arXiv:2601.03876v1 [math.GT] 7 Jan 2026

双曲曲面上的分级布里奇曼二对数恒等式

Ara Basmajian、Nhat Minh Doan、Hugo Parlier 和 Ser Peow Tan

摘要。我们建立了适用于双曲锥曲面的 Bridgeman 二重对数恒等式的分级版本，其中包括仅含尖点和锥点的曲面，并将其应用于正交测地线的研究。

目录

1 引言 1 引言
111.1 1 主要结果 . 主要结果.4 11.2 2 结构安排 . 结构安排.12

2 预备知识与设置 2 预备知识与设置
1322.1 1 记号。记号.13

22.2 2 边界元素的第k个自然领圈。边界元素的第k个自然领圈.13 22.3 3 模型曲面与素性判据。模型曲面与素性判据.14**3 3 抽象恒等式的证明 抽象恒等式的证明 15 4 4 计算测度 计算测度 18 5 5 单调性及其应用 单调性及其应用 22 6 6 具有小锥角的曲面上的套索函数 具有小锥角的曲面上的套索函数 24**66.1 1 与尖点相关的套索函数。与尖点相关的套索函数.24 66.2 2 与锥点相关的套索函数。与锥点相关的套索函数.26**7 7 一般向量的全刘维尔测度 一般向量的全刘维尔测度 31**

1. 引言

在双曲曲面的研究中，出现了一类普适长度恒等式：由测地线长度的显式函数构成的无穷和，在给定模空间中的每个双曲度量下都保持不变，这个常数要么是一个拓扑不变量，要么是测地边界长度或等高线边界长度。众所周知的例子包括适用于带尖点曲面的 McShane 恒等式[McS98], McS，Mirzakhani 将其推广到了带边曲面（具有测地边界的双曲曲面） [Mir07] Mir，Tan–Wong–Zhang 将其推广到了具有边界和/或锥点的曲面[TWZ06], TWZ；Basmajian 和 Bridgeman 针对具有测地边界的曲面提出的正交谱恒等式 [Bas9393, BasBri11] Bri以及适用于有或没有测地边界的曲面的 Luo–Tan 恒等式 [LT14] LT。所有这些恒等式都源于不同的几何分解，反映了双曲曲面上测地流的不同行为（见 [BT16]BT）。从一个略有

*2020*年数学主题分类： 主要分类：32G15、37D40、57K20、11G55。次要分类：30F60、37E35、53C22。关键词和短语： 二重对数、恒等式、双曲锥面模空间、正交测地线、浸入裤子曲面。

不同的方向来看，Wang 和 Xue [WX25]WX最近发现了一类新恒等式，它通过一致化将原曲面添加尖点后得到一个与之密切相关的曲面，并建立了该曲面的长度谱与原曲面长度谱之间的联系。

Basmajian 恒等式指出，对于具有（至少一个）测地边界的双曲曲面X，

$$\sum_{\mu} 2\ln\coth\left(\frac{\ell(\mu)}{2}\right) = \ell(\partial X),$$

其中求和遍历X上的所有正交测地线μ，而$\ell(\mu)$表示其长度。关键在于，Basmajian 恒等式要求至少有一个闭合测地边界。对于只有尖点的曲面，这一恒等式变得平凡，因为此时每条正交测地线的长度都是无穷大；而与 McShane 恒等式不同，以 horocycle 长度替代测地线长度会得到严格不等式。

Basmajian、Parlier 和 Tan [BPT25] BPT通过构建统一框架，克服了推广 Basmajian 恒等式时遇到的这一障碍。该框架能够同时处理测地边界、尖点和锥点。其关键思想之一是为每个边界元素（尖点、锥点或测地边界分支）赋予等级，并考虑与该等级相对应、围绕各边界元素的自然领圈。移除这些领圈邻域后，便得到一个紧子曲面，即所谓的凹核心。随后，凹核心的边界可划分为若干互不相交的集合，这些集合由素正交测地线索引；素正交测地线是完全包含在凹核心内、并满足特定素性条件的正交测地弧，此外还有一个零测度的补集。该恒等式族随边界类型连续变化：当边界从等距曲线（即测地边界的等距曲线）过渡到尖点周围的等高线，再过渡到锥点周围的圆时，恒等式也在 Basmajian 恒等式与其针对尖点和锥点的新变体之间平滑过渡。

从另一个角度来看，Bridgeman [Bri11] Bri证明了一个引人注目的二重对数恒等式，将带边界双曲曲面的正交测地线谱与其单位切丛的体积联系起来。具体而言，若X至少有一条闭测地边界，则

$$\sum_{\mu} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\cosh^2(\frac{\ell(\mu)}{2})}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left|\chi(X)\right|,$$

其中求和遍及所有长度为ℓ的正交测地线μ (μ)，而$\mathcal{L}(.)$是定义在主值分支$\mathbb{C}\setminus((-\infty, 0]\cup[1,+\infty))$上的 Rogers 二重对数函数 [Rog07] Rog，其定义为

$$\mathcal{L}(z) := \mathrm{Li}_2(z) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(z)\,\mathrm{Log}(1-z) = -\frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{\mathrm{Log}(1-t)}{t} + \frac{\mathrm{Log}(t)}{1-t}\right) dt.$$

由测地流的遍历性可知，测地线与边界的假设确保几乎每个单位切向量在沿正向和反向追踪时，都会描出一段有限时间内与边界相交的测地线段，且该线段相对于边界同伦

于唯一的正交测地线 μ。因此，可以将单位切丛 $T^1(X)$划分为若干区域，每个区域由一个 μ 标记，且其刘维尔体积由 $\ell(\mu)$ 的普适二重对数函数给出。由于高斯–博内定理给出 $\mathrm{Vol}(T^1(X)) = 4\pi^2|\chi(X)|$，将这些贡献相加即可得出所述恒等式。

Luo 和 Tan [LT14] LT将 Bridgeman 的想法推广到所有带或不带测地边界的双曲曲面：沿每条测地线前进，一旦它与自身相交（形成一个环）或首次碰到边界，就立即停止。除一个零测集外，对任意单位切向量分别沿正向和反向射线应用这一规则，都会得到一个“脊”图，它位于唯一一个嵌入裤子或单孔环面内。最后，将脊位于同一子曲面中的所有向量归为一组，并对所有这类子曲面上的刘维尔体积求和，即得到 Luo-Tan 恒等式。

本文改进 [BPT25] BPT 的思想，证明 Bridgeman 恒等式的等级版本，即使曲面只有尖点和/或锥点时也成立。与双曲锥面 X 上的 [BPT25],BPT 一样，我们在每个边界元素上指定等级 $k_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。从 X 中移除围绕每个边界元素、根据等级调整的领圈，得到凹核心 $V\bar{k}(X)$。每条素正交测地线 $\mu \subset V\bar{k}(X)$ 都对应一个极大浸入裤子 $P\bar{k}(\mu)$。我们通过说明一般单位向量 $v \in T^1(X)$ 如何生成一条浸入唯一极大浸入裤子的测地弧，证明它恰好对应这些裤子曲面中的一个。具体而言，沿 v 的两个方向取指数映射，直到即将到达领圈的最深点或碰到一条边界测地线，由此得到这条弧。这样便将 $T^1(X)$ 的一个满测度子集分解为互不相交的子集，每个子集由一条素正交测地线标记。利用 [Bri11] Bri 和 [LT14]LT 的思想，可以计算出每个子集的测度。注意，所有与 v 生成的测地弧相切的向量都会生成同一条测地弧，因此属于分解中的同一子集；此外，这些集合的测度取决于浸入裤子曲面 $P\bar{k}(\mu)$ 的几何性质，而不仅仅取决于素正交测地线 $\ell(\mu)$ 的长度。

在将该恒等式推广到双曲锥曲面时，我们需要解决两个主要难题。首先，我们通过计算二重积分，得到与锥点相关的套索函数的显式闭式表达式（借助 Rogers 二对数）。

$$I(a,b) = \int_a^b \int_{-1/y}^{-b} \frac{\ln\left|\frac{(x-a)(x-b)(1+y^2)}{(y-a)(y-b)(1+x^2)}\right|}{(y-x)^2}\,dx\,dy,$$

其次，我们证明，即使存在非轨形锥点，一般向量的集合仍具有满刘维尔测度。作为背景，尽管对于有限面积双曲二维轨形，测地流的遍历性是经典结果 [Hop3939，HopAno6969，AnoHop7171，HopNic8989，NicKH95], KH对于含有非轨形锥点的双曲锥曲面，目前尚无一般的遍历性定理。人们已经从多个方面对双曲锥曲面的几何进行了深入研究，从

锥度量经典理论 [McO8888, McOTro91]Tro到近年来关于其模空间和 Weil–Petersson 体积的研究 [DN0909, DNAN22], AN以及数学物理中的相关进展 [BS0909, BSWit2020, WitAHM+20]AHM。

1.1. 主要结果

我们的主要结果是定理 11.99 Theorem . 中给出的恒等式。该恒等式将 $T^1(X)$ 的一个满测度子集分解为若干子集，这些子集由 $\vec{k}$-素正交测地线索引；同时，它还给出了各子集的测度公式，公式以浸入裤子曲面 $P\vec{\kappa}(\mu)$ 的几何性质表示。作为首个应用，我们证明了一个关于正交测地线的计数结果（见推论 11.1414Corollary . ），其增长大致如 e^L/L，与 Huber 定理（见 [Bus10]Bus ）中的情形相同。随后，我们推出一个关于仅有尖点的双曲曲面上 k-素正交测地线谱的非支配定理（见推论 11.1515Corollary . ）。该定理是 Thurston 定理 [Thu98] Thu 的一个类比；Thurston 定理讨论的是闭双曲曲面的标记简单长度谱。

在陈述主定理之前，我们先介绍背景、记号和定义，部分沿用 [BPT25]BPT。设 X 是一个双曲锥面，它由一个完整双曲锥面删去所有锥点后得到；该完整双曲锥面恰有 $n > 0$ 个边界元素（简单闭测地边界分支、锥点或尖点）。我们仍将这些被删去的锥点称为 X 的边界元素，并为每个边界元素定向，使得 X 位于其右侧。对于 δ 这个 X 的边界元素，定义其边界参数（测地边界的长度、锥点的角）为

$$b(\delta) = \begin{cases} \ell(\delta), & \text{if } \delta \text{ is a geodesic boundary component,} \\ \theta(\delta), & \text{if } \delta \text{ is a cone point.} \end{cases}$$

尖点既可视为角度为 0 的锥点，也可视为长度为 0 的测地边界分支。给每个边界元素 i $_i \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} \cup \{\infty\}$ 赋予一个等级 $k \in \{1,2,\ldots,n\}$。一组等级的选取称为一次分次，记作

$$\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n). \tag{1}$$

定义 1.1 (可容许对)。 若下列条件成立，则称该对 $(X, \vec{k})$ 为可容许：

1. 对于每个索引i，若第i个边界元素是锥点，则相应的角 θ_i 满足 $0 \le \theta_i \le \pi/k_i$。 2. 存在一个索引$i$，使得第$i$个边界元素不是锥点，或者它是一个角为 θ_i 满足 $0 \le \theta_i < \pi/k_i$的锥点。
3. X 不是一个分次为 $\vec{k}$ 是$(1,1,m)$ 的任意排列的裤子曲面，其中$m \in \mathbb{N}$。

—

条件（1）保证了每个边界元素周围的领圈定义良好（见定义 22.11定义 。）；（2）排除了没有领圈且没有测地边界分支的退化情形；（3）排除了定理 11.99 定理 。中的平凡单项情形，并确保模型曲面的存在性（见定义 22.33定义 。）。在本文中，我们只考虑可容许对$(X、\ \vec{k})$。

第k_i阶自然领圈记作第i个边界元素，记为C^{k_i}。粗略地说，它是围绕第i个边界元素的最小领圈，使得任何形成围绕它的$k_i\vec{}$圈的测地弧都会与该领圈相交（见定义 22.11 定义 .）。X 的 k-凹核定义为X 上的

$$V_{\vec{k}}(X) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{k_i}. \tag{2}$$

更一般地，移除任意非负半径的互不相交领圈后，可得到X的一个凹核心。在k-凹核 $V\vec{k}(X)$ 中的（截断）正交测地线，是一条浸入的有向测地线段 $\eta \subset V\vec{k}(X)$，其在两个端点处均与边界 $\partial V\vec{k}(X)$ 正交相交。每条这样的正交测地线都唯一延拓为X上的有向k-正交测地线。令 $\mathcal{O}_{\vec{k}}(X)$ 和$\mathcal{O}_{\vec{k}}(X)$ 分别表示X上所有有向和无向k-正交测地线的集合。

—

定义 1.2（浸入裤子曲面 $P\vec{k}(\mu)$）。设 $\mu \in \mathcal{O}_{\vec{k}}(X)$ 是一条从边界元素 α （等级 $k_\alpha < \infty$）到 β （等级 $k_\beta < \infty$）的 $\vec{k}$-正交测地线。我们假设 $k_\alpha, k_\beta < \infty$；退化情形见命题 11.1212命题。根据定义 11.11定义（3），环路

$$\alpha^{k_\alpha} * \mu * \beta^{k_\beta} * \mu^{-1} \tag{3}$$

在 X 上表示一个非周边自由同伦类。当该同伦类由 X 上唯一的闭测地线实现时，我们将这条测地线记为 $\gamma_{\vec{k}}(\mu)$。此时，三元组 $(\alpha^{k_\alpha}, \beta^{k_\beta}, \gamma_{\vec{k}}(\mu))$ 是 $\vec{k}$-浸入裤子曲面 $P\vec{k}(\mu)$的边界。等价地，我们可以指定一个预浸入裤子曲面$\widetilde{P}\vec{k}(\mu)$ 以及一个局部等距变换

$$\varphi\colon \widetilde{P}_{\vec{k}}(\mu) \longrightarrow X \tag{4}$$

~ ~使得 $\varphi(P\vec{k}(\mu)) = P\vec{k}(\mu)$。曲面 $P\vec{k}(\mu)$ 是一个双曲裤带曲面，其边界分支记为

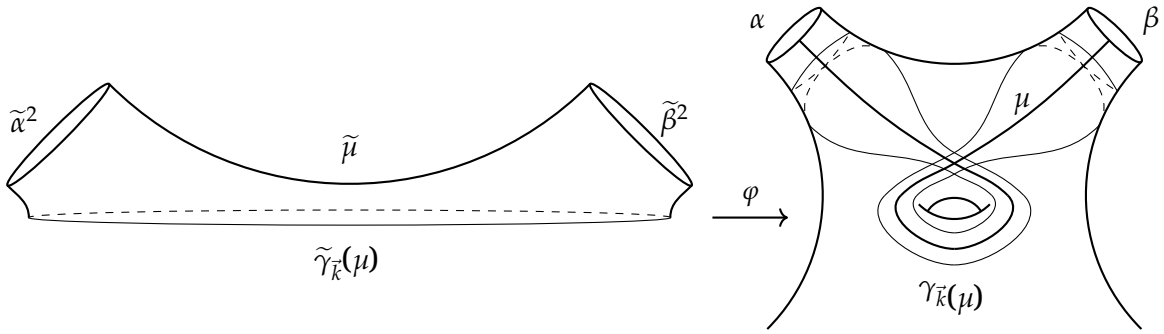
$$\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}, \qquad \widetilde{\beta}^{k_\beta}, \qquad \widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu),$$

分别映射到 α^{k_α}、β^{k_β} 和 $\gamma_{\vec{k}}(\mu)$之下，并具有边界（长度或角度）参数

$$k_\alpha\, b(\alpha), \qquad k_\beta\, b(\beta), \qquad \ell\big(\gamma_{\vec{k}}(\mu)\big).$$

参见图11图 对于 $k_\alpha = k_\beta = 2$ 具有测地边界分支的情形 α 和 β。

注意，将 μ 的定向反转会得到同一个浸入裤子曲面。μ 和$-\mu$ 都称为脊 $P\vec{k}(\mu)$的脊 。

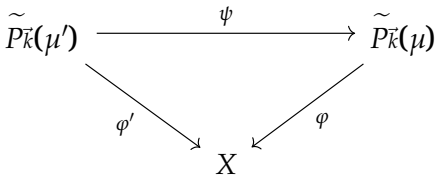


~图1：等距浸入 $\varphi: P\vec{k}(\mu) \to X$ 在$k_\alpha = k_\beta = 2$时的示意图。

定义 1.3（$\vec{}$k-极大浸入裤子曲面和 $\vec{}$k-素正交测地线）。设 $\mu' \in \mathcal{O}_{\vec{k}}(X)$，并假设相应的浸入裤子曲面 P$\vec{k}(\mu')$ 存在于 X 中。若不存在其他正交测地线 $\mu \in \mathcal{O}_{\vec{k}}(X)$ 满足 $\mu \neq \mu'$，使得 P$\vec{k}(\mu')$ 等距浸入 P$\vec{k}(\mu')$，则称 P$\vec{k}(\mu')$ 是 $\vec{}$k-极大的。在这种情况下，我们称 μ' 为一条 $\vec{}$k-素正交测地线。

