

[ŞV16] Dragoş Ştefan 和 Cristian Vay。“12维 Fomin–Kirillov 代数的上同调环”。载于：《数学进展》291（2016年3月），第 584–620 页。doi: 10.1016/j.aim.2016.01.001。[SZ85] Joseph Steenbrink 和 Steven Zucker。“混合 Hodge 结构的变分 I”。载于：《数学创刊》80.3（1985年10月），第 489–542 页。doi: 10.1007/bf01388729。[TT13] Takashi Taniguchi 和 Frank Thorne。“三次域计数函数中的次级项”。载于：《杜克数学杂志》162.13（2013年10月）。doi: 10.1215/00127094- 2371752。[Tür15] Seyfi Türkelli。“Hurwitz 概形的连通分支与 Malle 猜想”。载于：《数论杂志》155（2015年10月），第 163–201 页。doi: 10.1016/j.jnt.2015. 03.005。[Wes25] Craig Westerland。“编织霍普夫代数的结构定理”。载于：《拓扑学杂志》18.4（2025年11月）。doi: 10.1112/topo.70051。[Woo21] Melanie Matchett Wood。“Ellenberg、Venkatesh 和 Westerland 的代数提升不变量”。载于：《数学科学研究》8.2（2021年3月）。doi: 10.1007/ s40687-021-00259-2。[Zha13] Yongqiang Zhao。“关于有限域上簇的筛法”。载于：博士论文，威斯康星大学麦迪逊分校（2013年）。[Zhe23] Angelina Zheng。“三次曲线模空间的稳定上同调”。载于：《国际数学研究通知》2024.2（2023年2月），第 1123–1153 页。doi: 10.1093/imrn/rnad011。

美国新泽西州普林斯顿普林斯顿大学电子邮件地址：
zm5336@princeton.edu