arXiv:2601.03900v1 [math.PR] 7 Jan 2026

Mazur-Ulam定理的概率推广

Justinas Zaliaduonis Sergios Gatidis

2026年1月8日

摘要

经典的 Mazur-Ulam定理指出，赋范实向量空间之间的每个满射等距映射都是仿射变换。然而，在各种应用数学场景中，我们遇到的映射并非逐点保持距离，而是相对于某个概率测度几乎处处 保持距离。本文对 Mazur-Ulam定理在概率空间中的推广进行了严格论证。我们证明，若定义在 $\mathbb{R}^d$ 的某个子集上的可测映射，相对于具有满维支撑的测度几乎处处保持距离，则它几乎处处与一个全局欧几里得等距映射重合；该映射定义为先进行正交变换，再进行平移。

1 引言

等距映射的研究是巴拿赫空间几何的核心。该领域的奠基性成果是 Mazur-Ulam定理 [1], , 它刻画了保距映射的刚性。

定理 1.1（Mazur-Ulam）。设 V 和 W 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的赋范向量空间。若 $f\colon\ V \to W$ 是一个满射等距映射，则 f 是一个仿射映射。也就是说，$f(x) = T(x) + b$，其中 T 是线性映射，$b \in W$ 是平移向量。

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 的背景下，这意味着任何满射保距映射都是一个正交线性变换与平移的复合映射。

然而，严格的逐点约束对于测度论语境而言往往过于苛刻。一个自然的问题随之产生：如果一个映射“在大多数情况下”表现得像等距映射，它是否仍保有真正等距映射的刚性结构?

在本文中，我们研究将逐点等距条件放宽为相对于概率测度 μ 的几乎处处条件。我们试图回答以下问题:

> 设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上具有满维支撑的概率测度。若可测映射 $h\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 对 $\mu \times \mu$-几乎所有点对都保持距离，是否存在一个全局仿射等距变换 H，使得 $h = H$ 几乎处处成立?

我们对这一问题给出了肯定的回答。我们的方法连接了仿射几何与测度理论。首先，我们定义几乎处处等距变换的概念。随后，利用 $\mathbb{R}^d$ 中单纯形的几何性质构造一个候选全局等距变换，并运用 Fubini定理将等式推广到整个测度空间。

2 预备知识与定义

我们假设环境空间是欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$，配备标准内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 以及范数 $\|\cdot\|$。令 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 表示 Borel σ-代数。

2.1 测度论基础

定义 2.1 （满维支撑）。设 μ 是空间 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的概率测度。 μ 的支撑记为 $\mathrm{supp}(\mu)$，它是所有满足以下条件的点 $x \in \mathbb{R}^d$ 的集合： x 的每个开邻域都有正测度。若 $\mathrm{supp}(\mu)$ 不包含于 $\mathbb{R}^d$的任何真仿射超平面中，则称 μ 具有满维支撑 。

定义 2.2 (几乎处处等距变换)。 设 $(Z, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个概率空间，其中 $Z \subseteq \mathbb{R}^d$。若存在一个集合 $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$，使得$(\mu \times \mu)(D^c) = 0$，则称可测映射 h： $Z \to \mathbb{R}^d$ 是一个几乎处处等距变换 （或称 μ-几乎处处等距变换）：

$$\|h(z) - h(\tilde{z})\| = \|z - \tilde{z}\| \quad for\ all\ (z, \tilde{z}) \in D. \tag{1}$$

2.2 仿射几何

为证明主要结果，我们依赖有限几何结构的刚性。

定义 2.3 (仿射无关)。 若一组 $k+1$ 个点 $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^d$ 满足向量 $\{v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ 线性无关，则称其仿射无关。

定义 2.4 (仿射包)。 对于子集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，仿射包定义如下：

$$\mathrm{Aff}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in S, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}.$$

集合 S在 $\mathbb{R}^d$ 中具有满维性，当 $\mathbf{Aff}(S) = \mathbb{R}^d$。这要求 S 至少包含 $d+1$个仿射无关点。

