含不等式约束干扰参数的似然比检验统计量的渐近分布

Clara Bertinelli Salucci

奥斯陆大学数学与自然科学学院数学系，Moltke Moes Vei 35号，挪威奥斯陆 0316，clarabe@math.uio.no

arXiv:2601.03909v1 [stat.ME] 7 Jan 2026

摘要

众所周知，用于检验位于边界上的参数的似然比统计量，其渐近分布是卡方混合分布。研究表明，混合权重对应于相关切锥的内在体积，从而将此前彼此孤立的多种特殊情形统一起来。对于边界上感兴趣参数数量任意的情形，权重已得到充分理解；然而，当干扰参数也受到边界约束时（这在实际应用中十分常见），相关研究则少得多。本文首次对感兴趣参数和位于边界上的干扰参数数量均任意时，似然比检验统计量的渐近分布给出了一般性刻画。我们分析了从有 K 个感兴趣参数位于边界上的问题，转变为有 $K-m$ 个感兴趣参数和 m 个干扰参数的问题时，锥几何结构如何变化。在正交情形下，我们证明，卡方条形权重的变化具有一种闭式差分模式，可将概率质量重新分配到相邻自由度上；当干扰参数向量为一维时，即使在任意协方差结构下，这种模式仍是权重变化的主要组成部分。对于干扰参数数量一般的情形，我们提出一种新的基于秩的内在体积聚合方法，可准确近似混合权重。全面的模拟验证了该理论，并展现了所提近似方法的准确性。

关键词 非标准渐近理论；边界条件；卡方混合分布；干扰参数；圆锥内在体积。

1 引言

不等式约束下似然比检验统计量 λ_{LR} 渐近分布的研究，源于 Chernoff [1954], 的工作。他证明，在较弱的正则条件下，检验简单原假设与凸锥备择假设时的统计量，可表示为高斯向量到闭凸锥的距离平方。

其渐近分布是卡方贡献项的有限混合，通常记为$\bar{\chi}^2$（卡方混合分布）。 [Kudo， 1963] 随后的一些研究给出了特定多面体构型（如单侧或正交象限型备择）下权重的早期显式闭式表达式，例如 [Bartholomew； 1961], 这些研究通过涉及多元正态概率的直接计算得出混合权重。之后，Self 和 Liang [1987], 针对若干构型给出了具体公式，他们通过纯几何论证，利用底层切锥的结构得出了相应的权重。

在此之前，已有结果大多局限于个别特殊情形。Shapiro 的开创性工作带来了重大的概念转变：他指出，混合权重可以一般性地表示为与切锥及其极体各个面相关联的高斯概率。这一洞见将彼此孤立、各不相同的实例统一到连贯的几何图景之中。后续研究大幅深化了这一理论的几何与概率基础。Takemura 和 Kuriki 将 Shapiro 按面给出的高斯概率表示与多面锥的内在体积联系起来，首次明确指出卡方条形权重即为圆锥内在体积，并进一步将该理论拓展至光滑锥或分段光滑锥。Amelunxen 等人取得了一项重大的概念进展，他们建立了基本的概率恒等式，将内在体积与到凸锥上的高斯投影联系起来。在这些思想的基础上，Amelunxen 和 Lotz 为多面锥的内在体积发展出一套详尽的组合理论，证明了明确的按面分解；这些分解与 Shapiro 的研究中早已出现的高斯内角和外角相吻合。综上，这些进展将 Shapiro 最初的洞见发展为一个广泛而灵活的几何框架，使人们能够通过凸锥几何的视角分析似然比检验中的边界问题。

尽管取得了这些进展，干扰参数在这一统一的几何处理中的作用仍基本未被涉及；然而，在大多数应用领域——从粒子物理学 [Alexe 等人、 2025] 到宇宙学 [Kitching 等人、 2009] 再到计量经济学 [Wu 等人、 2013] 以及生物统计学 [Wu 等人， 2020] ——这类参数往往数量众多且不可避免，因此任何真正统一的理论都应将其纳入其中。据我们所知，只有 Self 和 Liang [1987] 以及 Kopylev 和 Sinha [2011] 研究了边界上存在干扰参数时的影响，但他们的分析至多限于一到两个干扰参数，以及一个同样位于边界上的感兴趣参数，并且没有回到上文提到的基于内在体积或角度的表示。

在本文中，我们通过作出三项贡献，拓展了 Shapiro 最初贡献所蕴含的一般范围。首先，我们从任意数量的感兴趣参数出发，在正交情形下，对将感兴趣参数降格为边界干扰参数所产生的影响进行了精确刻画。特别地，我们获得了所得 $\bar{\chi}^2$ 权重的闭式描述，这些权重呈现出概率质量在相邻分量之间的对称重新分配。当将边界上的一个或更一般地任意数量 $m < K$ 的参数视为干扰参数时，这为零锥如何发生变化提供了精确的几何表示。

其次，我们确立了协方差扰动下权重的稳定性性质。对于任意多面锥，我们证明，在正相关条件下，当协方差偏离恒等矩阵时，正交差分模式仍然是首阶项。相关权重与正交权重之间的差异由锥维数与各向异性指数的某个常数倍所界定，其中各向异性指数用于衡量变换后的锥偏离

正交性的程度。这促使我们在非正交情形下，当某个参数被降为干扰参数时，使用正交差分模式来近似 $\bar{\chi}^2$权重。

第三，由于当多个参数被降为干扰参数时，几何变形会逐渐由干扰参数坐标与协方差结构之间的相互作用主导，因此这种近似可能会变差。为此，我们引入一种新的基于秩的内在体积聚合方法，该方法通过费舍尔信息矩阵的舒尔补获得。对于任意数量的边界干扰参数，这一构造都能给出准确且高效的近似 $\bar{\chi}^2$ 权重；当感兴趣参数的数量适中（约为 6–7 个以内）时，效果尤为显著。

所有结果，包括理论推导和数值研究，均在局部渐近正态框架下建立。全面的模拟证实了在正交情形下所推导引理的精确性，并表明所提出的近似在存在相关参数时仍然有效。

2 背景与记号

设 $\{ f(x;\, \theta) :\, \theta \in \mathbb{R}^K \}$ 为一个正则参数族，且 $(X_1, \ldots, X_n)$ 为来自概率密度$f(\,\cdot\,;\, \theta_0)$ 的独立同分布样本，其中真实参数值为 $\theta_0 \in \mathbb{R}^K$。令 P_θ 表示单个观测的分布，其概率密度为 $f(\,\cdot\,;\, \theta)$，令 P_θ^n表示样本的联合分布。记 $\mathrm{l}_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i;\, \theta)$ 为对数似然函数，令 $\mathrm{l}'_{\theta_0}(X) = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{l}(X;\, \theta)\big|_{\theta=\theta_0}$表示单个观测在 θ_0 处的得分函数，并令 $I(\theta_0) = -\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\theta^\top}\mathrm{l}(X;\, \theta)|_{\theta=\theta_0}\right]$表示在 θ_0 处的期望费舍尔信息矩阵。在标准的可微性、可识别性及费舍尔信息正则条件下，该模型在θ_0 [处满足局部渐近正态性（LAN）（勒卡姆，1960年；范德瓦尔特， 1998]）。特别地，令 $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathrm{l}'_{\theta_0}(X_i)$，则有 $W_n \xrightarrow{d} W \sim N_K\big(0, I(\theta_0)\big)$在 P_{θ_0} 下成立，并且对 h 在 $\mathbb{R}^K$ 的紧子集内一致成立，

$$\ell_n\left(\theta_0 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) - \ell_n(\theta_0) = h^\top W_n - \tfrac{1}{2}h^\top I(\theta_0)h + o_{P_{\theta_0}}(1). \tag{1}$$

公式 (1) 表明，在局部重参数化 $\theta = \theta_0 + \mathrm{h}/\sqrt{n}$ 下，对数似然过程收敛于一个高斯位移实验的对数似然比过程，其对数似然比为 $\Lambda(\mathrm{h};\, W) = \mathrm{h}^\top W - \frac{1}{2}\mathrm{h}^\top I(\theta_0)\mathrm{h}$，因此，可以通过该极限二次型的几何结构来研究 θ_0 邻域内的推断问题。LAN 展开还给出了最大似然估计量（MLE）$\hat{\ }\theta_n$ 的渐近正态性，即 $Z_n := \sqrt{n}\,(\hat{\ }\theta_n - \theta_0) = I^{-1}(\theta_0)\, W_n + o_{P_{\theta_0}}(1) \xrightarrow{d} Z \sim N_K\big(0, I^{-1}(\theta_0)\big)$。等价地，用 Z 表示极限对数似然比，可写为 $\Lambda(\mathrm{h};\, Z) = \mathrm{h}^\top I(\theta_0)\, Z - \frac{1}{2}\mathrm{h}^\top I(\theta_0)\,\mathrm{h}$。因此，遵循 Self 和 Liang [1987], 的结论，该边界问题在渐近意义下等价于估计单个高斯观测 $Z \sim N_K(0$ 的受限均值 $I^{-1}(\theta_0))$，其中最大似然估计量由将 Z 投影到适当的可容许均值锥上得到。

假设参数空间受以下形式的不等式约束：$\theta_i \geq 0 \text{for} i = 1, \ldots\ldots, K$，且在零假设下，对所有 $i = 1, \ldots\ldots, K$，都有 $\theta_{0,\,i} = 0$。在局部坐标$h = \sqrt{n}(\theta - \theta_0)$中，这些约束定义了一个凸锥 $C = \{h \in \mathbb{R}^K : h_i \geq 0 \text{ for all } i\}$。令$C_0 \subseteq C$ 表示与零假设 $\theta_i = 0 \text{ for } i = 1, \ldots\ldots, K$相关联的锥；在这个完全受约束的边界情形下，该锥简化为 $C_0 = \{0\}$。如前所述，在极限高斯

实验中，在 H_1（分别为 H_0）下的最大似然估计，是通过在$h \in C$（分别为$h \in C_0$）上最大化极限对数似然比 $\Lambda(h; Z)$得到的；等价地，它是 Z 在 C（分别为 C_0）上的 $I(\theta_0)$-正交投影。事实上，由于

$$\Lambda(h; Z) = h^\top I(\theta_0) Z - \tfrac{1}{2} h^\top I(\theta_0) h = \tfrac{1}{2}\|Z\|^2_{I(\theta_0)} - \tfrac{1}{2}\|Z - h\|^2_{I(\theta_0)},$$

我们有

$$\sup_{h \in C} \Lambda(h; Z) = \tfrac{1}{2}\|Z\|^2_{I(\theta_0)} - \tfrac{1}{2} \inf_{h \in C} \|Z - h\|^2_{I(\theta_0)} = \tfrac{1}{2}\|P_C(Z)\|^2_{I(\theta_0)}$$

$$\sup_{h \in C_0} \Lambda(h; Z) = \tfrac{1}{2}\|P_{C_0}(Z)\|^2_{I(\theta_0)},$$

其中， $P_C(Z)$表示 Z在 $I(\theta_0)$-正交投影到 C上，而$\|x\|^2_{I(\theta_0)} = x^\top I(\theta_0) x$。因此，似然比检验统计量具有如下渐近表示

$$\lambda_{\mathrm{LR}} = 2\Big\{ \sup_{h \in C} \Lambda(h; Z) - \sup_{h \in C_0} \Lambda(h; Z) \Big\} = \|P_C(Z)\|^2_{I(\theta_0)} - \|P_{C_0}(Z)\|^2_{I(\theta_0)}, \tag{2}$$

which 与 Self 和 Liang 的公式（3.1） [1987] 在投影形式下相同 .

