arXiv:2601.03935v1 [physics.comp-ph] 7 Jan 2026

基于通用合成迭代格式加速多尺度气体-辐射耦合流动模拟

Jianan Zeng[a]、Qi Li[b, *]、Yanbing Zhang[a]、Wei Su[c, d]、Lei Wu[a, *]

[a]南方科技大学力学与航空航天工程系，中国深圳 *518055*[b]中山大学航空航天学院，中国深圳 *518107*[c]香港科技大学跨学科研究院新兴跨学科领域部，中国香港特别行政区[d]香港科技大学数学系，中国香港特别行政区

摘要

气体-辐射耦合对高超声速再入流具有关键影响，极端温度会引发显著的非平衡气体效应和辐射热输运。因此，要可靠地设计大气层进入飞行器的热防护系统，准确高效地模拟辐射气体动力学至关重要。本研究采用广义合成迭代格式（GSIS），求解涵盖广泛流动和辐射输运区域的辐射气体流动玻尔兹曼型动理学模型。该方法将非结构有限体积离散速度方法与一组宏观合成方程相结合。在这一框架下，动理学模型为合成方程中的本构关系提供高阶闭合。同时，宏观合成方程驱动介观动理学系统的演化，显著加快近连续区中的稳态收敛；线性傅里叶稳定性分析证实了这一点。尤为重要的是，该算法被证明具有渐近保持性质，能够在与平均自由程无关的粗网格上，正确恢复连续介质极限和光学厚极限；这两个极限分别由辐射纳维–斯托克斯–傅里叶方程描述，该方程涵盖平动、转动、振动和辐射温度。包括阿波罗再入舱周围三维高超声速流在内的高难度基准算例数值模拟表明，在多尺度辐射气体流动模拟中，GSIS 相较传统迭代格式可实现数个数量级的加速，同时准确捕捉高超声速环境中的非平衡效应和辐射传热。

关键词： 稀薄气体流动、辐射气体动力学、通用合成迭代格式、快速收敛、渐近保持

*通讯作者电子邮箱：liqi99@mail.sysu.edu.cn（Qi Li），wul@sustech.edu.cn（Lei Wu）

1. 引言

热非平衡效应存在于多个工程领域，尤其是航空航天工程 [1, 2]和惯性约束聚变 [3]。在大气再入过程中 [4], ，前体压缩会形成极端热力学条件，分子电子跃迁和振动跃迁由此产生强烈的热辐射 [5, 6]。在后体，快速膨胀会导致振动/电子模态与平动模态之间出现显著的热非平衡，这是由于碰撞弛豫不足所致 [7, 8],，从而给辐射通量预测结果带来很大的不确定性 [9, 10]。例如，对于高超声速氮气膨胀流，预测的光谱强度是测量值的三至四倍 [11, 12]。与此同时，火星2020任务的数据表明，后体的辐射热流与对流贡献相当 [13, 14]。因此，准确模拟非平衡辐射过程对于热防护系统设计至关重要。在惯性约束聚变中，辐射气体动力学决定了胶囊内爆期间辐射输运、高温等离子体演化和稀薄流效应之间的相互作用 [15, 16]。辐射不仅介导能量传递和燃料预热，还会显著影响烧蚀动力学以及胶囊表面的流体动力学稳定性。这些过程本质上具有多尺度特征，且往往远离平衡状态。

辐射气体动力学同时考虑气体动力学和辐射效应 [17, 18]。传统上，气体内能与辐射之间的耦合通过将辐射传热作为源项纳入总能量守恒方程 [2, 19–22]来处理。然而，气体动力学的 Navier–Stokes–Fourier（NSF）方程是在克努森数（Kn，即气体分子的平均自由程与特征流动长度之比）较小的假设下推导的，因此，在强非平衡状态下，其线性本构关系会失去精度。相比之下，单原子气体的玻尔兹曼方程和多原子气体的 Wang–Chang–Uhlenbeck（WCU）方程能够对气体演化进行介观描述，原则上适用于所有流动状态 [23]。然而，WCU方程很难求解，因为速度分布函数定义在一个八维空间中，涵盖时间、空间、分子速度和内能；而碰撞算子是一个五维非线性积分，必须对内能级求和；当有 N 个内能级时，其计算成本是单原子气体玻尔兹曼碰撞算子的 N^4 倍。这一高昂的成本促使人们开发简化的动理学模型。例如，Groppi 和 Spiga [24] 提出了一种动理学模型，通过光子吸收和发射描述能级之间的辐射诱导跃迁。然而，该模型形式复杂，计算成本甚至高于原始的玻尔兹曼碰撞算子，因而限制了其实用性。为解决这一局限，Li 等人 [25] 开发了一种气体流动与辐射自洽耦合的动理学模型。作为针对具有转动和振动模态的分子的弛豫型动理学模型的扩展，该模型进一步考虑了振动能态之间的辐射跃迁。它保留了基本物理特性，同时比玻尔兹曼碰撞算子简单得多，因此有望用于实际计算。

目前已有多种用于求解动理学方程的数值格式，其中离散速度方法（DVM） [26, 27]和直接模拟蒙特卡罗（DSMC）方法 [28]应用最为广泛。由于流动过程与碰撞过程采用分裂处理，这些传统格式要求空间网格单元尺寸和时间步长分别小于分子平均自由程和平均碰撞时间，因此在连续流动状态下计算成本高得难以承受。考虑气体–光子耦合时，必须引入两个不同的克努森数：气体克努森数和光子克努森数（定义为光子的平均自由程与特征流动长度之比）。在实际应用中，这两个克努森数的取值范围可能跨越数个数量级，导致稀薄效应与连续介质效应并存的状态。因此，基于适当的多尺度方法开发统一模拟至关重要。

近年来，多尺度方法的发展取得了显著进展。例如，（离散）统一气体动理学格式 [29, 30]同时处理粒子的迁移与碰撞。该方法具有渐近保持性质，无需将空间网格单元尺寸和时间步长分别减小到低于分子平均自由程和平均碰撞时间的尺度，即可准确恢复NSF解。它已成功应用于稀薄气体流动问题 [31–34] 以及光子输运 [35–37]。通用合成迭代格式（GSIS）采用了另一种多尺度策略，即交替求解动理学方程及其对应的合成方程 [38, 39]。合成方程中的本构关系既包含NSF方程采用的线性项，也包含直接从速度分布函数计算得到的高阶项。严格的数学分析和大量数值测试表明，GSIS显著减少了达到收敛所需的迭代次数 [40]。此外，当克努森数较小时，高阶本构关系趋于零，因此即使空间网格单元尺寸远大于平均自由程，该方法仍能保持渐近保持性质。相反，在克努森数较大时，这些高阶本构关系能够自然地捕捉稀薄效应。这种介观–宏观耦合理念已成功拓展至稀薄气体动力学 [41–45] 和声子输运问题 [46, 47]。

然而，辐射气体流动问题要求气体动力学与辐射传热之间进行自洽耦合。现有的介观耦合方法主要依赖DSMC-光子蒙特卡罗方法 [48], ，但在多尺度流动状态下，这些方法计算效率低下，而且流场中的统计涨落会通过与辐射率的耦合而被放大，从而导致不稳定性 [49]。基于DVM的多尺度方法在处理这些问题时表现更优，但现有研究大多局限于纯气体动力学或纯光子输运，尚未证明其在多尺度框架下处理气体-辐射相互作用问题的潜力。因此，本研究将GSIS扩展至辐射稀薄流动，涵盖气体分子和光子的克努森数的宽广范围。

本文其余部分安排如下。第2节全面概述辐射气体流动的动理学模型方程，并推导相应的宏观合成方程。第3节介绍结合介观与宏观求解器的GSIS耦合策略。第4节通过严格的傅里叶稳定性分析，展示所提出方法的快速收敛特性，

并在第5节分析其渐近保持性质。第6节详细介绍GSIS中的数值实现，包括用于求解介观和宏观方程的方案。第7节通过一系列全面且具有挑战性的数值算例验证该方法，其中包括再入舱周围的三维高超声速流，结果表明，与传统方法相比，该方法可实现数个数量级的加速。最后，第8节总结主要结论。

2. GSIS 的控制方程

对于非平衡辐射气体流动，我们采用 Li等人的动理学模型。 [25],该模型扩展了含内能 [50–52] 的分子气体弛豫时间近似模型，并通过振动辐射跃迁使气体动力学与光子输运实现双向耦合。关键在于，模型参数可进行调整，从而准确再现关键弛豫率和输运系数，包括各能量模式的剪切黏度、体积黏度和热导率。通过对该动理学模型取矩，且不对剪切应力或热流作近似处理，我们得到了适用于所有流动状态的辐射气体宏观合成方程。

2.1. 辐射气体流动的动理学模型

我们考虑一种具有平动、转动和振动能量模式的分子气体，这些模式会发生振动辐射跃迁，从而与光子输运耦合。在动理学理论中，分子气体的状态由分布函数$f(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi},\ \varepsilon_r,\ \varepsilon_v)$描述，其中 t 表示时间，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_3$ 表示空间坐标，$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}_3$ 表示分子速度，而 ε_r 和 ε_v 分别表示转动能和振动能。为降低计算成本，我们通过对内能积分引入三个约化速度分布函数，

$$(f_0, f_1, f_2) = \iint_0^\infty (1, \varepsilon_r, \varepsilon_v) f, \mathrm{d}\varepsilon_r \mathrm{d}\varepsilon_v. \tag{1}$$

对于辐射场，总辐射强度表示为 $I_R(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\Omega})$，用于衡量沿$\boldsymbol{\Omega}$方向传播的光子所携带的、对所有频率求和后的单位立体角能量通量。

Li等人 [25] 的模型对光子采用灰体模型近似，忽略光谱分辨率，但通过有效的频率无关吸收系数 k_{eff}，能够研究整体辐射效应。约化分布

函数和辐射强度的演化由耦合动力学方程控制,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_0}{\partial t}+\boldsymbol{\xi}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{x}}=&\frac{g_{0t}-f_0}{\tau}+\frac{g_{0r}-g_{0t}}{Z_r\tau}+\frac{g_{0v}-g_{0t}}{Z_v\tau},\\
\frac{\partial f_1}{\partial t}+\boldsymbol{\xi}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{x}}=&\frac{g_{1t}-f_1}{\tau}+\frac{g_{1r}-g_{1t}}{Z_r\tau}+\frac{g_{1v}-g_{1t}}{Z_v\tau},\\
\frac{\partial f_2}{\partial t}+\boldsymbol{\xi}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{x}}=&\frac{g_{2t}-f_2}{\tau}+\frac{g_{2r}-g_{2t}}{Z_r\tau}+\frac{g_{2v}-g_{2t}}{Z_v\tau}-\frac{f_0}{\rho}k_{\text{eff}}\int_{4\pi}\left(B_R(T_v)-I_R\right)\,\mathrm{d}\Omega,\\
\frac{1}{c_l}\frac{\partial I_R}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\partial I_R}{\partial \boldsymbol{x}}=&k_{\text{eff}}\left(B_R(T_v)-I_R\right),
\end{aligned}\tag{2}$$

其中， τ 表示平动弛豫时间， Z_r 和 Z_v 分别为转动和振动碰撞数； $B_R(T)=\sigma_R T^4/\pi$ 为频率积分普朗克函数；参考分布函数 g 以正交多项式级数在平衡分布附近展开,

$$\begin{aligned}
g_{0t}&=\rho f_0^{\text{eq}}(T_t)\left[1+\frac{2\boldsymbol{q}_t\cdot\boldsymbol{c}}{15T_tp_t}\left(\frac{c^2}{2T_t}-\frac{5}{2}\right)\right],\\
g_{0r}&=\rho f_0^{\text{eq}}(T_{tr})\left[1+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{c}}{15T_{tr}p_{tr}}\left(\frac{c^2}{2T_{tr}}-\frac{5}{2}\right)\right],\\
g_{0v}&=\rho f_0^{\text{eq}}(T_{tv})\left[1+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{c}}{15T_{tv}p_{tv}}\left(\frac{c^2}{2T_{tv}}-\frac{5}{2}\right)\right],\\
g_{1t}&=\frac{d_r}{2}T_rg_{0t}+\frac{\boldsymbol{q}_r\cdot\boldsymbol{c}}{T_t}f_0^{\text{eq}}(T_t),\quad g_{2t}=\frac{d_v(T_v)}{2}T_vg_{0t}+\frac{\boldsymbol{q}_v\cdot\boldsymbol{c}}{T_t}f_0^{\text{eq}}(T_t),\\
g_{1r}&=\frac{d_r}{2}T_{tr}g_{0r}+\frac{\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{c}}{T_{tr}}f_0^{\text{eq}}(T_{tr}),\quad g_{2r}=\frac{d_v(T_v)}{2}T_vg_{0r}+\frac{\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{c}}{T_{tr}}f_0^{\text{eq}}(T_{tr}),\\
g_{1v}&=\frac{d_r}{2}T_rg_{0v}+\frac{\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{c}}{T_{tv}}f_0^{\text{eq}}(T_{tv}),\quad g_{2v}=\frac{d_v(T_{tv})}{2}T_{tv}g_{0v}+\frac{\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{c}}{T_{tv}}f_0^{\text{eq}}(T_{tv}),
\end{aligned}\tag{3}$$

局部平衡分布为

$$f_0^{\text{eq}}(T)=\left(\frac{1}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{c^2}{2T}\right).\tag{4}$$

其中， ρ 为质量密度， $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{u}$ 为非热速度， $\boldsymbol{u}$ 为流速， T 表示温度， $\boldsymbol{q}$ 表示热流。下标 t， r 和 v 分别表示平动、转动和振动分量。能量模式间的平衡温度 T_{tr} （平动-转动）、 T_{tv} （平动-振动）以及总温度 T 定义如下:

$$T_{tr}=\frac{3T_t+d_rT_r}{3+d_r},\quad T_{tv}=\frac{3T_t+d_v(T_v)T_v}{3+d_v(T_{tv})},\quad T=\frac{3T_t+d_rT_r+d_v(T_v)T_v}{3+d_r+d_v(T)},\tag{5}$$

及相应的压力分量,

$$(p_t,p_r,p_v,p,p_{tr},p_{tv})=\rho(T_t,T_r,T_v,T,T_{tr},T_{tv}).\tag{6}$$

请注意，上述方程中的所有变量均采用参考尺度进行无量纲化：参考长度 L_0、温度 T_0 和质量密度 ρ_0。参考速度选为 $v_0 = \sqrt{k_B T_0/m}$，其中 k_B 为玻尔兹曼常数，m 为分子质量。因此，参考能量为 $k_B T_0$，参考压力为 $\rho_0 k_B T_0/m$。随后，对分布函数取速度矩，即可得到所关注的宏观量，包括质量密度 ρ、流速 $\boldsymbol{u}$、剪切应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$、温度 T 和热流 $\boldsymbol{q}$,

$$
\begin{aligned}
(\rho, \rho\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}) &= \int \left(1, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{c}\boldsymbol{c} - \frac{c^2}{3}\mathbf{I}\right) f_0 \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \\
\left(\frac{3}{2}\rho T_t, \frac{d_r}{2}\rho T_r, \frac{d_v(T_v)}{2}\rho T_v\right) &= \int \left(\frac{c^2}{2} f_0, f_1, f_2\right) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \quad 4\sigma_R T_R^4 = \int I_R \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}, \\
(\boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{q}_r, \boldsymbol{q}_v) &= \int \boldsymbol{c} \left(\frac{1}{2} c^2 f_0, f_1, f_2\right) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{q}_R = \int \boldsymbol{\Omega} I_R \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中，$\mathbf{I}$ 是一个 3×3 单位矩阵，而 σ_R 是以 $n_0 k_B v_0 / T_0^3$归一化的无量纲斯特藩-玻尔兹曼常数；转动自由度 d_r 为定值，振动自由度 $d_v(T_v)$则通过振动温度确定：

$$
d_v(T_v) = \frac{2T_v^{\mathrm{ref}}/T_v}{\exp(T_v^{\mathrm{ref}}/T_v) - 1}, \tag{8}
$$

其中，T_v^{ref}是特征振动温度。

对于辐射气体流动，非平衡程度由两个克努森数表征：气体克努森数 $\mathrm{Kn}^{\mathrm{gas}}$ 和光子克努森数 $\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$。这些无量纲参数通过无量纲平动弛豫时间 τ 和光子吸收系数 k_{eff} 进入动理学模型方程（2），即：

$$
\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_t^{\omega-1}}{\rho} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}, \quad k_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}, \tag{9}
$$

其中，ω是黏度 $\mu(T) = \mu_0 T^{\omega}$幂律关系中的指数，$\mu_0$为参考温度下的黏度。该参数化方法使动理学模型能够再现正确的气体剪切黏度和有效辐射吸收特性。

除了弛豫时间和光子吸收系数外，动理学模型还需要指定辅助热流 $\boldsymbol{q}_0$、$\boldsymbol{q}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_2$，以确保由无量纲矩阵 A控制的热流能够准确弛豫：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_t \\ \boldsymbol{q}_r \\ \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix} = -\frac{p_t}{\mu}\begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tr} & A_{tv} \\ A_{rt} & A_{rr} & A_{rv} \\ A_{vt} & A_{vr} & A_{vv} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_t \\ \boldsymbol{q}_r \\ \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix}. \tag{10}
$$

因此，这些辅助通量可表示为 $\boldsymbol{q}_t$、$\boldsymbol{q}_r$ 和 $\boldsymbol{q}_v$ 的线性组合，即 [52],

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_0 \\ \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 - 3A_{tt})Z_{int} + 1 & -3A_{tr}Z_{int} & -3A_{tv}Z_{int} \\ -A_{rt}Z_{int} & 1 - A_{rr}Z_{int} & -A_{rv}Z_{int} \\ -A_{vt}Z_{int} & -A_{vr}Z_{int} & 1 - A_{vv}Z_{int} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_t \\ \boldsymbol{q}_r \\ \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix}, \tag{11}
$$

其中 $Z_{int} = (1/Z_r + 1/Z_v)^{-1}$。热弛豫速率矩阵 A 无法仅由气体的热导率完全确定；但在给定分子间相互作用时，可通过分子动力学提取该矩阵；采用碰撞模型时，也可通过直接模拟蒙特卡罗模拟提取该矩阵 [25, 52]。此外， A的值可由 WCU方程的渐近展开近似推导得出，即 [53],