令 $\mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$ 和 $\mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$ 分别表示 $\vec{}$k-素有向正交测地线和无向正交测地线的集合。根据定义 11.11定义 .(3)，映射 $\mu' \mapsto P\vec{k}(\mu')$ 是从 $\mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$ 到k-极大浸入裤子曲面集合$\vec{}$的双射，该集合中的裤子曲面位于X内。

备注1.4。“$P\vec{k}(\mu')$ 等距浸入于$P\vec{k}(\mu)$”意指存在一个等距浸入 ψ，使下图交换：



这里，φ 和 φ' 分别是对应于 P$\vec{k}(\mu)$ 和 P$\vec{k}(\mu')$ 的到 X 中的等距浸入。注意，如果 P$\vec{k}(\mu')$ 等距浸入 P$\vec{k}(\mu)$，那么 P$\vec{k}(\mu')$ $\subset$ P$\vec{k}(\mu)$ 作为集合成立。~ ~反过来，如果 P$\vec{k}(\mu')$ $\subset$ P$\vec{k}(\mu)$ 作为集合成立，并且 $\varphi'_*(\pi_1(\text{P}\vec{k}(\mu'), \tilde{}\text{x}'_0)) \subset \varphi_*(\pi_1(\text{P}\vec{k}(\mu), \tilde{}\text{x}_0))$ 是 $\pi_1(\text{X}, \text{x}_0)$ 的子群，其中 $\text{x}_0 = \varphi(\tilde{}\text{x}_0) = \varphi'(\tilde{}\text{x}'_0)$，那么 P$\vec{k}(\mu')$ 等距浸入 P$\vec{k}(\mu)$。在这种等距浸入关系下，所有浸入裤子曲面的集合构成一个无限高度的偏序集。关于 k-素正交测地线的其他等价定义，请参见 [BPT25] BPT$\vec{}$；特别是，关于其在模型曲面中的实现，请参见命题 22.99。

定义 1.5 (非典型向量)。令 $T_1(X)$ 为 X 的单位切丛。对每个$v \in T_1(X)$，我们以相同速度沿由v 确定的测地线向前和反向运动。若$v \in T^1(X)$ 满足非一般 条件，则称其为非典型向量，其中$v \in B_1 \cup B_2 \cup B_3,$，其中

1. B_1 是基点位于领圈内、且与相应边界元素相关联的等高线、等距曲线或圆相切的向量集合（尖点对应等高线，测地边界对应等距曲线，锥点对应圆）；2. B_2 是基点位于领圈内，且首先离开领圈的方向永远留在凹核心$V\bar{k}(X)$ 中的向量集合；3. B_3 是基点位于凹核心内，且至少一个方向永远留在凹核心$V\bar{k}(X)$ 中的向量集合。

集合 B_1 的刘维尔测度为零。当 X 是双曲轨形时，T^1X 上的测地流具有遍历性，这意味着 B_2 和 B_3 的刘维尔测度也为零。更一般地，我们将在第 7 节证明7 Section (定理 77.33Theorem .）对于双曲锥曲面，同样的结论也成立。

定义 1.6 （一般向量及其对应的测地路径）。 向量 $v \in T^1(X) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ 称为一般向量。对于一般向量，记作 $[v] = \{\pm v\}$，其对应的浸入测地路径 $\omega_{[v]}$ 构造如下:

1. 若基点$(v) \in V\bar{k}(X)$，则沿正向将 v 指数映射，直到其到达 $V\bar{k}(X)$的边界，然后沿测地线继续进入边界领圈，直到即将到达领圈中的最深点。反向也执行相同操作（见图 22Figure ）。在这种情况下，这就定义了 $\omega_{[v]}$。

2. 如果基点(v) 位于边界领圈内，那么测地线沿一个方向到达该领圈内最深处，而沿相反方向离开领圈（即进入凹核心），并继续前行，直到即将到达另一个边界领圈内最深处（该领圈可能与原来的相同）。在这种情况下，这就定义了 $\omega_{[v]}$。

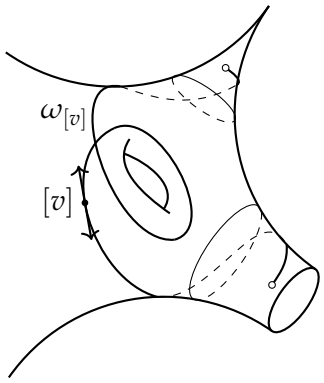


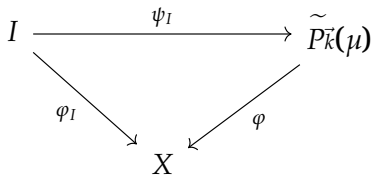
图2：示意　一般向量所确定的测地路径的说明 $\omega_{[v]}$ 由一般向量 $v \in T^1(V\bar{k}(X))$.

下面这个关键命题建立了一般向量与极大浸入裤子曲面之间的对应关系，这是我们恒等式的基础。回顾一下，对于一条正交测地线 $\mu \subset V\vec{k}(X)$，我们可以定义一个 $\vec{k}$-浸入裤子曲面 $P\vec{k}(\mu)$，它以 μ 为其$\vec{k}$脊（见定义 11.22定义 .）。通过等距浸入，在 k-浸入裤子曲面集合上定义了一个偏序，而 μ 称为素的，如果 $P\vec{k}(\mu)$ 在此偏序下是极大的（见定义 11.33定义 .）。

命题 1.7。对于每个一般向量 $v \in T^1(X)$，存在唯一的 $\vec{k}$-浸入裤子曲面 $P\vec{k}(\mu)$，其中 μ 是一条 $\vec{k}$-素正交测地线，使得 $\omega_{[v]}$ 等距浸入 $P\vec{k}(\mu)$。

我们将在第 3 节3中证明命题 1.7，方法是利用模型曲面及其带孔轨形覆盖（见定义 2.32。定义和定义 22.7。），如 [BPT25]BPT中所述。

注 1.8。类似于注 11.4，注释，命题 1.7中的短语“$\omega_{[v]}$ 等距浸入 $P\vec{k}(\mu)$”1.7的意思是存在一个等距浸入 ψ_I，使以下交换图成立：



这里，I 是 $\mathbb{H}^2$ 中的一条开测地线段，长度为 $\ell(\omega_{[v]})$，而 φ_I 和 φ 分别表示与$\omega_{[v]}$ 和$P\vec{k}(\mu)$对应的到X 中的等距浸入。

如果v 是一般向量，那么与u 相切于$\omega_{[v]}$ 的每个单位切向量也是一般向量，因为$\omega_{[u]} = \omega_{[v]}$。非一般集合$B_1 \cup B_2 \cup B_3$ (见定义 11.55定义 .)的刘维尔测度为零（见定理 77.33定理 .）；结合命题 11.77，命题 .可得以下抽象恒等式：

定理 1.9。设$(X, \vec{k})$ 为一组可容许对（见定义11.11定义 .），并令 $\mathcal{O}'_{\vec{k}}(\overline{X})$ 表示$\vec{k}$-素无向正交测地线的集合（见定义11.33定义 .）。则

$$\sum_{\mu \in \overline{\mathcal{O}'_{\vec{k}}}(X)} h\big(P_{\vec{k}}(\mu)\big) = \mathrm{Vol}\big(T^1(X)\big),$$

其中，$h\big(P\vec{k}(\mu)\big)$ 是满足 $\omega_{[v]}$ 在 $P\vec{k}(\mu)$ 中等距浸入条件的一般 $v \in T^1(X)$ 集合的刘维尔体积。此外，若对于 X 的第 i 个边界元素为锥点的每个指标 i，相应的角 θ_i 满足 $\theta_i \leq \pi/2k_i$，则 $h\big(P\vec{k}(\mu)\big)$ 可由命题 11.1212 命题 . . 显式给出。

备注1.10。 1. 在定理 11.99中，定理 .中锥角界避免了用于计算 h 的几何分解出现重叠；参见引理 44.22 引理 .和第 6 节6.22 第 6 节 .。

2. 我们的恒等式证明与 Luo–Tan [LT14], LT 的证明类似，只是将嵌入式裤子曲面替换为浸入裤子曲面。根据命题 11.77，命题 .每个一般向量都属于唯一一个$\vec{k}$-极大浸入裤子曲面 $P\vec{k}(\mu)$，并与唯一一个 $\vec{k}$-素正交测地线$\mu \in \mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$相关联。因此，$T^1(X)$ 被划分为由 $\mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$ 索引的一系列互不相交的一般向量子集，对它们的刘维尔体积求和即可得到该恒等式。

—

3. 在四孔球面中，$\vec{1}$等级为$\vec{1} = (1,1,1,1)$ 的极大浸入裤子曲面集合与嵌入式裤子曲面集合重合，正如[BPT25]BPT中所解释的。因此，在这种情况下，我们的恒等式化为 Luo–Tan 恒等式。然而，在任何其他曲面上，我们恒等式的等级 $\vec{1}$ 指标集通常与 Luo–Tan 指标集大不相同。

4. 当所有等级均为无穷，且曲面至少有一个测地边界分支时，我们的恒等式还原为 Bridgeman 恒等式 [Bri11]Bri。

5. 随着等级增加，h 减小，而指标集扩大。

6. 或许可以应用 [DPT23] DPT中的方法，来证明函数 h 关于浸入裤子曲面边界长度的单调性或凸性性质，并将其用于相关应用。在仅含尖点的曲面情形下，我们得到命题 55.11命题 。由此得到推论 11.1414 推论 。以及 1 151。.15 作为应用。

7. 我们或许可以通过边界命中函数及其矩 [BPT25] BPT，将我们的恒等式与早先的恒等式联系起来 [BT14],BT，但我们在此并未尝试这样做。

为了具体描述定理11.99，定理 . 中的函数 h，我们回顾 Bridgeman 引入的函数 [Bri11]Bri（另见 [Cal11]Cal，其中给出了另一种计算方法）以及 Luo–Tan 引入的函数[LT14]LT。考虑预浸入裤子曲面 $\widetilde{\mathrm{P}}\vec{k}(\mu)$，其边界分支为 $\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}$、$\widetilde{\beta}^{k_\beta}$和 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$（见定义 11.22定义 .）。

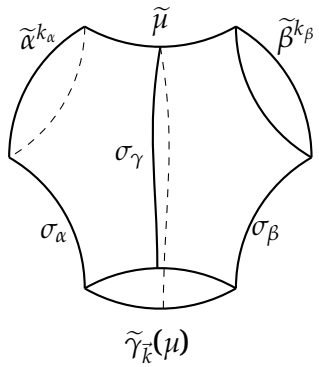
与正交测地线 σ 相关联的 Bridgeman 函数Br 是由同伦类 σ中的测地弧生成的单位切向量$\widetilde{\ }$集合的刘维尔测度。在$P\vec{k}(\mu)$上，我们定义

$$Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \gamma_{\vec{k}}(\mu)) := 8\mathcal{L}\left(1/\cosh^2\left(\frac{\ell(\sigma_\gamma)}{2}\right)\right), \tag{5}$$

$\widetilde{\ }$其中 σ_γ 是连接$P\vec{k}(\mu)$ 自身的简单正交测地线。类似地，

$$Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha}) := 8\mathcal{L}\left(1/\cosh^2\left(\frac{\ell(\sigma_\alpha)}{2}\right)\right), \quad Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta}) := 8\mathcal{L}\left(1/\cosh^2\left(\frac{\ell(\sigma_\beta)}{2}\right)\right), \tag{6}$$

$\widetilde{\ }$其中 σ_α 和 σ_β 表示$P\mu$ 上连接$\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 与 $\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}$ 和 $\widetilde{\beta}^{k_\beta}$ 的两条简单正交测地线（亦称接缝）（见图 3Figure）。请注意，当 $\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}$ 为锥点或尖点时，$Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha}) = 0$。



~图 3：预浸入裤子曲面 $P\vec{k}(\mu)$（当 α 和 β 是有限等级的测地线时）。

按照 Luo–Tan [LT14], LT当 α^{k_α}（分别 β^{k_β}）为测地边界分支时，与其关联的套索函数 La 定义为以下单位切向量集合的刘维尔测度：这些向量对应的测地射线形成套索，且基点位于 α^{k_α}（分别 β^{k_β}），绕行 $\gamma_{\vec{k}}(\mu)$，并且其最大测地延拓不与简单正交测地线 α^{k_α}（分别 β^{k_β}）同伦（相对于边界）σ_γ。具体而言，Luo–Tan [LT14] LT给出了套索函数的闭式表达式如下：

$$La(\gamma_{\vec{k}}(\mu),\alpha^{k_\alpha}) = 2\left(\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}\Big(\frac{1-x}{1-xy}\Big) + \mathcal{L}\Big(\frac{1-y}{1-xy}\Big)\right), \tag{7}$$

$$La(\gamma_{\vec{k}}(\mu),\beta^{k_\beta}) = 2\left(\mathcal{L}(z) - \mathcal{L}\Big(\frac{1-x}{1-xz}\Big) + \mathcal{L}\Big(\frac{1-z}{1-xz}\Big)\right), \tag{8}$$

其中 $\mathrm{x} = \mathrm{e}^{-\ell(\gamma_{\vec{k}}(\mu))}, \mathrm{y} = \tanh^2\big(\frac{\ell(\sigma_\alpha)}{2}\big)$，且 $\mathrm{z} = \tanh^2\big(\frac{\ell(\sigma_\beta)}{2}\big)$。当 α 是角度为$\theta(\alpha)$的锥点时，那么 α^{k_α} 是角度为 $\theta = \mathrm{k}_\alpha\theta(\alpha)$的锥点。在第 6 节 66，第 6 节中，我们确立如下结果（β^{k_β} 的情形类似）。

命题 1.11。**</style}套索函数 La(**$\gamma_{\vec{k}}(\mu),\alpha^{k_\alpha}$)，在 α^{k_α} 为尖点或角度为 $\leq \frac{\pi}{2}$ 的锥点时，可按如下方式计算：

1. 当 α^{k_α} 是尖点时：

$$La(\gamma_{\vec{k}}(\mu),\alpha^{k_\alpha}) = 4\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{1+e^{\bar{m}_\alpha}}\right), \tag{9}$$

其中 $\bar{m}_\alpha$ 是接缝 σ_α 的截断部分长度（从 $\gamma_{\vec{k}}(\mu)$ 到尖点的第一个自然领圈α^{k_α}）。

2. 当 α^{k_α} 是角度为 $\theta = k_\alpha\theta(\alpha) \leq \frac{\pi}{2}$ 的锥点时：

$$La(\gamma_{\vec{k}}(\mu),\alpha^{k_\alpha}) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathcal{L}(z) - \mathcal{L}(1/z)\right\}, \quad where\ z := \frac{\sinh m_\alpha + \tan(\theta/2)}{\sinh m_\alpha + i}, \tag{10}$$

其中，m_α 表示从 $\gamma_{\vec{k}}(\mu)$ 到锥点 α^{k_α}的接缝 σ_α 的长度。

命题 1.12。 设 $(X, \vec{k})$ 是一个可容许对，且对于每个边界元素为锥点的 i，其角满足 $\theta_i \leq \frac{\pi}{2} k_i$。设 h 为定理 11.99定理 。.中所指的函数。设 μ 是一条连接两个边界元素（例如 α 和 β）的 k-素正交测地线，其等级为 k_α 和 k_β。若 k_α和 k_β 均为有限值（见图 33图 ），则

$$h(P_{\vec{k}}(\mu)) = 4\pi^2 - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha}) - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta}) - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \gamma_{\vec{k}}(\mu)) - 4La(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha}) - 4La(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta}),$$

其中右端的所有项均由方程 (55)方程 () 至 (1010)()中给出。当至少有一个等级（例如 k）$_\alpha$为无穷大时，浸入裤子曲面会退化，从而得到：

1. 若 α 是一条等级为 k 的测地线$_\alpha = \infty$ (见图 44a图 a)，则

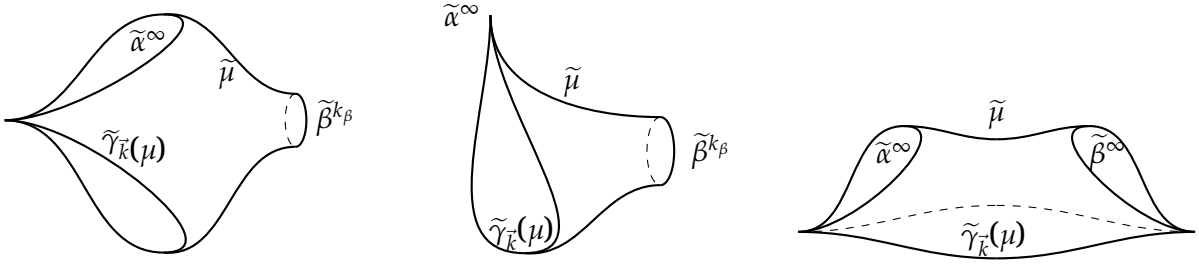
$$h(P_{\vec{k}}(\mu)) = 4\pi^2 - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta}) - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \gamma_{\vec{k}}(\mu)) - 4La(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta}).$$