为便于分析，Self & Liang 进行了线性变换，将 $I(\theta_0)$-内积转换为通常的欧几里得内积。设 $I(\theta_0) = PDP^\top$ 为信息矩阵的谱分解，其中 P 为正交矩阵， $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_K)$为由特征值构成的正对角矩阵。定义变换后的变量

$$\tilde{Z} = D^{1/2} P^\top Z, \qquad \tilde{h} = D^{1/2} P^\top h, \tag{3}$$

使得 $\tilde{Z} \sim N_K(0, \mathbb{I}_K)$，其中 $\mathbb{I}_K$是 K维单位矩阵。该线性映射使内积变为欧几里得内积:

$$\langle x, y \rangle_{I(\theta_0)} = x^\top I(\theta_0) y = (D^{1/2} P^\top x)^\top (D^{1/2} P^\top y) = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle.$$

相应的变换后的锥为

$$\tilde{C} = \{ D^{1/2} P^\top h : h \in C \}, \qquad \tilde{C}_0 = \{ D^{1/2} P^\top h : h \in C_0 \}, \tag{4}$$

并且，式 (2) 可重写为 $\lambda_{\mathrm{LR}} = \|P_{\tilde{C}}(\tilde{Z})\|^2 - \|P_{\tilde{C}_0}(\tilde{Z})\|^2$，其中 $\|\cdot\|$表示标准的 ˜欧几里得范数。随机向量 Z 现在具有相互独立的标准正态分量，而所有关于相关性和相对尺度的信息都已纳入变换后的锥的几何结构中。

对于 K 个感兴趣参数（以下简称 PoIs）， λ_{LR} 的零分布是由具有不同自由度的卡方分布构成的有限混合,

$$\lambda_{\mathrm{LR}} \sim \sum_{j=0}^{K} w_j \chi^2_j, \qquad w_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{K} w_j = 1,$$

即， $\bar{\chi}^2$ 分布 [Kudo， 1963]。混合权重 $w_j = w_j(\tilde{C}, \tilde{C}_0)$ 仅取决于备择锥和零锥的几何结构；对于位于边界上的 K 个感兴趣参数，且满足˜$C_0 = \{0\}$ 的情形，它们仅取决于备择锥，并可用高斯

圆锥角表示如下 [Shapiro，1985，1988，Takemura 和 Kuriki， 1997]。对于维度为 j 的每个面 F of C，设 $\alpha(F)$ 和 $\beta(F)$ 分别表示其内高斯角和外高斯角；那么，权重可表示为

$$w_j(\tilde{C}) = \sum_{\substack{F \subseteq \tilde{C} \\ \dim(F)=j}} \alpha(F)\,\beta(F), \tag{5}$$

其中，对每个 $j = 0, \ldots, K$，求和遍历 C 中维度为 j 的各个面。正如前文所述，这些量与 C [Amelunxen 等人（2014）、Amelunxen 和 Lotz（ 2017]）定义的圆锥内在体积相同。在 $\tilde{C} = \mathbb{R}^K_+$ 参数正交这一特殊情形下，式（5）中的角度可以分解，权重则化为二项式形式 [Shapiro， 1985, 1988]

$$w_j(\mathbb{R}^K_+) = 2^{-K}\binom{K}{j}, \tag{6}$$

这反映出 Z 的每个坐标独立地以概率 1/2 落在正半轴上。当参数不正交时，锥 C 是正交象限的一个斜线性像，式（5）中的角度不再能够分解。将线性映射写成式（3）和式（4）的形式，备择锥为 $\tilde{C} = D^{1/2}P^\top \mathbb{R}^K_+ = \{Au : u \in \mathbb{R}^K_+\}$，其生成矩阵为 $A = [a_1, \ldots, a_K] = D^{1/2}P^\top$。令 G 为生成元的（欧几里得）格拉姆矩阵，$G = (a_i^\top a_j)_{1 \le i, j \le K} = A^\top A$，并令 $H = G^{-1}$。对于任意指标子集 $S \subseteq \{1, \ldots, K\}$，我们将 $F_S = \{\sum_{i \in S} \lambda_i a_i : \lambda_i \ge 0\}$ 记为由射线 $\{a_i : i \in S\}$ 生成的 C 的面，其维度为 $|S| = j$。内高斯角和外高斯角可以用中心正态分布的正交象限概率表示，其协方差矩阵由 H 的主子矩阵和极对偶格拉姆矩阵 G 构造，参见例如 [Shapiro（1985，1988）、Takemura 和 Kuriki（ 1997],）

$$\alpha(F_S) = \Pr\{N_{|S|}(0, H_{SS}) \in \mathbb{R}^{|S|}_+\}, \qquad \beta(F_S) = \Pr\{N_{K-|S|}(0, \widehat{H}_{TT}) \in \mathbb{R}^{K-|S|}_+\},$$

其中，$T = S^C$ 表示 S 在 {1、……、 K} 中的补集，$\widehat{G} = D_H^{-1/2} H D_H^{-1/2}$ 为极对偶格拉姆矩阵，$\widehat{H} = \widehat{G}^{-1}$，且 $D_H = \mathrm{diag}(H_{11}、……、 H_{KK})$。因此，权重可计算为

$$w_j(\tilde{C}) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,K\} \\ |S|=j}} \Pr\{N_{|S|}(0, H_{SS}) \in \mathbb{R}^{|S|}_+\} \Pr\{N_{K-|S|}(0, \widehat{H}_{TT}) \in \mathbb{R}^{K-|S|}_+\}. \tag{7}$$

当 $A = \mathbb{I}_K$ 时，式 (7) 可简化为式 (6) 的二项式表达式（等价地，当 $\tilde{C}$ 锥 C 为正正交象限时），因此 $G = H = \widehat{H} = \mathbb{I}_K$，且每个正交象限概率都等于 $2^{-|S|}$ 或 $2^{-|T|}$。在实际应用中，当参数不正交时，必须计算相应锥的内在体积，才能得到混合分布的权重。早期研究（如 Shapiro [1985, 1988] 和 Robertson 等人 [1988] ）探讨了低维情形下这些权重的解析刻画；Sun [1988] 提出了适用于小型系统的递归数值积分方法，而 Wolak [1987] 则给出了计量经济学不等式检验中出现的若干低维锥的精确表达式。后来，Silvapulle [1996] 引入了适用于一般多面锥的蒙特卡罗投影算法；Lin 和 Lindsay [1997] 则将这些权重与 Weyl 管公式联系起来，从而使其与锥的几何结构直接相关。较新的计算进展包括 Miwa 等人提出的递归积分方法，

[2003] 适用于中等维度的准蒙特卡罗方案、Genz 和 Bretz [2009]针对高维高斯锥提出的方法，以及 Amelunxen 和 Lotz [2017], 基于模拟的框架；该框架通过反复进行高斯投影来近似内在体积。在接下来的章节中，我们将探讨当一个或多个坐标不再被视为感兴趣参数，而是被“降格”为干扰参数时，这些权重会如何变化；此时，零假设不再将这些参数的值固定为零。

3 降级一个参数为干扰参数

3.1 独立参数

考虑这样一种情形： K 个正交参数被约束为非负，但只有前 $K-1$ 个参数具有推断兴趣，而最后一个参数充当干扰参数。在这种情况下，零假设锥不再对应于单个点˜（原点），而是对应于位于备择锥 $\tilde{C} = \mathbb{R}_+^K$边界上的一维射线 $C_0 = \{(0,\dots,0,t) : t \geq 0\}$，即 $\tilde{C}_0 = \mathbb{R}_+ e_K$，其中 $e_K = (0,\dots,0,1)^\top \in \mathbb{R}^K$表示第 K个标准基向量。这一修改改变了零锥的几何结构，从而改变了其内在体积和相关投影，进而改变混合权重。在正交情形下，一个参数被降级所引起的权重变化由以下引理刻画。

引理 3.1。 令 $\bar{w}_j^\perp = 2^{-K}\binom{K}{j} for\ j = 0,\dots,K$ 表示点零假设锥 $\tilde{C}_0 = \{0\}$ 下 K 个独立感兴趣参数的 $\bar{\chi}^2$ 权重；令 $\bar{w}_j^\perp for\ j = 0,\dots,K$ 表示将第 K 个参数视为干扰参数时对应的˜权重，即射线零假设锥 $C_0 = \mathbb{R}_+ e_K$ 下的权重。定义 $\Delta_j^\perp = \bar{w}_j^\perp - \dot{w}_j^\perp for\ j = 0,\dots,K$。则

$$
\begin{aligned}
\Delta_0^\perp &= \frac{1}{2^K}, \\
\Delta_j^\perp &= 2^{-K}\left[\binom{K-1}{j} - \binom{K-1}{j-1}\right], \qquad 1 \leq j \leq K-1, \\
\Delta_K^\perp &= -\frac{1}{2^K}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

等价地， $\bar{w}_j^\perp = \dot{w}_j^\perp + \Delta_j^\perp for\ j = 0,\dots,K$ 定义了一个有效的 $\bar{\chi}^2$ 权重序列，满足

$$
\sum_{j=0}^{K} \Delta_j^\perp = 0, \qquad \sum_{j=0}^{K} \bar{w}_j^\perp = 1.
$$