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\left(\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r} + \frac{d_v}{(3+d_v)Z_v}\right) & -\frac{5}{2(3+d_r)Z_r} & -\frac{5}{2(3+d_v)Z_v} \\ -\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r} & \mathrm{Sc} + \frac{3}{2(3+d_r)Z_r} & 0 \\ -\frac{d_v}{(3+d_v)Z_v} & 0 & \mathrm{Sc} + \frac{3}{2(3+d_v)Z_v} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中 Sc 为施密特数。此参数化不仅确保动理学模型能够在连续流动状态下正确再现气体的热导率，还能准确描述所有流动状态下的热弛豫行为。

2.2. 宏观合成方程

为构建适用于所有流动状态的宏观方程，我们直接从动理学模型（2）推导精确的矩方程，而不采用近似平衡假设。通过取速度矩，可得到一组方程，这些方程满足质量、动量和总能量守恒定律，并纳入内能交换和气体–光子能量交换的弛豫机制，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (p_t \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}) &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} e_{\mathrm{gas}}) + \nabla \cdot (p_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}) &= 0, \\ \frac{\partial e_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} e_r) + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_r &= \frac{e_{tr} - e_r}{Z_r \tau}, \\ \frac{\partial e_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} e_v) + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_v &= \frac{e_{tv} - e_v}{Z_v \tau} - k_{\mathrm{eff}} \left(e_{vR} - e_R\right), \\ \frac{\partial e_R}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_R &= k_{\mathrm{eff}} \left(e_{vR} - e_R\right), \end{aligned} \tag{13}$$

其中能量分量为:

$$\begin{aligned} &e_t = \frac{3}{2}\rho T_t + \frac{1}{2}\rho u^2, \quad e_r = \frac{d_r}{2}\rho T_r, \quad e_v = \frac{d_v(T_v)}{2}\rho T_v, \quad e_R = 4\sigma_R T_R^4, \\ &e_{tr} = \frac{d_r}{2}\rho T_{tr}, \quad e_{tv} = \frac{d_v(T_{tv})}{2}\rho T_{tv}, \quad e_{Rv} = 4\sigma_R T_v^4, \end{aligned} \tag{14}$$

且 $e_{\mathrm{gas}} = e_t + e_r + e_v$ 表示气体能量， $e = e_{\mathrm{gas}} + e_R$ 为包含辐射分量的总能量；
$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_t + \boldsymbol{q}_r + \boldsymbol{q}_v + \boldsymbol{q}_R$ 为总热流。

核心挑战在于，方程（13）给出了一个未闭合系统，因为其中精确的剪切应力$\boldsymbol{\sigma}$和热流 $\boldsymbol{q}_t$, $\boldsymbol{q}_r$， $\boldsymbol{q}_v$， $\boldsymbol{q}_R$均未指定。Chapman-Enskog展开 [54]

克努森数的一阶展开给出了气体的NSF本构关系以及光子输运的扩散近似，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{NSF}} &= -\mu\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^{\top}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\mathbf{I}\right),\\ \left[\boldsymbol{q}_t^{\mathrm{NSF}},\boldsymbol{q}_r^{\mathrm{NSF}},\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{NSF}}\right]^{\top} &= -\boldsymbol{\kappa}_{\mathrm{gas}}\nabla\left[T_t,T_r,T_v\right]^{\top},\\ \boldsymbol{q}_R^{\mathrm{NSF}} &= -\kappa_R\nabla e_R,\end{aligned} \tag{15}$$

其中，系数表示输运性质：剪切黏度 $\mu=p_t\tau$、气体的热导率矩阵

$$\boldsymbol{\kappa}_{\mathrm{gas}}=\begin{bmatrix}\kappa_{tt}&\kappa_{tr}&\kappa_{tv}\\ \kappa_{rt}&\kappa_{rr}&\kappa_{rv}\\ \kappa_{vt}&\kappa_{vr}&\kappa_{vv}\end{bmatrix}=\frac{p_t\tau}{2}\begin{bmatrix}A_{tt}&A_{tr}&A_{tv}\\ A_{rt}&A_{rr}&A_{rv}\\ A_{vt}&A_{vr}&A_{vv}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5&0&0\\ 0&d_r&0\\ 0&0&d_v(T_v)\end{bmatrix}, \tag{16}$$

以及辐射的热输运系数 $\kappa_R=1/3k_{\mathrm{eff}}$。然而，这些线性本构关系仅在气体流动的近连续区和光子输运的扩散极限下有效。因此，方程（16）不足以描述高度非平衡系统。

GSIS方法的关键在于，不作任何近似，利用精确的剪切应力张量和热流求解宏观方程。因此，宏观合成方程的解将与动理学方程的解一致。为此，我们将精确的剪切应力张量和热流分解为线性本构关系与高阶项（HoTs）：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= -\mu\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^{\top}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\mathbf{I}\right)+\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{\sigma}},\\ \left[\boldsymbol{q}_t,\boldsymbol{q}_r,\boldsymbol{q}_v\right]^{\top} &= -\boldsymbol{\kappa}_{\mathrm{gas}}\nabla\left[T_t,T_r,T_v\right]^{\top}+\left[\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_t},\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_r},\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_v}\right]^{\top},\\ \boldsymbol{q}_R &= -\kappa_R\nabla e_R+\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_R}.\end{aligned} \tag{17}$$

关键在于，高阶项用于捕捉NSF近似之外的非平衡效应，其计算方法是从动理学分布函数得到的精确矩中减去NSF近似：

$$\begin{aligned}\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{\sigma}} &= \int\left(\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}-\frac{c^2}{3}\mathbf{I}\right)f_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{NSF}},\\ \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_t} &= \int\frac{1}{2}\boldsymbol{c}c^2f_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{q}_t^{\mathrm{NSF}},\quad \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_r}=\int\boldsymbol{c}f_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{q}_r^{\mathrm{NSF}},\\ \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_v} &= \int\boldsymbol{c}f_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{NSF}},\quad \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_R}=\int\boldsymbol{\Omega}I_R\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{q}_R^{\mathrm{NSF}},\end{aligned} \tag{18}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{NSF}}$ 和 $\boldsymbol{q}_{t/r/v/R}^{\mathrm{NSF}}$ 根据式（15）利用分布函数矩得到的宏观性质计算。因此，宏观方程（13）通过包含非平衡效应的精确本构关系实现闭合，并与动理学模型（2）共同构成GSIS方法的基础。

3. GSIS迭代框架

用于求解动理学方程的传统迭代格式（CIS）仅依赖于对分布函数进行连续更新。由于参考分布函数、弛豫时间和辐射特性都取决于分布函数的速度矩，CIS必须不断迭代，直至这些量自洽收敛。第4节将严格证明，CIS在高度稀薄气体流动中效率较高，但在近连续介质区域中会变得极其缓慢。

GSIS 通过引入紧密的动理学–宏观耦合，利用宏观合成方程加速收敛，从而克服了这一局限。GSIS 不再等待动理学解独自收敛，而是在单次动力学步骤（用于捕捉非平衡细节）与隐式宏观步骤（用于高效传递整体信息）之间交替进行。这种耦合迭代确保宏观演化中应用的高阶项由动理学解持续更新，同时宏观状态反过来为下一次动力学步骤提供改进的参考分布函数，从而形成快速收敛的反馈循环。

将解从迭代 k 推进至 $k+1$ 的完整 GSIS 流程如下：

1. 介观（动力学）步骤：从分布函数 $f^k = \left(f_0^k、\ f_1^k、\ f_2^k、\ I_R^k\right)$出发，通过矩关系（7）计算宏观状态 $M^k = \left(\rho^k、\ \boldsymbol{u}^k、\ T_t^k、\ T_r^k、\ T_v^k、\ T_R^k\right)$。求解一次动理学方程（2）（相当于执行一次 CIS 迭代），以获得中间分布函数 $f^{k+1/2}$。上标 $k+1/2$ 表示未校正的动理学解，该解保留了非平衡特征，但尚未经过宏观求解器的修正。

2. 宏观（合成）步骤：利用分布函数 $f^{k+1/2}$，分别通过式 (7) 和式 (18) 计算中间宏观状态 $M^{k+1/2}$ 及相应的高阶项。将高阶项固定为显式源项后，对宏观合成方程 (13) 进行迭代直至收敛，从而得到更新后的宏观场 M^{k+1}。

3. 分布函数同步：修正中间分布函数$f^{k+1/2}$，使其与 M^{k+1}保持一致：

$$f^{k+1} = f^{k+1/2} + [f^{\mathrm{eq}}(M^{k+1}) - f^{\mathrm{eq}}(M^{k+1/2})], \tag{19}$$

其中，$f_{\mathrm{eq}}(M)$ 表示根据宏观状态重构的局部平衡分布。此步骤确保下一次迭代的分布函数满足更新后的守恒定律，同时保留动力学步骤所捕获的非平衡信息。

4. 收敛性评估：重复这一循环，直至宏观变量的残差低于预设容差。收敛后，最终解同时满足动力学描述和宏观描述。

这种迭代设计从根本上赋予 GSIS 快速收敛和渐近保持性质。在连续介质极限下，隐式宏观求解器占主导地位，无需解析动力学尺度即可确保获得准确、快速的辐射流体动力学解；而在高克努森数区域，动力学步骤能够捕捉关键的非平衡效应。因此，该方法在整个气体和光子克努森数范围内都表现稳健。第4节将通过严格的傅里叶稳定性分析量化收敛加速效果，第5节则分析渐近保持性质。

4. GSIS 的收敛加速

对于纯气体动力学，CIS 在近连续介质区域中的收敛性能退化已得到充分证明 [40, 41], ；然而，对于具有自洽辐射耦合的多物理系统，其性能仍未得到探究。本节将对耦合气体–辐射系统进行系统的线性傅里叶稳定性分析，以严格量化 GSIS 相较于传统方法的收敛加速效果。为保持分析的可处理性，同时保留基本物理特性，我们围绕均匀平衡态对动理学方程进行线性化，并将空间坐标视为连续变量。由此得到收敛因子，用以比较 CIS 和 GSIS 的稳定性与效率，尤其是在近连续介质区域中。

4.1. 线性化动理学模型与扰动变量

对于略微偏离全局平衡态的辐射气体系统，速度分布函数 $f_l (l = 0，1，2)$和辐射强度 I_R分别表示为其平衡分量与扰动之和： $f_l = f_{\mathrm{eq}_l} + h_l$和 $I_R = I_R^{\mathrm{eq}} + h_R$。 其中， f_l^{eq} 和 I_R^{eq} 为平衡分布函数，

$$f_0^{\mathrm{eq}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad f_1^{\mathrm{eq}} = \frac{d_r}{2} f_0^{\mathrm{eq}}, \quad f_2^{\mathrm{eq}} = \frac{d_v}{2} f_0^{\mathrm{eq}}, \quad I_R^{\mathrm{eq}} = \frac{\sigma_R}{\pi}, \tag{20}$$

而 h_l 和 h_R 是扰动。

稳态解可以通过迭代求解以下线性化方程获得，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla h_0^{k+1} =& \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}} \left[\left(g'^k_{0t} - h_0^{k+1} \right) + \frac{1}{Z_r} \left(g'^k_{0r} - g'^k_{0t} \right) + \frac{1}{Z_v} \left(g'^k_{0v} - g'^k_{0t} \right) \right], \\
\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla h_1^{k+1} =& \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}} \left[\left(g'^k_{1t} - h_1^{k+1} \right) + \frac{1}{Z_r} \left(g'^k_{1r} - g'^k_{1t} \right) + \frac{1}{Z_v} \left(g'^k_{1v} - g'^k_{1t} \right) \right], \\
\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla h_2^{k+1} =& \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}} \left[\left(g'^k_{2t} - h_2^{k+1} \right) + \frac{1}{Z_r} \left(g'^k_{2r} - g'^k_{2t} \right) + \frac{1}{Z_v} \left(g'^k_{2v} - g'^k_{2t} \right) \right] \\
& - \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}} f_0^{\mathrm{eq}} \left(16 \sigma_R \Delta T_v^k - \Delta e_R^k \right), \\
\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla h_R^{k+1} =& \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}} \left(\frac{4\sigma_R}{\pi} \Delta T_v^k - h_R^{k+1} \right),
\end{aligned} \tag{21}$$

其中，上标 k 表示迭代步，线性化碰撞算子中的扰动参考分布 g'_{0t} 表示为：

$$
\begin{aligned}
g'_{0t} &= f_0^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_t\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_t\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\right],\\
g'_{0r} &= f_0^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_{tr}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\right],\\
g'_{0v} &= f_0^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_{tv}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\right],\\
g'_{1t} &= f_1^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_t\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_t\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)+\Delta T_r\right]+f_0^{\mathrm{eq}}\boldsymbol{q}_r\cdot\boldsymbol{\xi},\\
g'_{1r} &= f_1^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_{tr}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)+\Delta T_{tr}\right]+f_0^{\mathrm{eq}}\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{\xi},\\
g'_{1v} &= f_1^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_{tv}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)+\Delta T_r\right]+f_0^{\mathrm{eq}}\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{\xi},\\
g'_{2t} &= f_2^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_t\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_t\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)+\Delta T_v\right]+f_0^{\mathrm{eq}}\boldsymbol{q}_v\cdot\boldsymbol{\xi},\\
g'_{2r} &= f_2^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_{tr}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)+\Delta T_v\right]+f_0^{\mathrm{eq}}\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{\xi},\\
g'_{2v} &= f_2^{\mathrm{eq}}\left[\Delta\rho+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\xi}+\Delta T_{tv}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)+\frac{2\boldsymbol{q}_0\cdot\boldsymbol{\xi}}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)+\Delta T_{tv}\right]+f_0^{\mathrm{eq}}\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

这些参考分布函数是由上一个迭代步 k 中的宏观扰动变量 $\Delta\rho$、 $\boldsymbol{u}$、 ΔT 和 $\boldsymbol{q}$ 线性组合而成，用于计算碰撞算子的增益部分。

这些宏观量表示其对应平衡值的偏差，通过对扰动分布函数取速度矩计算得出，如下所示：

$$
\begin{aligned}
&\Delta\rho=\int h_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{u}=\int\boldsymbol{\xi}h_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\quad \Delta T_t=\int\left(\frac{1}{3}\xi^2-1\right)h_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\\
&\Delta T_r=\int\left(\frac{2}{d_r}h_1-h_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\quad \Delta T_v=\int\left(\frac{2}{d_v}h_2-h_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\quad \Delta e_R=\int h_R\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},\\
&\boldsymbol{\sigma}=\int\left(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}-\frac{1}{3}\xi^2\mathbf{I}\right)h_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{q}_t=\int\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\xi}h_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\\
&\boldsymbol{q}_r=\int\boldsymbol{\xi}\left(h_1-\frac{d_r}{2}h_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{q}_v=\int\boldsymbol{\xi}\left(h_2-\frac{d_v}{2}h_0\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{q}_R=\int\boldsymbol{\Omega}h_R\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

4.2. CIS 的收敛性分析

为定量评估 CIS 的收敛速率，我们基于迭代误差的演化进行线性稳定性分析。我们将以下分布函数的误差函数定义为

分布函数（Y_l, Y_R）定义为连续两次迭代步骤之间的差值,

$$
\begin{aligned}
&Y_l^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \equiv h_l^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - h_l^{k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \quad l=0,1,2.,\\
&Y_R^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) \equiv h_R^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) - h_R^{k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}),
\end{aligned} \tag{24}
$$

同理，对于完整的 17 个扰动变量 M，宏观量 $\Phi(\boldsymbol{x})$ 的误差函数定义为:

$$
M = [\Delta\rho, \boldsymbol{u}, \Delta T_t, \Delta T_r, \Delta T_v, \Delta e_R, \boldsymbol{q}_t, \boldsymbol{q}_r, \boldsymbol{q}_v] \tag{25}
$$

宏观误差向量 $\Phi^{k+1}(\boldsymbol{x})$ 通过对分布误差函数取矩得到:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{k+1}(\boldsymbol{x}) &= \left[\Phi_{\Delta\rho}^{k+1}, \Phi_{\boldsymbol{u}}^{k+1}, \Phi_{\Delta T_t}^{k+1}, \Phi_{\Delta T_r}^{k+1}, \Phi_{\Delta T_v}^{k+1}, \Phi_{\Delta e_R}^{k+1}, \Phi_{\boldsymbol{q}_t}^{k+1}, \Phi_{\boldsymbol{q}_r}^{k+1}, \Phi_{\boldsymbol{q}_v}^{k+1}\right]\\
&\equiv M^{k+1}(\boldsymbol{x}) - M^{k}(\boldsymbol{x})\\
&= \sum_{l=0,1,2} \int \phi_l(\boldsymbol{\xi})\, Y_l^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \int \phi_R(\boldsymbol{\Omega})\, Y_R^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},
\end{aligned} \tag{26}
$$

其中，$\phi_l(\boldsymbol{\xi}), (l = 0,1,2)$ 和 $\phi_R(\boldsymbol{\Omega})$ 是 1×17 矩向量，$\phi_l(\boldsymbol{\xi})$ 用于提取密度、速度、气体温度/热流分量，而 $\phi_R(\boldsymbol{\Omega})$ 用于提取辐射能量密度,

$$
\begin{aligned}
\phi_0(\boldsymbol{\xi}) &= \left[1, \boldsymbol{\xi}, \left(\frac{1}{3}\xi^2 - 1\right), -1, -1, 0, \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\xi}, -\frac{d_r}{2}\boldsymbol{\xi}, -\frac{d_v}{2}\boldsymbol{\xi}\right],\\
\phi_1(\boldsymbol{\xi}) &= \left[0, \mathbf{0}, 0, \frac{2}{d_r}, 0, 0, \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{0}\right],\\
\phi_2(\boldsymbol{\xi}) &= \left[0, \mathbf{0}, 0, 0, \frac{2}{d_v}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}\right],\\
\phi_R(\boldsymbol{\Omega}) &= [0, \mathbf{0}, 0, 0, 0, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}],
\end{aligned} \tag{27}
$$