3 有限等距变换的刚性

在处理概率情形之前，我们先证明：定义在一个足够丰富的有限集上的等距映射，能够唯一确定一个全局仿射等距变换。这是“锁定”该映射几何结构的关键步骤。

引理 3.1 （有限等距变换的延拓）。 设 $S = \{a_0, a_1, \ldots, a_d\} \subset \mathbb{R}^d$ 为由 $d+1$个仿射无关点组成的集合。设 f： $S \to \mathbb{R}^d$ 为一个在 S上保持两两距离的映射，即对于所有 $0 \le i$、$j \le d$，都有 $\|f(a_i) - f(a_j)\| = \|a_i - a_j\|$。

那么，存在唯一的全局欧几里得等距映射 H： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，其形式为 $H(x) = Qx + b$，其中 $Q \in O(d)$ （正交群），且 $b \in \mathbb{R}^d$，满足 $H|_S = f$。

证明。 定义 $i = 1, \ldots, d$ 的平移向量 $v_i = a_i - a_0$。由于 S 仿射无关，$\{v_1, \ldots, v_d\}$ 构成 $\mathbb{R}^d$ 的一组基。

类似地，定义 $w_i = f(a_i) - f(a_0)$。根据距离保持性质：

$$\|w_i\| = \|f(a_i) - f(a_0)\| = \|a_i - a_0\| = \|v_i\|.$$

此外，对于任意 i, j:

$$\|w_i - w_j\| = \|f(a_i) - f(a_j)\| = \|a_i - a_j\| = \|v_i - v_j\|.$$

利用极化恒等式 $\langle x,\ y\rangle = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)$，我们可推出内积保持不变：

$$\begin{aligned} \langle w_i, w_j \rangle &= \frac{1}{2}(\|w_i\|^2 + \|w_j\|^2 - \|w_i - w_j\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - \|v_i - v_j\|^2) \\ &= \langle v_i, v_j \rangle. \end{aligned}$$

设 V 为以 v_i 为列的矩阵， W 为以 w_i为列的矩阵。条件$\langle v_i,\ v_j\rangle = \langle w_i,\ w_j\rangle$ 意味着Gram矩阵相同： $V^TV = W^TW$。由于 v_i 构成一组基， V 可逆，因此我们可以定义一个线性映射 Q ，使得 $Qv_i = w_i$。具体而言，$Q = WV^{-1}$。

为证明 Q 是正交的，任取一个 $x \in \mathbb{R}^d$。我们可以写成 $x = \sum c_i v_i$。于是：

$$\|Qx\|^2 = \left\|\sum c_i w_i\right\|^2 = \sum_{i,j} c_i c_j \langle w_i, w_j\rangle = \sum_{i,j} c_i c_j \langle v_i, v_j\rangle = \left\|\sum c_i v_i\right\|^2 = \|x\|^2 .$$

由于 Q 是线性的且保持范数， $Q \in O(d)$。

最后，定义仿射映射 $H(x) = Q(x - a_0) + f(a_0)$。根据构造：

$$H(a_0) = Q(0) + f(a_0) = f(a_0),$$

$$H(a_i) = Q(v_i) + f(a_0) = w_i + f(a_0) = f(a_i) - f(a_0) + f(a_0) = f(a_i).$$

唯一性源于这样一个事实：仿射映射由其在一个 d-单形（由 $d+1$ 个点组成的仿射无关集）上的作用唯一确定。 □

4 主要结果：概率版 Mazur-Ulam 定理

现在，我们陈述并证明 Mazur-Ulam 定理在概率空间上的推广。

定理 4.1 （概率版 Mazur-Ulam 定理）。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上、具有全维支撑的概率测度。设 $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个相对于 μ 几乎处处为等距变换的可测函数。

那么，存在一个全局欧几里得等距映射 $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ （其中 $H（x） = Ax + b$ 满足 $A^TA = I$ 和 $b \in \mathbb{R}^d$） ，使得：

$$h(x) = H(x) \quad for\ \mu\text{-}almost\ all\ x.$$

证明。 设 $D \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 为一个满测度集合，使得 $(\mu \times \mu)(D^c) = 0$ ，且等距性质在 D上成立：

$$\|h(x) - h(y)\| = \|x - y\| \quad \forall (x, y) \in D.$$

步骤 1：选取一组基。 我们定义 D 的截面。对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$， 令 $D_x = \{y \in \mathbb{R}^d \mid (x,\ y) \in D\}$。根据 Fubini定理，由于 $(\mu \times \mu)(D^c) = 0$，存在一个集合 $X_0 \subset \mathbb{R}^d$ ，满足$\mu(X_0) = 1$ ，使得对于所有 $x \in X_0$， $\mu(D_x) = 1$。

