arXiv:2601.03918v1 [math.CO] 7 Jan 2026

排列统计量的模式展开

IAN CAVEY、HUGH DENNIN*和 BRIDGET EILEEN TENNER†

Abstract. 我们研究以函数为基底的排列统计量展开式，这些函数对排列中固定模式的出现次数进行计数。我们证明，包含高阶矩统计量在内的一类排列统计量具有有限的模式展开式，从而推广了 Berman 和 Tenner 的一个结果。我们还给出模式展开式具有正性的一项组合判据。利用该判据，我们证明排列的约化词数目的模式展开式是正的，并对其系数给出一种枚举解释。

1. Introduction

排列统计量 是定义在 $\mathcal{S} := \bigsqcup_{n\geq 0} S_n$上的函数，其中 $\mathcal{S} := \bigsqcup_{n\geq 0} S_n$是所有有限置换群的不交并。排列统计量无处不在，可提供长度、下降数和主指标等重要度量；有关这方面重要工具的示例，见 [7] 。这类统计量的一个基本族是模式计数函数 $[p]\colon \mathcal{S} \to \mathbb{N}$，它们由排列 $p \in \mathcal{S}$ 索引，其中对于 $w \in \mathcal{S}$，我们用 $[p](w)$表示 w 中 p-模式的数量（见定义2.1）。

Br¨and´en 和 Claesson [3] 观察到，每个排列统计量都可以唯一地表示为模式计数函数的（可能是无限的）线性组合（另见第2节），我们称之为该统计量的模式展开。此外，这一展开式中的系数可以根据统计量本身的取值直接计算出来。

本文中，我们发展任意排列统计量的模式展开理论。我们的观点是，模式展开为排列统计量提供了有用的替代表述，因为即使某个统计量起初看起来与模式无关，模式展开也能让我们借助模式相关的工具和语言来研究它。例如，如果某个统计量的展开式中有许多项在某些排列类上为零，那么该展开式可能表明，与其在整个对称群上研究这个统计量，不如在特定的排列类上研究它，从而发现有趣的性质。

我们尤其关注那些先验上与模式无关、但其模式展开具有良好性质的统计量。我们特别关注两类引人注目的模式展开：只有有限个非零系数的展开，以及所有系数均为非负数的展开。我们将考察这两类排列统计量的性质，并分别给出非平凡的例子。

1.1. 模式有限统计量。如果一个排列统计量的模式展开式中只有有限个非零系数，我们就称它是模式有限的。在研究较深入的排列统计量中，模式有限性似乎是一种罕见性质。事实上，我们在命题 3.1 中观察到，模式有限统计量 σ 在大小为

*本研究部分由美国国家科学基金会（NSF）资助，资助项目编号为 DMS-2231565 和 DMS-1945212。

†本研究部分由美国国家科学基金会（NSF）资助，资助项目编号为 DMS-2054436。

n 的排列上的期望值是关于 n 的多项式函数。这个必要条件可用于证明，许多我们感兴趣的统计量都没有有限模式展开式。

尽管如此，Berman 和 Tenner 提出的以下结果 [2] 表明，一些自然的排列统计量确实具有令人意外的模式有限性。

例 1.1 ([2])。 排列的方差， $V(w) = \sum_i (w(i) - i)^2$, 具有有限模式展开式：

$$V = 2\big([21] + [231] + [312] + [321]\big).$$

受此结果启发，在第3节中，我们推广了这一例子，证明一大类以标记排列表示的排列统计量（见定义 3.3）具有模式有限性。定理 3.6 的一个特例是，高阶矩统计量 $\mu_m = \sum_i (w(i) - i)^m$ 对所有 $m \in \mathbb{N}$ 均为模式有限，并且对于满足 $k > m+1$ 的 $p \in S_k$，其在所有模式计数函数 $[p]$ 上的系数均为零。此外，在定理 3.8 中，我们给出了用斯特林数表示展开式中系数的公式。例如，在例 3.9 中，我们得到 μ_3 的以下展开式：

$$\mu_3 = 6\big([312] - [231] + [4213] + [4123] + [4132] - [2431] - [2341] - [3241]\big).$$

对于 $m \geq 4$，我们观察到，矩 μ_1、……、μ_m的某些线性组合（我们称之为排列的二项式矩）比矩统计量本身具有更简单的模式展开式。受此观察启发，我们在第3.1节研究这些二项式矩统计量的性质，计算它们的模式展开式和期望值。我们希望这能为未来对基于模式展开式的排列统计量进行类似研究和发现提供一个案例研究。

1.2. **模式正统计量**。如果一个排列统计量的模式展开式中的所有系数均为非负数，我们就称其为模式正的。每个模式正统计量σ 相对于模式包含而言必然是单调的，这意味着当 w 包含一个 p-模式时， $\sigma(w) \geq \sigma(p)$，因为在 σ的模式展开式中该不等式逐项成立。这个必要条件可用于证明，许多我们感兴趣的统计量并非模式正统计量。

任何模式正统计量 σ 的一个关键性质是，可以通过截断其模式展开式来获得σ 的下界。正是通过这一应用，模式展开式此前曾出现在舒伯特多项式文献中。事实上，Weigandt [11]证明了舒伯特多项式 $\mathfrak{S}_w$ 满足 $\mathfrak{S}_w(1、\ldots\ldots、1) \geq 1 + [132](w)$，而 Gao [5]通过证明 $\mathfrak{S}_w(1、\ldots\ldots、1) \geq 1 + [132](w) + [1432](w)$，加强了这一不等式。随后，Gao 观察到，这两个不等式都可以由统计量 $\mathfrak{S}_w(1、\ldots\ldots、1)$ 的模式正性加以解释并进一步加强，其展开式中的前几项为

$$\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1) = 1 + [132] + [1432] + [12453] + [12534] + 5[12543] + \cdots.$$

此后，几位作者证明了该展开式中某些系数族的非负性 [4,6],，但 $\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1)$ 的完全模式正性仍然只是一个猜想。

在第4节中，我们证明，任何枚举统计量 $\sigma(w) = |\mathrm{Set}(w)|$的模式正性，都源于嵌入 $\mathrm{Set}(p) \hookrightarrow \mathrm{Set}(w)$的存在。这些嵌入以$p$ 在 w中的模式出现为索引，并满足关于模式交集的某个相容条件。此外，这样一族嵌入为展开式的系数提供了正的组合解释；事实上，它还为从 σ的模式展开式计算 $\sigma(w)$时出现的每一项提供了正的组合解释。

我们使用上述策略得出的主要结果是，rw(w)具有模式正性；rw(w)表示 w 写成相邻换位乘积时的约化词数量。这个统计量的展开式开头如下：

$$\begin{aligned}\mathsf{rw} = 1 &+ [321] + [2143] + [2413] + [2431] + [3142] + [3241] \\ &+ 2[3421] + [4132] + [4213] + 3[4231] + 2[4312] + 11[4321] + \cdots\end{aligned}$$

作为这一结果的推论，通过截断 rw 的模式展开式，我们得到了关于约化词集合 rw(w) 数量的一族无穷多个下界。这些下界类似于 Weigandt 和 Gao 得到的 $\mathfrak{S}_w(1, \ldots\ldots, 1)$ 的下界。例如，在 rw 的展开式中仅保留大小至多为 4 的模式，我们便得到以下极不显然的不等式

$$\begin{aligned}\mathsf{rw} \geq 1 &+ [321] + [2143] + [2413] + [2431] + [3142] + [3241] \\ &+ 2[3421] + [4132] + [4213] + 3[4231] + 2[4312] + 11[4321].\end{aligned}$$

尽管舒伯特统计量 $\mathfrak{S}_w(1, \ldots\ldots, 1)$ 与约化词密切相关，但我们无法由 rw(w) 的模式正性推出 $\mathfrak{S}_w(1, \ldots\ldots, 1)$ 的模式正性。例如，注意到，任一统计量的模式展开式中系数为零，并不意味着另一统计量中对应的系数也为零。

在本文第2节中，我们介绍本文将用到的基本对象及其性质。第3节聚焦于仅含有限个非零系数的模式展开式，讨论这一类展开式的性质，并将矩统计量作为相关的案例研究。第4节采用类似的框架，转而讨论仅含非负系数的模式展开式。对于这一重要统计量类别，我们以一个排列的约化词数量作为案例研究。最后，我们在第5节概述这一主题未来研究的诸多方向。

2. Essential tools

用 S_n 表示 $[1,n] = \{1, \ldots, n\}$的排列集合，并令 $\mathcal{S} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ 表示所有排列的集合，其中 $S_0 = \{\varnothing\}$ 仅包含空排列。 $w \in S_n$ 的大小为 $|w| = n$。我们研究的基本构件是排列模式及其出现。因此，我们将使用单行记法表示排列，将 $w \in S_n$写作 $w(1)\cdots w(n)$。

定义2.1。 固定排列 $p \in S_k$和 $w \in S_n$。若 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$是一些指标，使得 $w(i_1)\cdots w(i_k)$ 与 $p(1)\cdots p(k)$ 序同构（即这些字母具有相同的相对次序），则 w包含一个 p-模式，而 $w(i_1)\cdots w(i_k)$ 是 p-出现，或称为 p在 w中的一次出现。如果 w 不含 p 的任何出现，则称 w 避免 p。

