# 盒装 UC 平面分拆与双站点广义相位模型

SHENGYU ZHANG、Jinzhou Liu 和 Zhaowen Yan*

*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot, Inner Mongolia 010030, P. R. China*

Abstract. 本文研究了盒装 UC 平面分拆与双站点广义相位模型之间的联系。通过引入两个映射，我们研究了双侧广义相位代数的表示，以及单值矩阵算子在基向量上的作用。盒装 UC 平面分拆的生成函数由双站点广义相位模型的标量积建立，并可表示为舒尔函数的乘积。研究表明，盒装 UC 平面分拆的生成函数在双重标度极限下等于 UC 平面分拆的生成函数。

**关键词**：双站点广义相位模型；盒装平面分拆；平面分拆生成函数；量子可积模型**数学主题分类（2000）**：17B80, 35Q55, 37K10

arXiv:2601.03941v1 [math-ph] 7 Jan 2026

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 3 2.1. 平面分拆 3 2.2. 带电费米子与态矢量 4 2.3. 双站点广义相位模型 6 3. 单值矩阵算子对基向量的作用 8 3.1. 双侧广义相位代数的表示 8 3.2. 生成交错盒装 2–分拆 10 4. 标量积与盒装 UC 平面分拆 15 5. 双重标度极限下盒装 UC 平面分拆的生成函数 18 5.1. 生成交错 2–分拆 18 5.2. 无限晶格上的双侧广义相位模型 22 6. 结论与讨论 25 7. 致谢 25 参考文献 25

*通讯作者。电子邮箱：yanzw@imu.edu.cn（Z.W. Yan）。

## 1. Introduction

对称函数 [1] 在组合学 [2], 、表示论 [3]和可积模型中有广泛应用。舒尔函数和舒尔 Q 函数分别是 Kadomtsev-Petviashvili（KP）层次和 BKP 层次的 $\tau$ 函数。Hall-Littlewood 函数在参数为 $t=0$ 和 $t=-1$时分别退化为舒尔函数和舒尔 Q 函数。Jing [8, 9] 研究了 Hall-Littlewood 多项式的顶点算子表达式以及变形的玻色子－费米子对应。Koike [10] 提出了广义舒尔函数，称为普适特征标（UC），其指标由一对分拆给出。Tsuda [11]构造了 UC 层次，其 $\tau$ 函数为 UC。他还介绍了 UC 层次的带电费米子描述。与此同时，Ogawa [12]构造了广义舒尔 Q 函数的顶点算子实现，并定义了 B 型 UC 层次。

人们投入了大量精力，运用量子逆散射方法（QISM）研究量子可解模型 [13, 14]。相位模型是一种强关联的量子可解模型，其特征是具有相互作用相位算子，对应于 $q$ 玻色子模型的晶体极限 [15, 16]。Bogoliubov 等人 [17] 运用 QISM 将相位模型的关联函数表示为行列式，并给出了相位模型两个关联函数的解 [18]。Tsilevich [19] 证明，相位模型和 $q$ 玻色子模型的波函数分别可由舒尔函数和 Hall-Littlewood 函数表示，从而实现了它们在对称函数代数中的表示。此外，Wang 和 Li [20] 提出了双站点广义相位模型以及 $A$-模型拓扑弦分拆函数。与此同时，双站点广义相位模型的费米子表示也已得到分析 [21]。

平面分拆在统计物理和量子场论中发挥着至关重要的作用，例如定向渗流 [22], 局部 Calabi-Yau 几何中的拓扑顶点 [23], Calabi-Yau 三维簇上的拓扑弦以及晶体熔化模型 [24]。平面分拆生成函数一直备受关注 [25, 26]。Foda 等人 [27, 28] 采用费米子演算方法，给出了 KP 平面分拆和 BKP 平面分拆的生成函数。此外，盒中平面分拆的生成函数已由相位模型的标量积推导得出 [29]。Shigechi 和 Uchiyama [30] 通过对相位模型广义标量积中的变量进行参数化，得到了盒装斜平面分拆的生成函数。最近，研究者通过对态矢量作用自由费米子顶点算子，对 UC、BUC 平面分拆及其相应的生成函数进行了研究 [31]。本文旨在探讨盒装 UC 平面分拆与双站点广义相位模型之间的关系。

本文的组织如下。第2节回顾平面分拆、带电费米子和双侧广义相位模型。双侧广义相位代数的表示以及单值矩阵算子对基向量的作用已在第3节中研究。第4节基于双站点广义相位模型的标量积，给出了盒装 UC 平面分拆的生成函数，该函数可以写成舒尔函数的乘积。第5节致力于

研究无限晶格极限下的双侧广义相位模型。此外，通过双重标度极限，得到了 UC 平面分拆的生成函数。

## 2. Preliminaries

本节主要回顾平面分拆、带电费米子和双侧广义相位模型 [11, 20, 31, 32] 的一些基本事实。同时，定义了与 $\mathcal{F}_{0,0}$ 和 $\mathcal{F}^*_{0,0}$ 中的_ _2–分拆相对应的态矢量。

**2.1. 平面分拆**。非负整数的递减序列 $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..)$ 称为一个权重为 $|\mu| = \sum \mu_i$ 的分拆。 $m_i = m_i(\mu)$ 表示元素 $i_{i\geq 1}$ 在分拆 $\mu$ 中出现的次数，而 $l(\mu)$ 表示 $\mu$ 中非零元素的个数。分拆 $\mu$ 可改写为

$$\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} ...). \tag{2.1}$$

对于一对分拆 $\mu$ 和 $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..)$，符号 $\mu \succ \nu$ 表示 $\nu$ 与 $\mu$ 交错，如果分拆 $\mu$ 和 $\nu$ 满足

$$\mu_1 \geq \nu_1 \geq \mu_2 \geq \nu_2 \geq \dots. \tag{2.2}$$

2–分拆 $\chi$ 记作 $(\chi) = (\mu, \nu)$，其权重为 $|\chi| = |\mu| + |\nu|$。令 $(\bar{\chi}) = (\bar{\mu}, \bar{\nu})$，则 $(\chi) \succ (\bar{\chi})$ 成立

$$(\chi) \succ (\bar{\chi}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \succ \bar{\mu} \quad \text{and} \quad \nu \succ \bar{\nu}. \tag{2.3}$$