由于 μ具有满维支撑， X_0 不包含在任何真仿射超平面中。我们可以迭代地选取一组 $d+1$ 个点 $\mathcal{S} = \{a_0, a_1, \ldots, a_d\}$ ，使其满足两个条件：(1)$\mathcal{S}$ 仿射无关；(2) $\mathcal{S}$ 中的所有点对都属于 D。

我们归纳地构造 $\mathcal{S}$。选取 $a_0 \in X_0$。令 $A_0 = D_{a_0} \cap X_0$。此集合的测度为 1。对于$k < d$，假设已选取 a_0、.....、a_k。定义 $A_k = (\cap_{i=0}^{k} D_{a_i}) \cap X_0$。由于这是有限个测度为 1 的集合的交集， $\mu(A_k) = 1$。因为 μ 具有满仿射支撑， A_k 不包含在 $\{a_0, \ldots, a_k\}$的仿射包中。选取 $a_{k+1} \in A_k$，使其与之前的点仿射无关。

由此得到的集合 $\mathcal{S} = \{a_0, \ldots, a_d\}$ 是仿射无关的，并且对于所有 $a_i, a_j \in \mathcal{S}$， $(a_i, a_j) \in D$，这意味着 $\|h(a_i) - h(a_j)\| = \|a_i - a_j\|$。

步骤 2：构造全局等距变换。根据引理 3.1，h 到 $\mathcal{S}$的限制可以唯一地扩张为全局欧几里得等距映射 $H\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，其定义为 $H(x) = Qx + b$。根据构造，对于所有 $i = 0, \ldots, d$，$H(a_i) = h(a_i)$。

步骤 3：几乎处处验证。我们声称，对于 μ-几乎所有的z，$h(z) = H(z)$。考虑集合：

$$G = \bigcap_{i=0}^{d} D_{a_i}.$$

由于对于每个 i，$\mu(D_{a_i}) = 1$，交集 G 具有 $\mu(G) = 1$。

对于任意 $z \in G$，根据定义，对于所有 $i = 0,$ ....., d，有$(z,\ a_i) \in D$。因此：

$$\|h(z) - h(a_i)\| = \|z - a_i\| \quad \forall i \in \{0, \ldots, d\}.$$

代入 $h(a_i) = H(a_i)$（来自步骤 2）：

$$\|h(z) - H(a_i)\| = \|z - a_i\|.$$

由于 H 是全局等距变换，它处处保持距离。因此：

$$\|H(z) - H(a_i)\| = \|z - a_i\|.$$

结合这些等式可得，对于任意 $z \in G$:

$$\|h(z) - H(a_i)\| = \|H(z) - H(a_i)\| \quad \forall i \in \{0, \ldots, d\}.$$

这意味着点 $h(z)$ 与点 $H(z)$ 到 $d + 1$ 点$\{H(a_0) \ldots,\ H(a_d)\}$的距离相等。由于 H 是一个仿射同构，集合 $\{H(a_0) \ldots,\ H(a_d)\}$ 是仿射无关的。

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中，一个点由其到 $d + 1$ 个仿射无关点的距离唯一确定。因此，对于所有 $z \in G$，必有 $h(z) = H(z)$。由于 $\mu(G) = 1$，证明得证。

□

5 结论

我们将 Mazur-Ulam定理严格推广到了概率空间的情形。借助单纯形的几何刚性和测度交集的性质，我们证明了，在具有满维支撑的条件下，测度论意义下的距离保持意味着整体的几何刚性。该结果弥合了概率泛函分析与经典仿射几何之间的差距，确保对于随机观察者而言看似等距的映射，实际上几乎处处都具有结构上的等距性。

参考文献

[1] S. Mazur 和 S. Ulam。 关于赋范向量空间的等距变换。巴黎科学院院刊，194：946–948，1932。