将迭代 k 时的动理学方程 (21) 与 $k+1$时的动理学方程相减，并代入误差定义 (24) 和 (26)，分布函数误差的演化满足

以下线性方程组，

$$
\begin{aligned}
\left[1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\right]Y_0^{k+1}=&f_0^{\mathrm{eq}}\left\{\Phi_{\Delta\rho}^k+\Phi_{\boldsymbol{u}}^k\cdot\boldsymbol{\xi}+\Phi_{\Delta T_t}^k\left(1-\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r}-\frac{d_v}{(3+d_v)Z_v}\right)\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)\right.\\
&+\left[\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r}\Phi_{\Delta T_r}^k+\frac{d_v}{(3+d_v)Z_v}\Phi_{\Delta T_v}^k\right]\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)\\
&\left.+\left[\left(3-3A_{tt}\right)\Phi_{\boldsymbol{q}_t}^k-3A_{tr}\Phi_{\boldsymbol{q}_r}^k-3A_{tv}\Phi_{\boldsymbol{q}_v}^k\right]\cdot\frac{2}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\xi}\right\},\\
\left[1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\right]Y_1^{k+1}=&f_1^{\mathrm{eq}}\left\{\Phi_{\Delta\rho}^k+\Phi_{\boldsymbol{u}}^k\cdot\boldsymbol{\xi}+\Phi_{\Delta T_t}^k\left(1-\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r}-\frac{d_v}{(3+d_v)Z_v}\right)\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)\right.\\
&+\left[\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r}\Phi_{\Delta T_r}^k+\frac{d_v}{(3+d_v)Z_v}\Phi_{\Delta T_v}^k\right]\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)\\
&+\left[\frac{3}{(3+d_r)Z_r}\Phi_{\Delta T_t}^k+\left(1-\frac{3}{(3+d_r)Z_r}\right)\Phi_{\Delta T_r}^k\right]\\
&+\left[\left(3-3A_{tt}\right)\Phi_{\boldsymbol{q}_t}^k-3A_{tr}\Phi_{\boldsymbol{q}_r}^k-3A_{tv}\Phi_{\boldsymbol{q}_v}^k\right]\cdot\frac{2}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\xi}\\
&\left.+\left[-A_{rt}\Phi_{\boldsymbol{q}_t}^k+\left(1-A_{rr}\right)\Phi_{\boldsymbol{q}_r}^k-A_{rv}\Phi_{\boldsymbol{q}_v}^k\right]\cdot\frac{2}{d_r}\boldsymbol{\xi}\right\},\\
\left[1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\right]Y_2^{k+1}=&f_2^{\mathrm{eq}}\left\{\Phi_{\Delta\rho}^k+\Phi_{\boldsymbol{u}}^k\cdot\boldsymbol{\xi}+\Phi_{\Delta T_t}^k\left(1-\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r}-\frac{d_v}{(3+d_v)Z_v}\right)\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)\right.\\
&+\left[\frac{d_r}{(3+d_r)Z_r}\Phi_{\Delta T_r}^k+\frac{d_v}{(3+d_v)Z_v}\Phi_{\Delta T_v}^k\right]\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\right)\\
&+\left[\frac{3}{(3+d_v)Z_v}\Phi_{\Delta T_t}^k+\left(1-\frac{3}{(3+d_v)Z_v}\right)\Phi_{\Delta T_v}^k\right]\\
&+\left[\left(3-3A_{tt}\right)\Phi_{\boldsymbol{q}_t}^k-3A_{tr}\Phi_{\boldsymbol{q}_r}^k-3A_{tv}\Phi_{\boldsymbol{q}_v}^k\right]\cdot\frac{2}{15}\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\xi}\\
&\left.+\left[-A_{vt}\Phi_{\boldsymbol{q}_t}^k-A_{vr}\Phi_{\boldsymbol{q}_r}^k+\left(1-A_{vv}\right)\Phi_{\boldsymbol{q}_v}^k\right]\cdot\frac{2}{d_v}\boldsymbol{\xi}\right\}\\
&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}f_0^{\mathrm{eq}}\left(16\sigma_R\Phi_{\Delta T_v}^k-\Phi_{\Delta e_R}^k\right),\\
\left[1+\text{克努森数}_{\mathrm{photon}}\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\right]Y_R^{k+1}\triangleq&\frac{4}{\pi}\sigma_R\Phi_{\Delta T_v}^k.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

这些方程展示了 CIS 的特征性误差传播机制：下一步的分布函数误差 Y^{k+1} 与前一步的宏观误差 Φ^k呈线性关系。

为了确定收敛速率，我们进行线性傅里叶稳定性分析。

误差函数被分解为傅里叶模态,

$$\begin{aligned} Y_l^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) &= e^k y_l(\boldsymbol{\xi})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}), \quad l=0,1,2, \\ Y_R^{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) &= e^k y_R(\boldsymbol{\Omega})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}), \\ \Phi^{k+1}(\boldsymbol{x}) &= e^{k+1}\alpha_M\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{29}$$

其中，i 为虚数单位，$\boldsymbol{\theta}$ 为表示扰动空间频率的波矢，e 为放大因子，用于量化每次迭代中误差幅值的减少程度。需要注意的是，误差函数 Y^{k+1} 的表达式中出现的是因子 e^k，而不是 e^{k+1}，这反映出 Y^{k+1} 是由 k 次迭代的宏观误差驱动的。

将傅里叶展开（29）代入误差定义（26）和误差传播方程（28），可得到关于波矢 $\boldsymbol{\theta}$ 和放大因子 e 的如下 17×17 线性代数特征值问题:

$$e\alpha_M^{\mathsf{T}} = C_{17\times17}\alpha_M^{\mathsf{T}} = \sum_{l=0,1,2}\int \phi_l^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\xi})\,y_l(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \int \phi_R^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\Omega})\,y_R(\boldsymbol{\Omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}. \tag{30}$$

收敛速率由谱半径决定，即特征值 e 的绝对值中的最大值。当 $e_{\max}\le 1$ 时，迭代格式是稳定的。

为建立耦合系统的基准，我们首先考察解耦场的收敛性质。众所周知，CIS 对气体动力学方程和辐射传输方程均具有收敛性。然而，在近连续区（$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}\to 0$）内，CIS 的谱半径趋近于 1，表明其收敛性严重下降，且收敛速度慢到不切实际。类似地，对于辐射场，在光学厚区（$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}\to 0$）内也观察到慢收敛现象。

对于耦合辐射气体流动问题的收敛性分析，得出了两个关键的无量纲参数：比值 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$ 和参数 σ_R。$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$ 等于辐射吸收截面与分子碰撞截面之比，该比值由给定温度下的气体相互作用势和分子结构决定。参数 σ_R是玻尔兹曼数的倒数，用于量化辐射能量输运相对于气体热能输运的强度。我们计算了不同参数组合下 CIS 的收敛速率，参数为 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$ 和 σ_R，如图1所示。研究发现一个关键局限：在近连续介质区，当 $(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}})\times\sigma_R$ 大于约 0.03 时，耦合系统的 CIS 会发散（谱半径为 $e_{\max}>1$）。

这种不稳定性的主要原因在于，气体场和辐射场之间的耦合项采用显式方式处理（即基于前一步 k的宏观量$\Phi^k_{\Delta T_v}$ 和$\Phi^k_{\Delta e_R}$），从而无法实现全场隐式更新。该耦合强度因子（$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$）$\times\sigma_R$出现在特征矩阵 $C_{17\times17}$的非对角块中，在特征值系统中起到正反馈回路的作用。当这一乘积足够大时，耦合效应会主导迭代过程，使矩阵的谱半径超过 1，进而导致CIS发散。这一关键发现表明，有必要采用隐式加速格式。

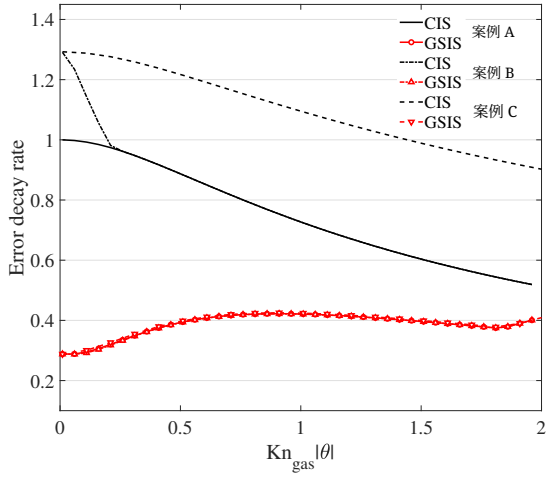


图 1：CIS 和 GSIS 中误差衰减率随 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}|\theta|$ 的变化。案例 A 表示一组案例参数：$(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}) \times \sigma_R < 0.03$, $(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} \in [10^{-3}, 1], \quad \sigma_R \in [10^{-3}, 10^{-1}])$；案例 B：$(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}) \times \sigma_R = 0.05$, $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 0.1$, $\sigma_R = 0.5$；案例 C：$(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}) \times \sigma_R = 0.05$, $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 10$, $\sigma_R = 0.005$。在所有案例中，转动和振动自由度分别为 $d_r = 2$ 和 $d_v = 1$，碰撞数为 $Z_r = 2.67$ 和 $Z_v = 26.7$。

4.3. GSIS 的收敛性分析

GSIS旨在通过在求解动理学方程的同时隐式求解宏观合成方程，加速耦合气体-光子系统的收敛。具体而言，当速度分布函数 h^k 已在前一次迭代步骤 k中获得后，下一次迭代首先进行动力学步骤，将分布函数更新为 $h^{k+1/2}$；随后通过宏观求解器求解推导出的合成方程，从而获得宏观量 M^{k+1}。该宏观系统通过包含高阶项的本构关系闭合，对于在所有流动状态下实现快速信息传播和高效率至关重要。

通过求解以下线性化综合方程组，可以获得第（$k+1$）个迭代步的宏观量 M^{k+1}；该方程组以隐式方式确保耦合系统中的质量、动量和能量守恒，

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{k+1} &= 0, \\
\nabla \left(\Delta \rho^{k+1}\right) + \nabla \left(\Delta T_t^{k+1}\right) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= 0, \\
\nabla \cdot \left(\boldsymbol{q}_t^{k+1} + \boldsymbol{q}_r^{k+1} + \boldsymbol{q}_v^{k+1} + \boldsymbol{q}_R^{k+1}\right) &= 0, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{q}_r^{k+1} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}} \frac{3 d_r}{2(3+d_r) Z_r} \left(\Delta T_t^{k+1} - \Delta T_r^{k+1}\right), \\
\nabla \cdot \boldsymbol{q}_v^{k+1} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}} \frac{3 d_v}{2(3+d_v) Z_v} \left(\Delta T_t^{k+1} - \Delta T_v^{k+1}\right) + \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}} \left(\Delta e_R^{k+1} - 16 \sigma_R \Delta T_v^{k+1}\right), \\
\nabla \cdot \boldsymbol{q}_R^{k+1} &= \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}} \left(16 \sigma_R \Delta T_v^{k+1} - \Delta e_R^{k+1}\right).
\end{aligned}
$$

(31)

利用本构关系将其闭合，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= \int \left(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{3}\xi^2\mathrm{I}\right) h_0^{k+1/2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\
&\quad + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \left(\nabla \boldsymbol{u}^{k+1/2} + \left(\nabla \boldsymbol{u}^{k+1/2}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{k+1/2}\mathbf{I}\right) \\
&\quad - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \left(\nabla \boldsymbol{u}^{k+1} + \left(\nabla \boldsymbol{u}^{k+1}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{k+1}\mathbf{I}\right), \\
\boldsymbol{q}_t^{k+1} &= \int \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\xi} h_0^{k+1/2}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \sum_{l=t,r,v} \kappa_{tl}\nabla\left(\Delta T_l^{k+1/2} - \Delta T_l^{k+1}\right), \\
\boldsymbol{q}_r^{k+1} &= \int \boldsymbol{\xi}\left(h_1^{k+1/2} - \frac{d_r}{2}h_0^{k+1/2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \sum_{l=t,r,v} \kappa_{rl}\nabla\left(\Delta T_l^{k+1/2} - \Delta T_l^{k+1}\right), \\
\boldsymbol{q}_v^{k+1} &= \int \boldsymbol{\xi}\left(h_2^{k+1/2} - \frac{d_v}{2}h_0^{k+1/2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \sum_{l=t,r,v} \kappa_{vl}\nabla\left(\Delta T_l^{k+1/2} - \Delta T_l^{k+1}\right), \\
\boldsymbol{q}_R^{k+1} &= \int \boldsymbol{\Omega} h_R^{k+1/2}\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} + \kappa_R\nabla\left(\Delta e_R^{k+1/2} - \Delta e_R^{k+1}\right),
\end{aligned}
\tag{32}
$$

其中，热输运参数 $\boldsymbol{\kappa}_{\mathrm{gas}}$ 和 κ_R 是通过线性化在平衡态下测得的。

为计算 GSIS 的收敛速率，在连续的半步上定义误差函数 $Y^{k+1/2}$，并将其分解为傅里叶模态:

$$
\begin{aligned}
Y_l^{k+1/2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) &\equiv h_l^{k+1/2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - h_l^{k-1/2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = e^k y_l(\boldsymbol{\xi})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}), \quad l=0,1,2, \\
Y_R^{k+1/2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) &\equiv h_R^{k+1/2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) - h_R^{k-1/2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Omega}) = e^k y_R(\boldsymbol{\Omega})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

将这些误差函数 $Y^{k+1/2}$ 和宏观误差 $\Phi^{k+1} = e^{k+1}\alpha_M \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})$代入宏观合成方程和本构方程，可得到以下关于特征值 $Y^{k+1/2}$ 的线性

代数方程,

$$
\begin{aligned}
&e\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\alpha_{\boldsymbol{u}}\right]=S_1,\\
&e\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\left(\alpha_{\Delta\rho}+\alpha_{\Delta T_t}\right)+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}\theta^2\alpha_{\boldsymbol{u}}\right]=S_{2-4},\\
&e\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\left(\alpha_{\boldsymbol{q}_t}+\alpha_{\boldsymbol{q}_r}+\alpha_{\boldsymbol{q}_v}\right)+\theta^2\kappa_R\alpha_{\Delta e_R}\right]=S_5,\\
&e\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\alpha_{\boldsymbol{q}_r}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}}\frac{3d_r}{2(3+d_r)Z_r}\left(\alpha_{\Delta T_r}-\alpha_{\Delta T_t}\right)\right]=S_6,\\
&e\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\alpha_{\boldsymbol{q}_v}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}}\frac{3d_v}{2(3+d_v)Z_v}\left(\alpha_{\Delta T_v}-\alpha_{\Delta T_t}\right)+\frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}\left(16\sigma_R\alpha_{\Delta T_v}-\alpha_{\Delta e_R}\right)\right]=S_7,\\
&e\left[\theta^2\kappa_R\alpha_{\Delta e_R}+\frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}\left(\alpha_{\Delta e_R}-16\sigma_R\alpha_{\Delta T_v}\right)\right]=S_8,\\
&e\left[\alpha_{\boldsymbol{q}_t}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\kappa_t\alpha_{\Delta T_t}\right]=S_{9-11},\\
&e\left[\alpha_{\boldsymbol{q}_r}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\kappa_r\alpha_{\Delta T_r}\right]=S_{12-14},\\
&e\left[\alpha_{\boldsymbol{q}_v}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\kappa_v\alpha_{\Delta T_v}\right]=S_{15-17},
\end{aligned}
\tag{34}
$$

其中源项 S_{1-17} 为,

$$
\begin{aligned}
S_1&=0,\\
S_{2-4}&=\int\left[-\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\left(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}-\frac{1}{3}\xi^2\mathrm{I}\right)+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}\left(\theta^2\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{3}\boldsymbol{\theta}\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)\right)\right]y_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\\
S_5&=\int\left[-\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}+\kappa_R\theta^2\right]y_R\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},\\
S_6&=0,\\
S_7&=0,\\
S_8&=\int\left[-\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\Omega}+\kappa_R\theta^2\right]y_R\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},\\
S_{9-11}&=\int\left[\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\xi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\kappa_t\left(\frac{1}{3}\xi^2-1\right)\right]y_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\\
S_{12-14}&=\int\left[\left(\boldsymbol{\xi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\frac{2\kappa_r}{d_r}\right)y_1-\left(\frac{d_r}{2}\boldsymbol{\xi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\kappa_r\right)y_0\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\\
S_{15-17}&=\int\left[\left(\boldsymbol{\xi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\frac{2\kappa_v}{d_v}\right)y_2-\left(\frac{d_v}{2}\boldsymbol{\xi}+\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\kappa_v\right)y_0\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

方程（34）结合源项（35）可改写为如下矩阵形式:

$$
eL_{17\times17}\alpha_M^{\mathsf{T}}=R_{17\times17}\alpha_M^{\mathsf{T}}.
\tag{36}
$$

通过数值计算矩阵（$L_{17\times17}^{-1}R_{17\times17}$）的特征值 e并确定其谱半径，即可得到收敛率。

基于傅里叶稳定性分析，我们计算了 GSIS 在不同耦合参数 $\mathrm{Kn_{gas}}/\mathrm{Kn^{photon}}$ 和 σ_R 下的收敛速率（谱半径 $e_{\max}$），并将结果与此前分析的 CIS 直接进行了比较（图1）。结果表明，GSIS 成功克服了 CIS 的局限性。在近连续区（$\mathrm{Kn_{gas}}\to0$,$\mathrm{Kn_{photon}}\to0$），CIS 在强耦合情况下会出现慢收敛（$e_{\max}\to1$），甚至发散（$e_{\max}>1$），而 GSIS 的谱半径则始终显著小于 1。即使耦合强度因子（$\mathrm{Kn_{gas}}/\mathrm{Kn^{photon}}$）$\times\sigma_R$ 较大——这对应于高辐射强度、强耦合、近连续气体流动以及光学薄辐射输运条件——GSIS 的谱半径仍低于 0.5。换言之，将解误差降低三个数量级所需的迭代次数始终可减少至 10 次。这与类似条件下 CIS 所表现出的不稳定性形成鲜明对比。如此高的收敛效率意味着，GSIS 为多尺度耦合气体辐射问题提供了一种稳健、快速的求解方法。