平面分拆 $\pi$ 是满足以下条件的非负整数集合$\pi_{ij}$

$$\pi_{ij} \geq \pi_{(i+1)j}, \quad \pi_{ij} \geq \pi_{i(j+1)}, \quad \lim_{i\to\infty} \pi_{ij} = \lim_{j\to\infty} \pi_{ij} = 0, \quad \text{for } i, j \geq 1. \tag{2.4}$$

每个平面分拆都可以表示为特定分拆的组合，记作 $\pi = (\dots\dots, \pi_{-1}, \pi_0, \pi_1, \dots\dots)$。$\pi_i$ 由下式给出

$$\pi_i = \begin{cases} (\pi_{1(i+1)}, \pi_{2(i+2)}, \pi_{3(i+3)}, \dots) & \text{for } i \geq 0, \\ (\pi_{(-i+1)1}, \pi_{(-i+2)2}, \pi_{(-i+3)3}, \dots) & \text{for } i \leq -1, \end{cases} \tag{2.5}$$

那么平面分拆 $\pi$ 满足以下条件

$$\emptyset = \pi_{-M} \prec \cdots \prec \pi_{-2} \prec \pi_{-1} \prec \pi_0 \succ \pi_1 \succ \pi_2 \succ \cdots \succ \pi_N = \emptyset, \tag{2.6}$$

$_N$对于足够大的 $M$， $N \in \mathbb{N}^+$ 以及权重 $|\pi| = \sum |\pi_i|$。与此同时，UC 平面分拆$_{i=-M}\Pi = (\dots, \chi_{-1}, \chi_0, \chi_1, ..)$成立

$$\emptyset = \chi_{-M} \prec \cdots \prec \chi_{-2} \prec \chi_{-1} \prec \chi_0 \succ \chi_1 \succ \chi_2 \succ \cdots \succ \chi_N = \emptyset. \tag{2.7}$$

引入 UC 平面分拆的生成函数

$$\sum_{\substack{\pi^1 \text{ and } \pi^2 \text{ are} \\ \text{plane partitions}}} p^{|\pi^1|}q^{|\pi^2|} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p^n}\right)^n \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^m}\right)^m. \tag{2.8}$$

令 $B(N,\ L,\ M)$ 表示一个大小为 $N \times L \times M$ 的三维整数格，定义为

$$B(N,L,M) = \{(i,j,k) \mid 0 \le i \le N,\, 0 \le j \le L,\, 0 \le k \le M, \text{ and } i,j,k \in \mathbb{N}\}. \tag{2.9}$$

限制在 $N \times L \times M$ 盒中的平面分拆称为盒中平面分拆。其生成函数可表示为

$$\sum_{\pi \in B(N,L,M)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{L}\prod_{k=1}^{M}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{L}\frac{1-q^{i+j+M-1}}{1-q^{i+j-1}}. \tag{2.10}$$

**2.2. 带电费米子与态矢量**。代数 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 上由带电费米子$\psi_m$，$\psi_m^*$、$\phi_m$ 和 $\phi_m^*$($m$，$n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$) 生成，并满足

$$[\psi_m,\psi_n]_+ = [\psi_m^*,\psi_n^*]_+ = 0, [\psi_m,\psi_n^*]_+ = \delta_{m+n,0}, \tag{2.11}$$

$$[\phi_m,\phi_n]_+ = [\phi_m^*,\phi_n^*]_+ = 0, [\phi_m,\phi_n^*]_+ = \delta_{m+n,0}, \tag{2.12}$$

$$[\psi_m,\phi_n] = [\psi_m,\phi_n^*] = [\psi_m^*,\phi_n] = [\psi_m^*,\phi_n^*] = 0, \tag{2.13}$$

以及 $\psi_m^2 = \psi_m^{*2} = \phi_m^2 = \phi_m^{*2} = 0$，其中

$$[a,b] = ab - ba, \quad [a,b]_+ = ab + ba, \quad \delta_{m+n,0} = \begin{cases} 1, & m+n=0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.14}$$

元素 $a \in \mathcal{A}$ 可写为

$$a = \psi_{m_1}\cdots\psi_{m_r}\psi_{n_1}^*\cdots\psi_{n_s}^*\phi_{\tilde{m}_1'}\cdots\phi_{\tilde{m}_i'}\phi_{\tilde{n}_1'}^*\cdots\phi_{\tilde{n}_j'}^*, \tag{2.15}$$

费米子的荷如下

| 费米子 | $\psi_n$ | $\psi_n^*$ | $\phi_n$ | $\phi_n^*$ |
|---|---|---|---|---|
| 荷 | (1, 0) | (−1, 0) | (0, 1) | (0, −1) |

引入带电费米子福克空间

$$\bar{\mathcal{F}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}\cdot|\text{vac}\rangle = \{a|\text{vac}\rangle \mid a \in \mathcal{A}\}, \tag{2.16}$$

其中真空态满足

$$\psi_n|\text{vac}\rangle = \psi_n^*|\text{vac}\rangle = \phi_n|\text{vac}\rangle = \phi_n^*|\text{vac}\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0. \tag{2.17}$$

$\mathcal{F}_{a_1,a_2}$ 表示荷为 $(a_1,a_2)$ 的福克子空间。类似地，对偶真空态为

$$\langle\text{vac}|\psi_n = \langle\text{vac}|\psi_n^* = \langle\text{vac}|\phi_n = \langle\text{vac}|\phi_n^* = 0 \quad \text{for } n < 0, \tag{2.18}$$

¯对偶 Fock 空间 $\mathcal{F}^*$ 由以下内容生成

$$\bar{\mathcal{F}}^* \overset{\text{def}}{=} \langle \text{vac}| \cdot \mathcal{A} = \{\langle \text{vac}|a \mid a \in \mathcal{A}\}, \tag{2.19}$$

¯和 $\mathcal{F}^*_{a_1,\ a_2}$ 是荷为（$a_1$，$a_2$）的对偶 Fock 子空间。

Note

$$\langle l_1, l_2| = \langle \text{vac}|\Psi^*_{l_1}\Phi^*_{l_2}, \quad |l_1, l_2\rangle = \Psi_{l_1}\Phi_{l_2}|\text{vac}\rangle, \tag{2.20}$$

其中

$$\Psi^*_l = \begin{cases} \psi_{1/2}\cdots\psi_{-l-1/2} & \text{for } l < 0, \\ 1 & \text{for } l = 0, \\ \psi^*_{1/2}\cdots\psi^*_{l-1/2} & \text{for } l > 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\Psi_l = \begin{cases} \psi^*_{l+1/2}\cdots\psi^*_{-1/2} & \text{for } l < 0, \\ 1 & \text{for } l = 0, \\ \psi_{-l+1/2}\cdots\psi_{-1/2} & \text{for } l > 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