该引理的证明见附录 1。

引理 3.1 表明，在正交情形下，将一个参数“降级”会在相邻分量之间对称地重新分配概率质量：对于 $K = 2$，总质量的 1/4 从最高阶分量（$j = 2$）转移到零分量（$j = 0$）；对于 $K = 3$，1/8 同时从 $j = 3$ 转移到 $j = 1$，并从 $j = 2$转移到 $j = 0$；对于更大的 K，也会出现类似的重新分配模式。

3.2 向相关参数的推广

在正交情形下，用射线零假设替代点零假设锥，会使 $\bar{\chi}^2$ 权重发生变化，变化量由公式（8）中的显式数值给出，以下记为 $\Delta_j^{\perp}$；这种变化完全源于几何结构的改变。

现在我们进一步考虑参数相关的一般情形。在这种情况下，向各向同性高斯坐标的线性变换确实会改变锥的度量几何结构，但将点零假设改为射线零假设所引起的组合修改仍然相同。由于内在体积权重随变换后生成元的格拉姆矩阵平滑变化，只要协方差畸变较小，点零假设权重与射线零假设权重之间的差异就仍接近其正交对应项。以下结果表明，这种“正交”质量重新分配实际上在紧谱类中的所有协方差矩阵下都保持稳定，其偏差由变换的各向异性以及边界上的感兴趣参数数量决定。

定理 3.2（正协方差畸变下 $\bar{\chi}^2$ 权重的扰动界）。 设$\tilde{C} \subset \mathbb{R}^K$ 为备择多面锥在如下线性变换下的像：该变换将$Z \sim N_K$（$0, \Sigma$） 映射为各向同性高斯分布 $\tilde{Z} \sim N_K$（$0, \mathbb{I}_K$），其中 $\Sigma = I^{-1}$（θ_0） 是一个元素均为正的协方差矩阵。令 $\tilde{C}_0^{\mathrm{pt}} = \{0\}$ 表示与 K 个受约束的感兴趣参数对应的点零假设锥，令 $\tilde{C}_0^{\mathrm{ray}}$ 表示通过将其中一个参数降为干扰参数而得到的射线零假设锥，该锥对应于与该参数相关联的 C 生成元。

对于 $j = 0$、.....、 K，定义

$$\dot{w}_j := w_j(\tilde{C}, \tilde{C}_0^{\mathrm{pt}}; \Sigma), \qquad \bar{w}_j := w_j(\tilde{C}, \tilde{C}_0^{\mathrm{ray}}; \Sigma),$$

并记

$$\dot{w}_j^{\perp} := w_j(\tilde{C}, \tilde{C}_0^{\mathrm{pt}}; \mathbb{I}_K), \qquad \bar{w}_j^{\perp} := w_j(\tilde{C}, \tilde{C}_0^{\mathrm{ray}}; \mathbb{I}_K).$$

在正交情形（$\Sigma = \mathbb{I}_K$） 下，显式差异 $\Delta_j^{\perp}: = \bar{w}_j^{\perp} - \dot{w}_j^{\perp}$见引理 *3.1*。令 $\mathcal{U}_\kappa$ 表示谱有界协方差类

$$\mathcal{U}_\kappa := \left\{\Sigma \succ 0 : \ \kappa^{-1}\,\mathbb{I}_K \ \preceq \ \Sigma \ \preceq \ \kappa\,\mathbb{I}_K\right\},$$

其中， $\kappa \geq 1$ 是控制各向异性程度的谱界参数。

对于 $\Sigma \in \mathcal{U}_\kappa$，令 $G(\Sigma)$ 表示应用定义 C的˜线性映射后锥生成元的格拉姆矩阵，并定义各向异性指数

$$\delta(\Sigma) := \left\| G(\Sigma) - G(\mathbb{I}_K) \right\|_{\mathrm{op}},$$

其中， $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示谱范数（算子范数）。

那么，对于任意 $\Sigma \in \mathcal{U}_\kappa$ 以及任意 $j = 0$、.....、 K，

$$\bar{w}_j = \dot{w}_j + \Delta_j^{\perp} + \varepsilon_j(\Sigma, K), \tag{9}$$

其中

$$\varepsilon_j(\Sigma, K) := \left(\bar{w}_j - \bar{w}_j^{\perp}\right) - \left(\dot{w}_j - \dot{w}_j^{\perp}\right),$$

且误差项满足一致界

$$\max_{0 \leq j \leq K} |\varepsilon_j(\Sigma, K)| \ \leq \ c_K(\tilde{C}, \kappa)\,\delta(\Sigma),$$

~其中常数 $c_K(C,\kappa) > 0$ 仅取决于谱半径界 κ 以及 C的几何结构~，而这又取决于 K。

证明。 根据 ε_j 的定义，为了证明该定理，只需对 $|\dot{w}_j - \dot{w}_j^{\perp}|$ 和 $|\bar{w}_j - \bar{w}_j^{\perp}|$ 在 Σ 上的扰动取得一致界。具体策略是：(i) 将每个权重表示为高斯正交象限概率之和；(ii) 证明这些概率关于底层协方差具有 Lipschitz 连续性；(iii) 控制相关协方差块随 Σ 的变化。

根据前面回顾的内在体积公式，有

$$\dot{w}_j = \sum_{\substack{\mathcal{S}\subseteq\{1,\dots,K\}\\ |\mathcal{S}|=j}} P_{\mathcal{S}}(\Sigma)\,\widehat{P}_{\mathcal{T}}(\Sigma), \qquad \mathcal{T} = \mathcal{S}^{\complement}, \tag{10}$$

^其中， $P_{\mathcal{S}}(\Sigma)$ 和 $P_{\mathcal{T}}(\Sigma)$ 是涉及 $H(\Sigma)$ 的主子块及其极体的高斯正交象限概率。因此，控制 $\dot{w}_j$ 就等价于控制这些正交象限概率随 Σ 的变化。

对于任意维度 d 下的协方差矩阵 Γ，令

$$\Phi_d(\Gamma) := \Pr\{N_d(0,\Gamma) \in \mathbb{R}^d_+\} = \int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi_\Gamma(x)\,dx,$$

表示与协方差 Γ 相关的高斯正交象限概率。为了理解 Φ_d 在 Γ 的扰动下如何变化，考虑对称扰动 $\Gamma_t = \Gamma + t\Delta\Gamma$。标准的矩阵微积分恒等式给出

$$\partial_{\Delta\Gamma}\varphi_\Gamma(x) = \frac{1}{2}\,\varphi_\Gamma(x)\Big(x^\top\Gamma^{-1}(\Delta\Gamma)\Gamma^{-1}x - \operatorname{tr}(\Gamma^{-1}\Delta\Gamma)\Big).$$

对于 $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \in \mathrm{K}_{d,\,M}$，线段 $\Gamma_t = (1-t)\Gamma_1 + t\Gamma_2,$ 在 $t \in [0,1],$ 的条件下仍属于紧谱类 $\mathrm{K}_{d,\,M}$，而 K 是凸集。因此，下面推导的导数界将在 $t \in [0,1]$ 中一致成立。此外，由于 Γ_t保持在 $\mathrm{K}_{d,\,M}$ 中，存在 $c,\ C > 0$，使得

$$\left|\partial_{\Delta\Gamma}\varphi_{\Gamma_t}(x)\right| \le Ce^{-c\|x\|^2} \quad \text{for all } t \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}^d,$$

且右端在 $\mathbb{R}^d_+$ 上可积。因此，根据控制收敛定理，可以将导数移入积分号下，

$$D\Phi_d(\Gamma)[\Delta\Gamma] = \int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{\Delta\Gamma}\varphi_\Gamma(x)\,dx.$$

假设

$$\Gamma \in \mathcal{K}_{d,M} := \{\Gamma \succ 0 :\ M^{-1}\mathbb{I}_d \preceq \Gamma \preceq M\mathbb{I}_d\}.$$

那么 $\|\Gamma^{-1}\| \le M$，因此

$$|x^\top\Gamma^{-1}(\Delta\Gamma)\Gamma^{-1}x| \le M^2\|\Delta\Gamma\|\,\|x\|^2, \qquad |\operatorname{tr}(\Gamma^{-1}\Delta\Gamma)| \le dM\,\|\Delta\Gamma\|. \tag{11}$$

将 (11) 代入导数公式可得

$$|\partial_{\Delta\Gamma}\varphi_\Gamma(x)| \le \tfrac{1}{2}\,\varphi_\Gamma(x)\big(M^2\|\Delta\Gamma\|\,\|x\|^2 + dM\|\Delta\Gamma\|\big).$$

对 N_d 的截断矩进行积分并界定，可得

$$|D\Phi_d(\Gamma)[\Delta\Gamma]| \le c(d,M)\,\|\Delta\Gamma\|, \qquad c(d,M) = \tfrac{1}{2}dM(M^2+1). \tag{12}$$

因此，在紧谱类上，高斯正交象限概率关于协方差矩阵是一致利普希茨连续的。

现在将利用导数界 (12) 为 Φ_d 在谱类 $\mathrm{K}_{d,M}$ 上获得全局利普希茨界。具体而言，我们证明 Φ_d 关于 Γ 是利普希茨连续的，这意味着协方差的微小扰动会使正交象限概率产生相应的小幅变化。

对于 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathrm{K}_{d,M}$，定义 $\Gamma_t = (1-t)\Gamma_1 + t\Gamma_2$。由于谱类是凸集，且 (12) 是一致的，

$$\Phi_d(\Gamma_2) - \Phi_d(\Gamma_1) = \int_0^1 D\Phi_d(\Gamma_t)[\Gamma_2 - \Gamma_1]\,dt.$$

因此

$$|\Phi_d(\Gamma_2) - \Phi_d(\Gamma_1)| \le c(d,M)\,\|\Gamma_2 - \Gamma_1\|. \tag{13}$$

也就是说， Φ_d 关于 Γ 在谱类 $\mathrm{K}_{d,M}$ 上是利普希茨连续的。

映射 $\Sigma \mapsto G(\Sigma)$ 在紧集 U_κ 上光滑，且求逆运算在正定锥上光滑，因此

$$\|H(\Sigma) - H(\mathbb{I}_K)\| \le c_1(\tilde{C},\kappa)\,\delta(\Sigma). \tag{14}$$