2. 若 α 是一个尖点，且 $k_\alpha = \infty$ (见图 44b图 b)，则

$$h(P_{\vec{k}}(\mu)) = 0.$$

3. 若 $k_\alpha = k^\beta = \infty$ (见图 44c图 c)，则 $h(P_{\vec{k}}(\mu))$ 是 Bridgeman 函数，特别地

$$h(P_{\vec{k}}(\mu)) = Br(\alpha^{k_\alpha}, \beta^{k_\beta}) = 8\mathcal{L}\left(1/\cosh^2\left(\frac{\ell(\mu)}{2}\right)\right).$$



(a) 当 α 是等级 $k_\alpha = \infty$ 的测地线，且β 是等级 $k^\beta < \infty$的测地线时的退化。

(b) 当 α 是等级 $k_\alpha = \infty$ 的尖点，且 β 是等级 $k^\beta < \infty$的测地线时的退化。

(c) 当 α 和 β是满足 $k_\alpha = k_\beta = \infty$的测地线时的退化。

~图 4：预浸入裤子曲面 $P_{\vec{k}}(\mu)$ 在三种极限情形下的退化。

当曲面只有尖点时，我们有以下推论。

推论 1.13。 设$(X, \vec{k})$ 是一个可容许对，其中 X 是一个亏格为 g、具有 $n > 0$个尖点的双曲曲面。那么

$$\sum_{\mu \in \overline{\mathcal{O}}'_{\vec{k}}(X)} \left(\frac{\pi^2}{4} - \mathcal{L}\left(\frac{1}{e^{\bar{m}_\alpha}}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{1+e^{\bar{m}_\alpha}}\right)\right) = \frac{\pi^2}{4}(2g+n-2),$$

其中 $\bar{m}_\alpha$ 如方程 (99)方程 ()所示。

通过研究这些恒等式中各项的单调性（见命题 5.1命题 。），我们得到以下两个推论。它们受到 [DPT23], DPT的启发，其中，嵌入式裤子曲面的拓扑计数上界以及标记简单长度谱的非支配性，是由 Luo–Tan 和 Hu–Tan 恒等式推导得出的 [LT1414、LTHT14]HT。

推论 1.14。 设（X, $\vec{k}$）是一个可容许对，其中 X 是一个亏格为 g、具有 $\vec{n}$ 个 >0 尖点的双曲曲面。设 $\bar{\mu}$ 为 k-凹核中一条 k-素正交测地线 μ 的截断。则，对于 $L>0$,

$$\#\{\mu \in \overline{\mathcal{O}}'_{\vec{k}}(X) : \ell(\bar{\mu}) \le L\} \le \pi^2(2g+n-2)\frac{e^L}{L+2}.$$

推论 1.15。 设（X, $\vec{k}$）和（Y, $\vec{k}$）是可容许对，其中 X 和 Y 是亏格为 $\vec{g}$、具有 n 个 >0尖点的双曲曲面。设 $\bar{\mu}$ 为 k-凹核中一条 k-素正交测地线 μ 的截断。

1. 若对所有 $\mu \in \mathcal{O}'_{\vec{k}}$都有 $\ell_X(\bar{\mu}) \ge \ell_Y(\bar{\mu})$，则 X 和 Y 在 *Teichm¨uller* 空间中表示同一个点，因此二者等距。

2. 设 $\{\ell^{(j)}X\}_{j\ge1}$ 和 $\{\ell^{(j)}Y\}_{j\ge1}$ 分别为未标记截断的 $\vec{k}$-素正交测地线长度谱的非递减枚举（计入重数）。若对所有 j 都有 $\ell^{(j)}X \ge \ell^{(j)}Y$，则对所有 j 都有 $\ell^{(j)}X = \ell^{(j)}Y$。

注 1.16. 1. 我们注意到，将 [BPT2525，BPT定理 1.5] 改写为 $\ell(\bar{\mu})$ 后，其中的恒等式也给出了一致计数上界，但它弱于推论 11.1414 推论 .（缺少 $1/(L+2)$ 因子）。

2. 推论 11.1515 推论 .也可由 [BPT2525，BPT定理 1.5] 改写为关于 $\ell(\bar{\mu})$后推出。我们注意到，对于具有相同拓扑类型且带有测地边界的曲面，Basmajian 和 Bridgeman 的恒等式表明，完整的正交长度谱不存在严格支配。另请参阅 [MM2323，MMQue24]Que关于正交长度谱相关刚性结果的讨论。

1.2 结构安排

在第 2 节中介绍 k 阶自然领圈和模型曲面的一些预备知识后2，第 3 节将证明主要的抽象恒等式第 3 节。我们在第 5 节第 5 节证明单调性及两个推论第 4 节，第 4 节计算抽象恒等式中出现的测度，并证明推论 1 中的简单恒等式11推论 1。在第 6 节6，第 6 节我们明确计算与尖点和锥点相关的套索函数的闭式。最后一节，即第 7 节7，第 7 节证明双曲锥曲面上的一般向量集合具有满刘维尔测度。

致谢。Ara Basmajian 获得 PSC-CUNY 资助项目 68525-00 56 和西蒙斯基金会资助（SFI-MPS-TSM-00013865，A.B.）。Nhat Minh Doan 获得

新加坡国家研究基金会（NRF）资助，项目编号为 E-146-00-0029-01。Hugo Parlier 获得 ANR-SNF 资助，项目编号为 200021E 238147（SUGAR）_。Ser Peow Tan 获得新加坡国立大学学术研究资助，项目编号为 A-8000989-00-00。

2. 预备知识与设置

本节介绍记号，并按照 Basmajian-Parlier-Tan 的框架和约定，描述我们恒等式所使用的指标集 [BPT25] BPT，并重用其中一些结果而不再给出证明。

2.1. 记号

我们汇总了所使用的各种记号及其在表 1 中首次出现的位置1。

表 1：定义与记号

定义	位置	记号
分次	公式（11）公式（）	$\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n)$
可容许对	定义 11.1定义 1.	$(X, \vec{k})$
$\vec{k}$-凹核心	方程 (22)方程 ( )	$V_{\vec{k}}(X)$
有向 $\vec{k}$-正交测地线于 X	定义前 11.22定义。	$\mathcal{O}_{\vec{k}}(X)$
无向 $\vec{k}$-正交测地线 on X	定义前 11.22定义。	$\overline{\mathcal{O}_{\vec{k}}}(X)$
与 μ 相关的k阶浸入裤子曲面	定义 11.2定义 2.	$P_{\vec{k}}(\mu)$
与 μ 相关的闭测地线	方程 (33)方程 ( )	$\gamma_{\vec{k}}(\mu)$
有向 $\vec{k}$-素正交测地线	定义 11.33定义 .	$\mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$
无向 $\vec{k}$-素正交测地线	定义 11.33定义 .	$\overline{\mathcal{O}'}_{k(X)}$
位于 $\widetilde{P_{\vec{k}}(\mu)}$ 连接 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 自身	方程（55）方程 ( )	σ_γ
与 α^{k_α} 相关的套索函数	公式（77）公式（）	$La(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha})$
k- δ的第 k 个自然领圈	定义 22.11定义 。	$\mathcal{C}_k(\delta)$
$\vec{k}$-模型曲面	定义 22.33 定义 .	$M_{\vec{k}}$
模型曲面的带 puncture 覆盖	定义 22.77 定义 .	$\mathbb{H}_0$

2.2. 边界元素的第k个自然领圈

设 β 是双曲锥面X上的一个边界元素。

定义 **命题 2.1.** [BPT2525，BPT定义 3.3] 第k个自然领圈$C_k(\beta)$ 由 β 定义为 s

1. 若 β 是尖点，则其周围边界长度为 $^2{}_k$的开 horoball,

2. 若 β 是简单闭测地线，则距 β 严格小于 $\operatorname{arcsinh}(1/\sinh(k\ell(\beta)/2))$ 的点集。

3. 若 β 是角度为 θ的锥点，其中 $\theta \le \pi/k$，则该集合由到其距离严格小于反双曲余弦(1/正弦$(k\theta/2)$) 的点组成。

在锥点情形下，$C_k(\beta)$ 仅当 $\theta \le \pi/k$时存在，而 $C_k(\beta) = \varnothing$ 当 $\theta = \pi/k$时存在。我们有以下性质。

命题 2.2 ([BPT2525，BPT命题 3.4])。 X 上任何包含与 β 的 k 次幂自由同伦的子环路的测地路径，都必然与 $C_k(\beta)$相交。

2.3. 模型曲面与素性判据

设 $(X, \vec{k})$ 为一个可容许对。设 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ 是一个与 X同胚的拓扑曲面。用 X 表示对 X 进行度量完备化后得到的空间，即将所有移除的锥点加回所得。

定义 2.3 （模型曲面 $M_{\vec{k}}$）。 给定一个分级向量 $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$，一个 $\vec{k}$–模型曲面 $M_{\vec{k}}$ 是定义在 Σ 上的双曲/欧氏轨形，其中第 i 个边界元素对应一个角度为 π/k_i的删除的轨形锥点，适用于 $i \in \{1, \dots, n\}$。用 $M_{\vec{k}}$ 表示通过加入所有正角度的已删除锥点而得到的度量完备化（不加入尖点）。

注记 2.4（存在性）。 当双曲轨形的欧拉示性数非正时，模型曲面 $M_{\vec{k}}$ 总是存在（见 [Tro91] Tro）：

$$\chi_{\mathrm{orb}}(\Sigma_{g,n}; \vec{k}) = 2(2 - 2g - n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \le 0.$$

若 $\chi_{\mathrm{orb}} < 0$ 存在有限面积的双曲轨形结构；若 $\chi_{\mathrm{orb}} = 0$ 存在欧氏轨形结构。特别地，对于每个可容许对（X, $\vec{k}$），$M_{\vec{k}}$ 都存在。

注记 2.5。 由于$M_{\vec{k}}$ 的每个锥点的阶都是偶数，任何经过锥点的测地线都必须沿原路折返。

定义 2.6（塌缩映射）。 一个塌缩映射 是一个满射

$$f \colon \overline{X} \to \overline{M}_{\vec{k}}$$

使得 $f\big|_{V_{\vec{k}}(X)} \colon {}^{\circ}V_{\vec{k}}(X) \xrightarrow{\cong} M_{\vec{k}}$ 是一个保持标记的同胚，并且$X \setminus {}^{\circ}$的每个连通分支$V_{\vec{k}}(X)$ 都被映射到 $\partial M_{\vec{k}} = M_{\vec{k}} \setminus M_{\vec{k}}$中相应的锥点。这里，${}^{\circ}V_{\vec{k}}(X)$ 表示凹核心的内部。

定义 2.7 （带 puncture 覆盖 $\mathbb{H}_0$）。设

$$\pi : \widetilde{\overline{M}}_{\vec{k}} \longrightarrow \overline{M}_{\vec{k}}$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$为万有轨形覆盖映射（因此，当 $\chi_{\mathrm{orb}} \prec 0$ 时，$M_{\vec{k}} = \mathbb{H}^2$；当 $\chi_{\mathrm{orb}} = 0$ 时，$M_{\vec{k}} = \mathbb{E}^2$）。定义带 *puncture* 覆盖为

$$\mathbb{H}_0 := \widetilde{M}_{\vec{k}} \setminus \pi^{-1}\big(\{\text{cone points of } \overline{M}_{\vec{k}}\}\big).$$

对 π 的限制给出一个覆盖映射

$$\pi : \mathbb{H}_0 \longrightarrow M_{\vec{k}}$$

它在对应于 Σ 的第i 个边界元素的轨形锥点周围每个充分小的穿孔圆盘上，都是一个 $2k_i$ 重覆叠。

注记 2.8。 在塌缩映射 $f\colon X \to M\vec{k}$ 下，任意端点位于$X \setminus \mathring{V}\vec{k}(X)$ 中的测地弧 α，要么映射到一个锥点，要么映射到一条连接相应锥点的路径$f(\alpha)$；其在 $M\vec{k}$ 中的同伦类（相对于边界）记为 $[f(\alpha)]$。然而，并非每个这样的同伦类都存在$M\vec{k}$ 中的真浸入正交测地线代表——也就是说，存在一条浸入测地线段，其内部完全位于$M\vec{k}$ 中，且端点为锥点。若此情况成立，则称 α 可在 $M\vec{k}$ 中实现为真浸入正交测地线。

事实上， [BPT2525，BPT命题 4。6] 指出：

命题 2.9（素性判据）。 设 $(X, \vec{k})$ 是一个可容许对。$\mathcal{O}_{\vec{k}}(X)$ 中的一条正交测地线是 k-素的，当且仅当它可以实现为 $M\vec{k}$ 中一条恰当浸入的正交测地线。

3. 抽象恒等式的证明

如引言中所述，定理 11.99 定理 .由两个要点推出：（i）命题11.77，命题 .；以及（ii）非一般集合 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$（见定义11.55定义 .）的刘维尔测度为零（见定理 77.33定理 .）。特别地，命题 11.77命题 .指出：

命题 3.1（命题 11.77 命题 .）。 设 $(X, \vec{k})$ 是一个可容许对。设 $v \in T^1(X)$ 为一般的，并且令 $\omega_{[v]}$ 为与 v 相关联的测地路径，如定义 *11.66定义 .*中所述。则存在唯一的 k-浸入裤子曲面 $P\vec{k}(\mu)$，其中 μ 是一条 $\vec{k}$-素正交测地线，使得 $\omega_{[v]}$ 等距浸入 $P\vec{k}(\mu)$。

证明。证明基本上沿用了命题 22.99 Proposition 在 [BPT2525、BPT 命题 4.6], 中的相同论证，并补充了具体细节。设 $M\vec{k}$ 是 X 的一个模型曲面，且 $f : X \to M\vec{k}$是定义 22.66Definition . 中定义的塌缩映射。对于一般向量 $v \in T^1(X)$，记$\omega_{[v]}$ 为与 v 相关联的测地路径，该路径从一个边界元素（设为 α）周围的领圈有向地延伸至另一个边界元素（设为 α'）周围的领圈，其中 α 和 α' 可以相同。我们将 $\omega_{[v]}$ 在 f 下的像记为 $f(\omega_{[v]})$。根据构造，$\omega_{[v]}$ 连接领圈 α 和α'，且其内部不与其他领圈相交。因此，$f(\omega_{[v]})$ 是 $M\vec{k}$中的一条浸入定向弧

连接两个锥点。记 $f(\omega_{[v]})$ 为 $f(\omega_{[v]})$ 在轨形覆盖 $\mathbb{H}_0$中的一个提升，其中轨形点表现为穿孔点。

存在性。我们将 紧化代表 定义为 $f(\omega_{[v]})$ 通过同伦将 $f(\omega_{[v]})$ 至其同伦类中的“最小”长度。如备注 22.88 所述，备注。并非每个这样的同伦类都存在 $\mathbb{H}_0$ 中的适当浸入的极小代表。为克服这一障碍，我们仿照 [BPT25], BPT，按如下方式无穷小地构造该代表。

$\mathbb{H}_0$中 $f(\omega_{[v]})$ 的紧化代表记作 $[f(\omega_{[v]})]$，可表示为如下序列：$\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2 \ldots\ldots \delta_{n-1}\gamma_n$ 条有向测地线 $\gamma_i \subset \mathbb{H}_0$，它们位于穿孔点 A_{i-1} 与 A_i 之间，$1 \le i \le n$，以及无穷小圆弧 δ_j，$1 \le j \le n-1$；这些圆弧在中间穿孔点 A_j 处的转角为 θ_j，连接 γ_j 的端点与 γ_{j+1}的起点。注意，对于 $1 \le j \le n-1$，$|\theta_j| \ge \pi$，否则可以将 $f(\omega_{[v]})$ 同伦移离该穿孔点，从而得到更短的代表。采用这一记号，我们断言