有时，我们想要查看排列中出现在特定位置的子词，为此我们作如下定义。

定义 2.2. 对于满足 $i_1 < \cdots < i_h$的 $w \in S_n$ 和 $I = \{i_1, \ldots, i_h\} \subseteq [1,n]$，令 $w|_I \in S_h$ 为一个排列，其元素的相对位置与子词 $w(i_1)\cdots w(i_h)$ 中的元素相同。

包含一个 p-模式的排列可能包含许多 p-出现，追踪这些数据对我们的研究至关重要。

定义 2.3. 对于任意 $p \in \mathcal{S}$，定义函数

$$[p] : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$$

将一个排列 w 映射到 w中 p-出现的数量。这 $[p]$是一个模式计数函数，或简称模式计数。

定义 2.3 包含由空排列$\varnothing \in S_0$索引的模式计数 $[\varnothing]$： $\mathcal{S} \to \mathbb{N}$。函数 $[\varnothing]$ 对所有排列的取值均为 1。同样，对于 $1 \in S_1$ ，我们有 $[1](w) = |w|$。对于任意的 $p \in S_k$ 和 $w \in S_n$，当且仅当 w避免 p时，我们有 $[p](w) = 0$ 。

排列统计量的一些著名例子包括排列的大小、长度、下降数、主指标和不动点数。我们通常会考虑取值于 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$的这类排列统计量，但当前的讨论也适用于取值在任意（含幺、交换）环 Λ中的统计量。

D定义 2.4。 一个 Λ值排列统计量是任意函数 $\sigma\colon \mathcal{S} \to \Lambda$.

每个模式计数 $[p]$ 都可以看作一个取值于 Λ 的排列统计量，方法是将 $[p]$ 与唯一的含幺环映射 $\mathbb{Z} \to \Lambda$ 复合。我们将通过把任意排列统计量写成模式计数 $[p]$ 的（可能是无限的）线性组合来研究它们。下述命题断言这种表示是良定义的。

命题 2.5 （参见 [3, §1.2]）。 每个排列统计量 $\sigma\colon \mathcal{S} \to \Lambda$ 都能唯一地表示为模式计数函数的（可能是无限的） Λ线性组合。也就是说，存在唯一一组以模式 $p \in \mathcal{S}$ 为索引的系数 $\sigma_p \in \Lambda$ ，使得

$$\sigma(w) = \sum_{p \in \mathcal{S}} \sigma_p \cdot [p](w)$$

对所有排列 $w \in \mathcal{S}$ 均成立。

当 σ 和 σ_p 满足命题 2.5 中的关系时，我们记作 $\sigma = \sum_{p \in \mathcal{S}} \sigma_p \cdot [p]$ ，并称此表达式为统计量 σ 的模式展开。对于固定的 $w \in \mathcal{S}$，仅有有限多个 $p \in \mathcal{S}$ 会使 $[p](w)$ 非零，因为若 $|p| > |w|$，则 $[p](w) = 0$ ，因此在任意固定的 w 处计算模式展开是有意义的。

尽管这一命题已在别处得到证明，我们仍在此给出命题 2.5 的证明，因为它确立了一种视角，有助于我们在后续讨论中理解问题。

命题 *2.5* 的证明。 令 M 为无限矩阵，其列由 $p \in \mathcal{S}$ 索引，行由 $w \in \mathcal{S}$ 索引，相应的元素等于 $[p](w)$。 对行和列 M，按照 $\mathcal{S}$ 上任意一种与置换大小分级相容的顺序 S_0， S_1， S_2，..... 排列。对于任意 $w \in S_n$ 和 $|p| \geq n$，值 $[p](w)$ 等于 0，除非 $p = w$，此时 $[p](w) = 1$。这意味着 M 是下三角矩阵，主对角线上的元素均为 1。特别是，矩阵 M 可逆，且 M^{-1} 的元素都是整数。

给定一个统计量 $\sigma\colon \mathcal{S} \to \Lambda$，令 s 表示一个列向量，其元素为按与 M中相同的顺序由 $w \in \mathcal{S}$ 索引的 $\sigma(w)$。根据此前关于 M的观察，矩阵方程 $Mc = s$ 存在唯一解 c ，其元素是由 $\mathcal{S}$索引的 Λ 中的元素。令 σ_p 表示 c 中由 $p \in \mathcal{S}$索引的元素，则矩阵方程 $Mc = s$ 等价于表达式 $\sigma = \sum_{p \in \mathcal{S}} \sigma_p \cdot [p]$. □

在本文中，我们将沿用上述记号来表示模式展开中的系数。

定义 2.6。 给定一个排列统计量 $\sigma\colon \mathcal{S} \to \Lambda$，令 σ_p 为 σ的模式展开中 $[p]$ 的系数。

命题 2.5 的证明中出现的矩阵 M，可以视为模式计数函数基底 $[p]$ 与由下式定义的指示函数基底 $\mathbb{1}_p$ 之间的换基矩阵

$$\mathbb{1}_p(w) = \begin{cases} 1 & \text{if } p = w, \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

从计算角度来看，这种描述很有用，因为将矩阵 M 和 M^{-1} 限制到大小至多为 n 的排列上后，可以独立于所选统计量进行计算。然后，任何统计量 σ 的模式展开中，大小至多为 n 的模式 p 上的系数 σ_p，都可以直接根据这些矩阵以及 σ 在排列上的输出向量计算得出。

例 2.7. 命题 2.5 的证明中提到的矩阵方程 $Mc = s$，对于统计量 下降数，如下所示。

$$\begin{array}{c} \\ \varnothing \\ 1 \\ 12 \\ 21 \\ 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \\ \vdots \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} [\varnothing] & [1] & [12] & [21] & [123] & [132] & [213] & [231] & [312] & [321] & \cdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \end{array}\!\!\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \end{array}\right] \end{array}\!\!=\!\!\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}\right] \end{array}.$$

在这个矩阵中，行和列的索引对应于大小至多为 3 的模式，行索引函数的输入 w，列索引模式展开中的项 $[p]$。注意，对于大小相同的 p和 w，矩阵中对应于 $[p]$（w）的块包含单位矩阵，且整个矩阵是下三角矩阵。由这个矩阵方程可得排列下降数的展开式:

$$\operatorname{des}(w) = \big([21] - [231] - [312] - [321] + \cdots\big)(w).$$

矩阵 M^{-1} 的各项可以明确给出，而重新排列后的矩阵方程$c = M^{-1}s$ 给出了统计量 σ 的系数 σ_p 与其取值直接相关的一个有用表达式。

引理 2.8。 对于任意排列统计量 σ 和 $w \in S_n$，系数 σ_w 由下式给出

$$\begin{aligned} \sigma_w &= \sum_{I \subseteq [1,n]} (-1)^{n-|I|} \cdot \sigma(w|_I) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{S}} (-1)^{n-|p|} \cdot [p](w) \cdot \sigma(p). \end{aligned}$$

注意，后一个求和是有限的，因为当 $w \in S_n$ 且 $n > k$ 时，$[w](p) = 0$ 。

证明。 应用于排列 w时，命题 2.5 中给出的、用于定义系数 σ_p 的 σ 模式展开公式，现在可以改写为

$$\sigma(w) = \sum_{p \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{I \subseteq [1,n] \\ w|_I = p}} \sigma_p = \sum_{I \subseteq [1,n]} \sigma_{w|_I}.$$

通过类似容斥的论证，可以看出这些方程由以下各项满足

$$\sigma_w = \sum_{I \subseteq [1,n]} (-1)^{n-|I|} \cdot \sigma(w|_I).$$

第二个表达式是将所有满足 $w|_I$ 为某个固定模式 p 的子集 $I \subseteq [1,n]$ 归为一组，并对所有可能的 p 求和得到的。满足 $w|_I = p$ 恰为 $[p](w)$ 的 $I \subseteq [1,n]$ 的数量正是 .....，由此完成证明。□

我们注意到，虽然定义 2.3 和 2.4 以及命题 2.5 是用经典模式包含的术语表述的，但同样可以轻易地将其改写为适用于任何一种模式包含。例如，对命题 2.5 的证明中所用论证作类似推演，可以证明每个统计量也都能唯一表示为连续模式计数的整数权重和。本研究旨在研究经典模式展开并为其奠定基础；至于其他版本的类似工作，我们留待其他研究以及或许其他作者去完成。

2.1. 排列统计量代数与模式展开。 我们在本节末尾稍作延伸，简要讨论与本文所研究对象相关的代数。

用 $\Lambda^{\mathcal{S}}$ 表示取值于 Λ的排列统计量的集合。在逐点加法和乘法运算下，这个 $\Lambda^{\mathcal{S}}$ 成为 Λ 上的交换代数，单位元为 $[\varnothing]$ （常函数 1）。

排列统计量中有一类特殊的统计量，即模式有限统计量：它们的模式展开式中只有有限个非零项。模式有限统计量的集合 $\Lambda\mathcal{S}$ 构成 $\Lambda^{\mathcal{S}}$的一个 Λ-子模。事实上，还可以得到更强的结论。