主子矩阵满足相同的界：

$$\|H_{\mathcal{S}\mathcal{S}}(\Sigma) - H_{\mathcal{S}\mathcal{S}}(\mathbb{I}_K)\| \le c_1(\tilde{C},\kappa)\,\delta(\Sigma), \tag{15}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于 H、 H^{ray} 和 H^{ray}，结论

类似。

由 (10) 得，

$$|\dot{w}_j - \dot{w}_j^{\perp}| \le \sum_{|\mathcal{S}|=j} \Big(|P_{\mathcal{S}}(\Sigma) - P_{\mathcal{S}}^{\perp}| + |\widehat{P}_{\mathcal{T}}(\Sigma) - \widehat{P}_{\mathcal{T}}^{\perp}| \Big),$$

其中 $\mathrm{T} = \mathrm{S}^{\complement}$。结合 Lipschitz 界 (13) 与块扰动界 (15)，对于每个固定子集 S，我们得到：

$$|P_{\mathcal{S}}(\Sigma) - P_{\mathcal{S}}^{\perp}| \le c(j,\kappa)\,\delta(\Sigma), \qquad |\widehat{P}_{\mathcal{T}}(\Sigma) - \widehat{P}_{\mathcal{T}}^{\perp}| \le c(K-j,\kappa)\,\delta(\Sigma),$$

对于适当的常数 $c(j,\ \kappa)$，其仅取决于块的维度和 κ。由于对于固定的 K，大小为 j 的子集 $\mathrm{S} \subseteq \{1,\ \ldots\ldots,\ K\}$ 只有有限多个，我们可以将˜由此得到的有限和吸收到一个仅取决于 K 以及 C的几何结构的常数中，从而得到

$$|\dot{w}_j - \dot{w}_j^{\perp}| \le c_K(\tilde{C},\kappa)\,\delta(\Sigma), \tag{16}$$

˜对于某些 $c_K(C,\kappa) > 0$。

该 ^同样的论证可直接应用于协方差块 $H^{\mathrm{ray}}(\Sigma)$ 和 $H^{\mathrm{ray}}(\Sigma)$，从而得出 g

$$|\bar{w}_j - \bar{w}_j^{\perp}| \le c_K(\tilde{C}, \kappa)\, \delta(\Sigma). \tag{17}$$

结合式（16）和式（17），并明确使用三角不等式，

$$|\varepsilon_j(\Sigma, K)| = \left|(\bar{w}_j(\Sigma) - \bar{w}_j^{\perp}) - (\dot{w}_j(\Sigma) - \dot{w}_j^{\perp})\right| \le |\bar{w}_j(\Sigma) - \bar{w}_j^{\perp}| + |\dot{w}_j(\Sigma) - \dot{w}_j^{\perp}| \le 2\, c_K(\tilde{C}, \kappa)\, \delta(\Sigma),$$

~，常数 $c_K(C,\ \kappa)$ 中可吸收因子 2。代入式（9）即完成证明。

□

备注 3.3： 定理 3.2 表明，与点零锥和射线零假设锥相关的 $\bar{\chi}^2$ 权重之间的差异，

$$\Delta_j(\Sigma) = \bar{w}_j(\Sigma) - \dot{w}_j(\Sigma), \qquad j = 0, \ldots, K,$$

与其正交对应项 $\Delta_j^{\perp}$的偏离量可由一个有界项控制，该项仅通过 K~的几何结构（例如其面格）依赖于 C，并且仅通过各向异性指数 $\delta(\Sigma)$ 依赖于 Σ。这带来了若干影响。

（*i*）正交情形 Δ 是首阶项。 在正交情形 $\Sigma = \mathbb{I}_K$下，向量 $\Delta^{\perp}$具有引理 3.1 给出的精确闭式表达式。该定理表明，对于一般的 Σ，$\Delta^{\perp}$仍是主导贡献，而相关性仅引入一个受控的~扰动，其大小至多为 $c_K(C,\ \kappa)\ \delta(\Sigma)$。

(ii) 的增长。 该定理没有对 K规定具体的增长速率，而是将 K依赖性完全隔离在 $c_K(C, \kappa)$ 中，并表明对于固定的几何结构，误差会随 $\delta(\Sigma)$ 平滑变化。

(iii) 对 Σ的各向异性的依赖。 量 $\delta(\Sigma) = \|G(\Sigma) - G(\mathbb{I}_K)\|_{\mathrm{op}}$衡量变换后的锥偏离正交情形的程度。因此，该定理隐含地指出，将一个生成元降为干扰方向对 $\bar{\chi}^2$ 权重的影响，主要取决于由 $G(\Sigma)$ 所刻画的锥的局部几何结构，并且会随其偏离正交情形的程度按利普希茨方式变化。当 Σ 近似为对角矩阵时，近似效果极佳；随着协方差变得更具各向异性，近似效果会平滑地变差。

(iv) 实际意义。 该定理支持在应用中使用“正交差值”近似：从点零假设的权重出发，加上正交的 $\Delta^{\perp}$，即可准确近似真实的射线零假设权重，前提是协方差畸变并不严重。

备注 3.4。 严格来说，定理 3.2 的证明并不要求 Σ 的各项均为正。然而，只有在相关性非负的情况下，λ_{LR} 的渐近分布才能具有真正的 $\bar{\chi}^2$ 混合解释 [Bertinelli Salucci 等人2025], 指出，负相关会改变锥几何结构，从而可能导致有效的 $\bar{\chi}^2$ 表示无法成立。因此，尽管扰动展开式 (9) 对所有 $\Sigma \in \mathrm{U}_\kappa$ 均成立，但将其概率解释为对 $\bar{\chi}^2$ 权重的扰动，则隐含地依赖于正相关情形。对于 $\rho < 0$，Bertinelli Salucci 等人 [2025] 在双参数情形中提出的扩展原则上可以推广到 K 参数，但这种推广超出了本文的研究范围。

推论 3.5 （等相关）。 设

$$\Sigma_\rho = (1-\rho)\,\mathbb{I}_K + \rho\,\mathbf{1}\mathbf{1}^\top, \qquad -\frac{1}{K-1} < \rho < 1,$$

是一个等相关协方差矩阵，其条件数为

$$\kappa(\Sigma_\rho) = \frac{1+(K-1)\rho}{1-\rho} \quad \textit{so that} \quad \kappa(\Sigma_\rho) - 1 = \frac{K\rho}{1-\rho}.$$

那么其各向异性指数满足

$$\delta(\Sigma_\rho) = \|G(\Sigma_\rho) - G(\mathbb{I}_K)\|_{\mathrm{op}} \;\le\; \frac{K\rho}{1-\rho}.$$

因此，由定理 *3.2* 可得

$$\max_{0\le j\le K} |\varepsilon_j(\Sigma_\rho, K)| \;\le\; c_K(\tilde{C}, \kappa(\Sigma_\rho))\,\frac{K\rho}{1-\rho}.$$

特别地，对于固定的 $\rho < 1$，与正交差 $\Delta^\perp$ 的偏差至多按 $K\rho/(1-\rho)$ 的阶增长，几何常数 $c_K(C, \kappa(\Sigma_\rho))$ 除外。

证明。 Σ_ρ 的特征值为 $\lambda_1 = 1+(K-1)\rho$ 和 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_K = 1-\rho$，由此得到所述条件数。其逆矩阵为

$$\Sigma_\rho^{-1} = \frac{1}{1-\rho}\,I - \frac{\rho}{(1-\rho)\{1+(K-1)\rho\}}\,\mathbf{1}\mathbf{1}^\top,$$

因此所有对角元素均等于

$$a = \frac{1+(K-2)\rho}{(1-\rho)\{1+(K-1)\rho\}},$$

且所有非对角元素均相等

$$b = -\,\frac{\rho}{(1-\rho)\{1+(K-1)\rho\}}.$$

由于 $G(\Sigma_\rho) = D^{-1/2}\Sigma_\rho^{-1}D^{-1/2}$ 且 $D = a\,\mathbb{I}_K$，我们得到

$$G(\Sigma_\rho) = \mathbb{I}_K - \alpha\big(\mathbf{1}\mathbf{1}^\top - \mathbb{I}_K\big), \qquad \alpha = \frac{\rho}{1+(K-2)\rho}.$$

因此 $G(\Sigma_\rho) - \mathbb{I}_K$ 的特征值为 α （重数为 $K-1$）和 $-\alpha(K-1)$，所以

$$\delta(\Sigma_\rho) = \|G(\Sigma_\rho) - \mathbb{I}_K\|_{\mathrm{op}} = \alpha(K-1) = \frac{(K-1)\rho}{1+(K-2)\rho} \;\le\; \frac{K\rho}{1-\rho}.$$

将此界代入定理 3.2，即可得到所述结论。 □

推论 3.5 表明，对于等相关协方差矩阵 Σ_ρ，界可明确写为$\delta(\Sigma_\rho) \le K\rho/(1-\rho)$，从而保证在 K和 ρ适中的情况下，扰动保持较小。

4 一般情形下的干扰参数个数

4.1 独立参数

引理 4.1. 设 $\dot{w}_j^{\perp} = 2^{-K}\binom{K}{j}$ 表示 $j = 0$、.....、 K 个受非负约束的独立感兴趣参数所对应的 $\bar{\chi}^2$ 权重，其点零假设锥为 $C_0^{\mathrm{pt}} = \{0\}$。对于固定的整数 m 且满足$1 \le m \le K-1$，设 $\bar{w}_j^{(m)\perp}$、 $j = 0$、.....、 K表示将最后 m 个坐标视为位于边界上的干扰参数时的 $\bar{\chi}^2$ 权重。

当最后的 m 个参数是受约束的干扰参数时（即在 H_0 下 $\theta_{K-m+1}, \ldots, \theta_K \ge 0$），相应的零锥是一个 m维面

$$\tilde{C}_0^{(m)} = \left\{(0, \ldots, 0, t_{K-m+1}, \ldots, t_K) : t_j \ge 0 \ for \ j = K-m+1, \ldots, K\right\}$$