断言 3.2. 若 $n \ge 2$，则 $|\theta_j| = \pi$，对所有 $1 \le j \le n-1$均成立。

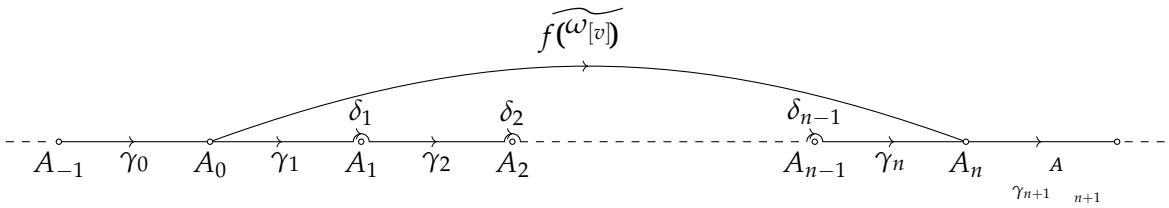


图 5：将 $f(\omega_{[v]})$ 提升到 $\mathbb{H}_0$所得的提升映射，以及其紧化代表$\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2 \ldots\ldots \delta_{n-1}\gamma_n$。

断言 33.22 的证明断言 . . 若 $n \ge 2$，且对某个 $1 \le j \le n-1$，则由于 $\mathbb{H}_0$ 在每个轨形点周围的小穿孔圆盘上都是 $M_{\bar{k}}$ 的 $2k_i$重覆盖，紧化弧 $[f(\omega_{[v]})]$ 在 $M_{\bar{k}}$ 上的投影是一条弧，记为 $[f(\omega_{[v]})]$，它包含一个绕该轨形点至少 k_j 圈的闭子环。由于 $f(\omega_{[v]})$在 $M_{\bar{k}}$中同伦（相对于边界）于其紧化代表 $[f(\omega_{[v]})]$，因此 $f(\omega_{[v]})$中也出现同一个子环。因此，$f(\omega_{[v]})$在保持标记的同胚 $f \colon \mathring{V}_{\bar{k}}(X)$（定义见定义 22.66）下的原像也必定包含一个绕 X 对应边界元素至少 k_j圈的闭子环。这里，$f(\omega_{[v]})$在映射 $f \colon \mathring{V}_{\bar{k}}(X)$ 下的原像是测地线段 $\mathring{\omega}_{[v]} := \omega_{[v]} \cap \mathring{V}_{\bar{k}}(X)$。由命题 22.22，这迫使$\mathring{\omega}_{[v]}$ 进入该边界元素的第 k_j个自然领圈，这与$\mathring{\omega}_{[v]} \subset \mathring{V}_{\bar{k}}(X)$这一事实矛盾。因此，对每个 $1 \le j \le n-1$，$|\theta_j| = \pi$ 均成立。

□

现在我们继续证明命题 11.77命题。根据命题 22.99，命题。可以找到一条 k-素正交测地线 μ，位于 X 中，对应于恰当浸入的定向测地线段

γ_1 连接穿孔点 A_0 和 A_1，位于 $\mathbb{H}_0$ 中。特别地，弧 $f(\mu)$ 与 $\pi(\gamma_1)$ 同伦——后者是 γ_1 在覆盖映射 $\pi\colon \mathbb{H}_0 \longrightarrow M_{\bar{k}}$ 下的投影；μ 从边界元素 α 延伸至边界元素 β，其中 $\alpha \subset f^{-1}(\pi(A_0))$ 和 $\beta \subset f^{-1}(\pi(A_1))$。根据断言 33.22，断言。所有 γ_i 都位于同一条测地线上，记作 $g' \subset \mathbb{H}_0 = \mathbb{H}^2$，或记作 $\mathbb{E}^2$，且该测地线经过 $\{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$。因此，根据注记 22.55，注记。所有 γ_i 都投影到 $M_{\bar{k}}$ 中的 $\pi(\gamma_1)$，其定向随 i 的奇偶性交替变化。因此，在 X 中，弧 $\mathring{\omega}_{[v]}$ 相对于 $V_{\bar{k}}(X)$ 的边界同伦于一条形如下式的（截短）正交测地线 η

$$\mu\beta^{\epsilon_1 k_\beta}\mu^{-1}\alpha^{\epsilon_2 k_\alpha}\mu\beta^{\epsilon_3 k_\beta}\dots\mu^{s}, \tag{11}$$

其中 μ 出现 n 次，$s := (-1)^{n+1}$，且 $\epsilon_j := \operatorname{sign}(\theta_j)$，其中 $1 \le j \le n-1$。更准确地说，符号取决于相应无穷小圆弧的定向：若为逆时针，则取正号；若为顺时针，则取负号。事实上，可以证明所有 θ_j 的符号都相同（$\theta_j = \pi$ 的情形见图 5 图），注意到若对于某个 j，$\theta_j = \pi$ 且 $\theta_{j-1} = -\pi$ 或 $\theta_{j+1} = -\pi$，那么在 X 中，弧 $\mathring{\omega}_{[v]}$ 必然会进入领圈。不过，我们的证明并不需要这一更强的结论。

令 $P_{\bar{k}}(\mu)$ 为与 μ 相关联的浸入裤子曲面。注意，自然领圈 α 和 β 作为集合都位于 $P_{\bar{k}}(\mu)$ 内，而它们在等距浸入 $\sim$ $\sim$ $\sim\varphi : P_{\bar{k}}(\mu) \to P_{\bar{k}}(\mu)$ 下的原像，是 $P_{\bar{k}}(\mu)$ 的领圈，其中 $P_{\bar{k}}(\mu)$ 是 $P_{\bar{k}}(\mu)$ 的预浸入裤子曲面（见定义 11.22定义）。因此，根据方程 (1111)方程 ( ) 中对 η 的拓扑描述，其同伦类（相对于边界）中的每个测地代表——特别是 $\mathring{\omega}_{[v]}$ 以及 η 本身——都等距浸入 $P_{\bar{k}}(\mu)$。由此可知，$\omega_{[v]}$ 也等距浸入 $P_{\bar{k}}(\mu)$。

唯一性。回想一下，三条曲线 α^{k_α}、β^{k_β} 和 $\gamma_{\vec{k}}(\mu)$ 构成了浸入裤子曲面 $P_{\vec{k}}(\mu)$的边界，其中

$$\gamma_{\vec{k}}(\mu) \in [\alpha^{k_\alpha} * \mu * \beta^{k_\beta} * (\mu)^{-1}].$$

在带 puncture 覆盖 $\mathbb{H}_0$ 上，$f(\gamma_{\vec{k}}(\mu))$有两个不同的提升，每个提升都收紧为一个双无限序列

$$\dots\gamma_{-1}\delta_{-1}\gamma_0\delta_0\gamma_1\delta_1\dots, \quad \text{and} \quad \dots\gamma_{-1}\delta'_{-1}\gamma_0\delta'_0\gamma_1\delta'_1\dots,$$

其中，对所有 $j \in \mathbb{Z}$，δ_j 和 δ'_j 分别是转角为 $\theta_j = \pi$ 和 $\theta'_j = -\pi$ 的无穷小圆弧。这两个提升围成一个双无限条带，记作 s^μ，其中恰好包含测地线 $g \subset \mathbb{H}_0$ 上的穿孔点集合 $\{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$。此外，由于 $\omega_{[v]}$ 是~~~在 $P_{\bar{k}}(\mu)$ 中等距浸入，所选的 $f(\omega_{[v]})$（即 $f(\omega_{[v]})$ 的提升，见图 55Figure ）完全位于条带 s^μ 内。

现在假设 $\omega_{[v]}$ 也等距浸入另一个 $\vec{k}$-极大裤子曲面 $P_{\vec{k}}(\mu')$，其中有 $\mu' \neq \mu \in \mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$。和之前一样，选取 $f(\mu^\gamma)$ 在 $\mathbb{H}_0$ 中的一个提升，使其一个端点位于 A_0，另一个

端点位于 B。这确定了一个由 f 的两个适当提升（$\gamma_{\vec{k}}(\mu')$）围成的双无限条带 $s^{\mu'}$，其中恰好包含测地线 $g' \subset \mathbb{H}_0$ 上经过 A_0和 B 的所有穿孔点。由于 $\omega_{[v]}$ 等距浸入 $P_{\vec{k}}(\mu')$，不失一般性，我们可以假设 $f(\omega_{[v]}) \subset s^{\mu'}$ 同样成立。于是 $s_\mu \cap s^{\mu'}$ 包含两个不同的穿孔点 A_0 和 A_n，这迫使 $g = g'$，因此根据命题 22.99命题 . .，$B = A_1$ 或 $B = A_{-1}$。因此，$f(\mu)$ 在 $M_{\vec{k}}$中同伦（相对于边界）于 $f(\mu')$ 或 $-f(\mu')$，所以 μ和 μ'在 $\mathcal{O}'_{\vec{k}}(X)$ 中相同，矛盾。

□

4. 计算测度

设 μ 是一条连接两个边界元素（分别记为 α 和 β）的 k-素正交测地线，其等级分别为 k_α 和 k_β，并设 $c(\alpha)$ 和 $c(\beta)$ 是它们的领圈。令 $P_{\vec{k}}(\mu)$ 表示与 μ相关联的浸入裤子曲面，其三个边界分支为 α^{k_α}、β^{k_β}和$\gamma_{\vec{k}}(\mu)$。本节将通过计算定理 11.99Theorem 中定义的函数 $h(P_{\vec{k}}(\mu))$，证明命题 11.1212 Proposition。

我们回顾一下，$P_{\vec{k}}(\mu)$ 的预浸入裤子曲面是 $P_{\vec{k}}(\mu)$，它是一个具有以下边界分支的双曲裤带曲面

$$\widetilde{\alpha}^{k_\alpha} := \varphi^{-1}(\alpha^{k_\alpha}), \widetilde{\beta}^{k_\beta} := \varphi^{-1}(\beta^{k_\beta}), \widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu) := \varphi^{-1}(\gamma_{\vec{k}}(\mu)) \tag{12}$$

（见图11Figure），其具有分别属于 $\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}$和 $\widetilde{\beta}^{k_\beta}$的第一自然领圈$c(\widetilde{\alpha}^{k_\alpha})$和$c(\widetilde{\beta}^{k_\beta})$。浸入 φ 满足

$$c(\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}) = \varphi^{-1}(c(\alpha)), \text{ and } c(\widetilde{\beta}^{k_\beta}) = \varphi^{-1}(c(\beta)). \tag{13}$$

我们定义

$$V(\widetilde{P}_{\vec{k}}(\mu)) := \widetilde{P}_{\vec{k}}(\mu) \setminus (c(\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}) \cup c(\widetilde{\beta}^{k_\beta}))$$

为预浸入裤子曲面 $P_{\vec{k}}(\mu)$的凹核心。

记 $G(P_{\vec{k}}(\mu))$ 为这样的实数集：其中的一般向量 $v \in T^1(X)$ 所关联的测地弧 $\omega_{[v]}$等距浸入到$P_{\vec{k}}(\mu)$中。

类似地，若向量 $u \in T^1(\widetilde{P}_{\vec{k}}(\mu))$ 所关联的测地弧 $\omega_{[u]}$ 分成三条线段，且第一条和最后一条位于领圈区域 $c(\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}) \cup c(\widetilde{\beta}^{k_\beta})$ 中，中间的线段记为 $\mathring{\omega}_{[u]}$，位于凹核心 $V(P_{\vec{k}}(\mu))$ 中，则称向量 u 为良向量。记 $G(P_{\vec{k}}(\mu))$ 为所有此类良向量 $u \in T^1(\widetilde{P}_{\vec{k}}(\mu))$ 构成的集合。

根据定理 1.9 中h 的定义，我们有$h(P_{\vec{k}}(\mu)) =$ 体积$(G(P_{\vec{k}}(\mu)))$。下面的引理将体积$(G(P_{\vec{k}}(\mu)))$的计算提升为体积 $(G(P_{\vec{k}}(\mu)))$，后者更易处理。

引理 4.1. 对于每个向量 $v \in G(P_{\vec{k}}(\mu))$，存在唯一的向量 $u \in G(\widetilde{P}_{\vec{k}}(\mu))$ 使得 $v = (D\varphi)(u)$，其中 $D\varphi$ 表示 φ 的微分。

~证明。设 $v \in G(P\tilde{k}(\mu))$，并假设存在 $u_1, u_2 \in G(P\tilde{k}(\mu))$，满足 $v = (D\varphi)(u_1) = (D\varphi)(u_2)$。那么相应的测地弧满足 $\omega_{[v]} = \varphi(\omega_{[u_1]}) = \varphi(\omega_{[u_2]})$。因此，它们位于凹核心中的子线段重合：

$$\mathring{\omega}_{[v]} = \varphi(\mathring{\omega}_{[u_1]}) = \varphi(\mathring{\omega}_{[u_2]}). \tag{14}$$

记 $H_\alpha := \partial c(\widetilde{\alpha}^{k_\alpha})$ 和 $H^\beta := \partial c(\widetilde{\beta}^{k_\beta})$ 为预浸入裤子曲面的凹核心~$V(P\tilde{k}(\mu))$的两个边界分支。对于每个 $i \in \{1,2\}$，不失一般性，我们可以假设 $\mathring{\omega}_{[u_i]}$ 是从 $p_i \in H_\alpha$ 到 $q_i \in H^\beta$ 的有向测地弧，与 H_α 的夹角为 a_i，与 H^β的夹角为 b_i。由方程 (1414)Equation ( ),

$$(\varphi(p_1), \varphi(q_1), a_1, b_1, \ell(\mathring{\omega}_{[u_1]})) = (\varphi(p_2), \varphi(q_2), a_2, b_2, \ell(\mathring{\omega}_{[u_2]})). \tag{15}$$

此外，由于 φ 是 π_1-单射的，并满足方程(1212)Equations( )至(1414)( )，两条测地弧$\mathring{\omega}_{[u_1]}$ 和 $\mathring{\omega}_{[u_2]}$ 必定位于同一个同伦类中（相对于凹核心~$V(P\tilde{k}(\mu))$的边界）。方程 (1111)Equation ( ) 给出了它们在 φ下的公共像 $\mathring{\omega}_{[v]}$ 的拓扑描述。因此，我们可以在 $\mathbb{H}^2$ 中选择 H_α 和 H^β 在万有覆盖中的提升 ~H_α 和 ~H^β，其中 ~$P\tilde{k}(\mu)$，使得对于每个 $i \in \{1,2\}$，相应的提升测地弧 $\mathring{\omega}_{[u_i]}$ of $\mathring{\omega}_{[u_i]}$ 从 ~$p_i \in H_\alpha$ 延伸至 ~$q_i \in H^\beta$。

现在证明 ~$p_1 =$ ~p_2 以及 ~$q_1 =$ ~q_2。分两种情况：

1. 若 $\mathring{\omega}_{[u_1]} \cap \mathring{\omega}_{[u_2]} \neq \varnothing$，则这两条弧与$H_\alpha$ 和H^β 围成 $\mathbb{H}^2$中的两个凹三角形，每个三角形的内角和都大于 π，由方程（1515）方程（ ）可知，矛盾。

2. 第二种情况：若 $\widetilde{\mathring{\omega}}_{[u_1]} \cap \widetilde{\mathring{\omega}}_{[u_2]} = \varnothing$，则在 $\mathbb{H}^2$中，四条边界曲线和弧围成一个凹四边形，其内角和等于 2π，由方程（1515）方程（ ）可知，同样矛盾。

因此，除非 ~$p_1 =$ ~p_2 以及 ~$q_1 =$ ~q_2，，否则这两种情况都不可能，正如所需。因此，$\omega_{[u_1]}$ 与$\omega_{[u_2]}$ 重合。此时，u_1 和u_2 都与同一条测地弧相切。由于$D\varphi$ 在每个切丛纤维上都是单射，若$u_1 \neq u_2$，则它们不可能位于同一个基点上。若它们位于不同的基点上，那么投影后的测地弧 $\omega_{[v]}$ 将在v处与自身相切，矛盾。因此$u_1 = u_2$。

□

在证明命题 11.1212，命题。我们需要先了解双曲几何中的以下基本事实。

引理 4.2。设 $Q \subset \mathbb{H}^2$ 为一个理想四边形的内部区域，其对边为 (a, c)和 (b, d)，并设 μ 为 a 和 c 的公垂线。对 $x \in \mu$，设 σ_1，σ_2 为经过 x 且分别垂直于 b 和 d 的测地线，并令 $\phi := \measuredangle(\sigma_1, \sigma_2)$。若 $\phi \leq \pi/2$，则 $x \notin Q$。

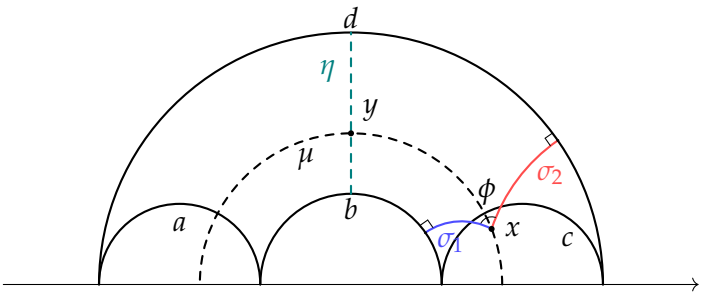


图6：理想四边形Q及一点$x \not\in Q$。

证明。归一化（见图6图），使得 μ 为单位半圆，b、d 为同心半圆，而 η 为它们的公垂线，即与 μ正交的直径。令 $y := \mu \cap \eta$，$s := d_{\mathbb{H}^2}(x, y)$，以及 $\delta := d_{\mathbb{H}^2}(\mu, b) = d_{\mathbb{H}^2}(\mu, d)$。由对称性，$\varphi := \frac{\phi}{2} = \measuredangle(\mu, \sigma_1)$。 –