而 $\Phi_l$ 和 $\Phi^*_l$ 可通过将 $\psi$ 和 $\psi^*$ 替换为 $\phi$ 和 $\phi^*$得到。对于 $i = 1,\ 2,$ 下列等式成立

$$\langle l_1, l_2|\psi_{n_1} = \langle l_1, l_2|\phi_{n_2} = 0 \quad \text{for } n_i < -l_i, \tag{2.23}$$

$$\psi_{n_1}|l_1, l_2\rangle = \phi_{n_2}|l_1, l_2\rangle = 0 \quad \text{for } n_i > -l_i, \tag{2.24}$$

$$\langle l_1, l_2|\psi^*_{n_1} = \langle l_1, l_2|\phi^*_{n_2} = 0 \quad \text{for } n_i < l_i, \tag{2.25}$$

$$\psi^*_{n_1}|l_1, l_2\rangle = \phi^*_{n_2}|l_1, l_2\rangle = 0 \quad \text{for } n_i > l_i. \tag{2.26}$$

¯ ¯考虑一个配对 $\langle\ \ \rangle$： $\mathcal{F}^* \times \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ 记作

$$(\langle \text{vac}|a, b|\text{vac}\rangle) \ \longmapsto \ \langle \text{vac}|a \cdot b|\text{vac}\rangle = \langle ab\rangle, \tag{2.27}$$

其中 $\langle\ \ \rangle$ 称为真空期望值。

下列性质成立

$$\langle \text{vac}|\text{vac}\rangle = 1, \quad \langle \psi_m\psi^*_n\rangle = \langle \phi_m\phi^*_n\rangle = \begin{cases} \delta_{m+n,0} & (m > 0), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{2.28}$$

定义冒号算子 : : 为

$$:\psi_m\psi^*_n: = \psi_m\psi^*_n - \langle \psi_m\psi^*_n\rangle, \quad :\phi_m\phi^*_n: = \phi_m\phi^*_n - \langle \phi_m\phi^*_n\rangle. \tag{2.29}$$

˜考虑算符 $H_n$ 和 $H_n$ $(n \in \mathbb{Z})$,

$$H_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} :\psi_{-j}\psi^*_{j+n}:, \quad \tilde{H}_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} :\phi_{-j}\phi^*_{j+n}:, \tag{2.30}$$

其满足

$$[H_n,\psi_m]=\psi_{m+n},\quad [H_n,\psi_m^*]=-\psi_{m+n}^*,\quad [H_m,H_n]=m\delta_{m+n,0}, \tag{2.31}$$

$$[\tilde{H}_n,\phi_m]=\phi_{m+n},\quad [\tilde{H}_n,\phi_m^*]=-\phi_{m+n}^*,\quad [\tilde{H}_m,\tilde{H}_n]=m\delta_{m+n,0}, \tag{2.32}$$

and

$$H_n|\mathrm{vac}\rangle=\tilde{H}_n|\mathrm{vac}\rangle=0\quad \text{if } n>0. \tag{2.33}$$

设定 $\mu^j=(\mu_1^j,\mu_2^j,..)$ 和 $\nu^j=(\nu_1^j,\nu_2^j,..)$。对于 $l_1,l_2<0$，费米子福克空间 $\bar{\mathcal{F}}_{0,0}$ 中与 2–分拆 $(\chi)=(\mu^1,\mu^2)$ 对应的右态矢量定义为

$$|\chi\rangle=|\mu^1,\mu^2\rangle=\psi_{m_1^1}\dots\psi_{m_{-l_1}^1}\phi_{m_1^2}\dots\phi_{m_{-l_2}^2}|l_1,l_2\rangle, \tag{2.34}$$

其中，对于所有 $1\le i\le -l_j,\ j=1,2$，$m_i^j=-(\mu_i^j-i)-\frac{1}{2}$ 且 $m_1^j<\dots<m_{l_j}^j\le -l_j$。类似地，令 $m_i^j=(\mu_i^j-i)+\frac{1}{2}$，$\bar{\mathcal{F}}_{0,0}^*$ 中的相应左态矢量表示为

$$\langle\chi|=\langle\mu^2,\mu^1|=\langle l_2,l_1|\phi_{m_{-l_2}^2}^*\dots\phi_{m_1^2}^*\psi_{m_{-l_1}^1}^*\dots\psi_{m_1^1}^*, \tag{2.35}$$

其中，对于所有 $1\le i\le -l_j,\ j=1,2$，$m_1^j>\dots>m_{l_j}^j\ge l_j$。注意，若 $n_i^j=-(\nu_i^j-i)-\frac{1}{2}$，$m_i^j=(\mu_i^j-i)+\frac{1}{2}$ 且 $l_j,k_j<0$，则

$$\begin{aligned}\big(\langle\mu^2,\mu^1|,|\nu^1,\nu^2\rangle\big)=&\langle l_2,l_1|\phi_{m_{-l_2}^2}^*\dots\phi_{m_1^2}^*\psi_{m_{-l_1}^1}^*\dots\psi_{m_1^1}^*\psi_{n_1^1}\dots\psi_{n_{-k_1}^1}\phi_{n_1^2}\dots\phi_{n_{-k_2}^2}|k_1,k_2\rangle\\ =&\delta_{k_1,l_1}\delta_{k_2,l_2}\prod_{i=1}^{-l_1}\delta_{m_i^1,n_i^1}\prod_{j=1}^{-l_2}\delta_{m_j^2,n_j^2}=\delta_{\mu^1,\nu^1}\delta_{\mu^2,\nu^2},\end{aligned} \tag{2.36}$$

其中$\delta_{\mu^j,\ \nu^j}$ 表示 $\mu^j$ 等于 $\nu^j$。

**2.3. 双站点广义相位模型**。双位点广义相位代数由 $\{\phi^{(j)},\phi^{(j)\dagger},\mathcal{N}^{(j)},\pi^{(j)},j=1,2\}$生成，并满足

$$[\phi^{(i)},\phi^{(j)\dagger}]=\delta_{i,j}\pi^{(i)},\quad [\mathcal{N}^{(i)},\phi^{(j)}]=-\delta_{i,j}\phi^{(i)},\quad [\mathcal{N}^{(i)},\phi^{(j)\dagger}]=\delta_{i,j}\phi^{(i)\dagger}, \tag{2.37}$$

$$\phi^{(i)}\pi^{(i)}=\pi^{(i)}\phi^{(i)\dagger}=0,\quad \text{for } i,j=1,2. \tag{2.38}$$