或者，等价地， $\tilde{C}_{(m)0}$ =锥$(e_{K-m+1}, \ldots, e_K)$ $\cong \mathbb{R}_+^m$。于是，

$$\Delta_j^{(m)\perp} = \bar{w}_j^{(m)\perp} - \dot{w}_j^{\perp} = \begin{cases} 2^{-K}\left[2^m\binom{K-m}{j} - \binom{K}{j}\right], & 0 \le j \le K-m, \\ -2^{-K}\binom{K}{j}, & K-m+1 \le j \le K. \end{cases}$$

并且对于 $j = 0, \ldots, K$，有 $\bar{w}_j^{(m)\perp} = \dot{w}_j^{\perp} + \Delta_j^{(m)\perp}$

$$\sum_{j=0}^{K} \Delta_j^{(m)\perp} = 0, \qquad \sum_{j=0}^{K} \bar{w}_j^{(m)\perp} = 1.$$

等价地，

$$\bar{w}_j^{(m)\perp} = \begin{cases} 2^{-(K-m)}\binom{K-m}{j}, & 0 \le j \le K-m, \\ 0, & K-m+1 \le j \le K, \end{cases}$$

而对于 $m = 1$，这可简化为引理 *3.1*。

该引理的证明见附录 1。

4.2 相关参数

从理论角度看，定理 3.2 为在将一个参数降级为干扰参数时，使用点零问题的 $\bar{\chi}$权重以及正交差分模式 $\Delta^{\perp}$ 提供了充分依据。原则上，同样的论证可推广至一般数量 $m \ge 1$ 的边界干扰参数：证明中唯一的变化是将射线零假设锥˜替换为 C的一个 m维面，扰动界仍然成立。形式上，可得到如下形式的误差界：

$$\max_j |\varepsilon_j^{(m)}(\Sigma; K)| \ \le \ c_{K,m}(\tilde{C})\, \delta(\Sigma),$$

当 $m = 1$时，该结果可简化为定理 3.2 的结论。

然而，当 $m > 1$时，定理 3.2 原本就较为宽松的界会进一步变差，变得过于粗糙而无法提供有用信息。因此，基于正交

差分模式的近似不再足够准确，无法带来实际益处。

因此，对于 $m > 1$ 存在相关参数的情形，我们引入一种不同的近似策略，该策略不依赖于正交差分模式。这个想法虽属启发式，但有几何考量作为依据：备择锥的每个面 F_I 都会贡献一个“有效”自由度，其数值取决于感兴趣参数与干扰参数坐标如何通过费舍尔信息矩阵相互作用。这会对面质量 m_S进行基于秩的重新汇总，实际应用中，这样得到的似然比 LAN 极限分布近似会精确得多。具体构造如下。

定义 4.2（含 m 干扰参数时的基于秩的近似 $\bar{\chi}^2$ 权重）。 设参数划分为 $\vartheta = (\psi,\ \gamma)$，其中 $\psi \in \mathbb{R}^p,\ \ \gamma \in \mathbb{R}^m,$ 并考虑单侧假设 $H_0:\ \psi = 0,\ \ \gamma \geq 0$ 对比 $H_1:\ \psi \geq 0,\ \gamma \geq 0$。 设 $K = p + m,$ 令 $I(\vartheta_0)$表示 $\vartheta_0 = 0$处的费舍尔信息矩阵，并分别用 P 和 N 表示感兴趣参数与边界上的干扰参数的指标集。

与第 2 节一样，令

$$\tilde{Z} = D^{1/2}P^\top Z \qquad \text{and} \qquad \tilde{C} = D^{1/2}P^\top \mathbb{R}^K_+.$$

表示变换后的各向同性高斯得分以及对应的变换后备择˜ ˜锥。设 $\{F_S:\ S \subseteq \{1,\dots,K\}\}$ 为 C 的面，其内在体积质量为 $m_S = \alpha(\tilde{F}_S)\ \beta(\tilde{F}_S)$。对于任意一个面 $\tilde{F}_S$，索引集 S 列出不等式约束˜处于激活状态的坐标，也就是说，投影到 F_S 后，恰好将 S 中的坐标设为严格正值，而 S 之外的坐标则固定为零。

当所有 K 坐标都被视为边界上的感兴趣参数时，点零假设的权重 $\bar{\chi}^2$ 可通过按 $|S \cap \mathrm{P}|$ 分组面质量得到，其中 $|S \cap \mathrm{P}|$ 表示处于激活状态的感兴趣参数数量：

$$w_u^{(\mathrm{point})} = \sum_{S:\,|S\cap\mathcal{P}|=u} m_S, \qquad u = 0,\dots,p.$$

˜对于射线零假设问题 $H_0:\ \psi = 0,\ \gamma \geq 0,$ 面 F_S 可能同时激活感兴趣参数和干扰参数坐标，例如 $S\mathrm{P} = S \cap \mathrm{P}$ 和 $S\mathrm{N} = S \cap \mathrm{N}$。为量化在考虑该面上处于激活状态的干扰分量后，仍具信息量的感兴趣参数方向数量，我们考察主费舍尔信息子块 $I(\vartheta_0)_{SS}$，其形式为

$$I_{SS} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{P}\mathcal{P}} & I_{\mathcal{P}\mathcal{N}} \\ I_{\mathcal{N}\mathcal{P}} & I_{\mathcal{N}\mathcal{N}} \end{pmatrix},$$

并通过舒尔补定义逐面有效费舍尔信息

$$I_{\mathrm{face}} = I_{\mathcal{P}\mathcal{P}} - I_{\mathcal{P}\mathcal{N}} I_{\mathcal{N}\mathcal{N}}^{-1} I_{\mathcal{N}\mathcal{P}}.$$

相应的有效秩

$$r(S) = \mathrm{rank}(I_{\mathrm{face}}) \in \{0, 1, \dots, |S\mathcal{P}|\}$$

表示面 S 上与干扰参数方向保持线性独立的感兴趣参数方向的数量。

通过按以下有效秩对射线零假设问题的基于秩的近似 $\bar{\chi}^2$ 权重进行分组，可以得到这些权重

的面质量：

$$w_u^{(\mathrm{ray})} = \sum_{S:\, r(S)=u} m_S, \qquad u = 0, \dots, p,$$

然后进行归一化，使得 $\sum_{u=0}^{p} w_u^{(\mathrm{ray})} = 1$。这些 $w_u^{(\mathrm{ray})}$称为用于检验边界上存在相关干扰参数时非负感兴趣参数的基于秩的近似 $\bar{\chi}^2$ 权重。

˜注4.3。基于秩的近似将变换后的锥 C中所有具有相同有效自由度的面归为一组，其中有效自由度按与该面相关的舒尔补的秩计算；随后将这些面的内在体积质量相加，得到近似的 $\bar{\chi}^2$ 权重。在存在相关参数时，这是一种近似方法；但当费舍尔信息矩阵为对角矩阵时，也就是所有$K = p + m$ 坐标都正交时，该方法便是精确的。

事实上，如果 I 是对角矩阵，那么对于每个面 F_S，都有 $I_{\mathcal{P}N} = I_{N\mathcal{P}} = 0$ ，且逐面计算的舒尔补可简化为 $I_{\mathrm{face}} = I_{\mathcal{P}\mathcal{P}}$。由于 $I_{\mathcal{P}\mathcal{P}}$是一个大小为 $|S\mathrm{P}| \times |S\mathrm{P}|$的对角矩阵，且在活跃感兴趣参数坐标上的元素严格为正，因此我们有

$$r(S) = \mathrm{rank}(I_{\mathrm{face}}) = |S\mathcal{P}|.$$

因此，基于秩的聚合规则

$$w_u^{(\mathrm{ray})} = \sum_{S:\, r(S)=u} m_S$$

与按活跃感兴趣参数的数量对面质量进行分组完全一致，也就是通过对所有满足 $|S\mathrm{P}| = u$ 的面 S 求和得到的精确 $\bar{\chi}^2$ 权重。对于正交参数，面质量满足 $m_S = 2^{-K}$，而满足 $|S\mathrm{P}| = u$ 的面数量$\binom{p}{u}2^m$等于。由此

$$w_u^{(\mathrm{ray})} = 2^{-K}\binom{p}{u}2^m = 2^{-p}\binom{p}{u}, \qquad u = 0, \dots, p,$$

这些恰好是独立单侧参数的经典 $\bar{\chi}^2$ 权重。因此，在独立情形下，所提出的基于秩的权重能够恢复精确结果。

当某个面上的感兴趣参数方向与干扰参数方向高度共线，导致 I_{face} 秩降低时，才会偏离精确的射线零假设 $\bar{\chi}^2$ 权重；从这个意义上说，当感兴趣参数分量保留了大量无法由干扰参数块解释的信息时，近似最准确。

5 数值验证

本节评估前文针对相关情形提出的 $\bar{\chi}^2$ 权重近似的准确性。引理 3.1 和引理 4.1 的数值验证见附录 2。所有模拟均直接在局部渐近正态（LAN）框架下进行，通过从高斯极限实验 $Z \sim \mathrm{N}_K(0,\ \Sigma)$ 中抽取样本，且满足 $\Sigma = I(\theta_0)^{-1}$。在每种

配置下，我们将通过 10^5 MonteCarlo (MC) 次重复得到的似然比统计量经验分布与相应的 $\bar{\chi}^2$ 混合进行比较。

对于每种配置，我们都提供图形，对比两种分布的累积分布函数（CDF）。每个面板中显示的指标用于量化二者的一致程度：对比 50th 和 95th 的 λ_{LR}经验分位数与理论分位数；柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫型距离

$$D_\infty \;=\; \sup_{t\geq 0}\left|F_{\text{emp}}(t) - F_{\text{mix}}(t)\right|,$$

即经验累积分布函数 F_{emp}与理论混合累积分布函数 F_{mix}之间的最大垂直差；名义水平为 $\alpha = 0.05$ 时的校准诊断，其定义为

$$\text{Tail}/\alpha \;=\; \frac{1 - F_{\text{emp}}(t^{\text{mix}}_{0.95})}{\alpha},$$

其中， $t^{\text{mix}}_{0.95}$ 表示理论混合分布的 95% 分位数。

5.1 定理 1 的结果

为评估正交权重差近似在相关情形下的表现，我们考察了采用弱相关和强相关协方差矩阵Σ的 $K \in \{4,7,10\}$；这些矩阵通过从 [0, 0.5] 和 [0.5、0.9]分别均匀抽取相关性后，再转换为有效的正定矩阵而得到。