命题 2.9 ([10])。 模式有限统计量的集合 $\Lambda\mathcal{S}$ 是$\Lambda^{\mathcal{S}}$的一个 Λ-子代数。

由命题 2.9 可知，两个模式计数函数 $[p]$ 和$[q]$ 的乘积是其他模式计数函数 $[r]$的有限 线性组合；也就是说，它是一个具有模式有限展开式的统计量。特别地，Vargas 对于 $p,\ q \in \mathcal{S}$ 证明了

$$[p][q] = \sum_{r \in \mathcal{S}} d_r^{pq} \cdot [r]$$

其中， $d_r^{pq} \in \mathbb{N}$ 表示将 $[1,|r|] = I \cup J$ 写成两个（不一定互不相交的）子集之并的方式数，且 I 标记 r 中的一个 p-出现， J 标记 r中的一个q-出现。注意，若 $|p| + |q| < |r|$，则 $d_r^{pq} = 0$，因此此和是有限的。

3. Pattern-finite expansions

从某种意义上说，最适合通过模式计数函数研究的统计量族，是那些具有模式有限展开的统计量。有限模式展开赋予统计量直接的组合模式相关含义。许多作者研究过一个有趣的问题（例如，参见 $[1,2]$）：一个给定的、值得关注的排列统计量是否为模式有限。

本节中，我们根据期望值给出排列统计量是模式有限的一个必要判据。我们还证明了一大类以标记排列表示的排列统计量具有模式有限性。作为案例研究，我们证明高阶矩统计量是模式有限的，这推广了 $[2]$, 的一个结果，并研究它们的模式展开。

我们首先给出模式有限性的一个必要判据。

命题 3.1. 对于 σ ，若其为模式计数的有限线性组合 $[p]$ ，且所有模式的大小至多为 d，则 σ 在 S_n 中的排列上的期望值是关于n 的次数至多为 d的多项式函数。

证明。这由期望值的线性性以及以下观察可得：对于任意$p \in S_k$，模式计数函数 $[p]$ 在 S_n 上的期望值为$\frac{1}{k!}\binom{n}{k}$，这是一个关于n的 k次多项式。□

这一关于模式有限性的必要条件足以说明，许多值得关注的统计量都不是模式有限的，即使对期望值采用非常宽松的界也是如此。

例 3.2. 统计量 rw(w)，即 w的约化词数量，不是模式有限的。事实上，Stanley $[8]$ 证明，最长词 $w_0 \in S_n$ 的约化词数量为

$$\frac{\binom{n}{2}!}{1^{n-1}3^{n-2}5^{n-3}\cdots(2n-3)^1}.$$

因此，该数量除以 $n!$ 是排列 S_n的约化词期望数量的一个下界，而且可以证明，这个下界随 n的增长速度快于指数增长。

即使某个统计量在 S_n 上的期望值是关于 n的多项式，该统计量也可能不是模式有限的。例如，排列 S_n 的下降数 的期望值是 $(n-1)/2$，但该统计量具有无限模式展开 $[3]$。

现在我们转而讨论一类与 $[9]$ 的校准 模式相关的排列统计量的模式有限性；这些模式细化了通常的模式计数函数 $[p]$。作为典型例子，回忆一下，排列 w 的编码 是序列 $(c_1(w)\ c_2(w)\ldots)$，其中$c_i(w) := \#\{j > i \mid w(i) > w(j)\}$。这细化了 w 的长度，因为 $\ell(w) = [21](w) = \sum_{i\geq 1} c_i(w)$；这可由将每个 $c_i(w)$ 视为对 w中 21 的出现 $w(i)w(j)$ 进行计数得出。我们用标记排列的语言，将这些思想推广到其他模式计数函数 $[p]$ 。

定义 3.3. 标记排列是一个有序对 $(p,\ h)$，其中 $p \in \mathcal{S}$ 且 $1 \leq h \leq |p|$。

用 $\mathcal{S}'$ 表示标记排列的集合。我们通常将标记排列 $(p,\ h) \in \mathcal{S}'$ 记为单行记法 p ，并在位置 h处的值下方加下划线。例如，231 表示标记排列 (231，2)。

定义 3.4. 固定 $i \geq 1$ 并且（$p,\ h$） $\in \mathcal{S}'$。

- 在 $w \in \mathcal{S}$ 中，$(p,\ h)$ 的一个 i-校准出现，是指满足 $i_h = i$ 的 p 在 w 中的一个出现 $w(i_1)\cdots w(i_{|p|})$。
- 令 $[(p,\ h)\ i]\colon\ \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ 表示将每个 $w \in \mathcal{S}$ 映射为 w 中（$p,\ h$）的 i 校准出现次数的排列统计量。称 $[(p,\ h)\ i]$ 为 i 校准模式计数函数，或简称为 i 模式计数。

采用此记号，排列编码可写为 $c_i = [21, i]$，因此我们对长度统计量的细化变为 $[21] = \sum_{i\geq 1}[21, i]$。这一观察可显而易见地推广：对于任意 $p \in \mathcal{S}_{_}$ 每个 $1 \leq h \leq |p|$ 都给出一个分解 $[p] = \sum_{i\geq 1}[(p,\ h)\ i]$。

作为进一步的例子，我们有 $[231, 4](153642) = 3$，因为362，562、564是 w 中满足 $i_2 = 4$ 的唯一231-出现 $w(i_1)w(i_2)w(i_3)$。

称一个排列统计量为 i-模式有限，如果它能写成有限个 i-模式计数函数的线性组合。用 $\Lambda\mathcal{S}'_i$ 表示由 i-模式有限统计量构成的 $\Lambda^{\mathcal{S}}$ 子空间。下一个命题表明，每个 $\Lambda\mathcal{S}'_i$ 都是 $\Lambda^{\mathcal{S}}$ 的子代数（参见命题 2.9）；此外，乘积的计算与 i 无关。

命题 3.5。存在非负系数 $d^{**}_{*} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，它们由 $\mathcal{S}'$ 三重索引，并满足以下条件：

(i) $d^{(p,h_1)}_{(q,\ h_2)\ (r,\ h_3)} = 0$ 只要 $|p| + |q| \leq |r|$。(ii) 对任意 $i \geq 1$，恒等式

$$[(p, h_1), i] \cdot [(q, h_2), i] = \sum_{(r,h_3)\in\mathcal{S}'} d^{(p,h_1)(q,h_2)}_{(r,h_3)} \cdot [(r, h_3), i] \tag{1}$$

在 $\Lambda\mathcal{S}'_i$ 中成立。特别地，每个 $\Lambda\mathcal{S}'_i$ 都是 $\Lambda^{\mathcal{S}}$ 的子代数。

证明。令 $d^{(p,h_1)}_{(q,\ h_2)\ (r,\ h_3)}$ 表示将 $[1, |r|]$ 写成并集 $A \cup B$（不一定互不相交）的方法数，其中 $A = \{a_1 < \cdots < a_{|p|}\}$ 和 $B = \{b_1 < \cdots < b_{|q|}\}$ 分别为 r 中 $(p,\ h_1)$ 和 $(q,\ h_2)$ 的 h_3-校准出现的索引。显然，(i) 成立。

我们通过在一个排列 $w \in \mathcal{S}$ 上计算方程（1）两边的值来证明 (ii) 成立。左侧统计形如 $(I,\ J)$ 的有序对，其中 $I = \{i_1 < \cdots < i_{|p|}\}$ 和 $J = \{j_1 < \cdots < j_{|q|}\}$ 分别在 w 中为 $(p,\ h_1)$ 和 $(q,\ h_2)$ 的 i-校准出现建立索引。右侧统计形如 $(K,\ A,\ B)$ 的三元组，其中 $K = \{k_1 < \cdots < k_{|r|}\}$ 为 w 中某个 $(r,\ h_3)$ 的 i-校准出现建立索引，而 $[1, |r|] = A \cup B$ 是由 $d^{(p,h_1)}_{(q,\ h_2)\,(r,\ h_3)}$ 计数的一个分解。我们将证明这两组之间存在双射。

要从 (I, J) 得到 (K, A, B)，令 $K := I \cup J$（其必然在 w 中为某个 $(r, h_3) \in \mathcal{S}'$ 的 i-校准出现建立索引），并令 $A := \{a \mid k_a \in I\}$ 和 $B := \{b \mid k_b \in J\}$。于是，$A$ 在 r 中建立了一个 p-出现的索引，因为 $r(a_1)\cdots r(a_{|p|})$ 与 $w(k_{a_1})\cdots w(k_{a_{|p|}}) = w(i_1)\cdots w(i_{|p|})$ 具有相同的相对次序。此外，$k_{a_{h_1}} = i_{h_1} = i = k_{h_3}$ 蕴含 $a_{h_1} = h_3$，因此这是 (p, h_1) 的一个 h_3-校准出现。类似的论证表明，B 在 r 中为 (q, h_2) 的一个 h_3-校准出现建立索引。