在边长为 μ、η、b、σ_1的朗伯四边形中，

$$\cot\varphi = \frac{\sinh s}{\coth\delta} \qquad \text{[Bus10, Thm. 2.3.1(vi)].} \tag{16}$$

设$s' := d_{\mathbb{H}^2}(a, c)$。由对称性可得$d_{\mathbb{H}^2}(y, a) = d_{\mathbb{H}^2}(y, c) = s'/2$；而在边长为$b$、$\eta$、$\mu$、$c$且有一个理想顶点的朗伯四边形中，

$$\sinh\left(\frac{s'}{2}\right)\sinh\delta = 1 \qquad \text{[Bus10, Thm. 2.3.1(i)].} \tag{17}$$

若 $\phi \le \pi/2$，则 $\varphi \le \pi/4$，因此$\cot\varphi \ge 1$。由第二个方程，

$$\frac{\sinh(s'/2)}{\coth\delta} = \frac{1}{\sinh\delta\,\coth\delta} = \frac{1}{\cosh\delta} \le 1.$$

与第一个方程结合可得$\sinh s \ge \sinh(s'/2)$，因此$s \ge s'/2$。由于 $\mu \cap Q = \{x \in \mu : s := d_{\mathbb{H}^2}(x, y) < s'/2\}$，我们得出$x \not\in Q$。 □

现在我们证明命题11.1212，命题。即计算有限等级情形下的体积$h(P_{\vec{k}}(\mu))$。第二部分——讨论至少一个等级为无穷的退化情形——可直接得出（参见图44a图 a 至图44cc）。

命题 4.3. 设$(X, \vec{k})$ 为一个可容许对，并且对于每个边界元素为$\vec{}$锥点的 i，其角满足 $\theta_i \le \frac{\pi}{2}$ k_i。设 μ 为一条连接两个边界元素—(记作 α 和 β) 的 k-素正交测地线，其等级为 k_α 和 k_β。若 k_α 和 k_β 均有限，则

$$h(P_{\vec{k}}(\mu)) = \mathrm{Vol}(G(P_{\vec{k}}(\mu))) = 4\pi^2 - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha}) - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta}) - Br(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \gamma_{\vec{k}}(\mu))$$
$$- 4La(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha}) - 4La(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta}) \tag{18}$$

其中右端的所有项均由方程给出(55)方程() 至(88)()。

证明。由引理 44.11，引理 。微分 $\mathrm{D}\varphi : \mathrm{T}_1\left(\widetilde{\mathrm{P}}\vec{k}(\mu)\right) \longrightarrow \mathrm{T}_1\left(\mathrm{P}\vec{k}(\mu)\right)$ 限制为从 $\mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{P}}\vec{k}(\mu))$ 到 $\mathrm{G}\left(\mathrm{P}\vec{k}(\mu)\right)$ 的双射，而且在这些可测集上保持刘维尔体积。因此 $\mathrm{h}(\mathrm{P}\vec{k}(\mu)) = \mathrm{Vol}(\mathrm{G}(\mathrm{P}\vec{k}(\mu))) = \mathrm{Vol}(\mathrm{G}(\mathrm{P}\vec{k}(\mu)))$。根据可容许对 $(\mathrm{X}, \vec{\mathrm{k}})$ 的定义 11.11定义 . (1)，引理 44.22 引理 . 表明，$\mathrm{T}^1(\widetilde{\mathrm{P}}\vec{k}(\mu))$ 中 $\mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{P}}\vec{k}(\mu))$ 的补集可分解为 6 个互不相交的子集 $(\mathrm{A}_i)^{i\in\{1,2,3,4,5,6\}}$，如下所示：

$\widetilde{(A_1)}$ $v \in T_1(P\vec{k}(\mu))$，使得测地弧 $\omega^{[v]}$ 的一个端点位于 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 上，另一个端点位于 $\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}$ 上。

$\widetilde{(A_2)}$ $v \in T_1(P\vec{k}(\mu))$，使得测地弧 $\omega^{[v]}$ 的一个端点位于 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 上，另一个端点位于 $\widetilde{\beta}^{k_\beta}$ 上。

$\widetilde{(A_3)}$ $v \in T_1(P\vec{k}(\mu))$ 使得 $\omega^{[v]}$ 的最大测地延拓的两个端点都位于$\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 上，并且与简单正交测地线 σ_γ 同伦（相对于边界）地连接 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 至其自身（见图 3图 ）。

$\widetilde{(A_4)}$ $v \in T_1(P\vec{k}(\mu)) \setminus (A_1 \cup A_3)$ 使得 $\omega^{[v]}$ 的一端位于 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 上，另一端位于领圈 $c(\widetilde{\alpha}^{k_\alpha})$ 内。

$\widetilde{(A_5)}$ $v \in T_1(P\vec{k}(\mu)) \setminus (A_2 \cup A_3)$ 使得 $\omega^{[v]}$ 的一端位于 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 上，另一端位于领圈 $c(\widetilde{\beta}^{k_\beta})$ 内。

(A_6) $T_1\left(\widetilde{P}\vec{k}(\mu)\right) \setminus \left(A_1 \cup \cdots \cup A_5 \cup G(\widetilde{P}\vec{k}(\mu))\right)$中的所有其余向量。

我们注意到子集 A_6 的刘维尔测度为零，正如定义 11.55Definition . . 中引入的非一般集合 $\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{B}_3$ 一样。我们还注意到，$\mathrm{v} \in \mathrm{A}_1$ 当且仅当相关的测地弧 $\omega^{[v]}$ 与连接 $\widetilde{\gamma}_{\vec{k}}(\mu)$ 和 $\widetilde{\alpha}^{k_\alpha}$ 的简单正交测地线 σ_α 同伦（见图 3Figure ）；因此，$\mathrm{Vol}(\mathrm{A}_1) = \mathrm{Br}(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha})$。类似地，$\mathrm{Vol}(\mathrm{A}_2) = \mathrm{Br}(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta})$，且 $\mathrm{Vol}(\mathrm{A}_3) = \mathrm{Br}(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \gamma_{\vec{k}}(\mu))$。我们还得到 $\mathrm{Vol}(\mathrm{A}_4) = 4\mathrm{La}(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \alpha^{k_\alpha})$，因为对于每个向量 $\mathrm{v} \in \mathrm{A}_4$，v、−v、r(v)、−r(v) 中恰有一个确定了一条基点位于 $\gamma_{\vec{k}}(\mu)$ 上、绕 α^{k_α}回绕的套索，其中 r(v) 表示 v 关于裤子曲面的三条缝的反射。类似地，$\mathrm{Vol}(\mathrm{A}_5) = 4\mathrm{La}(\gamma_{\vec{k}}(\mu), \beta^{k_\beta})$。因此，公式 (1818)Equation ( ) 得证。

□

推论 *1* 的证明*1.13*13推论 .. 假设X 只有尖点，因此$(X, \vec{k})$ 是一个可容许对，其中X 的亏格为g，并有$n > 0$个尖点。在这种情况下，恒等式化简为

$$\sum_{\mu\in\overline{\mathcal{O}}'_{\vec{k}}(X)} \left(4\pi^2 - 8\mathcal{L}\left(\frac{1}{\cosh^2(\ell(\sigma_\gamma)/2)}\right) - 32\mathcal{L}\left(\frac{1}{1+e^{\bar{m}_\alpha}}\right)\right) = 4\pi^2(2g+n-2), \tag{19}$$

其中 $\ell(\sigma_\gamma)$，且 $\bar{m}_\alpha$ 与方程 (55)方程 ( )和 (99)()中所述相同。

应用 Rogers 二对数的阿贝尔五项恒等式，并令 $y = x$，

$$2\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x^2) + 2\mathcal{L}\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

以及预浸入裤子曲面中的双曲关系$P\bar{k}(\mu)$ 带有双尖点（见 [Bus1010、Bus定理 2.3。1] 以及 [Doa2525、Doa引理 7。3]），

$$\sinh\left(\frac{\ell\left(\gamma_{\bar{k}}(\mu)\right)}{4}\right)\sinh\left(\frac{\ell\left(\sigma_\gamma\right)}{2}\right) = 1, \quad e^{\bar{m}_\alpha} = \cosh\left(\frac{\ell\left(\sigma_\gamma\right)}{2}\right), \quad e^{-\ell(\bar{\mu})} = 1 - e^{-2\bar{m}_\alpha}, \tag{20}$$

方程 (1919)方程（）中的恒等式具有以下等价形式：

$$\sum_{\mu\in\overline{\mathcal{O}}'_{\bar{k}}(X)}\left(\frac{\pi^2}{4} - \mathcal{L}\Big(\frac{1}{e^{\bar{m}_\alpha}}\Big) - \mathcal{L}\Big(\frac{1}{1+e^{\bar{m}_\alpha}}\Big)\right) = \frac{\pi^2}{4}(2g+n-2), \tag{21}$$

$$\sum_{\mu\in\overline{\mathcal{O}}'_{\bar{k}}(X)}\left(\frac{\pi^2}{4} - \mathcal{L}\Big(\frac{e^{\ell(\gamma_{\bar{k}}(\mu))/2}-1}{e^{\ell(\gamma_{\bar{k}}(\mu))/2}+1}\Big) - \mathcal{L}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{\ell(\gamma_{\bar{k}}(\mu))/2}}\Big)\right) = \frac{\pi^2}{4}(2g+n-2), \tag{22}$$

$$\sum_{\mu\in\overline{\mathcal{O}}'_{\bar{k}}(X)}\left(\frac{\pi^2}{4} - \mathcal{L}\Big(\sqrt{1-e^{-\ell(\bar{\mu})}}\Big) - \mathcal{L}\Big(\frac{\sqrt{1-e^{-\ell(\bar{\mu})}}}{1+\sqrt{1-e^{-\ell(\bar{\mu})}}}\Big)\right) = \frac{\pi^2}{4}(2g+n-2), \tag{23}$$

其中，$\bar{\mu}$ 是 k-素正交测地线 μ 在 k-凹核 X 中的截断。 □

5. 单调性及其应用

现在我们证明推论 11.1313 推论 。中恒等式所涉及函数的单调性，并推导出引言中陈述的推论。

命题 *5.1*。方程 *(2121)*方程（）中的每一项 $\frac{\pi^2}{4} - \mathcal{L}(e^{-\bar{m}_\alpha}) - \mathcal{L}\left((1+e^{\bar{m}_\alpha})^{-1}\right)$ 都是 $\bar{m}_\alpha$ 的单调函数，且取值于 $\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right)$。等价地，方程 *(2222)*方程（）和 *(2323)( )* 中的每一项分别关于 $\ell(\gamma_{\bar{k}}(\mu))$ 和 $\ell(\bar{\mu})$ 单调，其中 $\bar{\mu}$ 是 k-素正交测地线 μ 在 k-凹核中的截断。

证明。 第一部分由以下事实得出： $0 \le \bar{m}_\alpha < \infty$ 和 $\mathcal{L}$ 是单调的。第二部分由以下关系得出： $e^{-\ell(\bar{\mu})} = 1 - e^{-2\bar{m}_\alpha}$ 和 $\ell\left(\gamma_{\bar{k}}(\mu)\right) = 4$ 反双曲余弦$(e^{\ell(\bar{\mu})/2})$（见公式（2020）公式（））。 □

对于 $L > 0$，定义

$$\Phi(L) := \frac{\pi^2}{4} - \mathcal{L}\Big(\sqrt{1-e^{-L}}\Big) - \mathcal{L}\Big(\frac{\sqrt{1-e^{-L}}}{1+\sqrt{1-e^{-L}}}\Big) \tag{24}$$

推论 5.2。 设 $(X,\ \vec{k})$ 是一个可容许对，其中 X 是一个亏格为 g 且具有 $n\ >0$个尖点的双曲曲面。那么，对于 $L\ >0$,

$$\#\{\mu\in\overline{\mathcal{O}}'_{\vec{k}}(X):\ell(\bar{\mu})\le L\}\le\frac{\frac{\pi^2}{4}(2g+n-2)}{\Phi(L)}\le\pi^2(2g+n-2)\frac{e^L}{L+2}.$$

证明。 第一个不等式由公式（2323）公式（ ） 以及下述事实得出： Φ 在 （0，∞）上严格递减（见命题 55.11命题 .）。对于第二个不等式，令 $a:\ =\sqrt{1-e^{-L}}$。通过标准的罗杰斯二重对数计算可得

$$\Phi(L)=\frac{1}{4}\log\Big(\frac{1}{1-e^{-L}}\Big)\log\Big(\frac{1+a}{1-a}\Big)+2\int_a^1\frac{-\log t}{1-t^2}\,dt.\tag{25}$$

利用 −对数函数（$1-x$） $\ge x$和 −对数函数$t\ \ge 1-t$,

$$\frac{1}{4}\log\Big(\frac{1}{1-e^{-L}}\Big)\ge\frac{1}{4}e^{-L},\qquad 2\int_a^1\frac{-\log t}{1-t^2}\,dt\ge 2\int_a^1\frac{1}{1+t}\,dt=2\log\Big(\frac{2}{1+a}\Big)\ge 1-a.$$

由于 $1-\mathrm{a}^2=\mathrm{e}^{-L}$，我们有对数函数$\big(\frac{1+a}{1-}\mathrm{a}\big)=$对数函数$\big(\ \frac{(1+\mathrm{a})\ ^2\mathrm{e}^{-L}}{}\ \big)\ge\mathrm{L}$，并且 $\sqrt{1-}$ $\mathrm{x}\ \le 1-\mathrm{x}\,2$，其中$\mathrm{x}\ =\mathrm{e}^{-L}$，可得$\sqrt{1-\mathrm{a}}\ \ge\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-L}$。代入公式（2525）公式（ ）后得到

$$\Phi(L)\ge\frac{L}{4}e^{-L}+\frac{1}{2}e^{-L}=\frac{L+2}{4}e^{-L},$$

由此可推出第二个不等式。 □

推论 5.3。 设（$X,\ \vec{k}$）和（$Y,\ \vec{k}$）为可容许对，其中 X 和 Y 是亏格为 g 且有 n 个尖点的双曲曲面。

1. 如果 $\ell_X(\bar{\mu})\ \ge\ell_Y(\bar{\mu})$ 对所有$\bar{\mu}\in\mathcal{O}'_{\vec{k}}$均成立，那么 X 和 Y 在 *Teichm¨uller* 空间中定义同一个点，因此彼此等距。

2. 令 $\{\ell^{(j)}X\ \}_{j\ge1}$ 和 $\{\ell^{(j)}Y\ \}_{j\ge1}$ 分别表示未标记截断 $\vec{k}$-素正交测地线长度谱的非递减枚举（含重数）。如果对所有 j 均有 $\ell^{(j)}X\ \ge\ell^{(j)}Y$，那么对所有 j 均有 $\ell^{(j)}X=\ell^{(j)}Y$。

证明。 对于任意可容许的 $(Z,\vec{k})$，公式（2323）公式（ ）可以改写为

$$\sum_{\mu\in\overline{\mathcal{O}}'_{\vec{k}}}\Phi\big(\ell_Z(\bar{\mu})\big)=\frac{\pi^2}{4}(2g+n-2).\tag{26}$$

1. 假设 ℓ_X（$\bar{\mu}$） $\ge\ell_Y$（$\bar{\mu}$）对所有 $\mu\in\mathcal{O}'_{\vec{k}}$均成立。由于 Φ 是递减的，对于每个 μ，我们都有

$$\Phi\big(\ell_X(\bar{\mu})\big)\le\Phi\big(\ell_Y(\bar{\mu})\big).$$

对 μ 求和并使用公式（2626）公式（ ）对于 $Z = X$ 以及 $Z = Y$ 可知两个级数相等。因此，每一项的差均为零，并且

$$\Phi\big(\ell_X(\bar{\mu})\big) = \Phi\big(\ell_Y(\bar{\mu})\big) \qquad \text{for all } \mu.$$

因为 Φ 严格递减，所以 $\ell_X(\bar{\mu}) = \ell_Y(\bar{\mu})$ 对所有 $\mu \in \mathcal{O}'_{\vec{k}}$均成立。由命题 22.9$\overline{9}$，命题 .存在一个有限子集 $\mathcal{O}'_{\vec{k}}$，它来自模型曲面的三角剖分；相应的截断弧长坐标决定了双曲结构。因此 X 和 Y 确定了 Teichm¨uller 空间中的同一点，且二者等距。