5. GSIS 的渐近保持性质

耦合气体–辐射系统的传统迭代求解器对网格分辨率有严格要求：空间单元必须解析气体和光子的平均自由程，以防数值耗散干扰物理输运。在近连续介质区域中，$\mathrm{Kn^{gas}}$ 和 $\mathrm{Kn^{photon}}$ 均趋于零，这一要求会变得难以满足。我们证明，GSIS 通过具备空间离散化动理学方程的渐近保持性质，消除了这一限制。具体而言，如果一种数值格式在克努森数趋于零时能够恢复正确的宏观极限（本例中即辐射NSF方程），同时保持空间分辨率不受平均自由程影响，则称其具有渐近保持性质。

间距为 Δx 的网格上的离散化动理学方程形式如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_\delta f_l&=\mathcal{J}_l,\quad l=0,1,2\\ \boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla_\delta I_R&=\mathcal{J}_R,\end{aligned}\tag{37}$$

其中，$\nabla_\delta=\nabla+\mathcal{O}$（$\Delta x^n$）表示精度为 n 阶的离散梯度算子，$\mathcal{J}$ 表示式（2）中给出的碰撞项。

将 Chapman–Enskog展开直接应用于这一离散化系统，我们将分布函数和辐射强度表示为关于小参数的幂级数，

$$\begin{aligned}f_l&=f_l^{(0)}+\mathrm{Kn_{gas}}f_l^{(1)}+\mathrm{Kn_{gas}^2}f_l^{(2)}+\cdots,\quad l=0,1,2\\ I_R&=I_R^{(0)}+\mathrm{Kn_{photon}}I_R^{(1)}+\mathrm{Kn_{photon}^2}I_R^{(2)}+\cdots.\end{aligned}\tag{38}$$

应力和热流可以类似地按克努森数展开，而守恒变量 $\left[\rho,\boldsymbol{u},T_{t/r/v/R}\right]$ 仅由零阶分量决定

$f_l^{(0)}$ 和 $I_R^{(0)}$ 。请注意，该展开现在明确包含数值误差项：高阶修正既包含来自动理学理论的物理贡献，也包含 Δx^n 阶的离散化伪影。

由于 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}/\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$ 等价于辐射吸收截面与分子碰撞截面之比，因此两个克努森数以相近的速率趋于零，并假设 $\mathrm{Kn}^{\mathrm{gas}} \sim \mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$。此外，假设内能弛豫显著慢于弹性碰撞，从而有 $Z_r \sim Z_v \sim \mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}^{-1}\right)$。

为展示渐近行为，我们选取 $\Delta x \sim \mathcal{O}(1)$，这意味着空间网格单元尺寸与平均自由程无关。将展开式 (38) 代入方程 (37)，并收集 $\mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}^{-1}\right)$ 和 $\mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}^{-1}{}_{\text{光子}}\right)$ 阶项，可得领先阶解恢复为平衡分布函数，且每种能量模式具有不同的温度，

$$f_0^{(0)} = \rho\left(\frac{1}{2\pi T_t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{2T_t}\right), \quad f_1^{(0)} = \frac{d_r}{2} f_0^{(0)}, \quad f_2^{(0)} = \frac{d_v(T_v)}{2} f_0^{(0)}, \quad I_R^{(0)} = \frac{1}{\pi}\sigma_R T_v^4. \tag{39}$$

在下一阶 $\mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}^0\right)$ 和 $\mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}^0\right)$，修正项由离散输运方程确定，

$$\begin{aligned}
f_0^{(1)} &= \left(1 - \frac{1}{Z_r} - \frac{1}{Z_v}\right) g_{0t}^{(1)} - \frac{1}{Z_r} g_{0r}^{(1)} - \frac{1}{Z_v} g_{0v}^{(1)} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_\delta f_0^{(0)}, \\
f_1^{(1)} &= \left(1 - \frac{1}{Z_r} - \frac{1}{Z_v}\right) g_{1t}^{(1)} - \frac{1}{Z_r} g_{1r}^{(1)} - \frac{1}{Z_v} g_{1v}^{(1)} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_\delta f_1^{(0)}, \\
f_2^{(0)} &= \left(1 - \frac{1}{Z_r} - \frac{1}{Z_v}\right) g_{2t}^{(1)} - \frac{1}{Z_r} g_{2r}^{(1)} - \frac{1}{Z_v} g_{2v}^{(1)} + \frac{f_0^{(0)}}{\rho} \int I_R^{(1)} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_\delta f_2^{(0)}, \\
I_R^{(1)} &= -\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla_\delta I_R^{(0)}.
\end{aligned} \tag{40}$$

计算 $f^{(0)}{}_l + \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} f_l^{(1)}$、$(l = 0、1、2)$ 和 $I_R^{(0)} + \mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} I_R^{(1)}$ 的矩，会产生同时包含物理误差和数值误差的本构关系，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^\top - \frac{2}{3} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \mathbf{I} + \mathcal{O}\left(\Delta x^n\right)\right) + \mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}^2\right), \\
\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_t \\ \boldsymbol{q}_r \\ \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix} &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tr} & A_{tv} \\ A_{rt} & A_{rr} & A_{rv} \\ A_{vt} & A_{vr} & A_{vv} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & d_r & 0 \\ 0 & 0 & d_v(T_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla T_t \\ \nabla T_r \\ \nabla T_v \end{bmatrix} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \times \mathcal{O}\left(\Delta x^n\right) + \mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}^2\right), \\
\boldsymbol{q}_R &= -\frac{4\sigma_R}{3} \mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} \left(\nabla T_v^4 + \mathcal{O}\left(\Delta x^n\right)\right) + \mathcal{O}\left(\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}^2\right),
\end{aligned} \tag{41}$$

对于传统格式，$\mathcal{O}(\Delta x^n)$误差项会阻碍正确宏观极限的恢复，除非 $\Delta x \sim \mathcal{O}(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}^{1/n})$ 和 $\Delta x \sim \mathcal{O}(\mathrm{Kn}^{1/n}{}_{\text{光子}})$。在 GSIS 中，分解

本构关系（式（17））将高阶项构造为：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{\sigma}} =& \boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \left(\nabla_\delta \boldsymbol{u} + \nabla_\delta \boldsymbol{u}^\top - \frac{2}{3}\nabla_\delta \cdot \boldsymbol{u}\mathbf{I}\right), \\
\begin{bmatrix} \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_t} \\ \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_r} \\ \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_v} \end{bmatrix} =& \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_t \\ \boldsymbol{q}_r \\ \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tr} & A_{tv} \\ A_{rt} & A_{rr} & A_{rv} \\ A_{vt} & A_{vr} & A_{vv} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & d_r & 0 \\ 0 & 0 & d_v(T_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_\delta T_t \\ \nabla_\delta T_r \\ \nabla_\delta T_v \end{bmatrix}, \\
\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_R} =& \boldsymbol{q}_R + \frac{4\sigma_R}{3}\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} \nabla_\delta T_v^4,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

由于动力学矩和线性本构关系采用相同的离散算子 ∇_δ，主导阶离散误差（$\mathcal{O}(\Delta x^n \mathrm{Kn}^{\mathrm{gas}})$, $\mathcal{O}(\Delta x^n \mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}})$）完全抵消，因此得到，

$$
\mathrm{HoT}_{\boldsymbol{\sigma}} \sim \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_{t/r/v}} \sim \mathcal{O}(\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}^2), \quad \mathrm{HoT}_{\boldsymbol{q}_R} \sim \mathcal{O}(\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}^2). \tag{43}
$$

在双重极限 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} \to 0$ 和 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} \to 0$下，本构关系中的高阶贡献消失，本构关系退化为截断误差与 Δx 无关的辐射NSF形式。因此，即使 $\Delta x \sim \mathcal{O}(1)$，GSIS 也能正确恢复宏观方程，这正是耦合辐射气体流渐近保持性质的核心。

该分析假设宏观场平滑，而激波前沿或克努森层等陡峭梯度区域则需要局部网格加密，以解析其背后的物理过程，无论是否考虑渐近保持性质。

6. GSIS的数值实现

本节通过求解两组耦合方程，详细介绍GSIS方法的数值实现：一组是控制分布函数演化的介观动力学方程（2），另一组是描述守恒宏观量的宏观合成方程（13）。后者构成一个广义辐射NSF系统，并加入了非平衡源项，即从动力学矩中提取的高阶项。两个系统均采用成熟的计算流体力学技术进行离散。值得注意的是，模块化结构使各求解器能够独立优化。本文采用二阶非结构有限体积法，实现灵活的空间离散。下文将详细介绍介观动力学方程和宏观方程的具体数值形式及迭代过程。

由于式（2）中有四个动理学方程，它们的区别仅在于碰撞项的形式。为简化表述，我们用 f 同时表示气体速度分布函数和光子强度，而用 g 表示它们相应的参考分布函数。

在控制体 V 及其边界 ∂V 上积分后，介观和宏观控制方程的积分形式可写为：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_V f\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V} \boldsymbol{\xi} f\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \frac{g-f}{\tau}\,\mathrm{d}V,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\int_V \boldsymbol{W}\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial V} (\boldsymbol{F}_c+\boldsymbol{F}_v)\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}V,
\end{aligned} \tag{44}$$

其中，气体分布函数的速度矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 在应用于 I_R方程时将变为$\boldsymbol{\Omega}$；类似地，特征时间 τ 将为 $c_l\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$。面元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为外向单位法向量，$\mathrm{d}S$ 为面元的面积。

宏观守恒变量 $\boldsymbol{W}$、对流通量 $\boldsymbol{F}_c$、黏性通量 $\boldsymbol{F}_v$和源项 $\boldsymbol{Q}$ 定义为矢量，分别对应质量、动量、总能量、转动能、振动能和辐射能，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W} &= [\rho,\ \rho\boldsymbol{u},\ e,\ e_r,\ e_v,\ e_R]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{F}_c &= [\rho\boldsymbol{u},\ \rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}+p_t\mathbf{I},\ \boldsymbol{u}(e_{\mathrm{gas}}+p_t),\ \boldsymbol{u}e_r,\ \boldsymbol{u}e_v,\ 0]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{F}_v &= [0,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}_r,\ \boldsymbol{q}_v,\ \boldsymbol{q}_R]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{Q} &= \left[0,\ 0,\ 0,\ \frac{e_{tr}-e_r}{Z_r\tau},\ \frac{e_{tv}-e_v}{Z_v\tau}-\frac{e_{vR}-e_R}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}},\ \frac{e_{vR}-e_R}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}\right]^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{45}$$

对于稳态问题，采用一阶后向欧拉格式对控制方程进行时间离散，并将其改写为增量形式，以构建稳健的隐式求解器。这种方法允许采用较大的时间步长 $\Delta t^k = t^{k+1}-t^k$，并通过克服显式库朗–弗里德里希–刘易斯（CFL）条件的限制来加速收敛。

设 $\Delta f^k = f^{k+1}-f^k$和 $\Delta\boldsymbol{W}^k=\boldsymbol{W}^{k+1}-\boldsymbol{W}^k$分别为分布函数和守恒变量的增量。介观方程和宏观方程的隐式增量形式为：

$$\left(\frac{1}{\Delta t_i}+\frac{1}{\tau_i^k}\right)\Delta f_i^k + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in N(i)}\xi_n\Delta f_{ij}^k S_{ij} = \underbrace{\frac{g_i^k-f_i^k}{\tau_i^k}-\frac{1}{V_i}\sum_{j\in N(i)}\xi_n f_{ij}^k S_{ij}}_{r_i^k}, \tag{46a}$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t_i}-\frac{\partial\boldsymbol{Q}_i}{\partial\boldsymbol{W}}\right)\Delta\boldsymbol{W}_i^k + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in N(i)}\Delta\boldsymbol{F}_{ij}^k S_{ij} = \underbrace{-\frac{1}{V_i}\sum_{j\in N(i)}\boldsymbol{F}_{ij}^k S_{ij}+\boldsymbol{Q}_i^k}_{R_i^k}, \tag{46b}$$

其中，下标 i 和 j 分别表示控制体的全局索引和相邻单元的局部索引。 $N(i)$表示单元 i 的相邻单元集合，下标 ij 表示连接单元 i 和 j 的界面。例如， f_i 和 $\boldsymbol{W}_i$

分别表示控制体 i 中的单元平均分布函数和守恒变量。 V_i 是单元 i 的体积， S_{ij} 是界面 ij 的面积，且 $\xi_n = \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}$，其中$\boldsymbol{n}_{ij}$ 是从单元 i 指向单元 j 的单位法向量。方程右端称为残差项，其中 r^k 和 R^k 分别表示介观方程和宏观方程的残差， f_{ij} 和 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 表示界面 ij 处的介观通量和宏观通量。当控制方程收敛时，增量趋于零。

通量增量 Δf_{ij} 和 $\Delta \boldsymbol{F}_{ij}$ 的格式采用一阶格式，以提高隐式算子的简洁性和鲁棒性，

1. 介观通量增量 Δf_{ij}：采用一阶迎风格式，

$$\Delta f_{ij} = \xi_n^+ \Delta f_i + \xi_n^- \Delta f_j, \tag{47}$$

其中 $\xi_n^\pm = [\xi_n \pm |\xi_n|]/2$ 表示相对于界面法向方向的迎风方向。

2. 宏观通量增量 $\Delta \boldsymbol{F}_{ij}$：采用类欧拉格式，并引入鲁棒的数值黏性 Γ_{ij}，

$$\Delta \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\Delta \boldsymbol{F}_i + \Delta \boldsymbol{F}_j + \Gamma_{ij}(\Delta \boldsymbol{W}_i - \Delta \boldsymbol{W}_j)\right], \tag{48}$$

其中 $\Gamma_{ij} = |u_n| + c_s + 2\mu/\rho|\boldsymbol{n}_{ij}\cdot(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|$ 用作近似谱半径，包含组合的对流 $|u_n|$（速度矢量与界面法向矢量的乘积）、声学 c_s（声速）和黏性分量，以确保稳定性。

对于右端的残差项 r_i^k 和 R_i^k，通过使用 Venkatakrishnan 限制器 ϕ [55] 进行界面插值，保持二阶精度，

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \xi_n^+ \Delta f_L + \xi_n^- \Delta f_R, \quad f_{L/R} = f_{i/j} + \phi_f \nabla f_{i/j}\cdot\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{F}_{ij} &= \mathbb{F}(W_L, W_R, \mathrm{d}S_{ij}), \quad \boldsymbol{W}_{L/R} = \boldsymbol{W}_{i/j} + \phi_{\boldsymbol{W}} \nabla \boldsymbol{W}_{i/j}\cdot\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{49}$$

其中， $\Delta\boldsymbol{x}$ 是从单元中心到界面中心的距离矢量， $\mathbb{F}$ 是数值通量函数。由于$\sum_{j\in N(i)} \boldsymbol{F}_i A_{ij} = 0$ 在控制体上成立，因此宏观通量增量可写为 $\Delta \boldsymbol{F}_{ij} = [\Delta \boldsymbol{F}_j + \Gamma_{ij}(\Delta \boldsymbol{W}_i - \Delta \boldsymbol{W}_j)]/2$。

将通量增量的定义代入增量方程（46），可得到一组耦合线性代数方程

$$\begin{aligned} d_i \Delta f_i^k + \frac{1}{2V_i}\sum_{j\in N(i)} \boldsymbol{\xi}_n^- S_{ij} \Delta f_j^k &= r_i^k, \\ D_i \Delta \boldsymbol{W}_i^k + \frac{1}{2V_i}\sum_{j\in N(i)} \left(\Delta \boldsymbol{F}_j^k - \Gamma_{ij}\Delta \boldsymbol{W}_j^k\right) S_{ij} &= \boldsymbol{R}_i^k, \end{aligned} \tag{50}$$

其中，宏观通量增量为 $\Delta \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}_j + \Delta \boldsymbol{W}_j) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}_j)$，矩阵元素由下式给出，

$$
\begin{aligned}
d_i &= \frac{1}{\Delta t_i} + \frac{1}{\tau_i^k} + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in N(i)} \boldsymbol{\xi}_n^+ S_{ij}, \\
D_i &= \frac{1}{\Delta t_i} + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in N(i)} \Gamma_{ij} S_{ij} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{W}} \right)_i^k .
\end{aligned}
\tag{51}
$$

上述方程采用点松弛方法求解，该方法与下三角-上三角对称高斯-赛德尔（LU-SGS）方法类似。通常，每次迭代都包括一次前向扫描和一次后向扫描。局部伪时间步长按 $\Delta t = \text{CFL} \times \Delta x / (|u_n| + c_s)$ 计算。为提高效率，两组方程采用不同的迭代次数和 CFL数：介观方程进行一次点松弛扫描，而宏观方程进行六次迭代。宏观方程和介观方程的 CFL 数分别设为 10^3 和 10^5 。

7. 数值测试

本节通过若干具有挑战性的案例，系统验证 GSIS方法在多尺度辐射气体流动中的精度、效率和渐近保持能力。我们从典型的一维基准案例出发，逐步考察更为复杂、具有航空航天应用代表性的环境。具体而言，我们研究了四个代表性案例：(i) 正激波，用于考察强非平衡条件下的精度和效率；(ii) 顶盖驱动方腔流，用于评估渐近保持性质；(iii) 圆柱超声速绕流，用于评估典型构型中的多尺度耦合性能；(iv) 三维阿波罗再入舱高超声速绕流，用于展示该方法在工业级几何构型上的稳健性。这些基准案例共同展示了该方法捕捉辐射气体流动非平衡效应的能力，验证了其在近连续介质区域的收敛加速效果比传统 CIS 高出两个数量级以上，并揭示了大气进入条件下辐射传热的主导作用。

这些测试中使用的气体参数设置如下：转动和振动自由度分别为 $d_r = 2$ 和 $d_v = 1.16$。除非个别测试用例另有说明，转动弛豫和振动弛豫的特征碰撞数分别为 $Z_r = 2.67$和 $Z_v = 26.7$ 。黏度指数为 $\omega = 0.74$。通过改变气体克努森数 Kn^{gas}、光子克努森数 $\text{Kn}^{\text{photon}}$ 以及辐射相对强度 σ_R ，展示 GSIS 在不同稀薄化程度和耦合状态下的能力。