反过来，从 (K, A, B) 出发，我们可以取 $I := \{k_a \mid a \in A\}$ 和 $J := \{k_b \mid b \in B\}$。集合 I 表示 p 在 w 中的一次出现，因为 $w(i_1)\cdots w(i_{|p|}) = w(k_{a_1})\cdots w(k_{a_{|p|}})$ 与 $r(a_1)\cdots r(a_{|p|})$ 具有相同的相对次序。我们还知道 $i_{h_1} = k_{a_{h_1}} = k_{h_3} = i$，因此这是 (p, h_1) 的一次 i-校准出现。同样，集合 J 表示 w 中 (q, h_2) 的一次 i-校准出现。这些构造互为逆运算，从而得到所需的双射。□

现在我们可以陈述模式有限性的判据。

定理 3.6。固定 s 标记排列 $(p_1,\ h_1)\ \ldots,\ (p_s,\ h_s)\ \in\ \mathcal{S}'$，以及一个多项式 $f(x_1,\ \ldots,\ x_s)\ \in \Lambda[x_1,\ldots,x_s]$。该排列统计量

$$\sum_{i=1}^{\infty} f\big([(p_1,h_1),i],\ldots,[(p_s,h_s),i]\big) \tag{2}$$

是模式有限的。

证明。由命题 3.5 可知，我们可以将式（2）中的每一项展开为线性组合

$$f\big([(p_1,h_1),i],\ldots,[(p_s,h_s),i]\big) = \sum_{(r,h)\in\mathcal{S}'} C_{(r,h)}\cdot[(r,h),i]$$

其中系数 $C_{(r,h)}\in\Lambda$ 与 i无关，且只有有限多个系数非零。因此，取平均可得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} f\big([(p_1,h_1),i],\ldots,[(p_s,h_s),i]\big) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{(r,h)\in\mathcal{S}^*} C_{(r,h)}\cdot[(r,h),i] \\
&= \sum_{(r,h)\in\mathcal{S}'} C_{(r,h)}\left(\sum_{i=1}^{\infty}[(r,h),i]\right) \\
&= \sum_{(r,h)\in\mathcal{S}'} C_{(r,h)}\cdot[r] \\
&= \sum_{r\in\mathcal{S}}\left(\sum_{h=1}^{|r|} C_{(r,h)}\right)\cdot[r],
\end{aligned}$$

所以该统计量具有有限模式展开。 □

3.1. 案例研究：矩统计量。对于 $i\geq 1$，将 Δ_i 记作给定的第 i 个差分统计量：

$$\Delta_i(w) := w(i) - i,$$

按照约定，当 $i > |w|$ 时，$w(i) = i$。注意，排列方差可以表示为 $V = \sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i^2$。更一般地，给定 $m\geq 1$，我们可以考虑第 m个排列矩

$$\mu_m(w) := \sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i(w)^m = \sum_{i=1}^{\infty}(w(i)-i)^m.$$

回想一下，V 是模式有限的 [2]。事实上，利用定理 3.6，我们将看到更高阶的排列矩同样具有这一性质。关键观察如下：

引理 3.7。对于 $i\geq 1$，有 $\Delta_i = [21,i] - [21,i]$。 _

证明。注意到

$$\begin{aligned}
\Delta_i(w) &= w(i) - i \\
&= \#\{j\,|\,w(j) < w(i)\} - \#\{j\,|\,j<i\} \\
&= \#\{j\,|\,j>i \text{ and } w(j)<w(i)\} - \#\{j\,|\,j<i \text{ and } w(j)>w(i)\} \\
&= [\underline{2}1,i](w) - [2\underline{1},i](w).
\end{aligned}$$

□

为了陈述关于 μ_m 的模式展开的更精确结果，我们需要以下记号：对于 $p \in S_a$ 和 $q \in S_b$，令 $p \ominus q \in S_{a+b}$ 表示 p 与 q 的斜和，定义为

$$(p \ominus q)(i) = \begin{cases} b + p(i) & \text{if } 1 \le i \le a, \text{ and} \\ q(i-a) & \text{if } a+1 \le i \le a+b. \end{cases}$$

定理 3.8. 对于 $m \ge 1$，第 m 阶排列矩 μ_m 是模式有限的。具体而言，

$$\mu_m = \sum_{\substack{p,q \in \mathcal{S} \\ |p|+|q| \le m}} \kappa(m, |p|, |q|) \cdot [q \ominus 1 \ominus p]$$

其中

$$\kappa(m,a,b) := \sum_{k=b}^{m-a} (-1)^k \binom{m}{k} a!\, S(m-k,a)\, b!\, S(k,b).$$

$S(n,k)$ 表示第二类斯特林数，它表示将 $[1,n]$ 划分为 k 个非空块的集合划分数。等价地，$k!S(n,k)$ 表示从 $[1,n]$ 到 $[1,k]$的满射数。

证明. 利用引理 3.7，我们可以表示 $\mu_m = \sum_{i \ge 1} ([21,i] - [21,i])^m$，因此根据定理 3.6，$\mu_m$ 自动是模式有限的。为计算 μ_m的模式展开式，我们展开：

$$\Delta_i^m = ([\underline{2}1,i] - [2\underline{1},i])^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \cdot [\underline{2}1,i]^{m-k} \cdot [2\underline{1},i]^k.$$

统计量 $[21,i]^{m-k}_{_}[21,i]^k$ 在 $_w$ 处的取值，计数满足以下条件的指标选择方式：$i'_1, \ldots, i'_k < i < i''_1, \ldots, i''_{m-k}$，使得对于所有 $1 \le j \le k$，$w(i'_j) > w(i)$，并且对于所有 $1 \le j \le m-k$，$w(i) > w(i''_j)$。w 在这些指标上的子词将是某个排列 $q \ominus 1 \ominus p$ 的一次出现，其中 $|p| \le m-k$ 且 $|q| \le k$；每次这样的出现都以这种方式产生，共有 $|p|!\, S(m-k,|p|)\, |q|!\, S(k,|q|)$ 种方式。因此

$$\begin{aligned} \Delta_i^m &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \left(\sum_{\substack{p,q \in \mathcal{S} \\ |p| \le m-k \\ |q| \le k}} |p|!\, |q|!\, S(m-k,|p|)\, S(k,|q|) \cdot [(q \ominus 1 \ominus p, |q|+1), i] \right) \\ &= \sum_{\substack{p,q \in \mathcal{S} \\ |p|+|q| \le m}} \underbrace{\left(\sum_{k=|q|}^{m-|p|} (-1)^k \binom{m}{k} |p|!\, S(m-k,|p|)\, |q|!\, S(k,|q|) \right)}_{\kappa(m,|p|,|q|)} \cdot [(q \ominus 1 \ominus p, |q|+1), i]. \end{aligned}$$

该结果可通过对所有 $i \ge 1$ 求和得出。 □

例 3.9。回顾一下

$$\mu_1 = 0 \quad \text{and} \quad \mu_2 = 2\big([21] + [231] + [312] + [321]\big).$$

现在我们来计算 μ_3 的模式展开。注意，系数 $\kappa(m,a,b)$ 满足以下性质：

- $\kappa(m,a,b) = (-1)^m \kappa(m,b,a)$。特别是，当 m 为奇数时，$\kappa(m,a,a) = 0$。
- $\kappa(m,a,0) = a!\ S(m,a) = (-1)^m \kappa(m,0,a)$。

- $\kappa(a+b,a,b)=(-1)^b(a+b)!$.

系数 $\kappa(3,a,b)$ 因此由下式给出

a \ b	0	1	2	3
0	0	-1	-6	-6
1	1	0	6	0
2	6	-6	0	0
3	6	0	0	0

因此我们得到模式展开式

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \big([21]-[21]\big)+6\Big(\sum_{p\in S_2}[1\ominus p]-\sum_{q\in S_2}[q\ominus 1]\Big)\\ &\quad+6\Big(\sum_{p\in S_3}[1\ominus p]-\sum_{p\in S_2}[21\ominus p]+\sum_{q\in S_2}[q\ominus 21]-\sum_{q\in S_3}[q\ominus 1]\Big)\\ &=6\big([312]-[231]+[4213]+[4123]+[4132]-[2431]-[2341]-[3241]\big).\end{aligned}$$

尽管有前面的例子， μ_m 并不总是能被 $m!$整除。例如，我们有 $\mu_4(231)=(2-1)^4+(3-2)^4+(1-3)^4=1+1+16=18$。不过，事实证明

$$\begin{aligned}\mu_4 = 24\big(&[312]+[321]+[2341]+[2431]+[3241]+[3421]\\ &+2[4123]+2[4132]+2[4213]+[4312]+2[4321]+3[4231]\\ &+[23451]+[23541]+[24351]+[24531]+[25341]+[25431]+[32451]+[32541]\\ &+[34251]+[35241]+[42351]+[42531]+[43251]+[45231]+[45312]+[51234]\\ &+[51243]+[51324]+[51342]+[51423]+[51432]+[52134]+[52143]+[52314]\\ &+[52413]+[53124]+[53142]+[53214]+[53412]+[53421]+[54231]+[54312]\\ &+[54321]+2[45321]+2[52341]+2[52431]+2[53241]\big)+2\mu_3+\mu_2.\end{aligned}$$