考虑由 $\{\phi_k^{(j)},\phi_k^{(j)\dagger},\mathcal{N}_{(j)k},\pi_k^{(j)}\},\ 0\le k\le M_j$ 表示的 $M_1+M_2+2$ 份双位点广义相位代数。不同类型和位置之间的代数运算满足交换律，因此有

$$[\phi_{l_i}^{(i)},\phi_{k_j}^{(j)\dagger}]=\begin{cases}\delta_{l_i,k_j}\pi_{l_i}^{(j)}, & i=j,\\ 0, & i\ne j,\end{cases}\qquad [\mathcal{N}_{l_i}^{(i)},\phi_{k_j}^{(j)}]=\begin{cases}-\delta_{l_i,k_j}\phi_{l_i}^{(j)}, & i=j,\\ 0, & i\ne j,\end{cases} \tag{2.39}$$

$$[\mathcal{N}_{l_i}^{(i)},\phi_{k_j}^{(j)\dagger}]=\begin{cases}\delta_{l_i,k_j}\phi_{l_i}^{(j)\dagger}, & i=j,\\ 0, & i\ne j,\end{cases}\qquad \phi_{l_i}^{(i)}\pi_{l_i}^{(i)}=\pi_{l_i}^{(i)}\phi_{l_i}^{(i)\dagger}=0, \tag{2.40}$$

其中 $0 \leq l_i, k_j \leq M_j$，且 $i, j = 1, 2$。向量空间 $\mathcal{V}$ 的 $M_1+1$ 份和 $M_2+1$ 份分别记作

$$\mathcal{V}^{(1)} = \bigotimes_{i=0}^{M_1} \mathcal{V}_i^{(1)}, \quad \mathcal{V}^{(2)} = \bigotimes_{j=0}^{M_2} \mathcal{V}_j^{(2)}, \tag{2.41}$$

其中

$$\text{Basis}(\mathcal{V}^{(1)}) = \left\{ |n_0^1\rangle_0^{(1)} \otimes \cdots \otimes |n_{M_1}^1\rangle_{M_1}^{(1)} = \bigotimes_{i=0}^{M_1} |n_i^1\rangle_i^{(1)} \right\}, \tag{2.42}$$

$$\text{Basis}(\mathcal{V}^{(2)}) = \left\{ |n_0^2\rangle_0^{(2)} \otimes \cdots \otimes |n_{M_2}^2\rangle_{M_2}^{(2)} = \bigotimes_{j=0}^{M_2} |n_j^2\rangle_j^{(2)} \right\}, \tag{2.43}$$

而 $n_i^j$ $(j = 1, 2$ 和 $0 \leq i \leq M_j)$ 称为 $i^{th}$ 位置的基向量的占据数，取遍所有非负整数。我们将粒子数记为 $N_j = \sum_{i=0}^{M_j} n_i^j$。那么，向量空间 $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(1)} \bigotimes \mathcal{V}^{(2)}$ 的基向量形式为

$$\text{Basis}(\mathcal{V}) = \left\{ |n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} = \bigotimes_{i=0}^{M_1} |n_i^1\rangle_i^{(1)} \bigotimes \bigotimes_{j=0}^{M_2} |n_j^2\rangle_j^{(2)} \right\}. \tag{2.44}$$

两个基向量 $|m^1\rangle^{(1)} \bigotimes |m^2\rangle^{(2)}$ 和 $|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)}$ 之间的内积定义为

$$\mathcal{I}\left( |m^1\rangle^{(1)} \bigotimes |m^2\rangle^{(2)}, |n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} \right) = \prod_{i=1}^{M_1} \delta_{m_i^1, n_i^1} \prod_{j=1}^{M_2} \delta_{m_j^2, n_j^2}. \tag{2.45}$$

Sim类似地，相应的对偶向量空间记为 $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}^{(1)*} \bigotimes \mathcal{V}^{(2)*}$ an d

$$\text{Basis}(\mathcal{V}^*) = \left\{ {}^{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle m^1| = \bigotimes_{j=0}^{M_2} {}_j^{(2)}\langle m_j^2| \bigotimes \bigotimes_{i=0}^{M_1} {}_i^{(1)}\langle m_i^1| \right\}. \tag{2.46}$$

引入双侧广义相位模型的 $R$-矩阵

$$R(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} & x - y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

$L$–矩阵

$$L_i^{(j)}(x) = \begin{pmatrix} x^{-\frac{1}{2}} & \phi_i^{(j)\dagger} \\ \phi_i^{(j)} & x^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2 \text{ and } i = 0, \cdots, M_j, \tag{2.48}$$

以及单值矩阵

$$T(x) = T_2(x) \cdot T_1(x), \tag{2.49}$$

其中

$$T_j(x) = L^{(j)}_{M_j}(x)L^{(j)}_{M_j-1}(x)\cdots L^{(j)}_0(x) = \begin{pmatrix} A_j(x) & B_j(x) \\ C_j(x) & D_j(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \tag{2.50}$$

定义算符

$$\hat{\mathcal{N}}_1 = \sum_{i=0}^{M_1} \mathcal{N}_i^{(1)}, \quad \hat{\mathcal{N}}_2 = \sum_{i=0}^{M_2} \mathcal{N}_i^{(2)}, \quad \text{and} \quad \hat{\mathcal{N}} = \hat{\mathcal{N}}_1 + \hat{\mathcal{N}}_2. \tag{2.51}$$

算符 $A_j(x)$ 和 $D_j(x)$ 不改变粒子的总数。然而，算符 $B_j(x)$ 和 $C_j(x)$ 满足

$$\hat{\mathcal{N}}_j B_j(u) = B_j(u)(\hat{\mathcal{N}}_j + 1), \quad \hat{\mathcal{N}}_j C_j(u) = C_j(u)(\hat{\mathcal{N}}_j - 1), \tag{2.52}$$

其中，我们将 $B_j(x)$ 称为产生算符，将 $C_j(x)$ 称为湮灭算符。

下列双线性方程成立

$$R(x, y)(T(x) \otimes T(y)) = (T(y) \otimes T(x))R(x, y), \tag{2.53}$$

$$R(x, y)(T_j(x) \otimes T_j(y)) = (T_j(y) \otimes T_j(x))R(x, y), \tag{2.54}$$

$$R(x, y)(L^{(j)}_i(x) \otimes L^{(j)}_i(y)) = (L^{(j)}_i(y) \otimes L^{(j)}_i(x))R(x, y). \tag{2.55}$$