2. 设 $\{\ell^{(j)}{}_X\}_{j\geq 1}$ 和 $\{\ell^{(j)}{}_Y\}_{j\geq 1}$ 分别为截断的无标记 $\vec{k}$-素正交测地线长度的非递减枚举（计入重数）。假设 $\ell^{(j)}{}_X \geq \ell^{(j)}{}_Y$ 对所有 j均成立。那么$\Phi(\ell^{(j)}{}_X) \leq \Phi(\ell^{(j)}{}_Y)$ 对所有 j 均成立，对 j 求和可得

$$\sum_{j\geq 1} \Phi(\ell_X^{(j)}) \leq \sum_{j\geq 1} \Phi(\ell_Y^{(j)}).$$

两个和都等于公式（2626）中的常数公式（ ）（它们是同一个级数，只是重新排列了顺序），因此等式成立。与上文一样，这意味着对每个 j都有 $\Phi(\ell^{(j)}{}_X) = \Phi(\ell^{(j)}{}_Y)$，而 Φ 的严格单调性意味着对所有 j都有 $\ell^{(j)}{}_X = \ell^{(j)}{}_Y$。

□

6. 小锥角曲面上的套索函数

我们回顾双曲上半平面模型 $\mathbb{H}^2$ 中的一个基本计算。

引理 *6.1*（[*LT*14], *LT* 引理 *4.2*，方程（*12*））。设 $[x、y]$ 和 $[c、d]$ 是$\mathbb{H}^2$ 中的完整测地线，端点分别为 $\neq x、y \neq$ 和 $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}\cup\{\infty\}c、d$，并在 $q \in \mathbb{H}^2$ 处相交。设 z_1 和 z_2 分别为表示 $[x、y]$ 和 $[c、d]$, 的半圆（或取极限时的垂直线）的欧几里得圆心；当所有端点都有限时，$z_1 = x+y\,2$ 和 $z_2 = c+d\,2$。令 $\phi := \measuredangle(qz_1z_2)$（见图 *77Figure*）。那么

$$\cot^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \left|\frac{(x-c)(x-d)}{(y-c)(y-d)}\right|.$$

6.1. 与尖点相关的套索函数

现在我们可以计算与尖点相关联的套索函数。设 α 为尖点，γ 为套索脚点所在裤子曲面的另一条边界。设 $\bar{m}_\alpha$ 为从 γ 到尖点 α 的自然领圈的接缝长度，见图 88图 。我们可以将图形提升到万有覆盖中，见图 88，图 其中尖点被提升到无穷远处，且 $[0,2a]$ 和 $[2,2+2a]$ 是 γ 的提升，并且 $a = e^{-\bar{m}_\alpha}$。

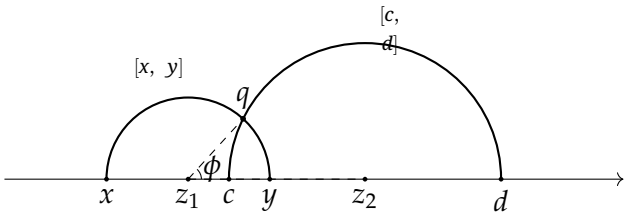


图 7：角 ϕ。

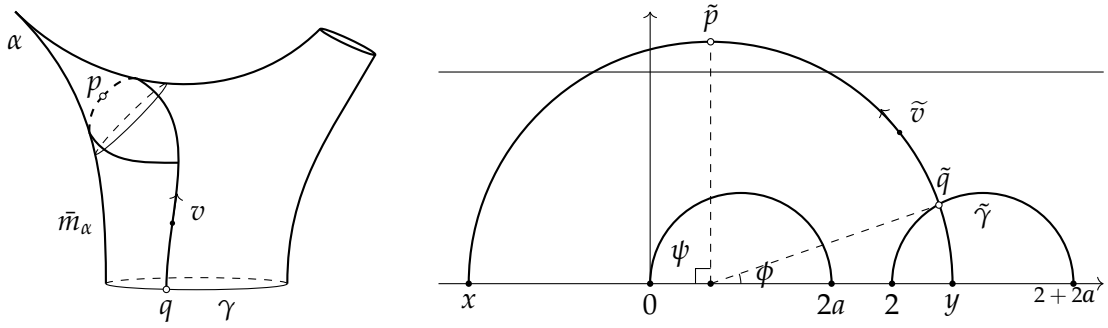


图 8：围绕尖点的套索及其在 $\mathbb{H}^2$上的提升。

若 v 是一个单位切向量，其指数映射对应于我们感兴趣的套索，设 [x,y]，（其中 x <0、y $\in(2,2+2a)$）为 $\mathbb{H}^2$ 中的一条测地线，它是套索延伸为 $\mathbb{H}^2$ 中完整测地线后的相关提升；并设 ˜p、˜q $\in$ [x,y],，其中 ˜p 是离尖点 ∞ 最近的点，即半圆 [x, y] 上的最高点，而 ˜q 是 [x, y] 与 $[2,2+2a]$ 的交点。那么 v 投影到 ˜p 与 ˜q 之间的一个点。

引理6.2。产生套索且垂足位于 γ 并逆时针绕过尖点 α *(*见图 *8*8图 *)*的单位切向量集合的测度为

$$La(\gamma,\alpha)=\int_{-\infty}^{0}\int_{2}^{2+2a}\frac{2\,d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{p},\tilde{q})}{(y-x)^2}\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{0}\int_{2}^{2+2a}\frac{2\ln\cot(\phi/2)}{(y-x)^2}\,dy\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{2}^{2+2a}\frac{\ln\left|\frac{(2+2a-x)(2-x)}{(y-2)(2+2a-y)}\right|}{(y-x)^2}\,dy\,dx=4\,\mathcal{L}\left(\frac{a}{1+a}\right)=4\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{e^{\bar{m}_\alpha}+1}\right),$$

˜其中 $a:=e^{-m_\alpha}$ 和 $\mathcal{L}$ 是 *Rogers* 二对数。

证明。$\mathbb{H}^2$（其中 $\phi,\psi\in(0,\pi/2]$）中$e^{i\phi}$与 $-e^{-i\psi}$之间的双曲距离为

$$d_{\mathbb{H}^2}\left(e^{i\phi},-e^{-i\psi}\right)=\ln\cot(\phi/2)+\ln\cot(\psi/2).$$

在我们的情形中为 $\psi=\pi/2$，因此 cot（$\pi/4$）$=1$，从而

$$d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{p},\tilde{q})=\ln\cot(\phi/2)=\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{(2+2a-x)(2-x)}{(y-2)(2+2a-y)}\right),\ \text{by Lemma 6.1.}$$

对于任意 $c \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{\ln|y-c|}{(y-x)^2}\,dy = -\frac{\ln|y-c|}{y-x} + \frac{\ln|y-x|}{x-c} - \frac{\ln|y-c|}{x-c} + \text{const},$$

and

$$\int \frac{1}{(y-x)^2}\,dy = -\frac{1}{y-x} + \text{const}.$$

因此，对于 $c \neq d$,

$$\int \frac{\ln\left|\frac{(x-c)(x-d)}{(y-c)(y-d)}\right|}{(y-x)^2}\,dy = \left(\frac{1}{y-x}+\frac{1}{x-c}\right)\ln|y-c| - \left(\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}\right)\ln|y-x| + \left(\frac{1}{y-x}+\frac{1}{x-d}\right)\ln|y-d| - \frac{\ln|(x-c)(x-d)|}{y-x} + \text{const},$$

并从 $y = c$ 到 $y = d$ 进行求值，得到

$$\int_c^d \frac{\ln\left|\frac{(x-c)(x-d)}{(y-c)(y-d)}\right|}{(y-x)^2}\,dy = \frac{2}{x-d}\ln\left|\frac{x-c}{d-c}\right| - \frac{2}{x-c}\ln\left|\frac{x-d}{c-d}\right| = 2\frac{d}{dx}J(x;d,c),$$

其中 $J(x;d,c) := 2\,\mathcal{L}\left(\frac{x-c}{d-c}\right)$. 取 $c = 2$，$d = 2+2a$，并对 x 从 $-\infty$ 到 0 积分，得到

$$\int_{-\infty}^{0}\int_2^{2+2a} \frac{\ln\left|\frac{(2+2a-x)(2-x)}{(y-2)(2+2a-y)}\right|}{(y-x)^2}\,dy\,dx = 2\int_{-\infty}^{0}\frac{d}{dx}J(x;2+2a,2)\,dx$$

$$= 4\,\mathcal{L}\left(-\frac{1}{a}\right) - 4\lim_{x\to-\infty}\mathcal{L}\left(\frac{x-2}{2a}\right) = -4\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{1+a}\right) + 4\,\mathcal{L}(1) = 4\,\mathcal{L}\left(\frac{a}{1+a}\right),$$

根据欧拉反射恒等式 $\mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(1-t) = \mathcal{L}(1) = \pi^2/6$ 以及朗道恒等式 $\mathcal{L}(-1/t) = -\mathcal{L}\left(\frac{1}{1+t}\right)$，当 $t > 0$时。 □

注 6.3。 另一种得到尖点对应的套索函数的方法，是取公式（77)公式（ ）中测地边界分支对应的套索函数的极限，其中测地边界的长度趋于 0。

6.2. 与锥点相关的套索函数

接下来，我们计算与锥角为 θ 的锥点相关的套索函数。为了使各种测度的公式对指标集中的所有元素都成立，我们要求 $\theta \le \pi/2$（见引理 44.22）。同样，令 α 为锥点，γ 为套索垂足所在裤子曲面的边界的另一个分支，m_α 为从 α 到 γ 的距离。用 $\mathrm{La}(\mathrm{m}_\alpha,\theta)$ 表示对应于该套索的单位切向量集合的测度。取到 $\mathbb{H}^2$ 的一个提升，使得 α 提升为 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，而 γ 的两个提升为 $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ 和 $[-\mathrm{b},-\mathrm{a}]$，其中 $0 < \mathrm{a} < \mathrm{b}$。这里 a、b 是 θ、m_α 的函数；若 $\theta \le \pi/2$，则由引理 44.22，$\mathrm{b} < 1$。见图 9。

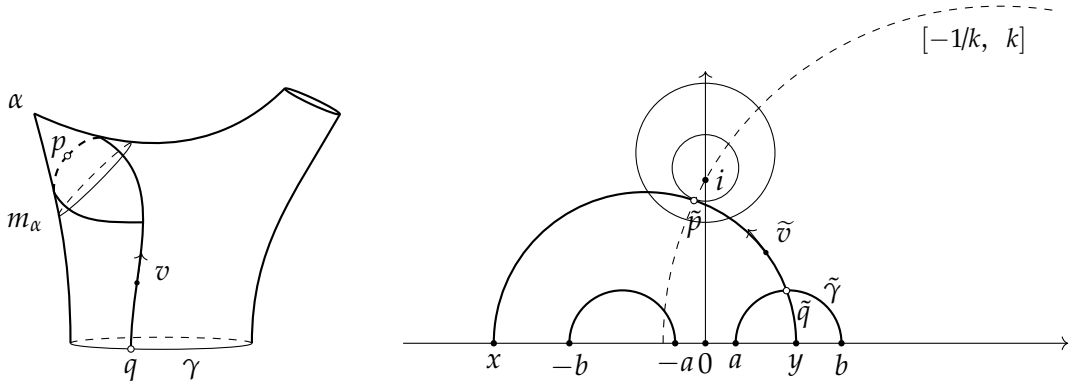


图 9：绕锥点的套索及其在 $\mathbb{H}^2$上的提升。

套索延伸到 $\mathbb{H}^2$ 的相关提升（通过发展映射）是测地线$[x、y]$，其中

$$a < y < b, \qquad -\frac{1}{y} < x < -b.$$

界限 $-^1$ y < x确保测地线 [x, y] 位于经过i $= \sqrt{-1}$的测地线 [−1/y, y] 下方。v的垂足位于点 ˜p和 ˜q之间的部分，其中 ˜q $=$[x, y] ∩ [a, b],，而 ˜p是 [x, y] 上距离i最近的点。特别地，˜p是 [x, y] 与测地线 [−1/k, k], 的交点，其中k满足调和交比（见 [Bea1212, Bea §7.24]）

$$[x, y, -1/k, k] = \frac{(x + 1/k)(y - k)}{(x - k)(y + 1/k)} = -1.$$

因此，k 可以用x 和y表示。其关系为

$$\frac{1}{k} - k = \frac{2 - 2xy}{x + y}. \tag{27}$$

我们有：

引理6.4. 产生套索且垂足位于 γ 并逆时针绕锥点 α （见图 99图） 的单位切向量集合的测度为

$$La(\gamma, \alpha) = \int_a^b \int_{-1/y}^{-b} \frac{2 d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{p}, \tilde{q})}{(y - x)^2}\, dx dy = \int_a^b \int_{-1/y}^{-b} \frac{\ln \left| \frac{(x-a)(x-b)(1+y^2)}{(y-a)(y-b)(1+x^2)} \right|}{(y - x)^2}\, dx\, dy,$$

其中，a，b 可表示为参数 θ 和 m_α 的函数。特别是，

$$a = \frac{\cosh m_\alpha \cos(\theta/2) - 1}{\sinh m_\alpha + \cosh m_\alpha \sin(\theta/2)}, \qquad b = \frac{\cosh m_\alpha \cos(\theta/2) + 1}{\sinh m_\alpha + \cosh m_\alpha \sin(\theta/2)}.$$

证明。 令 ϕ 和 ψ 为由 ˜q 和 ˜p 从$(x + y)/2$处对正实轴所张的角，则

$$d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \ln \cot(\phi/2) - \ln \cot(\psi/2) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x - a)(x - b)(y + 1/k)(y - k)}{(y - a)(y - b)(x + 1/k)(x - k)} \right|,$$

根据引理 6.6.11, 引理 。其中 k 由方程（2727）方程（ ）给出。利用方程（2727）方程（ ），

$$\frac{(y+1/k)(y-k)}{(x+1/k)(x-k)} = \frac{y^2-1+(1/k-k)y}{x^2-1+(1/k-k)x} = \frac{(x+y)(y^2-1)+(2-2xy)y}{(x+y)(x^2-1)+(2-2xy)x} = -\frac{y^2+1}{x^2+1}.$$

代入上式即可得到所述积分公式。用a和b 表示m_α 和 θ 的公式涉及双曲几何中的标准计算，这里略去。

□

因此，接下来只需计算

$$I(a,b) := \int_a^b \int_{-1/y}^{-b} \frac{\ln\left|\frac{(x-a)(x-b)(y^2+1)}{(y-a)(y-b)(x^2+1)}\right|}{(y-x)^2}\,dxdy, \tag{28}$$

其中 $0<a<b<1$。回顾一下，Rogers 二对数 $\mathcal{L}(\cdot)$ 在$\mathbb{C}\setminus((-\infty,0]\cup[1,\infty))$ 上全纯定义为

$$\mathcal{L}(z) := \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)\,\mathrm{Log}(1-z) = -\frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{\mathrm{Log}(1-t)}{t} + \frac{\mathrm{Log}(t)}{1-t}\right)dt,$$

其中 Li_2 是二重对数的主值分支（沿 $[1,\infty)$）切割），Log 是主对数（沿 $(-\infty,0]$）切割）。积分沿 $\mathbb{C}\setminus((-\infty,0]\cup[1,\infty))$中的任意路径从 0 积分到$z$。它可连续延拓至 0 和 1，并且 $\mathcal{L}(0)=\mathrm{Li}_2(0)=0$，且 $\mathcal{L}(1)=\mathrm{Li}_2(1)=\frac{\pi^2}{6}$。我们有$I(a,b)$的如下闭式表达。

—

引理 6.5. 设 $0<a<b<1$. 则

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \mathcal{L}(z)+\mathcal{L}(\bar z)-\mathcal{L}(1/z)-\mathcal{L}(1/\bar z) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathcal{L}(z)-\mathcal{L}(1/z)\right\}, \quad \textit{where } z := \frac{\frac{1-ab}{a+b}+i}{\frac{1-b^2}{2b}+i}. \end{aligned}$$

证明. 令 $a=\mathrm{Tan}\ \alpha, b=\mathrm{Tan}\ \beta$ 其中 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$, 并代入 $x=\mathrm{Tan} u, y=\mathrm{Tan}\, v$. 利用$1+\mathrm{Tan}^2 t=\sec^2 t$ 以及 $\mathrm{Tan}\, t-\mathrm{Tan}\, s=\sin(t-s)\cos t\cos s$ 可得

$$\frac{dx\,dy}{(y-x)^2} = \frac{du\,dv}{\sin^2(v-u)}, \qquad \frac{(x-a)(x-b)(1+y^2)}{(y-a)(y-b)(1+x^2)} = \frac{\sin(u-\alpha)\sin(u-\beta)}{\sin(v-\alpha)\sin(v-\beta)}.$$