图 1 展示了弱相关情形下的结果：我们观察到，对于所有 $K \in \{4，7、10\}$， λ_{LR} 的经验累积分布函数与解析近似（红色）几乎无法区分。虽然这些距离略大于正交情形下的结果——在正交情形下， K 的三个取值对应的距离均为 0.002，见附录 2——但各面板中报告的柯尔莫哥洛夫距离指标 D_∞ 仍然很小，最大值为 $K = 10$ 对应的 0.026。上尾诊断值也接近 1，最低值为 $K = 10$ 对应的 0.895，这表明分布的任何偏离（包括其极端上尾）都相当有限。因此，即使在弱相关情形下，将一个参数降级为干扰参数后，正交情形下的闭式权重仍能有效近似真实权重 $\bar{\chi}^2$ 。与此同时，诊断结果也符合定理预测的定性趋势：差异随着 K 增大而增大。

与图 2 中的强相关情形相比，随着 K 增大，差异也随之扩大，但仍较轻微：对于 K 的每个取值，柯尔莫哥洛夫距离 D_∞ 和上尾诊断都比弱相关情形更偏离理想值，这表明 $\bar{\chi}^2$ 权重受到的扰动更大。尽管如此，差异仍处于适中水平： D_∞ 远低于 0.1，且尾部诊断与 1 的偏差最多只有几十个百分点。经验累积分布函数仍与解析近似非常接近，报告的分位数差异也仍然很小，因此，即使在将一个参数降级为干扰参数之后，正交闭式权重在强相关情形下仍能为真实的 $\bar{\chi}^2$ 权重提供非常准确的近似。

这些发现或许表明，式 (9) 中的余项会随着受约束参数数量的增加而不可避免地增大；定理 3.2 给出的理论界以及推论 3.5 所表明的 $\delta(\Sigma_\rho)$ 在等相关情形下会随 K 增大，也支持这一判断。为区分维度与相关结构的影响，我们考察一种

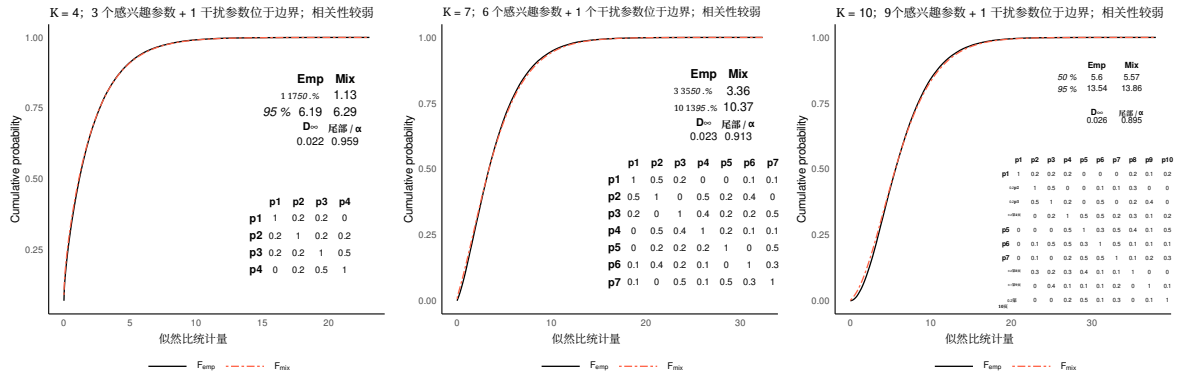


图 1：弱相关情形下，当边界上有一个干扰参数时，λ_{LR} 在$K = 4$、7、10 时的经验累积分布函数（黑色实线）与理论近似累积分布函数（红色虚线）的比较。

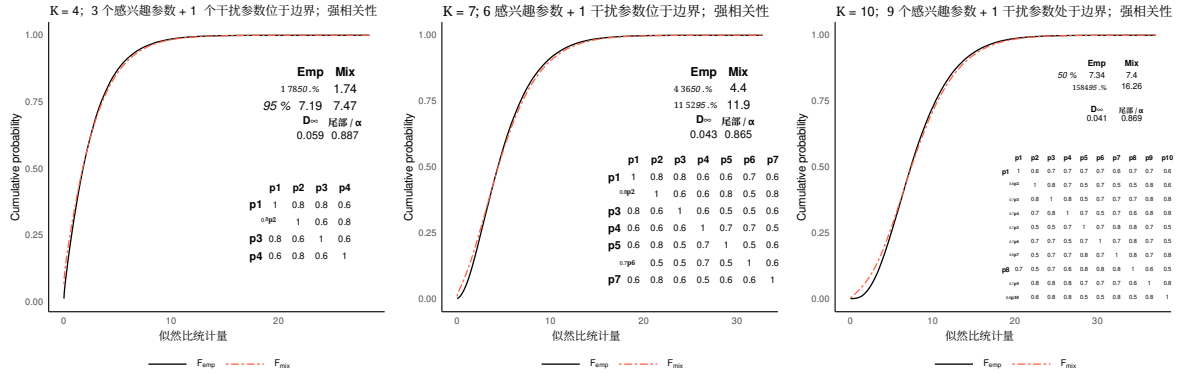


图 2：强相关情形下，当边界上有一个干扰参数时，λ_{LR}在 $K = 4$、7、10 时的经验累积分布函数（黑色实线）与理论近似累积分布函数（红色虚线）的比较。

受控的等相关设置 Σ_ρ，其中 $\rho = 0$ 固定为.5，并在图3中报告 $K = 2, \ldots, 10$ 时的柯尔莫哥洛夫距离 D_∞，以及相应的各向异性指数。尽管 $\delta(\Sigma_\rho)$ 随 K 单调增大，柯尔莫哥洛夫距离仍始终较小，且没有呈现系统性增长，这表明此前观察到的强相关性下 $K = 10$ 的较大差异，主要是各向异性增强所致，而非维度本身所致。这证实，正交闭式校正 $\Delta_j^{\pm}$ 能够在广泛的维度范围内，稳定且准确地近似真实的射线零假设 $\bar{\chi}^2$ 混合；在实践中，扰动的主要来源是相关强度，而非较大的 K。

5.2 基于秩的近似结果

现在我们转向一般相关结构下边界上存在多个干扰参数（$m > 1$）的情形。对此，我们提出一种启发式近似方法，该方法基于备择锥各个面的有效自由度贡献；在正交情形下是精确的，在其他情形下经验证也足够准确。图4–5显示出一致的规律：基于秩的混合分布的准确性受感兴趣参数向量的总维度 K 影响远大于受相关强度的影响，后者的作用明显次要。

在弱相关区域，经验累积分布函数与理论累积分布函数仍然非常接近，

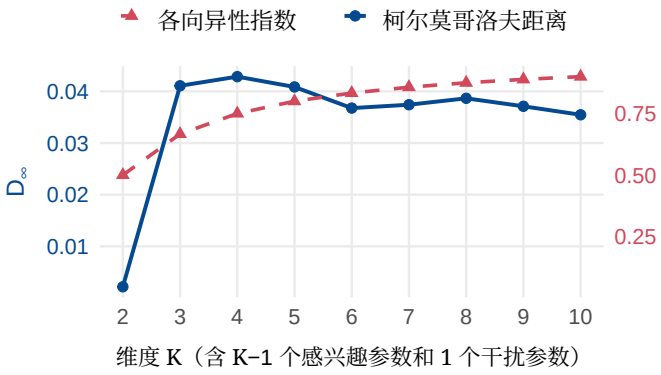


图3：对于具有等相关协方差且相关性为 $\rho = 0.5$ 的 Σ_ρ，当边界上有 $K - 1$ 个感兴趣参数和 1 个干扰参数时，柯尔莫哥洛夫距离 D_∞（蓝色）和各向异性指数 $\delta(\Sigma_\rho)$（红色）随 K的变化。

$K = 4$ 和 $K = 7$（$D_\infty = 0$。030 和 0。049，分别对应的尾部比率约为 1。27–1。32）。对于 $K = 10$，差异变得更加明显： D_∞ 升至 0。123，5% 尾部比率升至 1。81，这表明理论混合分布对右尾的低估程度不断加大。该近似仍然可用，但在推断应用中应明确考虑尾部校准失准。

在强相关设置下，相较于轻度相关情形，性能下降并没有预期的那么显著，主要在 $K = 4$处较为明显，此时 D_∞ 从 0.03 增加到 0.10，尾部比率则从 1.27 增加到 1.90。对于 $K = 7$和 $K = 10$，诊断结果与弱相关区域仍然相近，进一步支持了这一结论：感兴趣参数的维度增长，而非相关强度，是导致经验累积分布函数与理论累积分布函数之间出现偏差的主导因素。

图6a进一步阐明了这一点：对于等相关结构 Σ_ρ，当 $\rho = 0.5$ 固定时，D_∞ 会随 K 增大而略微上升，并在维度适中时趋于平稳。此时，D_∞ 不再像单一干扰参数的情形（图3）那样紧密地跟随各向异性指数，这表明对于多个边界干扰参数，近似误差更多取决于感兴趣参数维数与锥几何之间的相互作用，而非仅由协方差各向异性决定。图6b提供了互补的视角：我们固定 $K = 10$，并将 m 从1变到9。由于各向异性在 m中保持不变，这一设置分离出了在感兴趣参数块和干扰参数块之间调整维度的影响： D_∞ 随 m增大而上升，证实受约束坐标数量越多（无论属于感兴趣参数还是干扰参数），通常都会降低近似精度。然而，即使在 $m = 9$ 这一极端情形下，最大差异仍约为15%；考虑到约束结构的严格程度，这种偏差仍属中等。

总体而言，差异幅度有限，且其方向在很大程度上可以预测：该近似很好地捕捉了整体形状，但在上尾部往往呈反保守。因此，基于秩的方法是一种实用的解析替代方法——尤其适用于存在多个边界干扰参数、无法获得精确 $\bar{\chi}^2$ 权重的情形——前提是认识到其系统性的尾部行为，并在必要时通过校准加以修正。