由式 (2.55) 可得

$$[B_i(x), B_j(y)] = [C_i(x), C_j(y)] = 0, \quad \text{for } i, j = 1, 2. \tag{2.56}$$

## 3. The action of the monodromy matrix operators on basis vectors

本节介绍双侧广义相位代数的表示，并计算基向量的标量积。通过使用映射 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^*$，我们证明单值矩阵算子对基向量的作用会生成交错的盒状 2–分拆。

**3.1. 双侧广义相位代数的表示。**考虑算符 $\{\phi_i^{(j)}, \phi_i^{(j)\dagger}, \mathcal{N}_{(j)\,i}, \pi_i^{(j)}\}$ ($j = 1, 2$ 和 $0 \le i \le M_j$) 在向量空间 $\mathcal{V}$中的基向量 $\bigotimes_{i=0}^{M_1} |n_i^1\rangle_i^{(1)} \bigotimes \bigotimes_{j=0}^{M_2} |n_j^2\rangle_j^{(2)}$ 上的作用。

$\phi_i^{(1)}$ 湮灭该基向量，或使其 $i^{th}$ 占据数减 1，其关系式为

$$\begin{aligned} &\phi_i^{(1)} \bigotimes_{i=0}^{M_1} |n_i^1\rangle_i^{(1)} \bigotimes \bigotimes_{j=0}^{M_2} |n_j^2\rangle_j^{(2)} \\ &= \begin{cases} 0, & n_i^1 = 0, \\ |n_0^1\rangle_0^{(1)} \otimes \cdots \otimes |n_i^1 - 1\rangle_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes |n_{M_1}^1\rangle_{M_1}^{(1)} \bigotimes \bigotimes_{j=0}^{M_2} |n_j^2\rangle_j^{(2)}, & n_i^1 \ge 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$\phi_i^{(1)\dagger}$ 使该基向量的 $i^{th}$ 占据数增加 1，其关系式为

$$\phi_i^{(1)\dagger}\bigotimes_{i=0}^{M_1}|n_i^1\rangle_i^{(1)}\bigotimes\bigotimes_{j=0}^{M_2}|n_j^2\rangle_j^{(2)}=|n_0^1\rangle_0^{(1)}\otimes\cdots\otimes|n_i^1+1\rangle_i^{(1)}\otimes\cdots\otimes|n_{M_1}^1\rangle_{M_1}^{(1)}\bigotimes\bigotimes_{j=0}^{M_2}|n_j^2\rangle_j^{(2)}. \tag{3.2}$$

该基向量是 $\mathcal{N}_i^{(1)}$ 的特征向量，其特征值为 $i^{th}$ 占据数，

$$\mathcal{N}_i^{(1)}\bigotimes_{i=0}^{M_1}|n_i^1\rangle_i^{(1)}\bigotimes\bigotimes_{j=0}^{M_2}|n_j^2\rangle_j^{(2)}=n_i^1\bigotimes_{i=0}^{M_1}|n_i^1\rangle_i^{(1)}\bigotimes\bigotimes_{j=0}^{M_2}|n_j^2\rangle_j^{(2)}. \tag{3.3}$$

$\pi_i^{(1)}$ 对基向量的作用由下式给出

$$\pi_i^{(1)}\bigotimes_{i=0}^{M_1}|n_i^1\rangle_i^{(1)}\bigotimes\bigotimes_{j=0}^{M_2}|n_j^2\rangle_j^{(2)}=\begin{cases}|n_0^1\rangle_0^{(1)}\otimes\cdots\otimes|n_{M_1}^1\rangle_{M_1}^{(1)}\bigotimes\limits_{j=0}^{M_2}|n_j^2\rangle_j^{(2)}, & n_i^1=0,\\ \\ 0, & n_i^1\geq 1.\end{cases} \tag{3.4}$$

与此同时， $\phi_i^{(1)}$ 和 $\phi_i^{(1)\dagger}$ 的作用在对偶向量空间 $\mathcal{V}^*$ 中互换，其关系如下

$$\begin{aligned}&\bigotimes_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes\bigotimes_{i=0}^{M_1}{}_i^{(1)}\langle m_i^1|\phi_i^{(1)}\\ =&\bigotimes_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes{}_0^{(1)}\langle m_0^1|\otimes\cdots\otimes{}_i^{(1)}\langle m_i^1+1|\otimes\cdots\otimes{}_{M_1}^{(1)}\langle m_{M_1}^1|,\end{aligned} \tag{3.5}$$

and

$$\begin{aligned}&\bigotimes_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes\bigotimes_{i=0}^{M_1}{}_i^{(1)}\langle m_i^1|\phi_i^{(1)\dagger}\\ =&\begin{cases}0, & m_i^1=0,\\ \\ \bigotimes\limits_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes{}_0^{(1)}\langle m_0^1|\otimes\cdots\otimes{}_i^{(1)}\langle m_i^1-1|\otimes\cdots\otimes{}_{M_1}^{(1)}\langle m_{M_1}^1|, & m_i^1\geq 1.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.6}$$

$\mathcal{N}_i^{(1)}$ 和 $\pi_i^{(1)}$ 对对偶向量空间 $\mathcal{V}^*$ 的作用由下式给出

$$\bigotimes_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes\bigotimes_{i=0}^{M_1}{}_i^{(1)}\langle m_i^1|\mathcal{N}_i^{(1)}=m_i^1\bigotimes_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes{}_0^{(1)}\langle m_0^1|\otimes\cdots\otimes{}_{M_1}^{(1)}\langle m_{M_1}^1|, \tag{3.7}$$

$$\bigotimes_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes\bigotimes_{i=0}^{M_1}{}_i^{(1)}\langle m_i^1|\pi_i^{(1)}=\begin{cases}\bigotimes\limits_{j=0}^{M_2}{}_j^{(2)}\langle m_j^2|\bigotimes{}_0^{(1)}\langle m_0^1|\otimes\cdots\otimes{}_{M_1}^{(1)}\langle m_{M_1}^1|, & m_i^1=0,\\ \\ 0, & m_i^1\geq 1.\end{cases} \tag{3.8}$$