整体迭代循环的收敛判据基于连续两次迭代之间关键宏观矩（密度、流速和总温度）的体积加权相对变化，该变化必须小于指定的小值，

$$\epsilon^k = \frac{\sqrt{\sum_i (\phi_i^k - \phi_i^{k-1})^2 \, \mathrm{d}\Omega}}{\sqrt{\sum_i (\phi_i^{k-1})^2 \, \mathrm{d}\Omega}}\Big|_{max}, \quad \phi \in (\rho, \boldsymbol{u}, T). \tag{52}$$

另一方面，GSIS 中每个内部宏观求解器步骤的收敛判据设定为容差 10^{-7}，内部迭代次数最多限制为 100 次。

数值模拟环境采用配备 Intel(R) Core(TM) i7-9700K CPU@3.60GHz 处理器的工作站，并以双精度进行计算。对于大规模问题，采用物理域和速度空间划分。宏观求解器通过划分物理域实现并行加速，而介观求解器则通过同时划分物理域和速度空间实现并行加速 [56]。

7.1. 正激波

我们考虑沿 x 方向传播的气体流动，其马赫数为 Ma $= 5$。该案例是经典且严格的测试，用于验证 GSIS算法的精度和收敛效率，尤其适用于具有强非平衡特性的流动。上游条件中的密度 ρ_u 和温度 T_u分别取为参考值ρ_0 和 T_0。特征长度 L_0 根据平均自由程定义，使得 $L_0 = 16\mu(T_0)/(5\rho_0\sqrt{2\pi R T_0})$。因此，气体克努森数固定为 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 5\pi/16$。辐射特性由光子克努森数 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 10$ 和相对辐射强度 $\sigma_R = 0.01$指定。

考察两组不同的碰撞数：$(Z_r, \ Z_v)$ =(2.6，26) 和 (8，100)。较大的碰撞数对应于分子气体中常见的较慢平动—内模态弛豫。此处以此展示 GSIS 的效率，因为较慢的弛豫过程会跨越相对更大的物理空间，因此对传统求解器构成更大的挑战。由于平动模态与内模态之间存在热非平衡，激波下游会出现长尾结构。因此，计算域的总长度根据所选碰撞数设定在 $200L_0$至 $350L_0$之间。

模拟以位于 $x = 0$处的间断作为初始条件。初始气体分子分布函数 $(f_0, \ f_1, \ f_2)$ 和辐射强度 I_R 分别设为上游区域 $(x \le 0)$ 和下游区域 $(x \ge 0)$ 对应的平衡态，

$$\begin{cases} x \le 0 : f_0 = \rho_u f_0^{\mathrm{eq}}(T_u), \quad f_1 = \dfrac{d_r}{2} T_u f_0, \quad f_2 = \dfrac{d_v}{2} T_u f_0, \quad I_R = \dfrac{1}{\pi}\sigma_R T_u^4, \\ x > 0 : f_0 = \rho_d f_0^{\mathrm{eq}}(T_d), \quad f_1 = \dfrac{d_r}{2} T_d f_0, \quad f_2 = \dfrac{d_v}{2} T_d f_0, \quad I_R = \dfrac{1}{\pi}\sigma_R T_d^4. \end{cases} \tag{53}$$

上游宏观量为 $\rho_u = 1$、 $u_u = \sqrt{\gamma} Ma$和 $T_u = 1$。下游宏观量由气体的 Rankine–Hugoniot关系确定，其

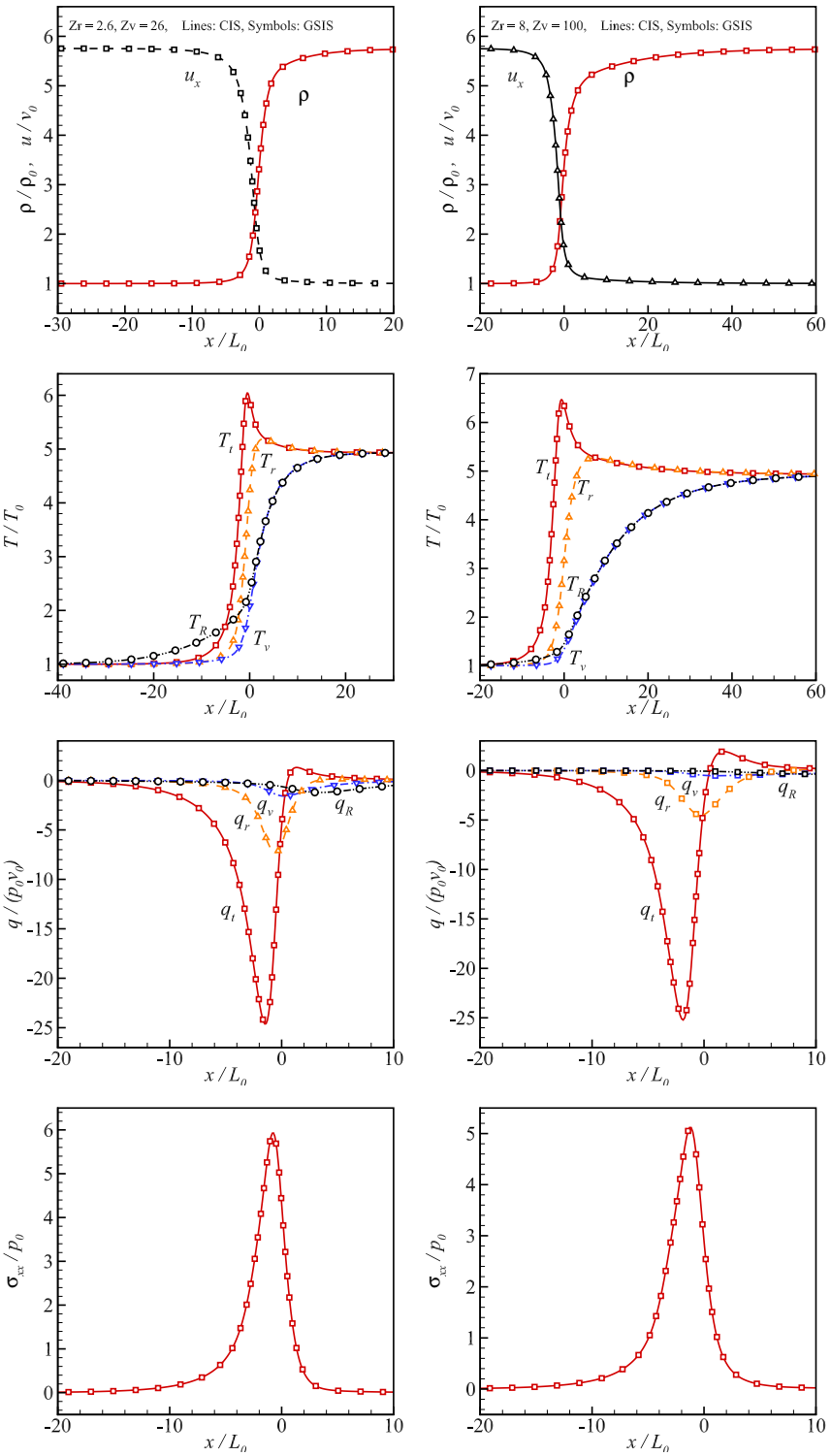


图 2：马赫数为 Ma $=5$ 时，正激波的 CIS（线条）与 GSIS（符号）所得无量纲密度、速度、温度、热流和剪切应力的对比。左列： $Z_r = 2.6,$, $Z_v = 26$；右列： $Z_r = 8,$ $Z_v = 100$。

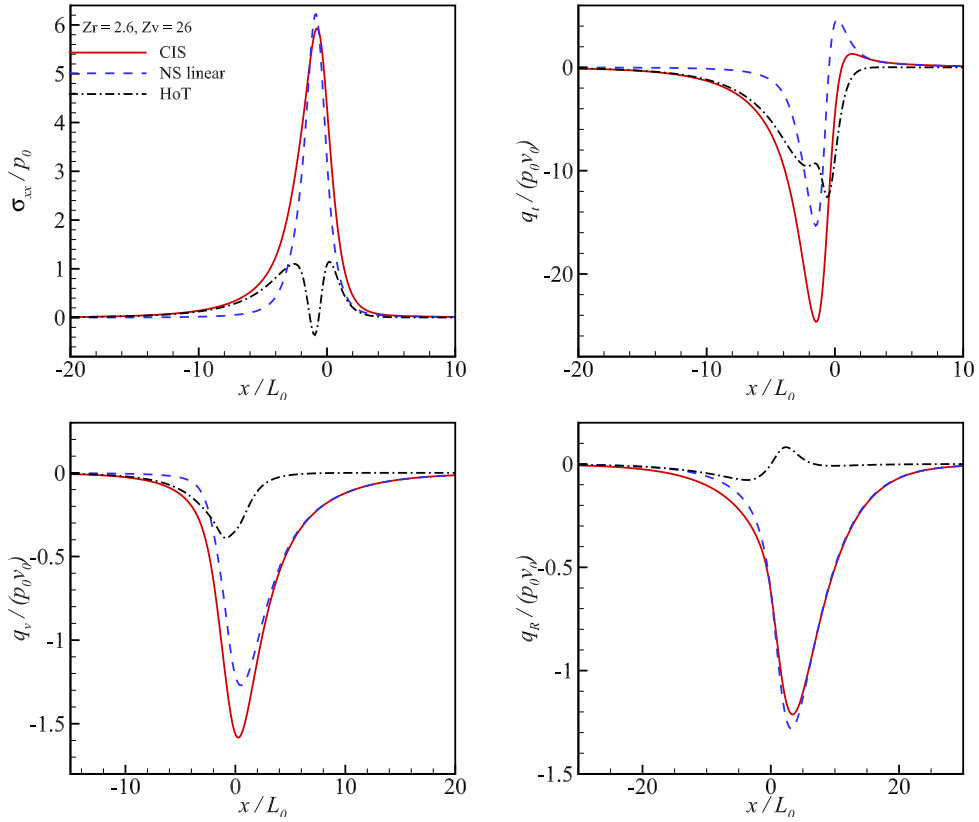


图3：对于马赫数为 Ma = 5 的正激波，NSF 线性本构关系和高阶项对总剪切应力和热流的贡献。

比热比 $\gamma = (5 + d_r + d_v) / (3 + d_r + d_v)$，

$$\rho_d = \frac{(\gamma+1)Ma^2}{2+(\gamma-1)Ma^2}, \quad u_d = \frac{\rho_u}{\rho_d}u_u, \quad T_d = \frac{(2+(\gamma-1)Ma^2)(2\gamma Ma^2-(\gamma-1))}{(\gamma+1)^2Ma^2}. \tag{54}$$

两端的边界条件由相应的固定平衡态指定，因为较大的区域确保了边界处的流动接近平衡态。

物理空间采用间距为 $\Delta x = 0.25L_0$ 的均匀网格进行离散。速度空间缩减为二维，并截断至 $[-15, 15] \times [-12, 12]$，两个方向上分别均匀离散为64个和48个点。对于辐射输运，极角 $\theta \in [0, \pi]$ 和方位角 $\phi \in [0, 2\pi]$ 分别离散为48个和32个均匀单元。

这里采用的动理学模型的精度已通过与正激波情形下的直接模拟蒙特卡罗结果进行比较而得到验证 [25]。在本文中，采用通过足够精细网格由CIS获得的数值解作为参考。图2展示了由GSIS（符号表示）和CIS（线条表示）获得的宏观变量分布。可以观察到，对于不同的碰撞数，GSIS均产生了与CIS参考结果高度一致的结果。激波呈现出明显的结构特征：密度和温度在几个平均自由程内急剧增加，随后由于平动与内能模态之间的缓慢弛豫，逐渐接近下游值，

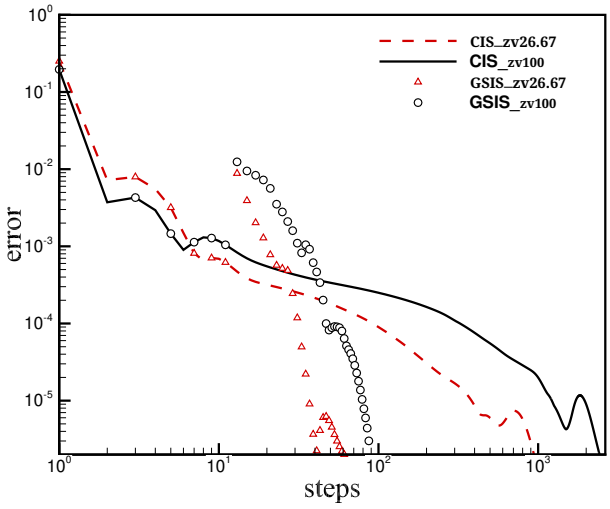


图4：当马赫数为 $=5$ 时，三个不同碰撞数 $Z_r=2.6$、8 和 $Z_v=26$、100 下正激波模拟的 CIS 和 GSIS 误差衰减历史。

这类分布对应于 [57]中描述的B型结构。此外，可以观察到，辐射温度在激波中心上游约 $40L_0$ 处开始升高，并在通过激波中心后变得几乎与振动温度相同。这表明，对于在上游和下游建立了稳定辐射源的激波，辐射温度在上游高于气体温度。由于较大的振动碰撞数Z_v，振动能模式主要通过辐射跃迁过程与光子相互作用，从辐射场中吸收能量，随后通过非弹性气体碰撞逐渐接近平动温度。

图3展示了高阶项对剪切应力和热流的贡献，这些贡献本质上代表了超出 NSF描述的非平衡效应。该图清楚地表明，在激波结构中，高阶项的数值构成了总应力和热流的很大一部分。特别是在上游激波前区域，高阶项显著大于 NSF线性本构部分。这意味着，在该区域，NSF近似严重低估了等效输运系数，因此无法准确捕捉非平衡流动结构。还应注意到，这些高阶项表现出明显的非线性特征。当仅依赖简单扩展线性或非线性本构关系时，很难捕捉如此复杂的非平衡效应。相比之下，GSIS方法直接从介观动力学方程中以数值方式构造这些非线性高阶项，从而避免了求解高阶宏观方程所固有的稳健性问题。因此，GSIS能够在整个流场中更准确、更稳健地描述非平衡效应。

图4展示了误差衰减随迭代步数变化的对比，介于

两组碰撞数下 GSIS 与 CIS 的误差衰减随迭代步数变化的对比。为达到2×10^{-6}这一收敛判据，GSIS 在 $Z_v = 26$ 和 $Z_v = 100$时分别需要 68 步和 90 步，而 CIS 则需要 991 步和 2566 步。两种方法在前十步中的初始误差衰减相同，这是因为 GSIS 迭代包含一个使用 CIS 求解器的初始预处理阶段。显然，在这两种情况下，GSIS 分别实现了 14。5（ $Z_v = 26$时）和 28。5（ $Z_v = 100$时）的显著加速因子；随着碰撞数 Z_v 进一步增大，这种加速效果将更加明显。此外，GSIS 中的残差衰减斜率在整个迭代过程中几乎保持恒定，因为宏观合成方程能够使扰动迅速传递至整个区域，尤其是慢弛豫下游区域。值得注意的是，在一维问题中，宏观求解器的计算成本与介观步骤相比几乎可以忽略不计，因此 GSIS 计算成本的降低基本等同于迭代步数的大幅减少。

7.2. 顶盖驱动方腔流

我们考察顶盖驱动方腔流。该流动是验证数值方法渐近保持性质的一项严格基准，因为移动顶盖以外区域的温度和速度分布对数值耗散高度敏感。构型由一个边长为 L_0 的正方形区域组成，其中包含一个边长为 $0.3L_0$ 的同心内正方形（图 5a）。顶盖以速度 $u_w = 0.18v_0$ 沿 x 方向运动，温度为 $3T_0$，由此驱动流动；其他壁面均静止，温度为 T_0。气体克努森数设为 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.005$，使流动处于近连续区，此时渐近保持能力至关重要。光子克努森数为 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 1$，相对辐射强度为 $\sigma_R = 0.005$ ，以模拟中等程度的辐射耦合。

为系统地探究网格敏感性，我们采用两种结构化均匀网格：粗网格包含 $\Delta x = 0.05L_0$ 个网格（约为 10λ，其中 λ 为平均自由程），细网格包含 $\Delta x = 0.01L_0$ 个网格（约为 2λ）。参考解在更细的网格（$\Delta x = 0.005L_0$）上计算，此时 GSIS 和 CIS 均收敛至相同结果。速度空间截断至 $[-15, 15] \times [-12, 12]$，并用 50×40 个网格均匀离散。

图 5 比较了 $x = 0.5$ 处 $y \in [0, 0.35]$ 的速度剖面，以及 $y = 0.5$ 处 $x \in [0.65, 1]$的平动温度和辐射温度。在粗网格（$\Delta x = 10\lambda$）上，GSIS 的预测结果与参考解完全吻合，证实了其渐近保持性质，即使网格单元远大于平均自由程也是如此。相比之下，CIS 在同一网格上存在过度的数值耗散，无法准确得到速度场和温度场。只有将 Δx减小到 $0.01L_0$，CIS 才能达到令人满意的精度。

效率提升也十分显著：GSIS 经过 32 次迭代（包括 10 个 CIS 预条件步骤）即可收敛，而 CIS 则需要 6700 次迭代。由于每次 GSIS 迭代中的 100 个内部宏观步骤，其计算成本与一个动力学步骤相当，因此在小克努森数下，总体加速比可达两个数量级。因此，该算例表明，GSIS 在粗网格上仍能保持精度并实现快速收敛，而传统方法在此类网格上无法奏效。