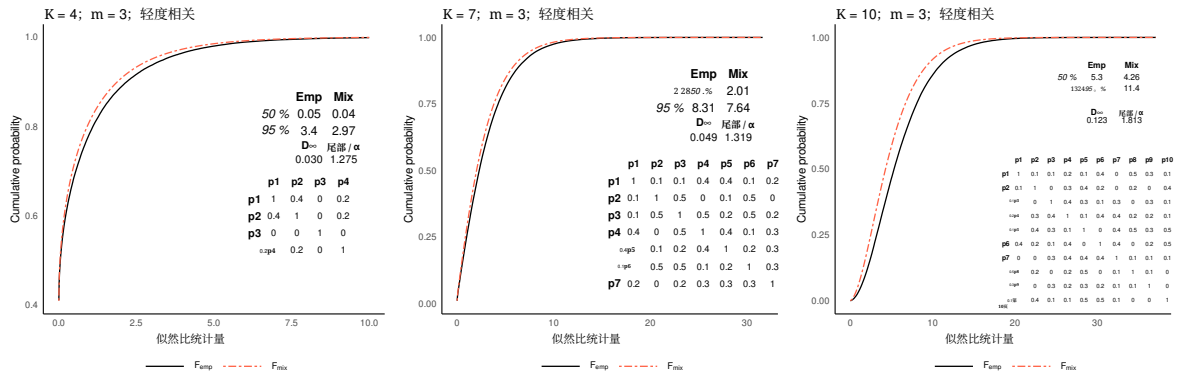


图 4：弱相关情形下，边界上有三个干扰参数时，λ_{LR} 在$K = 4$，7，10 时的经验（黑色实线）与近似理论（红色虚线）累积分布函数。

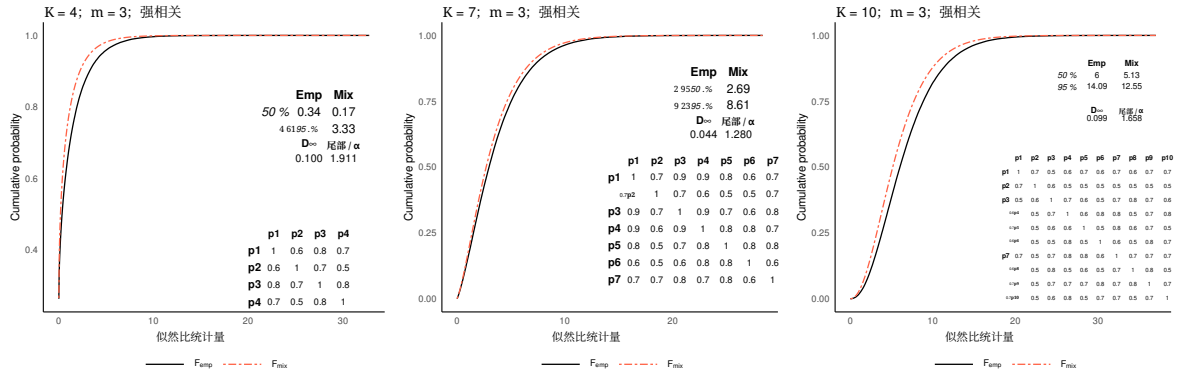
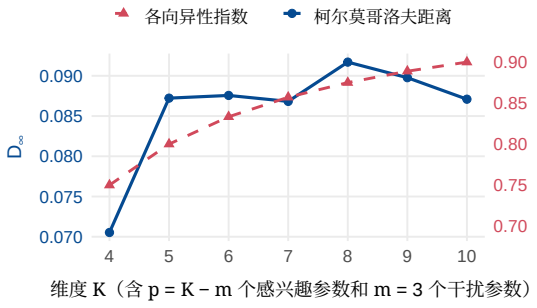
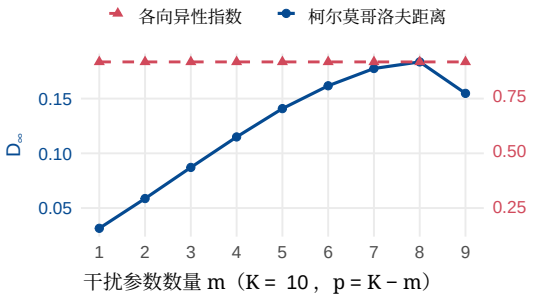


图 5：强相关情形下，边界上有三个干扰参数时，λ_{LR} 在$K = 4$，7，10 时的经验（黑色实线）与近似理论（红色虚线）累积分布函数。



(a) 等相关协方差（$\rho = 0.5$）下，$K - 3$ 个感兴趣参数且有 3 个干扰参数处于边界时，K 的函数 D_∞ Kolmogorov 距离（蓝色）和各向异性指数 $\delta(\Sigma_\rho)$（红色）。



(b) Kolmogorov 距离 D_∞（蓝色）和各向异性指数 $\delta(\Sigma_\rho)$（红色）随干扰参数数量 m 的变化情况，适用于具有等相关协方差的 Σ_ρ（$\rho = 0.5$），其中感兴趣参数数量为 $p = K - m$，总维度固定为 $K = 10$。

图 6：比较两种配置下的柯尔莫哥洛夫距离和各向异性指数。

致谢

本研究获得了挪威研究理事会（RCN）通过 FRIPRO PLUMBIN’（资助编号 323985）和卓越中心 INTEGREAT（资助编号 332645）的支持。作者谨向 Riccardo DeBinf 致以诚挚谢意，感谢他提出的宝贵意见和持续支持；同时感谢 Paolo Bertinelli 参与了许多富有意义的讨论。

参考文献

C.-A. Alexe、J. Bendavid、L. Bianchini 和 D. Bruschini。有限 MC 样本下高统计量计数实验中的覆盖不足。*arXiv:2401.10542*，2025年。D. Amelunxen 和 M. Lotz。多面锥的内在体积：组合视角。《离散与计算几何》，58:371–409，2017年。doi: 10.1007/s00454-017-9906-y。Dennis Amelunxen、Martin Lotz、Michael B. McCoy 和 Joel A. Tropp。身处边缘：随机数据下凸规划的相变。*arXiv:1303.6672*，2014年。D. J. Bartholomew。受限备择假设下均值齐性的检验。《皇家统计学会杂志：*B*辑（方法论）》，23:239–281，1961年。C. Bertinelli Salucci、A. Kvellestad 和 R. De Bin。关于边界条件下似然比检验统计量渐近分布的一则注记。*arXiv:2509.00223*，2025年。H. Chernoff。关于似然比的分布。《数学统计年刊》，25:573 – 578，1954年。doi: 10.1214/aoms/1177728725。Alan Genz 和 Frank Bretz。多元正态概率与 *t* 概率的计算，第195卷，收录于《统计学讲义》。施普林格，海德堡，2009年。doi: 10.1007/978-3-642-01689-9。T. D. Kitching、A. Amara、F. B. Abdalla、B. Joachimi 和 A. Refregier。超越干扰参数的宇宙学系统误差：形状填充函数。《皇家天文学会月刊》，399:2107–2128，2009年。doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15408.x。L. Kopylev 和 B. Sinha。关于参数位于边界时似然比检验的渐近分布。《*Sankhya*：印度统计学杂志，*B*辑》，73:20–41，2011年。A. Kudo。单侧检验的多元类似物。《生物计量学》，50:403–418，1963年。doi: 10.1093/biomet/50.3-4.403。Lucien Le Cam。局部渐近正态分布族。《加州大学统计学出版物》，3:37–98，1960年。Liansheng Lin 和 Bruce G. Lindsay。序约束下似然比检验渐近分布的几何方法。《统计学年刊》，25(1):1–17，1997年。doi: 10.1214/aos/1034276628。Tatsuhiko Miwa、Anthony J. Hayter 和 Satoshi Kuriki。带不等式约束的多元正态概率的计算。《皇家统计学会杂志：*B*辑（统计方法论）》，65(1):223–234，2003年。doi: 10.1111/1467-9868.00381。

Tim Robertson、F. T. Wright 和 R. L. Dykstra。《序约束统计推断》。John Wiley & Sons，纽约，1988年。S.G. Self 和 K.-Y. Liang。非标准条件下最大似然估计量和似然比检验的渐近性质。《美国统计学会杂志》，82:605–610，1987年。A. Shapiro。不等式约束下矩结构分析中检验统计量的渐近分布。《生物计量学》，72:133–144，1985年。doi: 10.2307/2336343。Alexander Shapiro。迈向多元分析中不等式约束检验的统一理论。《国际统计评论》，56(1):49–62，1988年。doi: 10.2307/1403367。Mervyn J. Silvapulle。线性模型中的一项检验与卡方条形分布。《美国统计学会杂志》，91(434):545–551，1996年。doi: 10.1080/01621459.1996.10476700。Dong Sun。计算多元正态正交象限概率的一般约简方法。《统计通讯——模拟与计算》，17(3):777–791，1988年。doi: 10.1080/03610918808812636。A. Takemura 和 S. Kuriki。光滑或分段光滑锥备择的 $\bar{\chi}^2$ 分布权重。《统计年刊》，25:2368–2387，1997年。A. W. van der Vaart。《渐近统计学》。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，1998年。Frank A. Wolak。线性回归模型中多重不等式与等式约束的精确检验。《美国统计学会杂志》，82(399):782–793，1987年。doi: 10.2307/2289471。B. Wu、Q. Yao 和 S. Zhu。存在多个干扰参数时的估计：复合似然与代入似然。《随机过程及其应用》，123:2877–2898，2013年。doi: 10.1016/j.spa.2013.03.017。C. Wu、G. Xu、X. Shen 和 W. Pan。一种基于正则化的高维广义线性模型自适应检验。《机器学习研究杂志》，21:1–67，2020年。

附录 1

引理 1 和引理 2 的证明

引理 1

证明。 经过第 2 节中描述的线性变换后，我们有 $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_K)^\top \sim N_K(0, \mathbb{I}_K)$。对于零锥 $\tilde{C}_0^{\mathrm{pt}} = \{0\}$，即所有 K 参数都与研究相关时，投影 $P_{\tilde{C}}(\tilde{Z})$保留 $\tilde{Z}$ 的正坐标，并将负坐标置为零。因此， $P_{\tilde{C}}(\tilde{Z})$所在的面，其维度等于正坐标的数量，

$j = \#\{i:\ \tilde{Z}_i > 0\}$。因此，由于 $\tilde{Z}$ 的坐标相互独立且对称，我们有 $\dot{w}_j^{\perp} = \Pr\left(\#\{i:\ \tilde{Z}_i > 0\} = j\right) = 2^{-K}\binom{K}{j}$，其中 $j = 0, \ldots, K$。