应当指出， $\{\phi_i^{(2)},\phi_i^{(2)\dagger},\mathcal{N}_i^{(2)},\pi_i^{(2)}\}$ 和 $\{\phi_i^{(1)},\phi_i^{(1)\dagger},\mathcal{N}_i^{(1)},\pi_i^{(1)}\}$ 对基向量的作用遵循相似的规则。因此，我们不在此赘述。

**引理 3.1**。　该 *ac* 基向量$\langle m^2|^{(2)}\bigotimes\langle m^1|^{(1)}\in\mathcal{V}^*$在$|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}\in\mathcal{V}$上的作用满足

$$^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}=\prod_{j=1}^{2}\prod_{i=0}^{M_j}\delta_{m_i^j,n_i^j}. \tag{3.9}$$

证明。 利用公式(3.2)，可得

$$\begin{aligned}
&|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}\\
=&\bigotimes_{i=0}^{M_1}|n_i^1\rangle_i^{(1)}\bigotimes\bigotimes_{j=0}^{M_2}|n_j^2\rangle_j^{(2)}\\
=&(\phi_0^{(1)\dagger})^{n_0^1}\cdots(\phi_{M_1}^{(1)\dagger})^{n_{M_1}^1}(\phi_0^{(2)\dagger})^{n_0^2}\cdots(\phi_{M_2}^{(2)\dagger})^{n_{M_2}^2}|0\rangle_0^{(1)}\otimes\cdots\otimes|0\rangle_{M_1}^{(1)}\otimes|0\rangle_0^{(2)}\otimes\cdots\otimes|0\rangle_{M_2}^{(2)}\\
=&\overleftarrow{\prod_{l=0}^{M_1}}\phi_l^{(1)\dagger}\overleftarrow{\prod_{k=0}^{M_2}}\phi_k^{(2)\dagger}|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)},
\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中，指标沿乘积符号中箭头所示的方向递减。类似地，由公式(3.5)，可得

$$^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|=\,^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\overleftarrow{\prod_{s=0}^{M_1}}\phi_s^{(1)}\overleftarrow{\prod_{t=0}^{M_2}}\phi_t^{(2)}. \tag{3.11}$$

Then

$$\begin{aligned}
&^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}\\
=&\,^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\overleftarrow{\prod_{s=0}^{M_1}}\phi_s^{(1)}\overleftarrow{\prod_{t=0}^{M_2}}\phi_t^{(2)}\overleftarrow{\prod_{l=0}^{M_1}}\phi_l^{(1)\dagger}\overleftarrow{\prod_{k=0}^{M_2}}\phi_k^{(2)\dagger}|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

结合公式(2.39)及事实 $\phi_i^{(j)}|0\rangle=\langle 0|\phi_i^{(j)\dagger}=0$，可得

$$^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}=\prod_{j=1}^{2}\prod_{i=0}^{M_j}\delta_{m_i^j,n_i^j}. \tag{3.13}$$

□

**3.2. 生成交错盒状** 2**–分拆**。 集合 $|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}$和$_{(2)}\langle n^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|$分别是 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}^*$中的基向量。

**定义 3.2**。 定义线性映射

$$\mathcal{M}:\mathcal{V}\to\bar{\mathcal{F}}_{0,0},\quad \mathcal{M}^*:\mathcal{V}^*\to\bar{\mathcal{F}}_{0,0}^*, \tag{3.14}$$

由此可得

$$\mathcal{M}|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}=|\nu^1,\nu^2\rangle=|\chi\rangle, \tag{3.15}$$

$$^{(2)}\langle n^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|\mathcal{M}^*=\langle\nu^2,\nu^1|=\langle\chi|, \tag{3.16}$$

其中

$$\nu^j = (0^{n_0^j} 1^{n_1^j} \cdots M_j^{n_{M_j}^j}) = (1^{n_1^j} \cdots M_j^{n_{M_j}^j}), \quad j = 1, 2. \tag{3.17}$$

对于所有满足 $m_0^j = n_0^j$ 的${}_{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}_{(1)}\langle m^1| \in \mathcal{V}^*$和 $|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} \in \mathcal{V}$，由式 (2.36) 和 (3.9) 可知,

$${}^{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle m^1|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} = \big({}^{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle m^1|\mathcal{M}^*, \mathcal{M}|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)}\big). \tag{3.18}$$

对于空间 $\mathcal{V}$ 的基向量 $|m^1\rangle^{(1)} \bigotimes |m^2\rangle^{(2)}$ 和 $|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)}$，记

$$\Sigma_i^{m^j} = \sum_{k=i}^{M_j} m_k^j, \quad \Sigma_i^{n^j} = \sum_{k=i}^{M_j} n_k^j, \quad j = 1, 2 \text{ and } 0 \le i \le M_j. \tag{3.19}$$

符号$|m^j\rangle^{(j)} \triangleright |n^j\rangle^{(j)}$ 表示 $|m^j\rangle^{(j)}$ 对 $|n^j\rangle^{(j)}$是可容许的，当且仅当

$$(\Sigma_0^{m^j} - \Sigma_0^{n^j}) = 1 \quad \text{and} \quad 0 \le (\Sigma_i^{m^j} - \Sigma_i^{n^j}) \le 1, \quad j = 1, 2 \text{ and } 0 \le i \le M_j. \tag{3.20}$$

类似地，若空间 $\mathcal{V}^*$ 的基向量${}_{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}_{(1)}\langle m^1|$ 和 ${}_{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}_{(1)}\langle n^1|$ 满足式 (3.20)，则称${}_{(j)}\langle m^j|$ 对${}_{(j)}\langle n^j|$ 是可容许的，并记作${}_{(j)}\langle n^j| \triangleleft {}_{(j)}\langle m^j|$。需要指出的是,

$$|m^1\rangle^{(1)} \bigotimes |m^2\rangle^{(2)} \triangleright |n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} \Longleftrightarrow |m^1\rangle^{(1)} \triangleright |n^1\rangle^{(1)} \text{ and } |m^2\rangle^{(2)} \triangleright |n^2\rangle^{(2)}, \tag{3.21}$$

$${}^{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle n^1| \triangleleft {}^{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle m^1| \Longleftrightarrow {}^{(1)}\langle n^1| \triangleleft {}^{(1)}\langle m^1| \text{ and } {}^{(2)}\langle n^2| \triangleleft {}^{(2)}\langle m^2|. \tag{3.22}$$