定义

$$\Phi(t) := \ln\left|\sin(t-\alpha)\right| + \ln\left|\sin(t-\beta)\right|$$

其中 ln 是定义在实数集上的自然对数。

Then

$$I := I(a,b) = \int_\alpha^\beta \int_{v-\pi/2}^{-\beta} \frac{\Phi(u)-\Phi(v)}{\sin^2(v-u)}\,du\,dv. \tag{29}$$

对u进行分部积分，并使用 $\partial_u\big[\cot(v-u)\big] = 1/\sin^2(v-u)$，得到

$$\int \frac{\Phi(u)-\Phi(v)}{\sin^2(v-u)}\,du = \Big[(\Phi(u)-\Phi(v))\cot(v-u)\Big] - \int \Phi'(u)\,\cot(v-u)\,du,$$

其中 $\Phi'(t) = \cot(t-\alpha) + \cot(t-\beta)$。在下端点 $u = v - \frac{\pi}{2}$ 处，$\cot(v-u) = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$。因此

$$I = I_1 - I_2, \tag{30}$$

其中

$$I_1 := \int_\alpha^\beta \Big(\Phi(-\beta)-\Phi(v)\Big)\cot(v+\beta)\,dv, \quad I_2 := \int_\alpha^\beta \int_{v-\pi/2}^{-\beta} \Phi'(u)\,\cot(v-u)\,du\,dv.$$

在 I_1, 中进行拆分并作变量代换，我们得到

$$I_1 = \Phi(-\beta)\int_\alpha^\beta \cot(v+\beta)\,dv - \int_\alpha^\beta \Phi(v)\cot(v+\beta)\,dv \tag{31}$$

$$= 2F_0(\alpha+\beta,2\beta) - F_{\alpha+\beta}(0,\beta-\alpha) + F_{-2\beta}(0,\beta-\alpha), \tag{32}$$

其中

$$F_\delta(r_1,r_2) := \int_{r_1}^{r_2} (\ln\sin t)\cot(t+\delta)\,dt, \tag{33}$$

并且对于 $\delta = 0$，其极限形式为 $F_0(r_1,r_2) = \frac{1}{2}\big(\ln^2\sin r_2 - \ln^2\sin r_1\big)$。

现在，考虑梯形域 $\mathcal{R} = \{(u,\ v):\ \alpha \le v \le \beta,\ v - \frac{\pi}{2} \le u \le -\beta\}$，我们有

$$v \in \begin{cases} [\,\alpha,\ u+\frac{\pi}{2}\,], & u \in [\alpha-\frac{\pi}{2},\ \beta-\frac{\pi}{2}], \\ [\,\alpha,\ \beta\,], & u \in [\,\beta-\frac{\pi}{2},\ -\beta\,]. \end{cases}$$

在I_2, 中应用 Fubini 定理交换积分次序，然后进行拆分、合并和变量替换，我们得到

$$I_2 = \int_{\alpha-\pi/2}^{\beta-\pi/2} \Phi'(u)\left[\int_\alpha^{u+\pi/2} \cot(v-u)\,dv\right]du + \int_{\beta-\pi/2}^{-\beta} \Phi'(u)\left[\int_\alpha^{\beta} \cot(v-u)dv\right]du \tag{34}$$

$$= -\int_{\alpha-\pi/2}^{-\beta} \Phi'(u)\,\ln\sin(\alpha-u)\,du + \int_{\beta-\pi/2}^{-\beta} \Phi'(u)\,\ln\sin(\beta-u)\,du \tag{35}$$

$$= F_0(\alpha+\beta,2\beta) + F_{\beta-\alpha}(\alpha+\beta,\tfrac{\pi}{2}) - F_{-\beta+\alpha}(2\beta,\tfrac{\pi}{2}), \tag{36}$$

其中 F 由方程 (3333)方程 ( )。结合方程 (3030)方程 ( ), (3232)() 和 (3636)()，可得

$$I(a,b) = F_0(\alpha+\beta,2\beta) - F_{\alpha+\beta}(0,\beta-\alpha) + F_{-2\beta}(0,\beta-\alpha) - F_{\beta-\alpha}(\alpha+\beta,\tfrac{\pi}{2}) + F_{-\beta+\alpha}(2\beta,\tfrac{\pi}{2}). \tag{37}$$

断言 6.6. 设 $0 \le r_1 < r_2 \le \frac{\pi}{2}$ 且 $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 满足 $-\delta \notin [r_1, r_2]$。则

$$\begin{aligned} F_\delta(r_1, r_2) &:= \int_{r_1}^{r_2} (\ln \sin t) \cot(t+\delta)\, dt \\ &= -\tfrac{1}{2} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \left[\mathrm{Li}_2\!\left(\tfrac{\cot\delta - \cot(r_2+\delta)}{\cot\delta + \varepsilon i} \right) - \mathrm{Li}_2\!\left(\tfrac{\cot\delta - \cot(r_1+\delta)}{\cot\delta + \varepsilon i} \right) \right] + \Phi_\delta(r_2) - \Phi_\delta(r_1), \end{aligned}$$

其中 $\Phi_\delta(r) := \ln\left(\left| \sin(r+\delta) \sin\delta \right| \right) \ln(\sin r) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\left| \sin(r+\delta) \sin\delta \right| \right)$。

命题 6.6 *Claim .*. 证明。情形 $\delta = 0$ 由方程（3333）Equation ()给出，因此我们假设 $\delta \neq 0$。令 $u := \cot\delta$，并令 $v_j := \cot(r_j + \delta)$，其中 $j = 1, 2$。令 $x := \cot(t+\delta)$，则有 $dx = -(1+x^2)\, dt$，并且

$$\cot t = \frac{ux+1}{u-x}, \qquad \sin^2 t = \frac{(u-x)^2}{(1+u^2)(1+x^2)}.$$

Thus

$$\ln(\sin t) = \ln|u-x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

and

$$\begin{aligned} F_\delta(r_1, r_2) &= -\int_{v_1}^{v_2} \frac{x}{1+x^2} \left(\ln|u-x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \right) dx \\ &= J(u; v_1, v_2) + \tfrac{1}{4}\ln(1+u^2) \ln\frac{1+v_2^2}{1+v_1^2} + \tfrac{1}{8}\left(\ln^2(1+v_2^2) - \ln^2(1+v_1^2) \right), \end{aligned}$$

其中

$$J(u; v_1, v_2) := \int_{v_2}^{v_1} \frac{x}{1+x^2} \ln|u-x|\, dx = \tfrac{1}{2}\big(R(i) + R(-i)\big), \qquad R(z) := \int_{v_2}^{v_1} \frac{\ln|u-x|}{x-z}\, dx.$$

定义

$$\Psi_z(x) := \mathrm{Li}_2\!\left(\frac{u-x}{u-z} \right) + \ln|u-x| \mathrm{Log}\!\left(\frac{x-z}{u-z} \right), \quad z = \pm i.$$

由于 $\mathrm{u} \in \mathbb{R}$ 且 $\mathrm{z} = \pm \mathrm{i}$，路径 $\eta(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - \mathrm{z}$ $\mathrm{u} - \mathrm{z}$ 和 $\xi(\mathrm{x}) = \mathrm{u} - \mathrm{x}$ $\mathrm{u} - \mathrm{z}$ 与实轴仅在 $\eta(\mathrm{u}) = 1$ 和 $\xi(\mathrm{u}) = 0$ 处相交。因此，对于区间内所有实数 x，$\eta(\mathrm{x}) \notin (-\infty, 0]$ 和 $\xi(\mathrm{x}) \notin [1, \infty)$，所以 Log 和 Li_2 的主值分支在这些路径上均有效。因此，适用链式法则 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}_\xi \mathrm{Li}_2(\xi) = -\frac{\mathrm{Log}(1-\xi)}{\xi}$，直接求导可得

$$\Psi_z'(x) = \frac{\ln|u-x|}{x-z}.$$

因此，实数集 $(z) = \Psi_z(v_1) - \Psi_z(v_2)$，因此

$$\begin{aligned} J(u; v_1, v_2) = &-\tfrac{1}{2} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \left[\mathrm{Li}_2\!\left(\frac{u-v_2}{u-\varepsilon i} \right) - \mathrm{Li}_2\!\left(\frac{u-v_1}{u-\varepsilon i} \right) \right] \\ &- \tfrac{1}{2} \left[\ln|u-v_2| \ln\!\left(\frac{1+v_2^2}{1+u^2} \right) - \ln|u-v_1| \ln\!\left(\frac{1+v_1^2}{1+u^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

现在使用 $1+u^2 = \text{余割}^2\,\delta$ 和 $1+v_j^2 = \text{余割}^2(r_j+\delta)$ 以及恒等式

$$\ln(\sin r_j) = \ln|u-v_j| - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+v_j^2), \qquad j=1,2,$$

将对数项改写为$F_\delta(r_1,r_2)$ 的形式

$$\Phi_\delta(r_2) - \Phi_\delta(r_1), \qquad \Phi_\delta(r) := \ln\Big(\frac{|\sin(r+\delta)|}{|\sin\delta|}\Big)\ln(\sin r) - \tfrac{1}{2}\ln^2\Big(\frac{|\sin(r+\delta)|}{|\sin\delta|}\Big).$$

若$r_j = 0$，则将 $\Phi_\delta(0)$ 解释为其连续延拓，即 $\Phi_\delta(0) = 0$。

最后，替换 后，将$u = \cot\,\delta$和$vj = \cot(r_j+\delta)$ 代入，得到$F_\delta(r_1,r_2)$的所述公式。 □

应用命题 66.6命题 6。于方程（3737）方程（），对数项 $\Phi_\delta(r)$ 相消，表达式化简为以下八个 Li_2 项:

$$I(a,b) = \tfrac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm1}\Big[\mathrm{Li}_2\Big(1-\tfrac{1}{z_\varepsilon}\Big) - \mathrm{Li}_2\Big(1-z_\varepsilon\Big) - \mathrm{Li}_2\Big(1/z_\varepsilon\Big) + \mathrm{Li}_2\Big(z_\varepsilon\Big)\Big], \tag{38}$$

其中

$$z_\varepsilon := \frac{\cot(\beta+\alpha)+\varepsilon i}{\cot(2\beta)+\varepsilon i} = \frac{\frac{1-ab}{a+b}+\varepsilon i}{\frac{1-b^2}{2b}+\varepsilon i}, \qquad \text{for } \varepsilon\in\{\pm1\}.$$

应用欧拉反射恒等式 $\mathrm{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Log}(z)\,\mathrm{Log}(1-z)$，结合定义 $\mathcal{L}(z) := \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)\,\mathrm{Log}(1-z)$ 以及共轭性质 $\mathcal{L}(z) = \overline{\mathcal{L}(z)}$（在 Log 和 Li_2 的主值分支上有效），即可得到所需公式。 □

我们的命题 11.1111 命题 .是引理 6 的组合6.22，6引理 ..46.4 以及 6 5565。。。

7. 一般向量的刘维尔测度为满测度

设 X 是一个双曲锥面，它由一个完备双曲锥面 X 删去所有锥点后得到。令 $A\text{cones} := X\setminus\overline{X}$ 表示具有正~角的锥点集合。设 X 为 X 的万有覆盖，其覆盖映射为

$$\pi^\circ\colon \widetilde{X} \longrightarrow X,$$

~ ~赋予提升的双曲度量，并令X 为X的度量完备化。映射 π° 连续延拓为

$$\pi\colon \overline{\widetilde{X}} \longrightarrow \overline{X}.$$

我们将提升锥点集合定义为 $\widetilde{A}\text{cones} := \widetilde{X}\setminus\widetilde{X} = \overline{\pi^{-1}(A\text{cones})}$。

~注记 7.1。 度量完备化X 是一个包含离散子集

~ ~Acones的单连通空间。提升的锥点 ~$p \in A$cones 附近的几何结构是一个总角度无限的双曲锥~：以 ~p 为中心的度量圆长度无限。因此，X

$\sim$不同于 X，后者是 X 的万有覆叠轨形（定义于 X 为良轨形时$\sim$[周四2222， 周四第 13] 章）。在 X中，锥点的原像是总角度为$\sim 2\pi$的正则点，这反映了局部轨形基本群的有限阶；而在 X中，对穿孔进行“对数函数式”展开会产生一个无限角度的奇点。

固定一个发展映射

$$\mathrm{dev}^{\circ}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{D}$$

对应于X上的双曲度量。此映射是 $\pi_1(X)$–等变的局部等距。由于 dev° 是 1–利普希茨映射，它唯一地延拓为连续的 $\pi_1(X)$–等变映射

$$\mathrm{dev}\colon \overline{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathbb{D}, \tag{39}$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$该映射在$X = X \setminus A_{\text{cones}}$上仍是局部等距。

$\sim$**定义 7.2**（端点映射）。对于$x \in \overline{X}$，选取一个提升 $\sim x \in \overline{X}$ 并令$\hat{}x := \mathrm{dev}(\sim x) \in \mathbb{D}$。令$\Sigma_x X$ 表示x 处的方向空间（因此若$x \in X$，则$\Sigma_x X \simeq T_x^1 X$）。给定$u \in \Sigma_x X$，选取$\varepsilon > 0$ 并令

$$\gamma_{x,u}\colon [0,\varepsilon) \to \overline{X}$$

为一条从x 出发、初始方向为u 的测地线，使得$\gamma_{x,u}\big((0,\varepsilon)\big) \subset X$。由于 $\pi^{\circ}\colon \sim X \to X$ 是覆叠，因此存在唯一的提升

$$\tilde{\gamma}_{x,u}\colon (0,\varepsilon) \to \widetilde{X}$$

满足 $\pi^{\circ} \circ \tilde{\gamma}_{x,u} = \gamma_{x,u}|_{(0,\varepsilon)}$ 且 $\lim_{t\to 0} \tilde{\gamma}_{x,u}(t) = \sim x$；我们设 $\tilde{\gamma}_{x,u}(0) := \sim x$。在$(0,\varepsilon)$ 上，映射 dev 是局部等距，因此 $\mathrm{dev}\circ \tilde{\gamma}_{x,u}$ 是 $\mathbb{D}$ 中的一条测地线段，它唯一延伸为一条测地射线

$$r_{x,u}\colon [0,\infty) \to \mathbb{D}$$

其中 $r_{x,u}(0) = \hat{}x$ 且 $r_{x,u}|_{(0,\varepsilon)} = \mathrm{dev}\circ \tilde{\gamma}_{x,u}$。端点映射

$$\mathrm{end}_x\colon \Sigma_x \overline{X} \to \partial\mathbb{D}, \qquad \mathrm{end}_x(u) := \lim_{t\to\infty} r_{x,u}(t) \tag{40}$$

于是，对所选的提升 $\sim x$，该映射定义良好。将 $\sim x$ 替换为甲板变换 $g \in \pi_1(X)$，会使 end_x 与相应等距变换对 $\mathbb{D}$的边界作用复合。

固定 $\varepsilon_0 > 0$ 足够小，使得X 中所有非轨形锥点周围半径为ε_0的领圈两两不相交。令X_{ε_0} 为从 X 中移除这些非轨形锥点的 ε_0领圈并集后得到的子曲面。那么X_{ε_0} 是$\overline{X}$的凹核心。

对于$p \in \overline{X}$，方向$u \in \Sigma_p X$ 若相对于凹核心是非一般 X_{ε_0} 如果满足定义 1.5Definition 。；否则，它是一般的。当p 光滑时，非一般性具有对跖不变性：对于任意$v \in T_p^1 X$，v 是非一般的，当且仅当 $\iff$ $-v$ 是非一般的。以下定理表明，一般方向的集合具有满刘维尔测度。

定理 7.3。 设 X_{ε_0} 如上所定义，对于任意 $p \in X$，令 N^p 表示点 p 处相对于凹核心 X_{ε_0}的非一般方向集合。如果 θ 表示 $X\Sigma_p$上的角度（勒贝格）测度（即点 p 处的方向空间），那么 $\theta(N^p) = 0$。

证明。 如果 p 是锥点，或位于某个测地边界分支上，则该结论可直接由 [BPT2525，BPT定理 5 得出。3]。

反设，对于某个光滑点 $\mathrm{p} \in \mathrm{X}$，有 $\theta(\mathrm{N}^p) > 0$。将 $\mathrm{N}_p \subset \mathrm{T}_p^1(\mathrm{X})$ 视为由这些向量确定的、从 p 出发的测地射线集合。由于 N^p 对跖对称（即 $\mathrm{v} \in \mathrm{N}_p \Leftrightarrow -\mathrm{v} \in \mathrm{N}^p$），且 $\theta(\mathrm{N}^p) > 0$，因此在 p 处存在任意小角度 $|\delta|$ 的扇形 δ，使得 $\theta(\mathrm{N}_p \cap \delta) > 0$。如果 p 位于非轨形锥点 c 的 ε_0 领圈内，则选择 δ，使得其中每条射线 δ 一开始都远离 c。固定 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$，使得

$$d_X(p, c) > \varepsilon_1 \quad \text{for every } c \in A_{\text{non-orb}},$$

其中 $\mathrm{A}_{\text{non-orb}}$ 表示 X 上所有非轨形锥点的集合。通过移除所有非轧形锥点周围半径为 ε_1 的领圈的并集，类似地定义 $\mathrm{X}_{\varepsilon_1}$，从而得到 $\mathrm{X}_{\varepsilon_0}$。根据 δ 的选取以及定义 11.55、定义 .，$\mathrm{N}_p \cap \delta$ 中的所有测地射线都完全位于 $\mathrm{X}_{\varepsilon_1}$ 内。由紧致性可知（当 $|\delta|$ 足够小时），我们还可以假设 δ 的两条边界测地射线 α_1、α_2（其角间距等于 δ 的张角）也完全位于 $\mathrm{X}_{\varepsilon_1}$ 内。