现在考虑将最后一个 K 参数视为干扰参数的情形，此时零锥变为 $\tilde{C}_0^{\mathrm{ray}} = \mathbb{R}_+ e_K = \{(0, \ldots, 0, t):\ t \geq 0\}$。于是，向$\tilde{C}_0^{\mathrm{ray}}$的正交投影为 $P_{\tilde{C}_0}(\tilde{Z}) = (0, \ldots, 0, (\tilde{Z}_K)_+)$，其中$(x)_+ = \max\{x, 0\}$；但投影范数平方之差消去了干扰坐标的贡献，因为

$$\lambda_{\mathrm{LR}} = \|P_{\tilde{C}}(\tilde{Z})\|^2 - \|P_{\tilde{C}_0}(\tilde{Z})\|^2 = \sum_{i=1}^{K}(\tilde{Z}_i^+)^2 - (\tilde{Z}_K^+)^2 = \sum_{i=1}^{K-1}(\tilde{Z}_i^+)^2.$$

因此，决定投影的 C 相关面仅取决于前 $K-1$ 个坐标中哪些为正：其维度便是 $j = \#\{i \leq K-1:\ Z_i > 0\}$，而与 Z_K的值无关。

同样，由独立性和对称性可得 $\bar{w}_j^{\perp} = \Pr\left(\#\{i \leq K-1:\ \tilde{Z}_i > 0\} = j\right) = 2^{-(K-1)}\binom{K-1}{j}$，其中 $j = 0, \ldots, K$, 且 $\binom{K-1}{K} = 0$，因为根据定义，对于 $k > n$有 $\binom{n}{k} = 0$。

定义差值 $\Delta_j^{\perp} = \bar{w}_j^{\perp} - \dot{w}_j^{\perp}$。利用帕斯卡恒等式 $\binom{K}{j} = \binom{K-1}{j} + \binom{K-1}{j-1}$，对于 $1 \leq j \leq K-1$，我们得到

$$\Delta_j^{\perp} = 2^{-(K-1)}\binom{K-1}{j} - 2^{-K}\binom{K}{j} = 2^{-K}\left[2\binom{K-1}{j} - \binom{K-1}{j} - \binom{K-1}{j-1}\right] = 2^{-K}\left[\binom{K-1}{j} - \binom{K-1}{j-1}\right].$$

对于两端的指标,

$$\Delta_0^{\perp} = 2^{-(K-1)}\binom{K-1}{0} - 2^{-K}\binom{K}{0} = 2^{-(K-1)} - 2^{-K} = 2^{-K},$$

并且，由于 $\binom{n}{k} = 0$，对于 $k > n$,

$$\Delta_K^{\perp} = 2^{-(K-1)}\binom{K-1}{K} - 2^{-K}\binom{K}{K} = 0 - 2^{-K} = -2^{-K}.$$

因此，对于所有 $j = 0$、1、.....、K，闭式表达式得证；由此可得 $\bar{w}_j^{\perp} = \dot{w}_j^{\perp} + \Delta_j^{\perp}$，对于 $j = 0$、.....、K。作为检验，$\sum_{j=0}^{K}\Delta_j^{\perp} = \sum_{j=0}^{K}\bar{w}_j^{\perp} - \sum_{j=0}^{K}\dot{w}_j^{\perp} = 1 - 1 = 0$，这证实该变换仅仅重新分配了混合质量。□

引理 2

证明。论证与引理 3.1 的证明相同，只需应用于前 $K-m$个坐标。经过第 2 节中的线性变换后，$\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_K)^{\top} \sim N_K(0, \mathbb{I}_K)$，且各坐标相互独立并具有对称分布。对于点零假设锥 $C_0^{\mathrm{pt}} = \{0\}$，权重与之前相同，$\dot{w}_j^{\perp} = 2^{-K}\binom{K}{j}$。现在令最后 m 个坐标为干扰参数，因此 $\tilde{C}_0^{(m)} = \mathbb{R}_+^m$位于最后 m个坐标轴上。投影到 $\tilde{C}$(m) 0 上为 $P_{\tilde{C}^{(m)}_0}(\tilde{Z}) = (0, \ldots, 0, (\tilde{Z}_{K-m+1})_+, \ldots, (\tilde{Z}_K)_+)$，并且 $\lambda_{\mathrm{LR}} = \|P_{\tilde{C}}(\tilde{Z})\|^2 - \|P_{\tilde{C}_0^{(m)}}(\tilde{Z})\|^2 = \sum_{i=1}^{K}(\tilde{Z}_i^+)^2 - \sum_{i=K-m+1}^{K}(\tilde{Z}_i^+)^2 = \sum_{i=1}^{K-m}(\tilde{Z}_i^+)^2$。因此，$\tilde{C}$ 的相关面仅取决于前 $K-m$ 个坐标的符号，$j = \#\{i \leq K-m:\ \tilde{Z}_i > 0\}$。

独立性和对称性给出

$$\bar{w}_j^{(m)\perp} = \Pr\big(\#\{i \le K-m : \tilde{Z}_i > 0\} = j\big) = 2^{-(K-m)}\binom{K-m}{j}, \qquad j = 0, \dots, K-m,$$

且 $\bar{w}_j^{(m)\perp} = 0$ 适用于 $j > K-m$。

减去 $\dot{w}_j$ 即可得到 $\Delta_j^{(m)\perp}$ 的所述公式。最后，

$$\sum_{j=0}^{K} \bar{w}_j^{(m)\perp} = \sum_{j=0}^{K-m} 2^{-(K-m)}\binom{K-m}{j} = 1, \qquad \sum_{j=0}^{K} \Delta_j^{(m)\perp} = 0,$$

因此，变换后的序列是一组有效的 $\bar{\chi}^2$ 权重。 □

附录 2

引理 1 和引理 2 的数值验证

我们首先验证引理 3.1，该引理给出了当一个 K正交参数在 $\bar{\chi}^2$ 边界上从感兴趣参数降为干扰参数时， $\bar{\chi}^2$ 权重的精确变化。对于$K \in \{4,7,10\}$，我们考察正交情形 $\Sigma = \mathbb{I}_K$，并将 λ_{LR} 的经验分布与权重为 $\bar{w}_j = \dot{w}_j + \Delta_j^{\perp}$且具有 $\dot{w}_j = 2^{-K}\binom{K}{j}$, 的 $\bar{\chi}^2$ 混合分布进行比较，其中 $\Delta_j^{\perp}$由引理 3.1 给出。我们从图 7 中可以看到，在所有配置下，经验累积分布函数与理论混合分布在蒙特卡罗误差范围内无法区分，分位数差异也微乎其微。这证实了正交情形下闭式重新分配模式 (8) 的正确性，并直观地展示了当单个参数降为干扰参数时，概率质量会在相邻自由度之间对称转移。

为验证引理 4.1，我们现在将干扰参数的数量从 $m = 1$ 增加到 $m = 3$，并将 λ_{LR} 的分布与引理给出的权重所对应的解析混合分布进行比较。图 8 证实了权重差异的精确性：在所有配置中，解析曲线都与经验累积分布函数完美吻合（除蒙特卡洛误差外）。

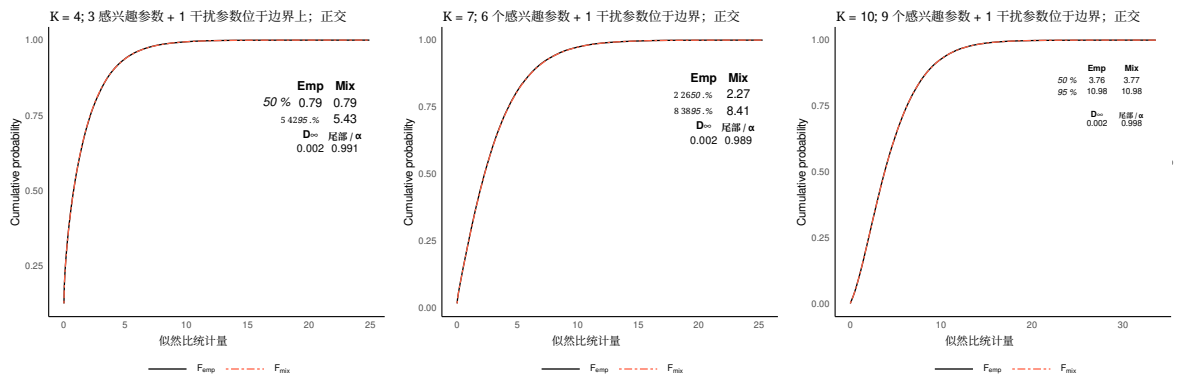


图 7：正交情形下，一个干扰参数位于边界时， λ_{LR} 在 $K = 4$，7、10 时的经验累积分布函数（黑色实线）与理论累积分布函数（红色虚线）。

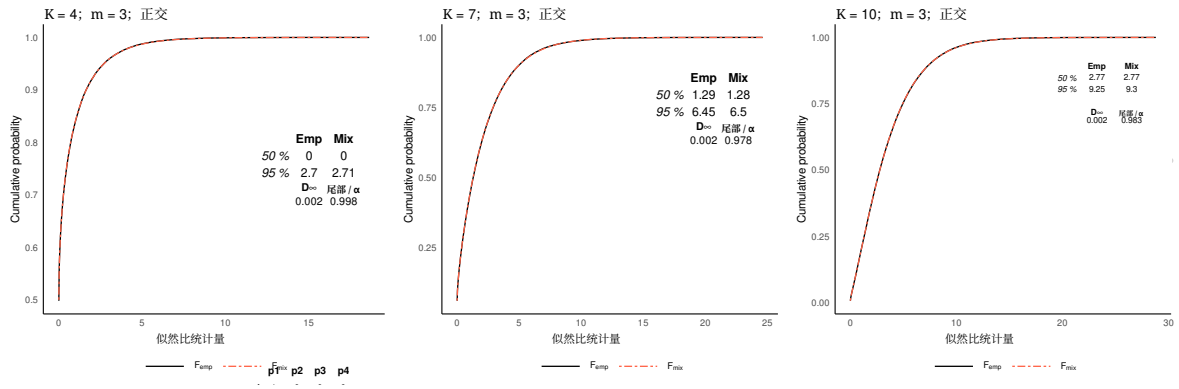


图 8： λ_{LR} 在正交情形下（有三个干扰参数位于边界）的经验累积分布函数（黑色实线）与理论累积分布函数（红色虚线），其中 $K = 4, 7, 10$。