对此的一种解释 这种可整除性的方法是存在一个因式分解（回想一下， $\mu_1=0$ ）

$$\begin{aligned}\mu_4-2\mu_3-\mu_2+2\mu_1 &= \sum_{i\geq 1}(\Delta_i^4-2\Delta_i^3-\Delta_i^2+2\Delta_i)\\ &=\sum_{i\geq 1}(\Delta_i+1)(\Delta_i)(\Delta_i-1)(\Delta_i-2).\end{aligned}$$

这表明，以下排列矩统计量的变体更为自然。

定义 3.10。 定义第 m个二项式排列矩为统计量

$$\overline{\mu}_m(w):=\sum_{i\geq 1}\binom{\Delta_i(w)+\lceil m/2\rceil-1}{m}=\sum_{i\geq 1}\binom{w(i)-i+\lceil m/2\rceil-1}{m}.$$

正如上文所述，我们发现， μ_m 的模式展开式中的系数比 μ_m的系数表达式更为简洁。

命题 3.11。 </style}对于 $m \geq 1$，第 m个二项式排列矩 μ_m 是模式有限的，其展开式为

$$\overline{\mu}_m = \sum_{\substack{p,q \in \mathcal{S} \\ |p|+|q| \leq m}} \overline{\kappa}(m, |p|, |q|) \cdot [q \ominus 1 \ominus p],$$

其中

$$\overline{\kappa}(m,a,b) := \sum_{k=b}^{m-a} (-1)^k \binom{\lceil m/2 \rceil - 1}{m-a-k} \binom{k-1}{k-b}.$$

证明。系数 $\kappa(m,\ a,\ b)$ 的定义使得恒等式

$$\binom{\Delta_i + \lceil m/2 \rceil - 1}{m} = \sum_{a,b \geq 0} \overline{\kappa}(m,a,b) \binom{[\underline{2}1, i]}{a} \binom{[2\underline{1}, i]}{b} \tag{3}$$

成立。要看 出这一点，需要用到以下众所周知的二项式系数恒等式 ：

$$\binom{\alpha+\beta}{\gamma} = \sum_{a \geq 0} \binom{\alpha}{a} \binom{\beta}{\gamma - a}. \tag{4}$$

初步计算表明，对于 $x,\ y,\ m \geq 0$，存在一个恒等式

$$\begin{aligned} \binom{x-y}{m} &= \sum_{a \geq 0} \binom{x}{a} \binom{-y}{m-a} \\ &= \sum_{a \geq 0} (-1)^{m-a} \binom{x}{a} \binom{y+m-a-1}{m-a} \\ &= \sum_{a,b \geq 0} (-1)^{m-a} \binom{m-a-1}{m-a-b} \binom{x}{a} \binom{y}{b} \end{aligned}$$

其中，第一个和最后一个等号使用了方程 4，第二个等号使用了恒等式 $(-1)^\beta \binom{-\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+\beta-1}{\beta}$。更一般地，对于 $x, y, m, r \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} \binom{x-y+r}{m} &= \sum_{k \geq 0} \binom{r}{m-k} \binom{x-y}{k} \\ &= \sum_{k \geq 0} \binom{r}{m-k} \left(\sum_{a,b \geq 0} (-1)^{k-a} \binom{k-a-1}{k-a-b} \binom{x}{a} \binom{y}{b} \right) \\ &= \sum_{a,b \geq 0} \left(\sum_{k=a+b}^{m} (-1)^{k-a} \binom{r}{m-k} \binom{k-a-1}{k-a-b} \right) \binom{x}{a} \binom{y}{b} \\ &= \sum_{a,b \geq 0} \left(\sum_{\ell=b}^{m-a} (-1)^{\ell} \binom{r}{m-a-\ell} \binom{\ell-1}{\ell-b} \right) \binom{x}{a} \binom{y}{b}, \end{aligned}$$

其中，第一行是公式 4 的直接应用，第二行是我们先前计算得到的恒等式，最后一个等号则是对内层求和重新编号，其中 $\ell = k - a$。取 $x = [21, i]$、 $y = [21, i]$ 和 $r = \lceil m/2 \rceil - 1$，并回顾 $\Delta_i = [\underline{2}1, i] - [2\underline{1}, i] = x - y$，即可得到公式 3。

注意，在 $w \in \mathcal{S}$ 处计算的统计量 $\binom{[21,i]}{a}\binom{[21,i]}{b}$ 统计了选取指标 $i'_1 < \cdots < i'_b < i < i''_1 < \cdots < i''_a$ 的方式，使得对于所有 $1 \le j \le b$， $w(i'_j) > w(i)$，并且对于所有 $1 \le j \le a$， $w(i) > w(i''_j)$。这与模式 $q \ominus 1 \ominus p$ 的一次出现所包含的数据相同，其中 $p \in S_a$ 和 $q \in S_b$，因此

$$\binom{[\underline{21},i]}{a}\binom{[\underline{21},i]}{b} = \sum_{\substack{p\in S_a\\ q\in S_b}} [(q \ominus 1 \ominus p, b+1), i].$$

结合公式 3，我们得出

$$\binom{\Delta_i + \lceil m/2 \rceil - 1}{m} = \sum_{p,q\in\mathcal{S}} \overline{\kappa}(m,|p|,|q|) \cdot [(q \ominus 1 \ominus p, |q|+1), i]. \qquad \square$$

我们发现二项式排列矩统计量时，得益于以下关于其期望值的简单表达式；现在我们将直接证明这一表达式。

命题 3.12. μ_{2m} 在大小为 n 的排列上的期望值由以下公式给出

$$\mathbb{E}(\overline{\mu}_{2m}) = \frac{1}{m+1}\binom{n+m}{2m+1}.$$

证明。 我们将用到以下二项式系数恒等式：对于 $\alpha \ge 0$ 和 $\beta \ge 1$，有

$$\sum_{\ell=0}^{\beta-1} (\beta-\ell)\binom{\alpha+\ell}{\alpha} = \binom{\alpha+\beta+1}{\alpha+2}. \tag{5}$$

这一恒等式的组合证明如下：右侧统计了 $[\alpha+\beta+1]$的（$\alpha+2$）元子集。左侧也做同样的统计，其中第 ℓ项统计的是 $[\alpha+\beta+1]$ 中第二大元素为 $\alpha+1+\ell$的（$\alpha+2$）元子集。

现在我们继续进行计算。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{\mu}_{2m}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\binom{w(i)-i+m-1}{2m}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\binom{j-i+m-1}{2m}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1-n}^{n-1} (n-|k|)\binom{k+m-1}{2m}\\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=m+1}^{n-1}(n-k)\binom{k+m-1}{2m} + \sum_{k=m}^{n-1}(n-k)\underbrace{\binom{-k+m-1}{2m}}_{(-1)^{2m}\binom{k+m}{2m}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-m-2}(n-m-1-\ell)\binom{2m+\ell}{2m}}_{\text{Equation (5) with } \alpha=2m,\ \beta=n-m-1} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-m-1}(n-m-\ell)\binom{2m+\ell}{2m}}_{\text{Equation (5) with } \alpha=2m,\ \beta=n-m}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\binom{n+m}{2m+2} + \binom{n+m+1}{2m+2}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n-m-1}{2m+2} + \frac{n+m+1}{2m+2}\right)\binom{n+m}{2m+1}$$
$$= \frac{1}{m+1}\binom{n+m}{2m+1}.$$

□

4. Pattern-positive expansions

现在我们将注意力从模式有限展开式转向另一类引人注目的展开式：模式正统计量。回想一下，如果一个统计量的模式展开式中的系数均非负，那么它就是模式正的。我们先来观察模式正统计量的一个简单性质。

引理 4.1。模式正统计量是非负的，并且相对于模式包含具有单调性。换言之，若 σ 是一个模式正统计量，则对所有 w， $\sigma(w) \geq 0$ ；而且，只要 p 作为模式出现在 w中，就有 $\sigma(p) \leq \sigma(w)$。

证明。对于任意模式正统计量 σ，表达式 $\sigma(w) = \sum_q \sigma_q[q](w)$ 非负，因为 σ_q 和 $[q](w)$ 始终非负。若 p作为模式出现在 w 中，则对所有 q，都有 $[q](p) \leq [q](w)$，因为 q 在 p 中的任意一次出现，也会给出 q 在 w中的一次出现。因此我们有

$$\sigma(p) = \sum_q \sigma_q[q](p) \leq \sum_q \sigma_q[q](w) = \sigma(w).$$

□

根据引理 4.1，任何取整数值的模式正统计量 σ 的输出都是非负整数。因此，研究输出 $\sigma(w)$ 可表示为有限集基数的统计量σ 的模式正性，并无损失。这引出了以下定义。枚举统计量 σ 是一个统计量，其值由某个与 w相关联的有限集 $\mathsf{Set}(w)$ 的基数 $\sigma(w) = |\mathsf{Set}(w)|$ 给出。请注意，任何取非负整数值的统计量都可以表示为枚举统计量；不过，我们使用这一术语，是为了能够直接讨论与之关联的对象集合。代数组合学中的许多常见统计量都是通过枚举方式定义的。例如，计算约化词、下降和长度的统计量，都可以这样定义。一些常见统计量，例如舒伯特特化统计量，有多种自然的枚举描述。我们下面的结果不依赖于为该统计量选择的特定枚举解释。