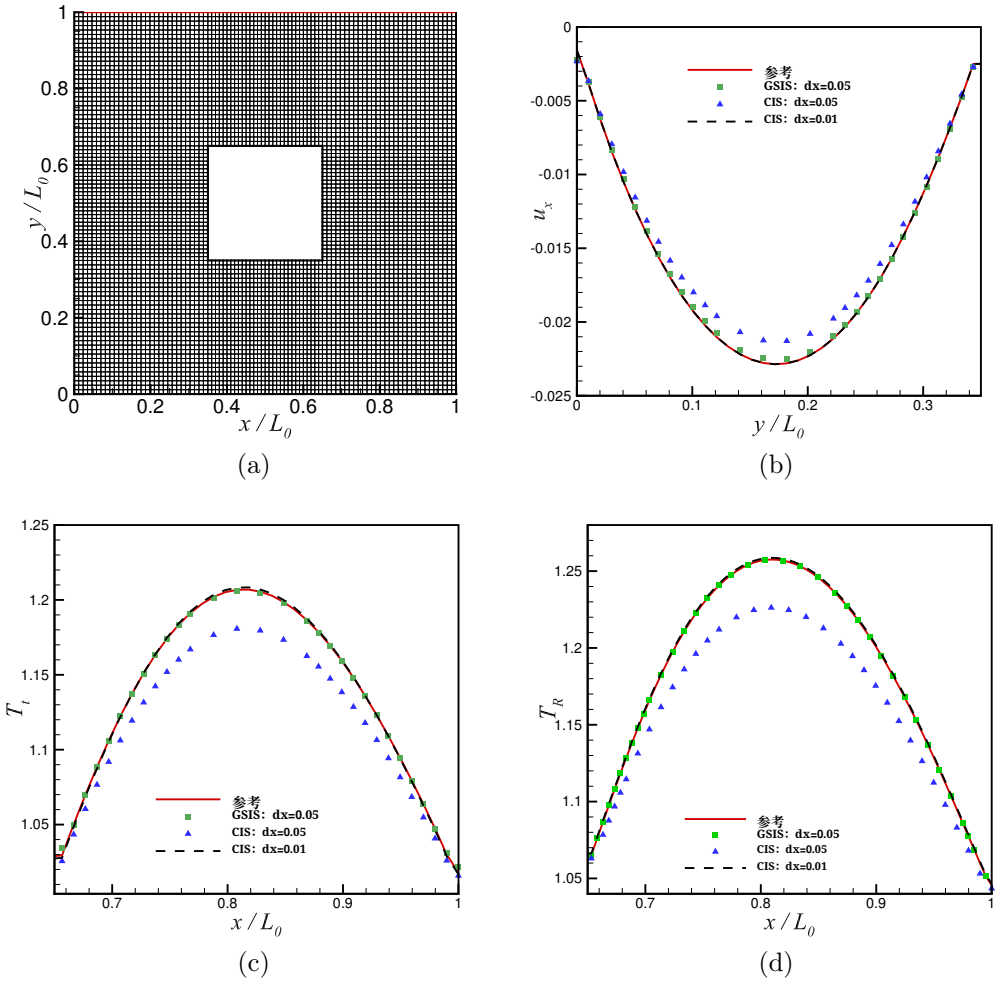
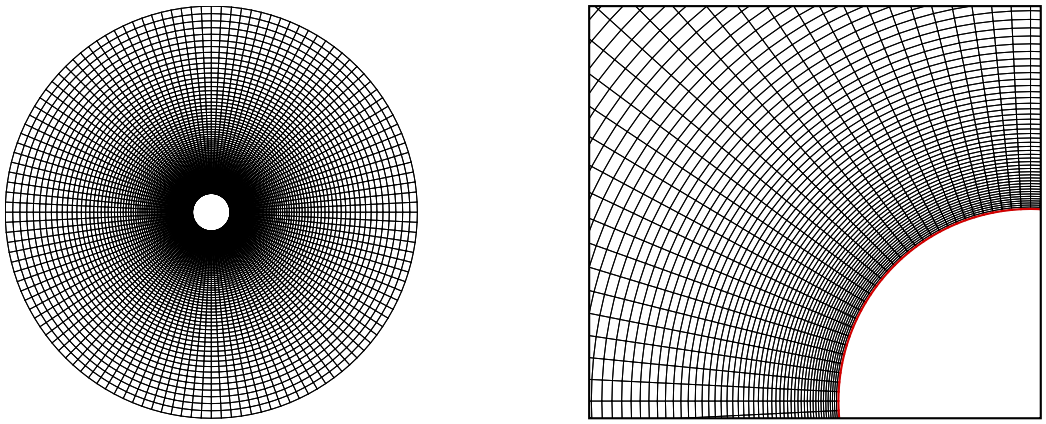


图5： (a) 顶盖驱动方腔流二维模拟的计算网格。(b-d) CIS 和 GSIS 在两个网格（$\Delta x = 0.05L_0$ 和 $0.01L_0$）上计算的沿 $x = 0.5, y \in [0, 0.35]$ 的无量纲流速，以及沿 $y = 0.5, x \in [0.65, 1]$ 的平动温度和辐射温度的对比。参考解是在更精细的网格上获得的，网格为 $\Delta x = 0.005L_0$。

7.3. 圆柱绕流超声速流动

辐射能与稀薄气体流动强烈相互作用的最重要情形之一，是辐射激波掠过飞行器时的传播过程。为评估 GSIS 对此类问题的模拟能力，本文模拟了二维高超声速稀薄气体圆柱绕流。自由来流马赫数固定为 Ma $= 5$，参考压力为 p_0。自由来流温度和等温壁面温度均设为 $0.5T_0$，其中 T_0 等于参考振动温度 T_v^{ref}。

通过改变关键控制参数，该模拟深入探究了问题的多尺度特性及气体-辐射耦合特性。气体克努森数 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}$ 在 1（稀薄）至 0.001（近连续介质）之间大幅变化。同时，光子克努森数 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}$ 的范围为 0.1（光学厚）至 100（光学薄），而



（a）完整网格　　（b）局部放大图

图 6:　圆柱周围超声速流动二维模拟的计算网格　r.

相对辐射强度 σ_R 在 0.1 至 10 之间变化。

计算域直径为 $D = 6L_0$（L_0 为圆柱直径），采用边长为 400×60 的结构化四边形单元进行离散（图 6）。为确保精确解析，圆柱表面附近的网格进行了高度加密，最小间距为 $\Delta h = 0.002L_0$。气体的约化二维速度空间截断至 $[-15, 15] \times [-7, 7]$，并均匀离散为 90×50 个速度点。最后，将光子输运的立体角划分为 64×48 个均匀分布的角度单元。

图 7 对比了非辐射条件下 GSIS 结果与采用 DSMC 方法（开源代码 SPARTA）获得的参考解。图中给出了马赫数为 $= 5$ 、克努森数 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.1$ 和 1 时的无量纲速度场和温度场。总体而言，GSIS 与 DSMC 结果吻合良好，验证了该方法模拟稀薄高超声速流动的精度。此外，图 8 展示了 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.1$ 时驻点线上的温度和热流分布。总体而言，GSIS 的预测结果与 DSMC 参考解非常接近。在激波上游出现了明显偏差，GSIS 给出的平动温度和热流更高。这可归因于 BGK型动理学模型倾向于在激波前产生过早的温升。

表1总结了CIS和GSIS在广泛流动状态下的迭代成本，涵盖了气体克努森数跨越三个数量级的变化。对于CIS方法，达到收敛所需的迭代步数会随着$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}$ 向近连续区减小而急剧增加。此外，对于固定的$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}$，更高的相对辐射强度 σ_R 和更低的光子克努森数 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}$也会导致CIS的收敛性变差。这一趋势与第4节中给出的收敛性分析一致。这种性能下降源于更强的气体-辐射

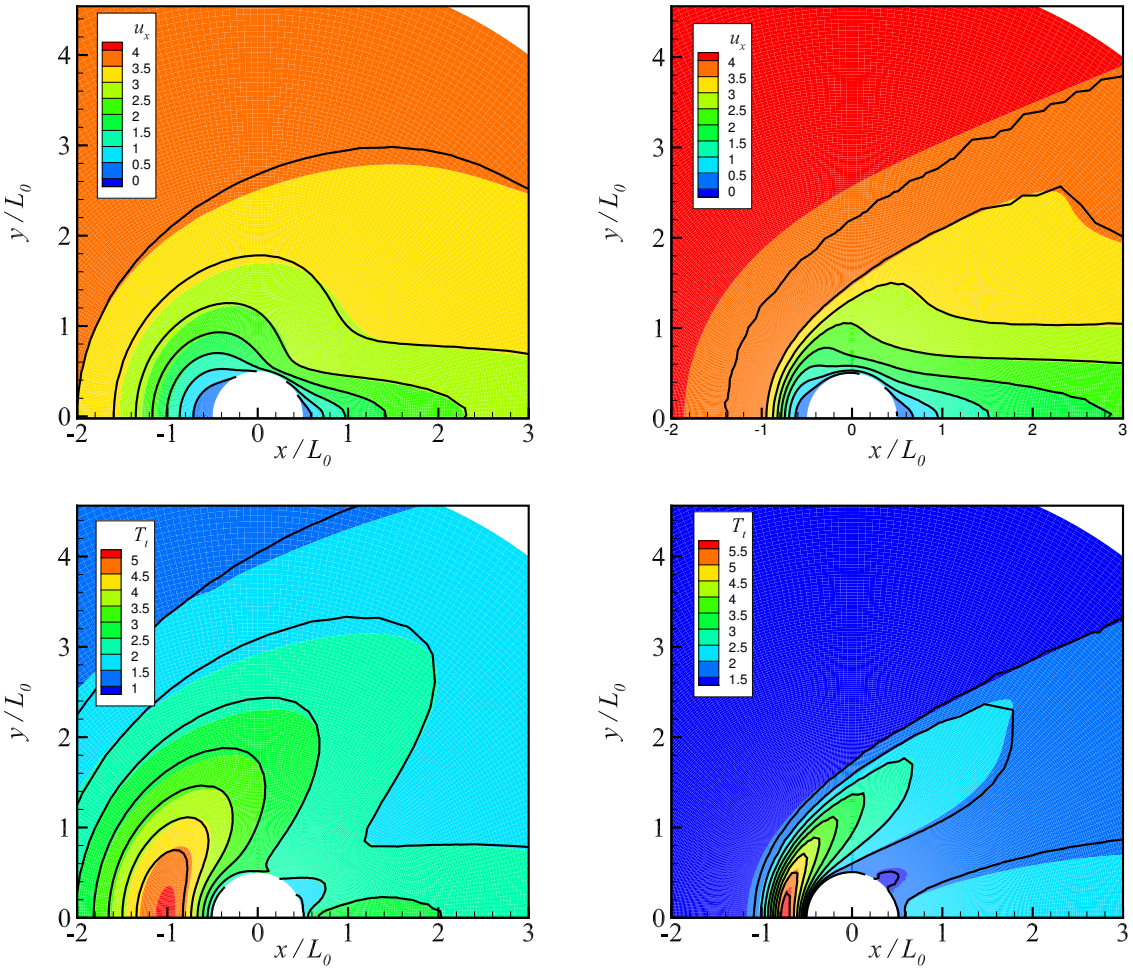


图 7：马赫数为 $= 5$ 的圆柱绕流超声速流动中，直接模拟蒙特卡罗（黑色曲线）与 GSIS（背景等值线）结果的无量纲水平速度 u_x 和平动温度分布对比。气体克努森数为 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 1$ （左列）和 0.1（右列）。

耦合（更小的$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}$），其有效地限制了允许使用的数值时间步长。相比之下，GSIS展现出显著的计算优势，在所有测试案例中均能在约100次迭代内获得稳态解，而不受气体稀薄效应或辐射耦合强度的影响。这种出色的效率凸显了宏观合成方程在整个区域内快速传播信息方面的有效作用。例如，在$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.01$、$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 1000$ 和 $\sigma_R = 0.1$ 的情况下（非平衡高超声速流动中的典型情形），CIS需要9582步，而GSIS仅需25步，迭代步数加速比达到383。3。在近连续区，这种加速效果更加显著：对于$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.001$，CIS在经过32499步后残差衰减仅为 10^{-5}，而GSIS仅需16步即可收敛，这意味着迭代步数加速比超过2000。

为展示气体-辐射耦合的影响，对以下条件进行了模拟：

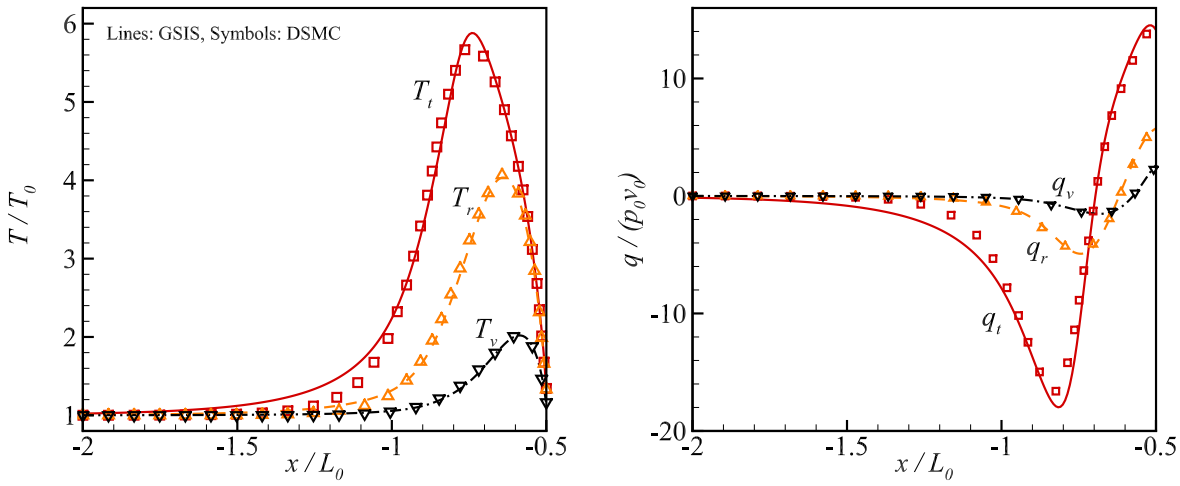


图 8：马赫数为 Ma $= 5$ 且 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.1$ 时，GSIS（线条）与直接模拟蒙特卡罗（符号）所得结果中各气体内模态的无量纲温度和热流对比。

表 1：在不同流动状态 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}$、光学厚度 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}$ 和相对辐射强度 σ_R 下，高超声速流绕圆柱流动时 CIS 和 GSIS 的收敛步数及加速比。收敛判据为 $\epsilon = 10^{-6}$。所有模拟均在 64 核 CPU 上执行。

$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}$	$\mathrm{Kn}_{\text{光子}} = 1000, \sigma_R = 0.1$			$\mathrm{Kn}_{\text{光子}} = 10, \sigma_R = 1$			$\mathrm{Kn}_{\text{光子}} = 1, \sigma_R = 10$		
	CIS[1]	GSIS[2]	比率[3]	CIS	GSIS	比率	CIS	GSIS	比率
1	73	21	3.5	71	52	1.4	127	51	2.5
10^{-1}	499	24	20.8	519	102	5.1	555	74	7.5
10^{-2}	9582	25	383.3	10514	62	169.6	12420	45	276
10^{-3}	$\geq$32499	16	$\geq$2031	-	29	-	-	18	-

[1] 当 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 10^{-3}$，$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 1000$，$\sigma_R = 0.1$时，CIS 的残差在经过 32499 次迭代后仅衰减至 10^{-5}。因此，此处未报告 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 10^{-3}$ 时另外两种情况的迭代次数。[2] 报告的 GSIS 迭代步数包括一个 10 步的 CIS 预条件阶段。每次 GSIS 迭代包含一次介观方程求解，以及宏观合成方程的 600 次内部迭代。[3] 比率表示迭代步数方面的加速因子。由于纳入了宏观求解器，每次 GSIS 迭代的计算成本约为一次 CIS 迭代的 2.1 倍。因此，总体计算加速比通过将迭代步数比率除以该成本因子来计算。

马赫数 Ma $= 10$ 较高、辐射强度为 $\sigma_R = 0.015$，且 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.1$ 和 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 0.5$, 100 的情况。需要指出的是，此处采用的具体参数并非旨在代表特定物理条件，而是作为一种具有挑战性的场景，用于测试所提出的 GSIS算法在高度耦合的非平衡条件下的数值稳定性。

图9a呈现了$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}$ =沿驻点线的温度分布

0.5。由于强激波压缩、内能弛豫以及气体-光子耦合，最高温度呈现出明显的层级关系：平动温度达到最高值 $T_t \approx 20.1T_0$，其次是转动温度 $T_r \approx 11.1T_0$、振动温度 $T_v \approx 3.6T_0$，最后是辐射温度 $T_R \approx 3.4T_0$。在激波上游（$x \leq -1$），辐射温度高于气体内部温度，清楚地表明在激波前区域存在从辐射场向气体的净能量传递。辐射温度峰值与振动模态的峰值几乎相同，这一事实凸显了振动模态在与光子场进行能量交换中的直接作用。

图9b比较了两种不同光子克努森数（$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 0.5$ 和100）下，圆柱表面沿线的对流分量和辐射分量所产生的热流。参数$\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$ 表征参考条件下气体分子与光子之间的耦合强度。

1. 弱耦合（$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 100$）：当气体与光子之间的相互作用较弱时，辐射强度通常较低，相应的热流也较低，并且沿整个表面几乎保持均匀。至关重要的是，整个壁面上的辐射热流都显著低于对流热流。

2. 强耦合（$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 0.5$）：随着$\mathrm{Kn}^{\mathrm{photon}}$ 减小，相互作用强度显著增强，辐射场的整体强度也随之大幅提高。因此，辐射热流显著增大，在背风区域尤为明显。这种辐射效应强到在后驻点下游约 60° 处，辐射热流甚至超过对流热流，清楚地凸显了强耦合条件下增强的辐射效应。

7.4. 阿波罗再入舱周围的高超声速流

为评估 GSIS 在多尺度非平衡流复杂三维模拟中的效率和鲁棒性，我们研究了阿波罗再入舱周围的高超声速流。舱体长 3.431 m，最大横截面直径为 3.912 m。模拟采用马赫数为 Ma $= 5,$ 15 的自由来流，来流温度为 $T_\infty = 142.2$ K，等温壁面温度为 $T_w = 500$ K。

物理域由 162,000 个六面体单元离散，壁面附近的网格进行了高度加密，第一层网格的高度设为 10^{-4} m。速度空间采用针对球形速度域构建的非结构网格进行离散，径向截断范围为 $20v_0$，共包含 27,704 个离散速度点。光子分布函数采用球坐标，在极向和方位向分别均匀布置 72 个和 48 个网格点。

首先，通过考察攻角为 30° 、气体克努森数为$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}} = 0.001$的近连续介质非辐射高超声速流动，评估GSIS方法的精度。将数值解与自适应