**引理 3.3.** 如果这些映射满足以下关系

$$|\mu^1, \mu^2\rangle = \mathcal{M}|m^1\rangle^{(1)} \bigotimes |m^2\rangle^{(2)}, \quad |\nu^1, \nu^2\rangle = \mathcal{M}|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)}, \tag{3.23}$$

$${}^{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle m^1|\mathcal{M}^* = \langle \mu^2, \mu^1|, \quad {}^{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle n^1|\mathcal{M}^* = \langle \nu^2, \nu^1|, \tag{3.24}$$

那么我们有

$$|m^1\rangle^{(1)} \bigotimes |m^2\rangle^{(2)} \triangleright |n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} \implies \mu^1 \succ \nu^1, \mu^2 \succ \nu^2, \tag{3.25}$$

$${}^{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle n^1| \triangleleft {}^{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle m^1| \implies \nu^1 \prec \mu^1, \nu^2 \prec \mu^2. \tag{3.26}$$

证明. 根据参考文献 [32]，第3节.2.4 中的引理 1，我们有

$$|m^1\rangle^{(1)} \triangleright |n^1\rangle^{(1)} \implies \mu^1 \succ \nu^1, \tag{3.27}$$

$$|m^2\rangle^{(2)} \triangleright |n^2\rangle^{(2)} \implies \mu^2 \succ \nu^2. \tag{3.28}$$

式(3.21)意味着式(3.25)成立。采用类似的步骤，也可以证明式(3.26)。

□

**引理 3.4**。 对于 $j=1$、2，令 $\bar{\mathbb{B}}_j(x)=x^{\frac{M_j}{2}}B_j(x)$ 以及 $\bar{\mathbb{C}}_j(x)=x_j^{\frac{M_j}{2}}C(\frac{1}{x_j})$，$\bar{\mathbb{B}}_j(x)$和 $\bar{\mathbb{C}}_j(x)$ 在 $|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}$ 和 ${}^{(2)}\langle n^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|$ 上的作用满足

$$\bar{\mathbb{B}}_1(x)\bar{\mathbb{B}}_2(y)|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}=\sum_{\substack{|m^1\rangle^{(1)}\triangleright|n^1\rangle^{(1)}\\|m^2\rangle^{(2)}\triangleright|n^2\rangle^{(2)}}}\prod_{i=1}^{M_1}x^{i(m_i^1-n_i^1)}\prod_{j=1}^{M_2}y^{i(m_j^2-n_j^2)}|m^1\rangle^{(1)}\bigotimes|m^2\rangle^{(2)},\tag{3.29}$$

$${}^{(2)}\langle n^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|\bar{\mathbb{C}}_2(y)\bar{\mathbb{C}}_1(x)=\sum_{\substack{{}^{(1)}\langle n^1|\lhd{}^{(1)}\langle m^1|\\{}^{(2)}\langle n^2|\lhd{}^{(2)}\langle m^2|}}\prod_{i=1}^{M_1}x^{i(m_i^1-n_i^1)}\prod_{j=1}^{M_2}y^{j(m_j^2-n_j^2)}\,{}^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|.\tag{3.30}$$

证明。 我们只证明式(3.29)。式(3.30)的证明类似，因此不再重复。令 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\uparrow$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\downarrow$ 和 (1 0) $=\uparrow^*$。由式(2.50)可得

$$\begin{aligned}B_1(x)B_2(y)=&(1\ 0)\begin{pmatrix}A_1(x)&B_1(x)\\C_1(x)&D_1(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0)\begin{pmatrix}A_2(y)&B_2(y)\\C_2(y)&D_2(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\=&\uparrow^*L_{M_1}^{(1)}(x)\cdots L_0^{(1)}(x)\downarrow\uparrow^*L_{M_2}^{(2)}(y)\cdots L_0^{(2)}(y)\downarrow.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Thus

$$\begin{aligned}&{}^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|B_1(x)B_2(y)|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}\\=&\uparrow^*\bar{L}_{M_1}^{(1)}(x)\cdots\bar{L}_0^{(1)}(x)\downarrow\uparrow^*\bar{L}_{M_2}^{(2)}(y)\cdots\bar{L}_0^{(2)}(y)\downarrow,\end{aligned}\tag{3.32}$$

其中

$$\bar{L}_i^{(j)}(x)=\begin{pmatrix}{}^{(j)}_i\langle m_i^j|x^{-\frac{1}{2}}|n_i^j\rangle_i^{(j)}&{}^{(j)}_i\langle m_i^j|\phi_i^{(j)\dagger}|n_i^j\rangle_i^{(j)}\\{}^{(j)}_i\langle m_i^j|\phi_i^{(j)}|n_i^j\rangle_i^{(j)}&{}^{(j)}_i\langle m_i^j|x^{\frac{1}{2}}|n_i^j\rangle_i^{(j)}\end{pmatrix}\quad j=1,2\text{ and }0\le i\le M_j.\tag{3.33}$$

结合式 (3.1)、(3.2) 和 (3.9) 可得

$$\bar{L}_i^{(j)}(x)=\begin{cases}\begin{pmatrix}x^{-\frac{1}{2}}&0\\0&x^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},&m_i^j=n_i^j,\\A_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},&m_i^j=n_i^j+1,\\A_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},&m_i^j=n_i^j-1,\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},&\text{otherwise.}\end{cases}\tag{3.34}$$

$|m^j\rangle^{(j)} \not\triangleright |n^j\rangle^{(j)}$ 这意味着至少有两个矩阵 $A_{12}$ 或 $A_{21}$ 会连续出现，从而得到

$$\uparrow^* \bar{L}^{(1)}_{M_1}(x)\cdots\bar{L}^{(1)}_0(x)\downarrow\uparrow^* \bar{L}^{(2)}_{M_2}(y)\cdots\bar{L}^{(2)}_0(y)\downarrow = 0. \tag{3.35}$$

对于 $|m^j\rangle^{(j)} \triangleright |n^j\rangle^{(j)}$，令满足 $m^j_i = n^j_i + 1$ 的所有整数 $i$ 构成集合 $\{p^j_1, \cdots, p^j_{r_j}\}$，并令由满足 $m^j_i = n^j_i - 1$ 的整数 $i$ 构成 $\{q^j_1, \cdots, q^j_{s_j}\}$。根据可容许关系，可得$r_j - 1 = s_j$ 并且

$$p^j_i < q^j_i < p^j_{i+1}, \quad \text{for all } 1 \le i \le r_j - 1. \tag{3.36}$$