枚举统计量相对于模式包含的单调性具有明确的组合意义。事实上，枚举统计量 $\sigma(w) = |\mathsf{Set}(w)|$ 是单调的，当且仅当对于任意一个作为模式出现在 w 中的 p ，都存在单射映射 $\mathsf{Set}(p) \hookrightarrow \mathsf{Set}(w)$。

我们要探讨的问题是：集合 Set(w) 上的哪种组合结构对应于相应枚举统计量的模式正性？根据引理 4.1，模式正统计量必然是单调的，因此人们可能会认为，这种结构由具有某些附加性质的包含关系 Set(p) $\hookrightarrow$Set(w) 构成。正如我们将要展示的，以下组合结构是这个问题的一种可能答案。

定义 4.2。 枚举统计量 $|\mathrm{Set}(w)|$ 的容斥结构 是由包含关系 Set(p) $\hookrightarrow$Set(w) 组成的一个族，这些包含关系以 w 中的模式出现 p 为索引，并且满足交集相容性。也就是说，对于 I， $J \subseteq [1,n]$，我们有

$$\mathrm{Set}(w|_{I\cap J}) = \mathrm{Set}(w|_I) \cap \mathrm{Set}(w|_J),$$

其中，我们将这些集合与它们在 Set(w) 中的像等同。对于配备了容斥结构的枚举统计量 σ，若对象 $a \in$Set(w) 不属于任何真模式 p 对应的映射 Set(p) $\hookrightarrow$Set(w) 的像，则称其为本质的 （也就是说，模式 p 既不是 $\varnothing$ 也不是 w）。Set(w) 的本质元素集合称为本质集合，记作 ESet(w) $\subseteq$Set(w)。

命题 4.3。 任何具有容斥结构的枚举统计量 $\sigma(w) = |\mathrm{Set}(w)|$ 都是模式正的，其系数为 $\sigma_p = |\mathrm{ESet}(p)|$。

证明。 由引理 2.8，得

$$\sigma_p = \sum_{I\subseteq[1,n]} (-1)^{n-|I|} \cdot \sigma(p|_I) = \sum_{I\subseteq[1,n]} (-1)^{n-|I|} \cdot |\mathrm{Set}(p|_I)|.$$

对于 $i = 1$，……， n，将 $A_i =$Set($p|_{[1,n]\setminus\{i\}}$) 视为通过定义容斥结构的映射嵌入 Set(p) 的子集。容斥结构的定义意味着，对于任意 $I \subseteq [1,n]$，都有 Set($p|_I$) $= \bigcap_{i\in I} A_i$。由容斥公式，结论随即成立，

$$\sigma_p = \sum_{I\subseteq[1,n]} (-1)^{n-|I|} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \left|\mathrm{Set}(p) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |\mathrm{ESet}(p)|. \qquad \square$$

下一节中，我们将给出一个非平凡的例子，说明如何在某个排列的约化词集合上构造容斥结构。在下面的例子中，我们将以上定义应用于一个简单的统计量；该统计量有一个现成且系数为正的模式展开。

例 4.4. 令 $\sigma(w)$ 表示对 IS(w) 进行计数的统计量，其中 IS(w) 是 w 的递增（可以为空）子序列集合。例如，IS(132) $= \{\varnothing, 1, 3, 2, 13, 12\}$，因此 σ(132) $= 6$。显然，我们有如下展开式

$$\sigma = \sum_{n\geq 0} [\mathrm{id}_n] = 1 + [1] + [12] + [123] + [1234] + \cdots.$$

对于 w 中的任意 p 模式出现， p 的每个递增子序列都自然对应于 w 中由相应项组成的一个递增子序列。这给出了映射 IS(p) $\hookrightarrow$ IS(w)。容易验证，这些映射满足容斥结构的定义。 w 中指标为 J 的递增子序列属于映射 Set($w|_J$) $\hookrightarrow$ Set(w) 的像。因此，唯一的本质递增子序列是恒等排列 $\mathrm{id}_n = 12\cdots n \in S_n$ 中的完整子序列 $12\cdots n$。由此，命题 4.3 得到了上文给出的 σ 的模式展开式。

事实上，枚举统计量 σ 上的容斥结构，为通过模式展开 σ 得到的表达式中 $\sigma(w)$ 的每一项都提供了一种组合解释。Set(w) 中的每个元素都能以唯一的方式，表示为某个模式 p 的一个本质元素 ESet(p) 的像。对于给定的 p 和 w，Set(w) 中这类元素的数量等于 $|\mathrm{ESet}(p)| \cdot [p](w)$

4.1. 案例研究：枚举约化词。排列 w 的约化词是表示式 $w = s_{i_\ell} \cdots s_{i_1}$，即相邻换位的乘积，其中 s_i 对换 i 和 $i+1$，并固定所有其他指标。令 RW(w) 表示 w 的所有约化词的集合，并令 $\mathrm{rw}(w) = |\mathrm{RW}(w)|$。使用第2节中描述的技术，我们计算得到 rw 的模式展开的第一部分为

$$\begin{aligned}\mathrm{rw} = [\varnothing] + [321] + [2143] + [2413] + [2431] + [3142] + [3241] + [3412] \\ +2[3421] + [4132] + [4213] + 3[4231] + 2[4312] + 11[4321] + \cdots .\end{aligned}$$

在本节中，我们在排列的约化词上构造一个容斥结构，从而确立统计量 rw(w) 的模式正性。

w 的一个逆序表示模式 21 的一次出现：一对指标 $(a,\ b)$，满足 $a < b$ 和 $w(a) > w(b)$。如果约化词 $w = s_{i_\ell} \cdots s_{i_1}$ 中的换位 s_{i_k} 使得 $(a,\ b)$ 是 $s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ 的逆序，但不是 $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$ 的逆序，则称该换位创建了一个逆序 $(a,\ b)$。明确地说，这意味着 $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}(a) = i_k$ 且 $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}(b) = i_k + 1$。

我们从右向左读取约化词（如同函数复合），有时也会将约化词表示为布线图 （见图1），用从右向左的导线交叉顺序记录逆序。布线图的约定是：排列作用于其上的底集 $1, \ldots, n$，与右侧自上而下排列的导线相对应。

对于出现在指标集 $I \subseteq [1, n]$ 上的模式 $p = w|_A$，有一个自然的限制映射 π：RW(w) →RW(p)，它通过在 w 的约化词中仅记录 I 中指标之间的逆序来定义。用布线图表示时，该操作就是移除右侧起始指标不属于 I 的所有导线。

例4.5. 排列 $w = 3421$ 在指标 $I = \{1, 2, 4\} = \{i_1, i_2, i_3\}$上包含模式 $p = 231$。通过从布线图中移除对应于 $w(3) = 2$ 的线（右侧位置 3、左侧位置 2），即可得到约化词 $s_2 s_1 s_2 s_3 s_2 \in$RW(3421) 到 RW(231) 的相应限制，如图1所示。

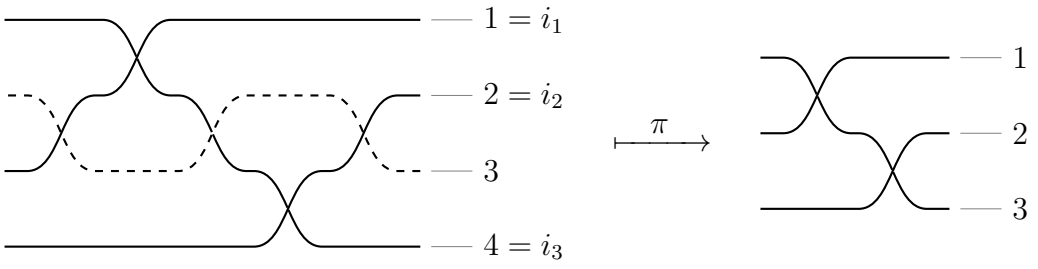


FIGURE 1. 约化词 $s_2 s_1 s_2 s_3 s_2 \in$ RW(3421) 在指标 $\{1, 2, 4\}$ 上出现的 231模式对应的限制为 $s_1 s_2 \in$RW(231)。

可以验证，这些限制映射 π : RW(w) $\to$ RW(p) 是满射；也就是说， p的每个约化词都是某个 w 的约化词的限制。下面定义的约化词上的容斥系统由这些限制映射的特定右逆ι :RW(p) $\hookrightarrow$ RW(w) 构成。

定义 4.6. 对于模式 p 在 w中的一次出现，约化词 $x \in\in$RW(p) 到 w 的最小提升是约化词 $\iota(x) = s_{i_\ell} \cdots s_{i_1}$，它属于 w，且其指标序列 $(i_1, \ldots, i_\ell)$ 在 $\pi^{-1}(x)$ 中为字典序最小值。换言之，我们有 $\iota(x) \in \pi^{-1}(x)$，并且对于任何其他词 $s_{i'_\ell} \cdots s_{i'_1} \in \pi^{-1}(x)$，都存在一个指标 k，使得 $i_1 = i'_1, \cdots, i_k = i'_k$，且$i_{k+1} < i'_{k+1}$。

以下 术语有助于更具体地描述最小提升映射 .