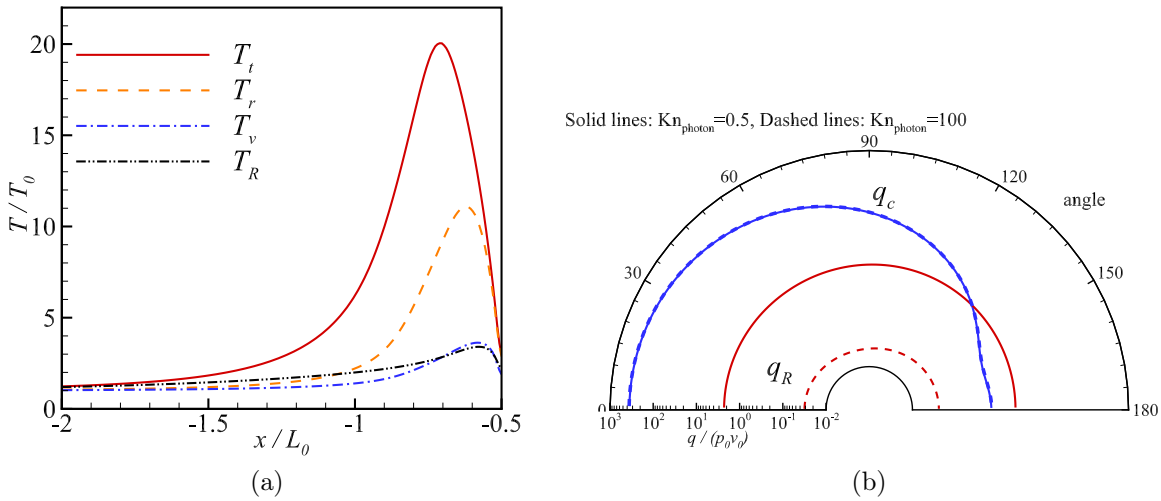
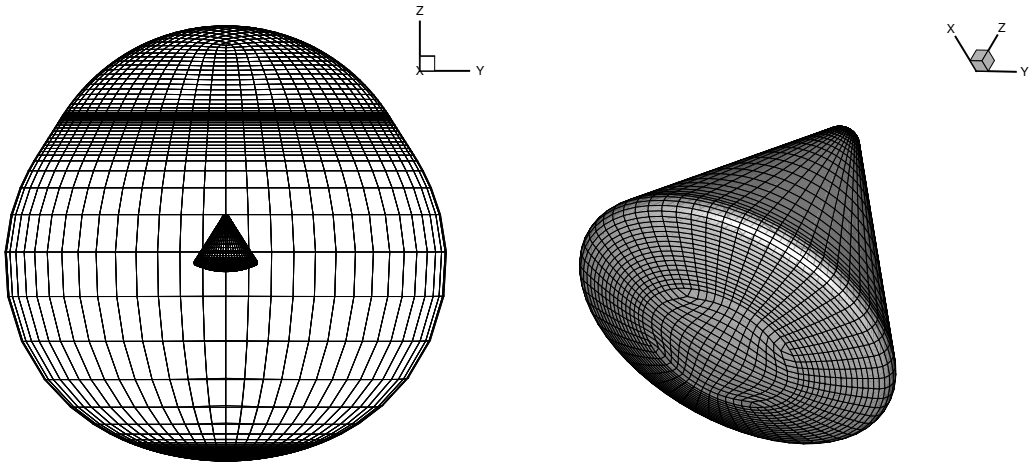


图9：$Kn_{gas} = 0.1$、马赫数 $= 10$ 和 $\sigma_R = 0.015$条件下考虑辐射效应的圆柱高超声速流动。(a) Kn $_{photon} = 0.5$时沿驻点线的温度分布。(b) 两种不同光子克努森数（$Kn_{photon} = 0.5$ 和 100）下沿圆柱表面的对流 q_c 和辐射 q_R 分量热流。

统一气体动理学波粒方法（AUGKWP） [58]所得结果进行比较。首先使用欧拉求解器进行 10,000 次迭代，生成初始流场；从该初始状态出发，GSIS仅需29次迭代即可达到收敛判据。图11展示了流场（对称面）及胶囊表面上的速度和平动温度分布。可以观察到强烈的弓形激波，平动温度最高接近800 K。图11c和11d进一步比较了迎风中心线上的宏观量分布。GSIS结果与AUGKWP数据 [58]吻合良好。在 $x \in [-1, -0.5]$区域观察到轻微偏差，这通常归因于GSIS采用的BGK型动理学模型。

在 $Kn_{photon} = 10$, $\sigma_R = 0.045$ 和 Ma $= 15$条件下，进一步考察 GSIS 对复杂非平衡辐射气体流动进行建模的性能。图12展示了在宽范围气体克努森数下 CIS 和 GSIS 的残差收敛历程，其中迭代步数不包括用于预处理的初始 20 个 CIS 步。与此前的二维算例一致，随着流动趋近近连续区，CIS 的收敛速度显著下降，而 GSIS方法几乎不受影响，始终保持快速收敛。表2总结了在 160 个计算核心上达到收敛所需的迭代步数和实际CPU时间。数据表明，当 Kn_{gas} 从 1 降至 0,001 时，CIS 的迭代步数增加了两个数量级以上（从 119 增至 18,131）。相比之下，GSIS 始终保持高效，在整个克努森数范围内均能在 100 个迭代步内获得收敛解。就总计算成本而言，由于采用了宏观求解器，GSIS 每次迭代的实际运行时间约为传统 CIS 方法的两倍，因此当 $Kn_{gas} = 1$时，其总 CPU 时间成本略高。然而，迭代总次数的大幅减少使得



(a) 网格概览　　(b) 局部放大图

Figu图10：阿波罗舱体周围流动的计算域和网格（六面体单元）　　le.

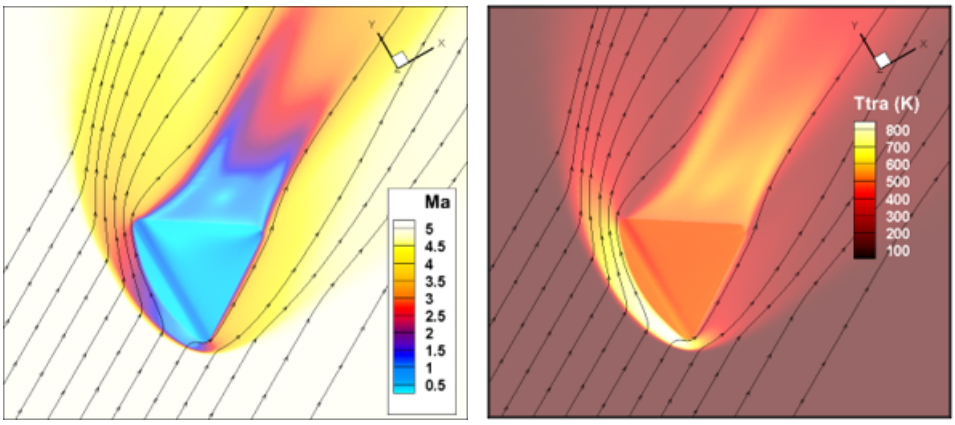
表2：不同气体克努森数（$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 10$, $\sigma_R = 0.045$和 $\mathrm{Ma} = 15$）下阿波罗返回舱高超声速流的 GSIS 和 CIS 收敛步数、实际CPU时间及总体加速比。所有模拟均使用 160 个 CPU核心完成。

$\mathrm{Kn}_{\mathrm{gas}}$	CIS		GSIS		
	步数	CPU 时间（小时）	步数[1]	CPU 时间（小时）	加速比[2]
1	119	0.39	75	0.42	1.6 (0.92)
0.1	657	1.72	58	0.33	11.3 (5.2)
0.01	3657	9.54	29	0.18	126.1 (53.0)
0.001	18131	47.34	36	0.22	503.6 (215.2)

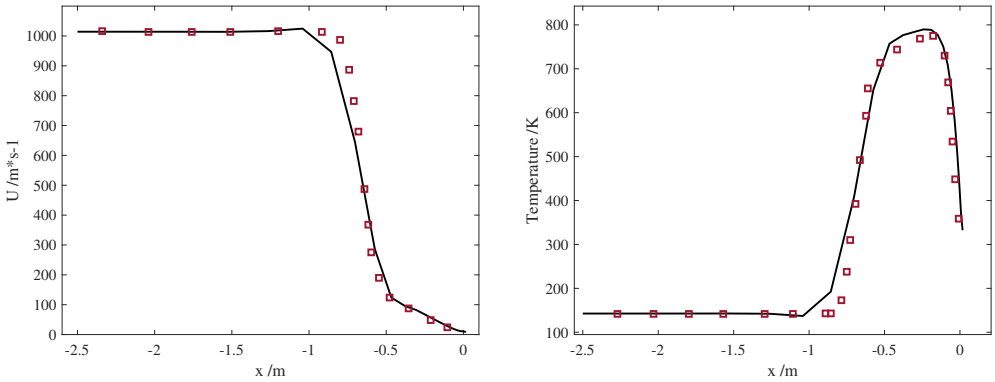
[1] 所报告的步数包括用于预处理的初始 20 个 CIS 步数。每次 GSIS 迭代都包含一次介观方程求解，以及宏观合成方程的 400 次内部迭代。[2] 这些比率表示基于迭代步数和计算墙钟时间（括号中所示）的加速因子。例如，503.6 (215.2) 表示 GSIS 所需的迭代步数减少了 503.6 倍，总耗时则减少了 215.2 倍。计算时间不包括内存分配和初始速度分布函数设置等开销。

GSIS 在近连续区的总体实际运行时间加速比最高可达约 215 倍。

图13展示了辐射效应对流场以及舱体表面热负荷的影响。气体平动温度在穿过强激波时急剧升高，随后通过内能弛豫过程传递至转动和振动内模态。由此产生的高振动温度继而通过辐射跃迁引发显著的辐射效应。因



(a) 局部马赫数　　(b) 平动温度



(c) 速度　　(d) 温度

图 11：来流温度为 $T_\infty = 142.2$ K、马赫数为 $= 5$ 、Kn 为 $_{\text{gas}} = 0.001$时，攻角为 $30°$ 、等温壁面温度为 $T_w = 500$ K 的阿波罗返回舱周围的高超声速流。(a) 局部马赫数和 (b) 平动温度的流场；GSIS（线）与 AUGKWP （符号）对比的 (c) 速度和 (d) 温度 [58]。原点 $x = 0$ 位于迎风面的中心点。

此，在高温激波层内，辐射发射的存在起到了气体冷却机制的作用，降低了整体气体焓并限制了峰值温度。从高温激波层到舱体迎风面的区域，舱体受热主要由对流热流控制。尽管辐射热流的量值很大，但与驻点附近的对流分量相比，其对总热负荷的贡献比例仍然较小。

在激波上游观察到一个特别有趣的现象。由于辐射输运，在距离激波较远的区域，辐射场的能量略高于整体气体温度。在这个激波前区，气体温度尚未开始显著升高，辐射场起到了

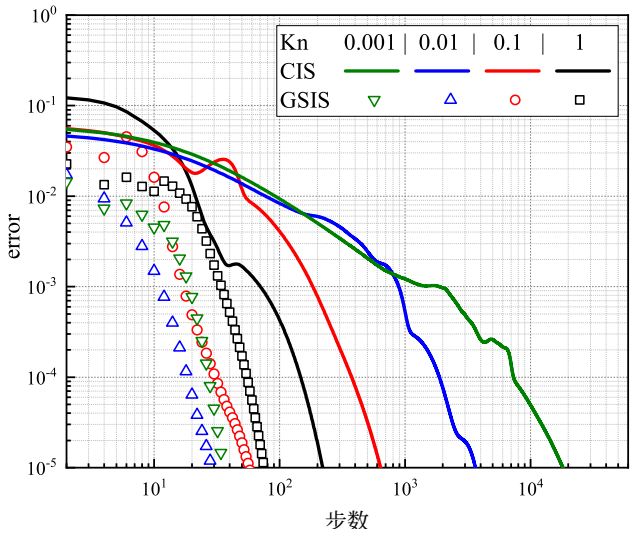


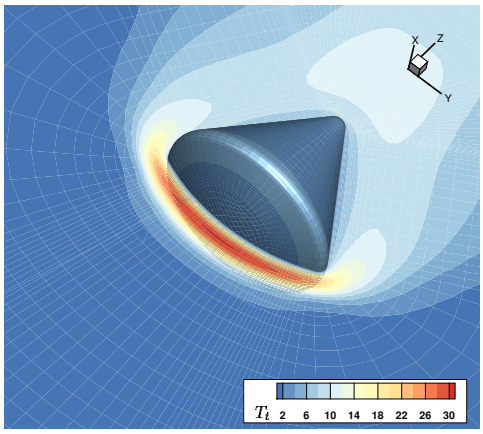
图 12：在 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 10$、 $\sigma_R = 0.045$ 和 $\mathrm{Ma} = 15$条件下，阿波罗返回舱流动中 GSIS 与 CIS 的残差收敛历程对比，涵盖不同气体克努森数。迭代次数不包括 CIS 初始的 20 个预条件步骤。

热源的作用，对气体进行预热。这种现象是因为从激波层发出的高能光子具有很强的穿透能力。这些光子的平均自由程远大于激波层的厚度。它们向上游传播，在气体被激波压缩和加热之前，将能量有效地输送到远处寒冷且未受扰动的来流气体中。这种辐射能传递导致了辐射预热。

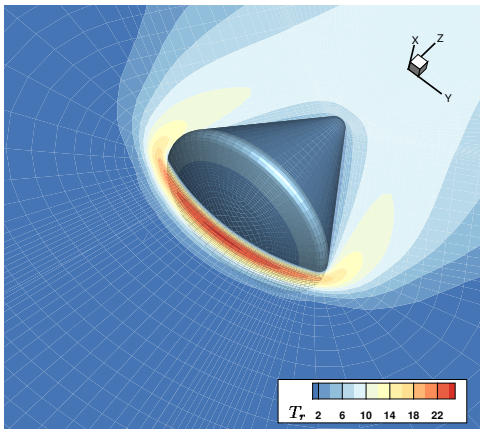
在舱体肩部周围的膨胀区，流动加速、压力下降，气体平动能迅速降低。然而，由于内能弛豫速率较慢，振动温度仍保持在相对较高的水平。这种持续偏高的 T_v 维持了较高的辐射发射。因此，辐射加热效应的相对重要性在舱体肩部和后体更为显著，这与此前二维圆柱超声速流动案例中的观察结果相似。

8. 结论

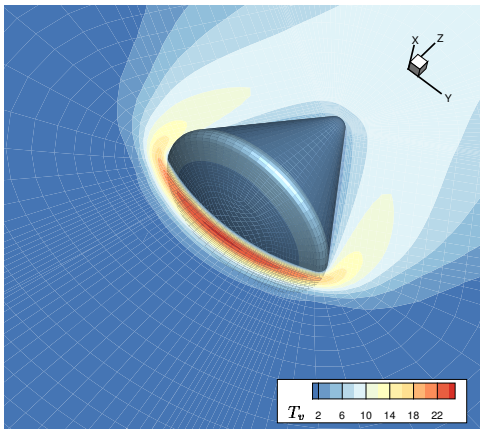
借助自洽辐射对高温气体流动进行准确、高效的模拟，仍是一项长期挑战，其难点在于流动多尺度现象（从连续介质到稀薄流区）与辐射输运多尺度现象（从光学厚到光学薄）同时存在。我们开发并实现了一种高效的通用合成迭代格式，专用于模拟与高温辐射耦合的多尺度稀薄气体动力学。其核心在于介观动力学与宏观综合描述之间的双向耦合。介观动力学方程的解提供了精确的



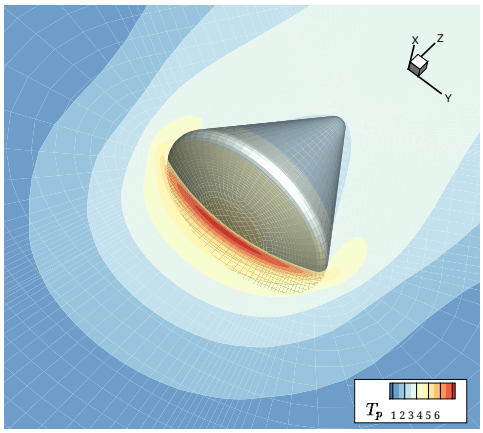
(a) 平动温度



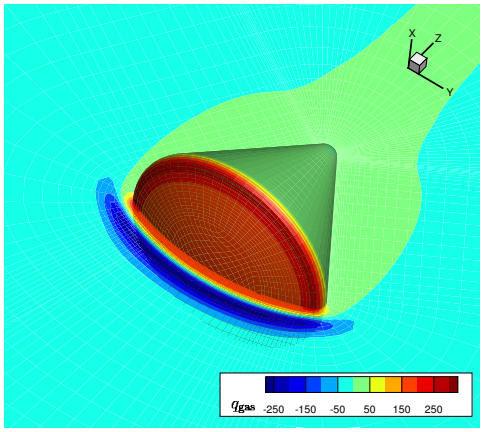
(b) 转动温度



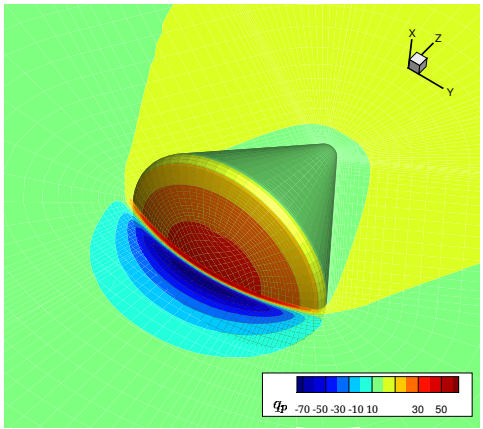
(c) 振动温度



(d) 辐射温度



(e) 对流热流
(流动方向上的分量)



(f) 辐射热流
(流动方向上的分量)

图13: 流动条件下温度和热流（流动方向上的分量）的分布
条件 Kng 当 $= 0.5$，马赫数 $= 15$，$\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}} = 100$，$\sigma_R = 0.015$。