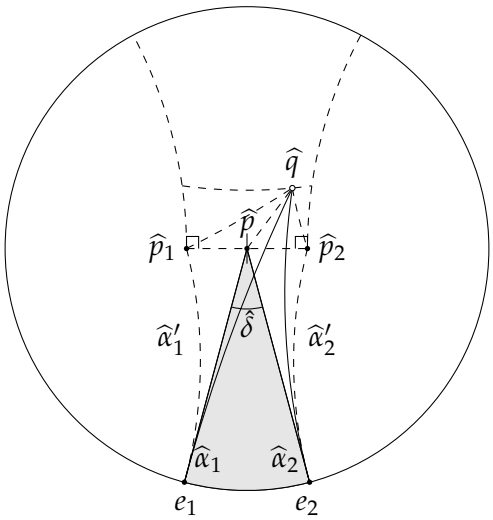


图 10：发展映射下相关提升在 $\mathbb{D}$ 中的像。

令 $\beta : [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \to X$ 为单位速度有向测地线段，其中点为 $\beta(0) = p$，位于 α_1 与 α_2之间，并平分 δ。令 η 为长度 $\frac{\varepsilon_1}{2}$的测地线段，在 p 处垂直于 β，其端点为 p_1, p_2，中点为 p。以一单位速度沿与 η 正交的测地流，将 η 沿负 β方向传送，直至首次相交时刻 τ

与 X 的一个边界元素相交；选取首个命中点 $q \in \eta_\tau$。这些平移 $\{\eta_s\}_{0\le s\le\tau}$扫出一个紧致的浸入条带 K，它与 X 的边界元素集合可能发生的接触仅出现在终端平移 η_τ 上。令 $[q,p]$, $[q,p_1]$, 和 $[q,p_2]$ 分别为嵌入于 K 中、从 q 到 p、p_1,和 p_2,的有向测地线段。

由于 $\alpha_i \subset X_{\varepsilon_1}$，且测地线段 $[p,\ p_i]$ 的长度为 $\frac{\varepsilon_1}{4}(i \in \{1,2\})$，连接路径$[p_i,\ p] * \alpha_i$包含于 $X^3_4{}_{\varepsilon_1}$ 中，并且（在轨形意义下）同伦于一条从 p_i出发的测地射线，我们将其记作 α_i'。

当 $|\delta|$ 足够小时，我们可以假设，对于每个 $i \in \{1,2\}$，p_i处的内角满足

$$\measuredangle_{p_i}([p_i,p],\alpha_i') \le \frac{\pi}{2}.$$

类似地，对于每个 $\eta \in N_p \cap \delta$ 和每个 $i \in \{1,2\}$，连接路径 $[p_i,\ p] * \eta$ 在轨形意义下同伦于一条从 p_i出发的测地射线，我们将其记作 η_i'。特别地，射线 η 和 η_i' 渐近，且与之相关的、具有一个理想顶点的测地三角形（除轨形锥点外均为浸入）完全位于 $X^3_4{}_{\varepsilon_1}$内。

根据上述构造和紧致性，存在 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$，使得对每个$\eta \in \mathrm{N}_p \cap \delta$，由 $[\mathrm{q},\mathrm{p}_1]$, $[\mathrm{q},\mathrm{p}_2]$, η_1' 和 η_2' 围成、除轨形锥点外均为浸入的凸四边形都包含在 $\mathrm{X}_{\varepsilon_2}$ 中，但 $\mathrm{q} \in \mathrm{A}_{\mathrm{non-orb}}$ 时，q 周围的 ε_2–领圈内可能例外。由凸性可知，在（轨形意义下的）同伦类中，存在唯一一条测地射线 γ，满足$\gamma(0) = \mathrm{q}$；该同伦类由连接 $[\mathrm{q},\mathrm{p}] * \eta$ 的路径给出。若 $\mathrm{q} \in \mathrm{A}_{\mathrm{non-orb}}$，则 γ在首次离开以 q 为中心的 ε_2-领圈后仍留在 $\mathrm{X}_{\varepsilon_2}$ 内。定义 $\mathrm{N}^{p\to q}$ 为这类测地射线 γ 的集合。将 $\mathrm{N}^{p\to q}$ 与$\Sigma_q\mathrm{X}$ 中对应的子集（q 处的方向空间）等同。令 $\delta' \subset \Sigma_q\mathrm{X}$ 为包含 $\mathrm{N}^{p\to q}$ 的最小扇形。则 $\mathrm{N}_{p\to q} \subset \mathrm{N}_q \cap \delta'$，其中 $\mathrm{N}_q \subset \Sigma_q\mathrm{X}$ 表示 q 处相对于 $\mathrm{X}_{\varepsilon_2}$ 的非一般方向。此外，当 $|\delta|$ 足够小时，$\mathrm{N}^{p\to q}$ 与 $\mathrm{N}_p \cap \delta$ 之间存在双射，其对应关系为

$$\Phi_{p,q} : N_p \cap \delta \to N_{p\to q}, \qquad \Phi_{p,q}(\eta) = \gamma \ \text{ where } \ [q,p] * \eta \simeq \gamma \text{ in the orbifold sense.} \qquad (41)$$

将发展映射 dev（见公式 (3939)Equation ( )）后复合一个 $\mathbb{D}$ 的等距变换，我们选择$\tilde{}\mathrm{p}$ 的一个提升 $\tilde{}\mathrm{p} \in \mathrm{X}$，使得 $\hat{}\mathrm{p} := \mathrm{dev}(\tilde{}\mathrm{p}) = 0$。图 10Figure 展示了 dev 对 p、q、$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$, 的相关提升以及上文构造的扇形 δ 和 δ' 的像，以及相应的测地射线。对于这些扇形，我们有

$$\mathrm{end}_p(\delta) = \mathrm{end}_q(\delta') =: I \subset \partial\mathbb{D},$$

其中端点映射 $\mathrm{end}_x(u)$ 在定义 77.22中有定义，定义 。因此

$$\Phi_{p,q} := \left(\mathrm{end}_q|_{\delta'}\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{end}_p|_{\delta}\right) : \delta \xrightarrow{\sim} \delta'$$

是一个以终点为终点的双射$_q \circ \Phi_{p,\ q}$ = 终点$_p$ 在 δ上。在$N_p \cap \delta$上，这与方程（4141）方程（ ）中的同伦定义一致。双曲几何中有如下标准事实。

引理 7.4。 映射 $\Phi_{p,\,q}:\ \ \delta \to \delta'$ 对于 p 和 q 处的角度度量是双利普希茨的。特别地，

$$\frac{1}{L}\,\measuredangle_p(u,v)\ \le\ \measuredangle_q\big(\Phi_{p,q}(u),\Phi_{p,q}(v)\big)\ \le\ L\,\measuredangle_p(u,v)\qquad (u,v\in\delta),$$

其中 $L:=\frac{\pi}{2}e^{\ell_X([p,\,q])}$。

引理 7 的证明7.44引理 。。 令 $\ell:=\ell_X([p,\ q])=d_{\mathbb{D}}(0,\hat{}q)$。记 $M_z(w)=\dfrac{+z\,w1+z\,w}{-}$，并令 $d_0(\xi,\ \eta)=|\xi-\eta|$ 为 $\partial\mathbb{D}$上的弦度量。那么

$$d_p(\xi,\eta):=d_0(\xi,\eta),\qquad d_q(\xi,\eta):=d_0\big(M_{\hat{q}}^{-1}\xi,M_{\hat{q}}^{-1}\eta\big),$$

以及边界导数估计

$$\Big|(M_{\hat{q}}^{-1})'(e^{i\theta})\Big|\in\Big[\frac{1-|\hat{q}|}{1+|\hat{q}|},\,\frac{1+|\hat{q}|}{1-|\hat{q}|}\Big]=\big[e^{-\ell},\,e^{\ell}\big]$$

给出

$$e^{-\ell}\,d_p(\xi,\eta)\ \le\ d_q(\xi,\eta)\ \le\ e^{\ell}\,d_p(\xi,\eta).\tag{42}$$

对于 $\xi,\ \eta\in\partial\mathbb{D}$ 的中心角为 $\measuredangle_0(\xi,\ \eta)\in[0,\pi]$时，

$$\frac{2}{\pi}\,\measuredangle_0(\xi,\eta)\ \le\ d_p(\xi,\eta)=2\sin\Big(\frac{\measuredangle_0(\xi,\eta)}{2}\Big)\ \le\ \measuredangle_0(\xi,\eta),$$

同样地，$\measuredangle_q(\xi,\ \eta)\le\frac{\pi}{2}d_q(\xi,\ \eta)$。现在对于 u、$v\in\delta$，

$$\measuredangle_q\big(\Phi_{p,q}(u),\Phi_{p,q}(v)\big)\ \le\ \tfrac{\pi}{2}\,d_q\big(\mathrm{end}_p\,u,\mathrm{end}_p\,v\big)\ \le\ \tfrac{\pi}{2}\,e^{\ell}\,d_p\big(\mathrm{end}_p\,u,\mathrm{end}_p\,v\big)\ \le\ \tfrac{\pi}{2}\,e^{\ell}\,\measuredangle_p(u,v),$$

利用方程（4242）方程（ ）和 $d_p\le\measuredangle_p$。交换 p 和 q即可得到反向不等式。 □

特别地，对于任意可测的 $E\ \subset\ \delta$, $\theta\ (E)\ =\ 0\ \iff\ \theta\big(\Phi_{p,q}\ (E)\ \big)\ =\ 0$。根据 [BPT2525，BPT定理 5.3] 以及事实 $N_{p\to q}=\Phi_{p,q}\ (N_p\cap\delta)\ \subset N^q$，我们有

$$\theta(N_q)=0\ \Rightarrow\ \theta(N_{p\to q})=0\ \Rightarrow\ \theta(N_p\cap\delta)=0,$$

这与假设 $\theta\ (N_p\cap\delta)\ >0$ 矛盾。 □

注7.5. 设$V=V\bar{k}(X)$ 表示X的凹核心，其中$(X,\vec{}k)$ 是一个可容许对。根据定义 22.11，定义 . 我们总可以选择 $\varepsilon_0\ >\ 0$ 足够小，使得$V\ \subseteq X_{\varepsilon_0}$。因此，相对于$V$ 而言的非一般向量集合的测度也为零。

参考文献

[AHM+20] Ahmed Almheiri、Thomas Hartman、Juan Maldacena、Edgar Shaghoulian 和 Amirhos- sein Tajdini。复制虫洞与霍金辐射熵。《高能物理学杂志》，2020(5):1–42，2020年。[AN22] Lukas Anagnostou 和 Paul Norbury。带锥点的双曲曲面模空间的体积。arXiv 预印本 arXiv:2212.13701，2022年。[Ano69] Dmitrij V Anosov。负曲率闭黎曼流形上的测地流。载于《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，体积 90，页码 1–235，1969年。[Bas93] Ara Basmajian。双曲流形的正交谱。《美国数学杂志》，115(5):1139–1159，1993年。[Bea12] Alan F Beardon。《离散群的几何》，体积 91。施普林格科学与商业媒体，2012年。[BPT25] Ara Basmajian、Hugo Parlier 和 Ser Peow Tan。素正交测地线、凹核心与双曲曲面上的恒等式族。《数学进展》，460:110026，2025年。[Bri11] Martin Bridgeman。模空间上测地层状结构的正交谱与二重对数恒等式。《几何与拓扑》，15(2):707–733，2011年。[BS09] Francesco Bonsante 和 Jean-Marc Schlenker。带粒子的反德西特流形与奇异曲面上的地震变换。《几何与泛函分析》，19(1):41–82，2009年。[BT14] Martin Bridgeman 和 Ser Peow Tan。双曲流形上测地流的边界命中函数的矩。《几何与拓扑》，18(1):491–520，2014年。[BT16] Martin Bridgeman 和 Ser Peow Tan。双曲流形上的恒等式。《手册：Teichmüller 理论》，第 V 卷，26:19–53，2016年。[Bus10] Peter Buser。《紧黎曼曲面的几何与谱》。施普林格科学与商业媒体，2010年。[Cal11] Danny Calegari。Bridgeman 正交谱恒等式。《拓扑论文集》，38:173–179，2011年。[DN09] Norman Do 和 Paul Norbury。Weil–Petersson 体积与圆锥曲面。《几何学专论》，141(1):93–107，2009年。[Doa25] Nhat Minh Doan。正交积分曲面。《数学进展》，466:110162，2025年。[DPT23] Nhat Minh Doan、Hugo Parlier 和 Ser Peow Tan。测量裤。《美国数学会会刊》，376(08):5281–5306，2023年。[Hop39] Eberhard Hopf。负曲率流形中测地线的统计。《Hirzel》，1939年。[Hop71] Eberhard Hopf。常负曲率曲面上的遍历理论与测地流。《美国数学会通报》，77(6):863–877，1971年。[HT14] Hengnan Hu 和 Ser Peow Tan。小双曲曲面上的新恒等式。《伦敦数学会通报》，46(5):1021–1031，2014年。

[KH95] Anatole Katok 和 Boris Hasselblatt。《动力系统现代理论导论》。第 54 卷。剑桥大学出版社，1995年。[LT14] Feng Luo 和 Ser Peow Tan。曲线模空间上的一个二重对数恒等式。《微分几何杂志》，97(2):255–274，2014年。[McO88] Robert C McOwen。黎曼曲面上的点奇点与共形度量。《美国数学会会刊》，103(1):222–224，1988年。[McS98] Greg McShane。Teichmüller 空间上的简单测地线与一个级数常数。《数学新进展》，132(3):607–632，1998年。[Mir07] Maryam Mirzakhani。带边黎曼曲面的模空间中的简单测地线与 Weil-Petersson 体积。《数学新进展》，167(1):179–222，2007年。[MM23] Hidetoshi Masai 和 Greg McShane。关于闭测地线最短长度与正交谱刚性。《数学年刊》，385(1):939–959，2023年。[Nic89] Peter J Nicholls。离散群的遍历理论，第 143 卷。剑桥大学出版社，1989年。[Que24] Nolwenn Le Quellec。正交谱与简单正交谱刚性：有限性与一般性。arXiv 预印本 arXiv:2412.15034，2024年。[Rog07] Leonard James Rogers。关于与级数 $\sum_1^\infty x^n$ n^2相关的函数求和定理。《伦敦数学会会刊》，2(1):169–189，1907年。[Thu98] William P Thurston。双曲曲面之间的最小拉伸映射。arXiv 预印本 math/9801039，1998年。[Thu22] William P Thurston。《三维流形的几何与拓扑》：附 Steven P. Kerckhoff 序，第 27 卷。美国数学会，2022年。[Tro91] Marc Troyanov。在带锥形奇点的紧曲面上指定曲率。《美国数学会会刊》，324(2):793–821，1991年。[TWZ06] Ser Peow Tan、Yan Loi Wong 和 Ying Zhang。McShane 恒等式在双曲锥曲面上的推广。《微分几何杂志》，72(1):73–112，2006年。[Wit20] Edward Witten。矩阵模型与 JT 引力的变形。《皇家学会会刊》，A，476(2244):20200582，2020年。[WX25] Yilin Wang 和 Yuhao Xue。黎曼曲面上的布朗环测度及其在长度谱中的应用。《纯粹与应用数学通讯》，78:2123–2148，2025年。

—

纽约市立大学研究生中心，第五大道365号，纽约，纽约州 10016，和
纽约市立大学亨特学院，公园大道695号，纽约，纽约州 10065，美国
电子邮件地址：abasmajian@gc.cuny.edu abasmajian@gc.cuny.edu

数学系，新加坡国立大学，新加坡，和越南科学技术翰林院数学研究所，越南电子邮件地址：dnminh@math.ac.vn dnminh@math.ac.vn

数学系，弗里堡大学，瑞士电子邮件地址：
hugo.parlier@unifr.ch hugo.parlier@unifr.ch

数学系，新加坡国立大学，新加坡电子邮件地址：
mattansp@nus.edu.sgmattansp@nus.edu.sg