定义 4.7. 如果词 $s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ 是排列 w 的部分约化词，则称它是 w 的部分约化词，当且仅当它是 w 的某个约化词的右侧前缀。等价地， $s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ 是 w 的部分约化词，当且仅当

$$\ell(w(s_{i_k} \cdots s_{i_1})^{-1}) = \ell(w s_{i_1} \cdots s_{i_k}) = \ell(w) - k.$$

如果换位 s_i 满足 $\ell(ws_1 \cdots s_{i_k} s_i) = \ell(w) - k - 1$，即 $s_i s_{i_k} \cdots s_{i_1}$也是 w的部分约化词，那么称换位 s_i 是部分约化词 $s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ 的扩展 。

约化词 $x \in$ RW(p) = RW($w|_I$) 到 w 的最小提升可以通过归纳构造。事实上，假设我们已经构造出 $\iota(x)$ 的某个初始（右）片段 $s_{i_k} \cdots s_{i_1}$，使得 $\pi(y)$ 与给定的 p的约化词 x 的某个初始片段一致。 $\iota(x)$ 中的下一个换位 $s_{i_{k+1}}$ 定义如下：令 i_{k+1} 为满足以下条件的最小指标 i： $s_i s_{i_k} \cdots s_{i_1}$是 w的部分约化词，并且 $\pi(s_i s_{i_k} \cdots s_{i_1})$ 是给定约化词 $x \in$R W(p) 的某个初始片段。

例 4.8. 考虑排列 $w = 4231$ ，它在指标集合 $I = \{1, 3, 4\}$上包含模式 $p = 321$ 。我们将构造约化词 $x = s_2 s_1 s_2$（对应于 p ）到 w的最小提升。

(1) 空部分约化词对于 w 的扩展是 s_1 和 s_3。这些换位分别限制为空词和 s_2 ，二者都与给定词 $x = s_2 s_1 s_2$ 的某个初始（右）片段一致，因此我们选择 $s_{i_1} = s_1$ ，因为它的指标较小。(2) 部分约化词 s_1 对于 w 的扩展是 s_2 和 s_3。部分约化词 $s_2 s_1$ 限制为 s_1 ，作为 p 的部分约化词；而 $s_3 s_1$ 限制为 s_2。只有后一个限制是 $x = s_2 s_1 s_2$ 的初始片段，因此我们选择 $s_{i_2} = s_3$。(3) 部分约化词 $s_3 s_1$ 对于 w 只有一个扩展，即 s_2。 $s_2 s_3 s_1$ 对 p 的限制是 $s_1 s_2$，这是 x 的一个初始片段，因此我们取 $s_{i_3} = s_2$。(4) 部分约化词 $s_2 s_3 s_1$ 对于 w 的扩展是 s_1 和 s_3。部分约化词 $s_1 s_2 s_3 s_1$ 限制为 $s_1 s_2$ ，而部分约化词 $s_3 s_2 s_3 s_1$ 限制为 $s_2 s_1 s_2$。二者都是 x 的初始片段，因此我们选择 $s_{i_4} = s_1$ ，因为它的指标较小。(5) 部分约化词 $s_1 s_2 s_3 s_1$ 对于 w 只有一个扩展，即 s_3。 $s_3 s_1 s_2 s_3 s_1$ 对 p 的限制是 x，因此我们取 $s_{i_5} = s_3$。

因此， x 到 w 的最小提升是约化词 $s_3 s_1 s_2 s_3 s_1$。这些约化词在图2中以布线图的形式展示。

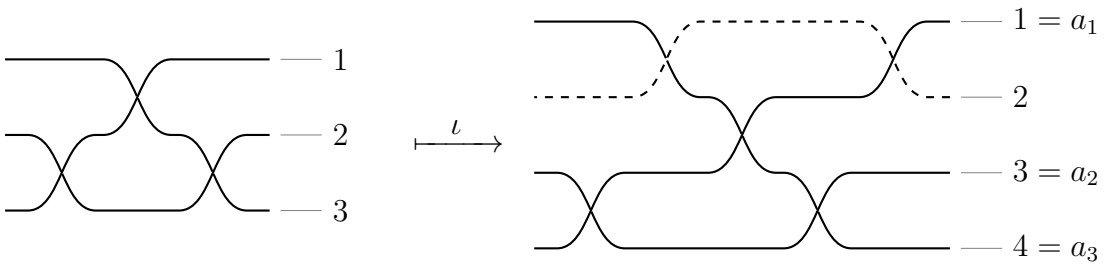
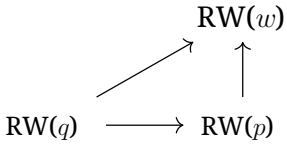


FIGURE 2. 在 4231 的指标 $\{1,3,4\}$ 上出现的 321模式所对应的约化词 $s_2s_1s_2 \in$ RW(321) 的最小提升是 $s_3s_1s_2s_3s_1 \in$ RW(4231)。

命题 4.9. 两个最小提升的复合仍是一个最小提升。换言之，对于 w 中的任意模式 p 和 p中的任意模式 q，以下最小提升映射图是交换的。



证明。 设 $x \in$RW(q) 是一个约化词，其极小提升为 $y \in$ RW(p) 和 $z \in$ RW(w)。我们断言，只需证明 z 限制为 $y \in$RW(p)。事实上，这个 z 是限制为 $x \in$ RW(q) 的最小约化词 w，其中包含所有限制为 $y \in$RW(p) 的约化词。因此，如果 z 限制为 $y \in$ RW(p)，它必定是满足该条件的最小约化词。

现在我们将通过归纳法证明， z 在p的约化词集合上的限制是 y。归纳依据是它们相同的初始（右侧）片段的长度。我们用记号 $I \subseteq J \subseteq [1,n]$ 表示指标集，其中 $q = w|_I$且 $p = w|_J$。假设$s_{i_k} \cdots s_{i_1}$是 z的某个初始片段，且 $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$在 p上的限制与 y的某个初始片段一致，而 z中的下一个换位 s_{i_k}在不同指标 $j, j' \in J$之间产生一个逆序。由于 z 是 x 的提升中最小的，任何满足 $h < i_k$ 的该部分词扩展 s_h 都必须在指标 $i, i' \in I$ 之间产生一个逆序，而这不是给定约化词 x中产生的下一个逆序。

现在考虑$s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$在 p的部分约化词及其扩展上的限制。任何会在 J 中的指标之间产生逆序的 $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$的扩展，其限制仍将是这个受限部分词的扩展。我们声称，受限词不存在指标小于 s_{i_k}的限制的额外扩展。事实上，这类扩展对应于 w 中指标 $j_1, j_2 \in J$ 之间的逆序；应用部分词$s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$后，这些指标之间仅隔着不属于 J的指标。但请注意，此时必定存在 $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$的某个扩展，在从 j_1、 j_2以及这些额外指标中取出的某一对之间产生逆序；该对要么就是（j_1, j_2），要么包含一个不属于 J的指标。由于 $s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$中指标小于$i_k$ 的扩展只能发生在 $I \subseteq J$中的指标之间，因此$s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}$的限制不可能存在指标小于$s_{i_k}$的此类额外扩展。由此可知，$s_{i_k}$ 的限制就是 y中的下一个换位，归纳证明至此完成。□

本节的主要结 果是，极小提升构成一个容斥结构 .

定理 4.10。 最小提升映射在约化词上定义了一个容斥结构 .

证明。 根据定义 4.2，我们需要证明，对于给定的 $w \in S_n$ 和指标集 I， $J \subseteq [1,n]$，有

$$\iota_{I\cap J}(\mathsf{RW}(w|_{I\cap J})) = \iota_I(\mathsf{RW}(w|_I)) \cap \iota_J(\mathsf{RW}(w|_J)),$$

其中， ι_A 是从 RW($w|_A$) 到 RW(w) 的最小提升。接下来，我们通过检验两个包含关系来证明。

一方面，命题 4.9 表明，最小提升的复合 s

$$\mathsf{RW}(w|_{I\cap J}) \hookrightarrow \mathsf{RW}(w|_I) \hookrightarrow \mathsf{RW}(w)$$

与 $\iota_{I\cap J}$ 相同。这表明 $\iota_{I\cap J}$(RW($w|_{I\cap J}$)) $\subseteq \iota_I$(RW($w|_I$))。同样的论证也表明 $\iota_{I\cap J}$(RW($w|_{I\cap J}$)) $\subseteq \iota_J$(RW($w|_J$))，从而证明了所需包含关系之一。

对于另一个方向，设 $x = s_{i_\ell} \cdots s_{i_1}$ 是 ι_I(RW($w|_I$)) $\cap_J$(RW($w|_J$)) 中 w 的一个约化词。我们用 $x|_I$、 $x|_J$ 和 $x|_{I\cap J}$ 表示将 x 限制到由相应指标集合确定的 w 的模式上的约化词所得的限制。注意，必有 $x = \iota_I(x|_I)$ 和 $x = \iota_J(x|_J)$。此外，将 $x|_I$ 和 $x|_J$ 进一步限制到 $w|_{I\cap J}$ 的约化词上，所得结果均与 $x|_{I\cap J}$ 相同，因为 $I \cap J$ 中指标对之间逆序的顺序都由 x 导出。