宏观方程中的基于矩的闭合项。宏观合成方程给出的解（密度、速度、各种内能模式的温度以及辐射能量密度）可直接引导分布函数快速演化至稳态。

通过严格的傅里叶稳定性分析，比较了传统介观算法与所提出的GSIS在稳态气体-辐射耦合问题隐式求解中的性能。结果发现，依赖于两个物理场之间宏观量显式耦合的传统方法，在近连续区会出现极慢收敛；当耦合强辐射效应时甚至可能发散。相比之下，GSIS方法将合成方程的求解纳入迭代循环，在近连续介质和光学厚条件下显著提高了计算效率。迭代矩阵的谱半径始终小于0.5，表明其收敛速度得到大幅提升。另一方面，我们还证明，该框架具有理想的渐近保持性质，从而避免了传统动理学方法中苛刻的网格分辨率限制。当气体和光子的克努森数均趋近于零时，GSIS能在粗网格上恢复辐射NSF方程的宏观极限，使得使用空间尺度远大于平均自由程数个数量级的空间单元进行实际模拟成为可能。

我们通过模拟包含高温气体辐射效应的难题，验证了所提出的 GSIS算法，包括正激波、顶盖驱动方腔流、圆柱绕流，以及阿波罗返回舱周围的三维流动。对于上述所有算例，该方案均在 100 次迭代内获得稳态解；其中，气体克努森数从 10^{-3} 变化至 1，光子克努森数从 0.1 变化至 1000，相对辐射强度则从 0.01 变化至 10。在近连续区，GSIS 的效率比传统方法高两个数量级。此外，对高超声速物体绕流辐射加热的研究提供了有益的物理见解，揭示了辐射能量输运导致上游流动预热，并凸显了辐射加热对膨胀区和背风区域总热流的重要贡献。

总之，这种综合加速方法为模拟高温稀薄气体流动中的非平衡辐射输运现象提供了一个统一且高效的框架。它推进了设计和分析经历行星大气再入的飞行器所必需的计算工具，并有助于探索由非平衡辐射支配物理过程的极端环境应用。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在任何已知的经济利益冲突或可能被认为影响本文所报告工作的个人关系。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（12572381）的资助。特别感谢南方科技大学计算科学与工程中心。

附录 A. 宏观方程中源项的隐式处理

以二维双温宏观方程 (13) 为例，守恒变量可表示为:

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u_x\\ \rho u_y\\ e\\ e_r\\ e_v\\ e_R\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_c=\begin{bmatrix}\rho u_n\\ \rho u_x u_n+n_x p_t\\ \rho u_y u_n+n_y p_t\\ u_n(e_{gas}+p_t)\\ u_n e_r\\ u_n e_v\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_v=\begin{bmatrix}0\\ n_x\sigma_{xx}+n_y\sigma_{xy}\\ n_x\sigma_{yx}+n_y\sigma_{yy}\\ n_x\Theta_x+n_y\Theta_y\\ n_x q_{x,r}+n_y q_{y,r}\\ n_x q_{x,v}+n_y q_{y,v}\\ n_x q_{x,R}+n_y q_{y,R}\end{bmatrix},\tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{Q}=\left[0,0,0,0,\frac{e_{tr}-e_r}{Z_r\tau},\frac{e_{tv}-e_v}{Z_v\tau}-\frac{e_{vR}-e_R}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}},\frac{e_{vR}-e_R}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}\right]^{\mathsf{T}},$$

其中 $\Theta_x=u_x\sigma_{xx}+u_y\sigma_{xy}+q_x$ 和 $\Theta_y=u_x\sigma_{yx}+u_y\sigma_{yy}+q_y$。此处，$u_n=u_xn_x+u_yn_y$ 定义为宏观速度矢量与面的单位法向量的标量积。宏观系统中的总能量由内能与动能相加得到。

我们给出了笛卡尔坐标系下源项雅可比矩阵的近似过程。需要注意的是，此处使用的转动碰撞数 Z_r 和自由度 d_v 均为常数。若这些参数与温度有关，则需要重新推导。雅可比矩阵 T 表示源项 Q的导数。通过仅保留矩阵的主对角元素，可进一步近似该矩阵，从而将其对角化如下:

$$\mathbf{T}=\mathrm{diag}\left(\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{W}}\right)=\mathrm{diag}\left(0,0,0,0,\frac{\partial Q(5)}{\partial W(5)},\frac{\partial Q(6)}{\partial W(6)},\frac{\partial Q(7)}{\partial W(7)}\right),\tag{A.2}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(5)}{\partial e_R}&=\frac{\partial\left(\frac{d_r}{2}\frac{\rho(T_{tr}-T_r)}{Z_r\tau}\right)}{\partial\left(\frac{d_r}{2}\rho T_r\right)}=\frac{1}{Z_r}\frac{\partial\left(\frac{\rho(T_{tr}-T_r)}{\tau}\right)}{\partial\left(\rho T_r\right)}\\&=\frac{1}{Z_r}\left[\frac{\partial\left(\rho T_{tr}-\rho T_r\right)}{\partial(\rho T_r)}\cdot\frac{1}{\tau}-\frac{\rho(T_{tr}-T_r)}{\tau^2}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial T_t}\cdot\frac{\partial T_t}{\partial(\rho T_r)}\right]\\&=-\frac{3}{(3+dr)Z_r\tau}+\frac{2(\omega-1)(T_{tr}-T_r)}{3Z_r\tau T_t},\end{aligned}\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(6)}{\partial e_v} &= \frac{\partial\left(\frac{d_v}{2}\frac{\rho(T_{tv}-T_v)}{Z_v\tau}\right)}{\partial\left(\frac{d_v}{2}\rho T_v\right)} = \frac{1}{Z_v}\frac{\partial\left(\frac{\rho(T_{tv}-T_v)}{\tau}\right)}{\partial(\rho T_v)} \\ &= \frac{1}{Z_v}\left[\frac{\partial\left(\rho T_{tv}-\rho T_v\right)}{\partial(\rho T_v)}\cdot\frac{1}{\tau} - \frac{\rho(T_{tv}-T_v)}{\tau^2}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial T_t}\cdot\frac{\partial T_t}{\partial(\rho T_v)}\right] \\ &= -\frac{3}{(3+dv)Z_v\tau} + \frac{2(\omega-1)(T_{tv}-T_v)}{3Z_v\tau T_t},\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(7)}{\partial e_R} &= \frac{\partial}{\partial e_R}\left(\frac{e_{vR}-e_R}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}\right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}\left(\frac{\partial e_{vR}}{\partial e_R}-1\right) = \frac{1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}\left(\frac{\partial}{\partial e_R}e_R\left(\frac{T_R}{T_v}\right)^4-1\right) \\ &= \frac{(T_R/T_v)^4-1}{\mathrm{Kn}_{\mathrm{photon}}}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

这些导数项可以表示为:

$$\frac{\partial T_t}{\partial e_R} = -\frac{2}{3\rho},\quad \frac{\partial(\rho T_{tr})}{\partial(\rho T_r)} = \frac{d_r}{3+d_r},\quad \frac{\partial(\rho T_{tv})}{\partial(\rho T_v)} = \frac{d_v}{3+d_v},\quad \frac{\partial\tau}{\partial T_t} = (\omega-1)\frac{T_t^{\omega-2}}{\rho}. \tag{A.6}$$

近似雅可比矩阵表明，非主对角元素均为零，因此可通过解耦近似求解转动能弛豫方程。

参考

[1] M. Ivanov、S. Gimelshein，《高超声速稀薄流计算》，Annual Review of Fluid Mechanics 30 (1998) 469–505。[2] E. Kustova、E. Nagnibeda、Y. D. Shevelev、N. Syzranova，《钝体附近激波层中非平衡 CO_2 流动的不同模型比较》，《激波》21 (3) (2011年) 273–287。[3] G. Velarde、J. M. Aragonés、J. J. Honrubia、J. M. Martínez-Val、E. Mínguez、J. L. Ocaña、J. M. Perlado，《包含辐射能传递的惯性约束聚变仿真代码》，《激光与粒子束》7 (1989年) 305–313。[4] R. Votta、A. Schettino、A. Bonfiglioli，《航天再入飞行器的高超声速高空气动热力学》，《航空航天科学与技术》25 (2013) 253–265。[5] A. Le Brun、P. Omaly，《火星大气中ExoMars再入过程的辐射热流研究》，《大气再入中的高温气体辐射》689 (2011年) 22。

[6] B. A. Cruden、A. M. Brandis、D. K. Prabhu，《CO_2 激波中中波红外辐射的测量与表征》，载于：第11届AIAA/ASME联合热物理学与传热学会议，2014年，第2962页。

[7] R. M. Kelly、D. E. Gildfind、T. J. McIntyre，《电离超轨道膨胀流的发射光谱学》，AIAA Journal 59 (8) (2021年) 3217–3227。[8] A. M. Brandis、M. Barnhardt、T. K. West、M. Hughes，《美国国家航空航天局进入系统建模项目的新进展》，载于：AIAA SCITECH 2023论坛，2023年，第1333页。[9] C. O. Johnston、A. M. Brandis，《地球进入后体辐射加热的特征》，Journal of Spacecraft and Rockets 52 (1) (2015年) 105–119。[10] M. Lino Da Silva、J. Beck，《CO_2 红外辐射对火星进入辐射壁面热流的贡献》，载于：第49届AIAA航空航天科学会议（含新视野论坛及航空航天展览会），2011年，第135页。[11] S. Zhang、J. Wang、T. Bai、Y. Xu、X. Zhang、S. Zhang、X. Lin、J. Li、F. Li，《高超声速膨胀流中的氮分子辐射》，Physics of Fluids 37 (2) (2025年)。[12] Y. Xu、S. Zhang、C. Nie、X. Gu、S. Zhang、X. Wang、X. Lin、Q. Wang、J. Li、F. Li，《高超声速二氧化碳膨胀流中的化学发光与氧分子辐射》，Physics of Fluids 37 (7) (2025年)。[13] A. M. Brandis、D. Saunders、C. Johnston、B. Cruden、T. White，《火星进入飞行器后体的辐射加热》，Journal of Thermophysics and Heat Transfer 34 (1) (2020年) 66–77。[14] A. C. Tibere-Inglesse、B. A. Cruden、C. Jelloian、R. M. Spearrin，《通过CO_2, 的红外发射光谱学考察火星2020激波层条件》，载于：AIAA SCITECH 2023论坛，2023年，第0960页。[15] J. D. Lindl、P. Amendt、R. L. Berger、S. G. Glendinning、S. H. Glenzer、S. W. Haan、R. L. Kauffman、O. L. Landen、L. J. Suter，《国家点火装置上采用间接驱动靶丸实现点火的物理基础》，Physics of Plasmas 11 (2) (2004年) 339–491。[16] H. Scott、S. Hansen，《综合模拟中非局域热力学平衡建模的进展》，High Energy Density Physics 6 (1) (2010年) 39–47。[17] W. G. Vincenti、S. Traugott，《辐射传输与气体运动的耦合》，Annual Review of Fluid Mechanics 3 (1971年) 89–116。[18] A. Shestakov、M. Prasad、J. Milovich、N. Gentile、J. Painter、G. Furnish，《辐射流体动力学ICF3D代码》，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 187 (1-2) (2000年) 181–200。[19] P. A. Gnoffo，《热化学非平衡高超声速空气流的守恒方程与物理模型》，第2867卷，美国国家航空航天局管理办公室科学与技术信息部，1989年。[20] I. Armenise、P. Reynier、E. Kustova，《应用于火星进入气动热力学的振动与化学动力学高级模型》，Journal of Thermophysics and Heat Transfer 30 (4) (2016年) 705–720。[21] B. A. Cruden、A. M. Brandis，《NEQAIR辐射求解器的更新》，载于：第六届大气进入高温气体辐射国际研讨会，编号ARC-E-DAA-TN19271，2014年。[22] C. O. Johnston、B. R. Hollis、K. Sutton，《月球返回条件下空气激波层辐射的光谱建模》，Journal of Spacecraft and Rockets 45 (5) (2008年) 865–878。

[23] C. S. Wang-Chang、G. E. Uhlenbeck，《多原子气体中的输运现象》，密歇根大学工程研究报告第 CM-681 号，1951年。[24] M. Groppi、G. Spiga，稀薄气体中化学反应和非弹性跃迁的动力学方法，《数学化学杂志》26（1）（1999年）197–219。[25] Q. Li、J. Zeng、Z. Huang、L. Wu，含辐射的稀薄气体流动动力学建模，《流体力学杂志》965（2023年）A13。[26] J. E. Broadwell，采用离散速度法研究稀薄剪切流，《流体力学杂志》19（3）（1964年）401–414。[27] W. Boscheri、G. Dimarco，采用 IMEX 时间推进的非结构网格玻尔兹曼模型高阶有限体积格式，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 387（2021年）114180。[28] G. A. Bird，《分子气体动力学与气体流动直接模拟》，牛津科学出版社，牛津大学出版社，纽约，1994年。[29] K. Xu、J.-C. Huang，适用于连续介质流动和稀薄流动的统一气体动理学格式，《计算物理学杂志》229（20）（2010年）7747–7764。[30] Z. Guo、K. Xu、R. Wang，适用于所有克努森数流动的离散统一气体动理学格式：低速等温情形，《物理评论E》88（3）（2013年）033305。[31] Y. Zhu、C. Zhong、K. Xu，适用于所有流动状态稳态解的隐式统一气体动理学格式，《计算物理学杂志》315（2016年）16–38。[32] Y. Zhu、C. Liu、C. Zhong、K. Xu，统一气体动理学波粒方法。II. 非结构网格上的多尺度模拟，Physics of Fluids 31（6）（2019年）067105。[33] R. Yuan、S. Liu、C. Zhong，适用于所有流动状态下气体流动稳态解的多重预测隐式格式，《非线性科学与数值模拟通讯》92（2021年）105470。[34] R. Yuan、S. Liu、C. Zhong，一种用于模型动理学方程的新型多尺度离散速度法，《非线性科学与数值模拟通讯》92（2021年）105473。[35] W. Sun、S. Jiang、K. Xu，灰体辐射传输方程的渐近保持统一气体动理学格式，《计算物理学杂志》285（2015年）265–279。[36] W. Sun、S. Jiang、K. Xu，非结构网格上辐射传输方程的多维统一气体动理学格式，《计算物理学杂志》351（2017年）455–472。[37] W. Sun、S. Jiang、K. Xu、S. Li，频率相关辐射传输方程的渐近保持统一气体动理学格式，《计算物理学杂志》302（2015年）222–238。[38] W. Su、L. Zhu、P. Wang、Y. Zhang、L. Wu，能否在几十次迭代内求得多尺度稀薄气体流动的稳态解？《计算物理学杂志》407（2020年）109245。[39] L. Zhu、X. Pi、W. Su、Z. Li、Y. Zhang、L. Wu，用于多尺度稀薄气体流动非线性气体动理学模拟的通用合成迭代格式，《计算物理学杂志》430（2021年）110091。[40] W. Su、L. Zhu、L. Wu，通用合成迭代格式的快速收敛性与渐近保持性，SIAM科学计算杂志42（1）（2020年）B1517–B1544。

[41] W. Su、Y. Zhang、L. Wu，采用通用合成迭代格式模拟分子气体流动的多尺度过程，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 373（2021年）113548。[42] J. Zeng、R. Yuan、Y. Zhang、Q. Li、L. Wu，多原子稀薄气体流动的通用合成迭代格式，《计算机与流体》265（2023年）105998。[43] J. Zeng、Q. Li、L. Wu，稀薄气体混合物流动的通用合成迭代格式，《计算物理学杂志》519（2024年）113420。[44] J. Zeng、Y. Zhang、L. Wu，GSIS-ALE 在稀薄气体流动移动边界问题中的应用，《计算物理学杂志》525（2025年）113761。[45] L. Luo、J. Zeng、Y. Zhang、W. Li、Q. Li、L. Wu，采用快速收敛且渐近保持的格式增强稀薄气体混合物的 DSMC模拟，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 449（2026年）118508。[46] C. Zhang、S. Z. Chen、Z. L. Guo、L. Wu，稳态声子玻尔兹曼输运方程的快速合成迭代格式，《国际传热传质杂志》174（2021年）121308。[47] J. Liu、C. Zhang、H. Yuan、W. Su、L. Wu，具有双弛豫时间的声子玻尔兹曼方程快速收敛格式，《计算物理学杂志》467（2022年）111436。[48] I. Sohn、Z. Li、D. A. Levin、M. F. Modest，高超声速再入过程的 DSMC-PMC辐射模拟耦合，《热物理与传热杂志》26（1）（2012年）22–35。[49] P. Prem、D. Goldstein、P. L. Varghese、L. Trafton，瞬态撞击形成的月球大气中气体动力学的 DSMC-蒙特卡罗辐射传输建模，《伊卡洛斯》236（2019年）88–104。[50] V. Rykov，具有转动自由度气体的模型动理学方程，《流体动力学》10（6）（1975年）959–966。[51] L. Wu、C. White、T. J. Scanlon、J. M. Reese、Y. H. Zhang，非振动多原子气体的玻尔兹曼方程动力学模型，《流体力学杂志》763（2015年）24–50。[52] Q. Li、J. Zeng、W. Su、L. Wu，分子气体稀薄气体动力学中的不确定性量化：热弛豫的速率效应，《流体力学杂志》917（2021年）A58。[53] E. A. Mason、L. Monchick，多原子气体和极性气体的热导率，《化学物理学杂志》36（1962年）1622–1639。[54] S. Chapman、T. G. Cowling，《非均匀气体数学理论：气体黏度、热传导和扩散动力学理论概述》，剑桥大学出版社，1990年。[55] V. Venkatakrishnan，带限制器的非结构网格欧拉方程稳态解的收敛，《计算物理学杂志》118（1）（1995年）120–130。[56] Y. Zhang、J. Zeng、R. Yuan、W. Liu、Q. Li、L. Wu，采用 GSIS 求解稀薄气体流动的高效并行求解器，《计算机与流体》281（2024年）106374。[57] S. Taniguchi、T. Arima、T. Ruggeri、M. Sugiyama，稀薄多原子气体激波结构的热力学理论：超越贝特-泰勒理论，《物理评论E》89（1）（2014年）013025。[58] Y. Wei、J. Cao、X. Ji、K. Xu，UGKWP方法中的自适应波粒分解及其在高速流动模拟中的应用，《空气动力学进展》5（1）（2023年）25。