我们将根据它们相同的初始（右）片段的长度，通过归纳法证明 x 是 $\iota_{I\cap J}(x|_{I\cap J})$ 的最小提升。事实上， x 的某个（可能为空的）初始片段 $s_{i_k} \cdots s_{i_1}$与 $\iota_{I\cap J}(x|_{I\cap J})$ 中长度相同的初始片段重合。对于 w，这个部分约化词的扩展是满足 $\ell(ws_{i_1} \cdots s_{i_k} s_i) < \ell($ $ws_{i_1} \cdots s_{i_k})$ 的字母 s_i。由于 x是 $x|_I$的最小提升， x 中下一个换位的指标 i_{k+1}，是在作为 w的部分词的扩展中，能创建涉及 I 之外某个指标的逆序，或对应约化词 $x|_I$中的下一个逆序的最小指标。类似地，由于我们还有 $x = x|_J$， i_{k+1}也是在这些扩展中，能创建涉及 J之外某个指标的逆序，或对应约化词 $x|_J$中的下一个逆序的最小指标。结合这些条件，指标 i_{k+1} 必定是在能创建涉及 $I \cap J$中某个指标的逆序，或产生 $x|_{I\cap J}$中的下一个逆序的扩展中最小的指标。根据定义，这正是 $\iota_{I\cap J}(x|_{I\cap J})$中下一个逆序的指标，因此由归纳法可得 $x = \iota_{I\cap J}(x|_{I\cap J})$。证明完毕。□

与上一节一样，我们称 w 的一个约化词为本质约化词，如果它不属于任何针对真模式 p in$w$ 的最小提升映射 RW(p) $\hookrightarrow$RW(w) 的像。结合命题 4.3 和定理 4.10，可得以下结果。

推论 4.11. 约化词的数量是一个模式正统计量，而模式展开式中 $[p]$ 的系数等于 p 的本质约化词数量。

事实上，对于这个模式展开式，我们还有更精细的组合解释。对于每个约化词 $x \in RW(w)$，定义本质指标集 $I \subseteq [1,n]$ 为指标 i 的集合，其中 x 不属于 RW($w|_{\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,n\}}$) $\overset{\iota}{\hookrightarrow}$RW($w$) 的像。先前的结果表明， x 在 $p = w|_I$ 上的限制 $y \in$RW(p) 是 p 的一个本质约化词，并且 $x = \iota(y)$。我们可以据此，为通过如下方式利用 rw 的模式展开式计算 rw(w) 所得到的表达式中的每一项提供组合解释。

将约化词集合 RW(w) 划分为由 $I \subseteq [1,n]$ con- 索引的各个集合 RW$_I$(w)，其中每个集合包含本质指标集为 I 的约化词。在模式展开 rw(w) $= \cdots +$ rw$_p$[p](w) $+ \cdots$ 中，每个模式出现 $p = w|_I$ contributes rw$_p$，即

本质约化词的数量，对 rw(w) 的结果表达式作出贡献。我们将这一项视为对应于子集 $\mathrm{RW}_I(w) \subseteq \mathrm{RW}(w)$，从而为 rw($w$) 的分解提供了完整的组合解释；该分解由 rw 的模式展开给出。

例 4.12. 排列 $w = 3421$ 有 5 个约化词，如图3所示，它们以布线图表示，其中虚线对应非本质指标。这些对应于表达式中的各项

$$\begin{aligned}\mathsf{rw}(3421) &= (1 + [321] + 2[3421] + \cdots)(3421)\\ &= 1 + [321](3421) + 2[3421](3421)\\ &= 1 + 2 + 2 = 5.\end{aligned}$$

例如，$s_2s_1s_2$ 是排列 $p = 321$唯一的本质约化词。$w = 3421$ 中模式 321 的两次出现各自导出一个约化词，对应于w，即将 $s_2s_1s_2$ 从 p-模式提升到 w的最小提升。

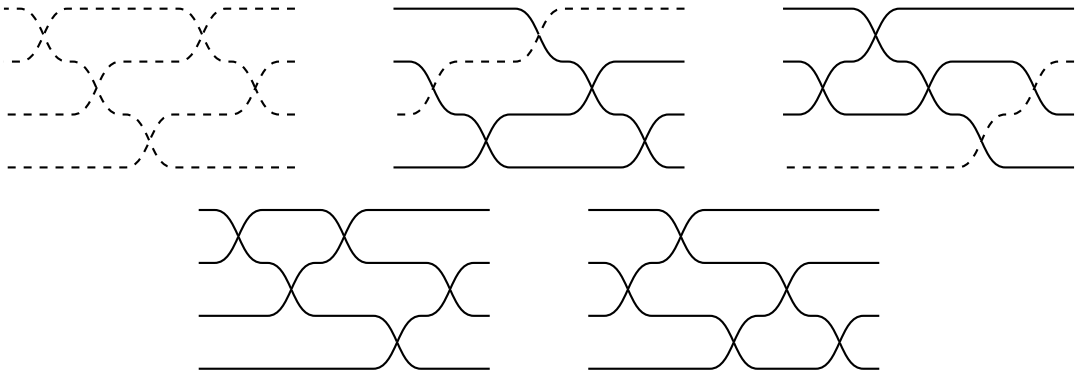


FIGURE 3. 排列 3421 的五个布线图中，虚线对应非本质指标；这些布线图对应于由 rw 的模式展开得到的 rw(3421) 展开式。

5. FURTHER DIRECTIONS

这项研究引出了许多问题，涉及排列统计量、研究这些统计量所用的工具、排列模式作为研究其他主题的手段（即，不只是将其视为有趣的现象本身）的效用，以及这些模式对更广泛性质的潜在影响。我们不可能列出这些及其他方向上的所有后续问题，因此在此提出其中几个。

文献 [7]中列出的其他研究成熟的排列统计量，其模式展开式是什么？文献中的哪些统计量具有模式有限或模式正的展开式？哪些统计量兼具二者？在模式展开的语境中易于进行的计算（例如某个统计量的期望值）如何揭示该统计量本身的性质？如何用模式展开这一共同语言来对比不同的统计量（`风格的 [2]），这样的比较又能回答哪些问题？模式有限（或模式正）展开式还具有哪些共同性质？类似地，还有哪些其他类型的模式展开式具有实用性质和应用？此外，一个统计量 σ 会导出一个二阶统计量，即 $p \mapsto \sigma_p$。这个迭代过程具有哪些性质？

最后，探究约化词统计量的模式正性与舒伯特特化统计量的猜想性模式正性之间是否存在联系，将会很有意思。我们还可以进一步思考，其他相关统计量是否也具有这种模式正性。例如，计算证据表明，对于每个$k \in \mathbb{N}$，排列统计量 hw_k 在 w 上的取值为 w 的长度为 $\ell(w)$ 的***Hecke*** 词（或***Demazure*** 词）的数量，该统计量具有模式正性（Hecke 词的定义见例如 [12] ）。我们指出 $\mathrm{hw}_0 = \mathrm{rw}$，因此这将推广约化词统计量的模式正性。

References

[1] Eric Babson 和 Einar Steingr´ımsson。广义排列模式与 Mahonian 统计量的分类。*S´eminaire Lotharingien de Combinatoire [仅电子版]*, 44：B44b–18，2000。[2] Yosef Berman 和 Bridget Eileen Tenner。模式函数、统计量与浅排列。组合学电子期刊，29，2021。[3] Petter Br¨and´en 和 Anders Claesson。网格模式与排列统计量作为排列模式之和的展开。组合学电子期刊，18，2011。[4] Hugh Dennin。 β-Grothendieck 多项式主特化的模式界。代数组合学，8(3)：745–763，2025。[5] Yibo Gao。舒伯特多项式的主特化与模式包含。欧洲组合学期刊，94：103291，2021。[6] Karola M´esz´aros 和 Arthur Tanjaya。舒伯特多项式上的容斥。代数组合学，5(2)：209–226，2022。[7] Martin Rubey、Christian Stump 等。FindStat——组合统计量数据库。http://www. FindStat.org。[8] Richard P. Stanley。关于 Coxeter 群元素的约化分解数量。欧洲组合学期刊，5(4)：359–372，1984。[9] Bridget Eileen Tenner。Bruhat 序中的棱柱排列。应用数学进展，159：102734，2024。[10] Yannic Vargas。排列模式函数的 Hopf 代数。离散数学与理论计算机科学，《形式幂级数与代数组合学第 *26* 届国际会议论文集》，第 839–850 页，2014。[11] Anna E. Weigandt。舒伯特多项式、132-模式与 Stanley 猜想。代数组合学，1(4)：415–423，2018。[12] Anna E. Weigandt。无凹点管道梦与交错符号矩阵。组合理论期刊，*A* 辑，182：论文编号 105470，52 页，2021。

Department of Mathematics, University of Illinois Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA电子邮箱地址: cavey@illinois.edu

Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH, USA电子邮箱地址: dennin.3@osu.edu

Department of Mathematical Sciences, DePaul University, Chicago, IL, USA电子邮箱地址: bridget@math.depaul.edu