注意到 $q^j_0 = -1$ 和 $q^j_{r_j} = M_j + 1$。式 (3.31) 可改写为

$$\begin{aligned}
&\uparrow^* \bar{L}^{(1)}_{M_1}(x)\cdots\bar{L}^{(1)}_0(x)A_{21}\uparrow\uparrow^* \bar{L}^{(2)}_{M_2}(y)\cdots\bar{L}^{(2)}_0(y)A_{21}\uparrow\\
=&\uparrow^* \prod_{i=1}^{r_1}{\rightarrow}\left[\begin{pmatrix} x^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & x^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{q^1_i - p^1_{i-1}-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & x^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{p^1_i - q^1_{i-1}-1}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]\uparrow\\
&\uparrow^* \prod_{l=1}^{r_2}{\rightarrow}\left[\begin{pmatrix} y^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & y^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{q^2_l - p^2_{l-1}-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & y^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^{p^2_l - q^2_{l-1}-1}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]\uparrow\\
=&x^{-\frac{M_1}{2}}\prod_{i=1}^{r_1-1} x^{p^1_i - q^1_i}x^{p^1_{r_1}}\cdot y^{-\frac{M_2}{2}}\prod_{l=1}^{r_2-1} y^{p^2_l - q^2_l}y^{p^2_{r_2}}\\
=&x^{-\frac{M_1}{2}}\prod_{i=1}^{M_1} x^{i(m^1_i - n^1_i)}\cdot y^{-\frac{M_2}{2}}\prod_{l=1}^{M_2} y^{l(m^2_l - n^2_l)}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&x^{\frac{M_1}{2}}y^{\frac{M_2}{2}}\,{}^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|B_1(x)B_2(y)|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}\\
=&\,{}^{(2)}\langle m^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle m^1|\bar{\mathbb{B}}_1(x)\bar{\mathbb{B}}_2(y)|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}\\
=&\begin{cases}\prod_{i=1}^{M_1} x^{i(m^1_i - n^1_i)}\prod_{l=1}^{M_2} y^{l(m^2_l - n^2_l)}, & |m^1\rangle^{(1)} \triangleright |n^1\rangle^{(1)}\text{and } |m^2\rangle^{(2)} \triangleright |n^2\rangle^{(2)},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

根据式 (3.9)，可以推导出式 (3.29)。 □

上述推导表明， $\bar{\mathbb{B}}_1(x)$ 和 $\bar{\mathbb{B}}_2(x)$ 对 $|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}$ 的作用彼此独立， $\bar{\mathbb{C}}_1(x)$ 和 $\bar{\mathbb{C}}_2(x)$ 也同样如此。这意味着

$$\bar{\mathbb{B}}_1(x)\bar{\mathbb{B}}_2(y)|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)} = \bar{\mathbb{B}}_1(x)|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes\bar{\mathbb{B}}_2(y)|n^2\rangle^{(2)}, \tag{3.39}$$

$${}^{(2)}\langle n^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|\bar{\mathbb{C}}_1(x)\bar{\mathbb{C}}_2(x) = {}^{(2)}\langle n^2|\bar{\mathbb{C}}_2(x)\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|\bar{\mathbb{C}}_1(x), \tag{3.40}$$

and

$$\bar{\mathbb{B}}_1(x)|n^1\rangle^{(1)} = \sum_{|m^1\rangle^{(1)} \triangleright |n^1\rangle^{(1)}} \prod_{i=1}^{M_1} x^{i(m_i^1 - n_i^1)} |m^1\rangle^{(1)}, \tag{3.41}$$

$$\bar{\mathbb{B}}_2(y)|n^2\rangle^{(2)} = \sum_{|m^2\rangle^{(2)} \triangleright |n^2\rangle^{(2)}} \prod_{j=1}^{M_2} y^{j(m_j^2 - n_j^2)} |m^2\rangle^{(2)}, \tag{3.42}$$

$${}^{(1)}\langle n^1|\bar{\mathbb{C}}_1(x) = \sum_{{}^{(1)}\langle n^1| \triangleleft {}^{(1)}\langle m^1|} \prod_{i=1}^{M_1} x^{i(m_i^1 - n_i^1)} \, {}^{(1)}\langle m^1|, \tag{3.43}$$

$${}^{(2)}\langle n^2|\bar{\mathbb{C}}_2(x) = \sum_{{}^{(2)}\langle n^2| \triangleleft {}^{(2)}\langle m^2|} \prod_{j=1}^{M_2} y^{j(m_j^2 - n_j^2)} \, {}^{(2)}\langle m^2|. \tag{3.44}$$

**命题 3.5.** 令 $l_j = l(\nu_j)(j = 1,2)$，根据以下关系

$$\mathcal{M}|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} = |\nu^1, \nu^2\rangle, \quad \mathcal{M}|m^1\rangle^{(1)} \bigotimes |m^2\rangle^{(2)} = |\mu^1, \mu^2\rangle, \tag{3.45}$$

$${}^{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle n^1|\mathcal{M}^* = \langle \nu^2, \nu^1|, \quad {}^{(2)}\langle m^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle m^1|\mathcal{M}^* = \langle \mu^2, \mu^1|, \tag{3.46}$$

我们有

$$\mathcal{M}\bar{\mathbb{B}}_1(x)\bar{\mathbb{B}}_2(y)|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} = \sum_{\substack{\nu^1 \prec \mu^1 \subseteq [l_1+1, M_1] \\ \nu^2 \prec \mu^2 \subseteq [l_2+1, M_2]}} x^{|\mu^1| - |\nu^1|} y^{|\mu^2| - |\nu^2|} |\mu^1, \mu^2\rangle, \tag{3.47}$$

$${}^{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle n^1|\bar{\mathbb{C}}_2(y)\bar{\mathbb{C}}_1(x)\mathcal{M}^* = \sum_{\substack{\nu^1 \prec \mu^1 \subseteq [l_1+1, M_1] \\ \nu^2 \prec \mu^2 \subseteq [l_2+1, M_2]}} x^{|\mu^1| - |\nu^1|} y^{|\mu^2| - |\nu^2|} \langle \mu^2, \mu^1|, \tag{3.48}$$

它们对盒形分拆求和。这里 $[l_j + 1, M_j](j = 1, 2)$ 表示一个具有 $l_j + 1$ 行和 $M_j$ 列的矩形杨图。

证明。由于 $l_j = l(\nu_j)$ 和 $\nu^j \prec \mu^j \subseteq [l_j + 1, M_j]$，因此 $l_j + 1 = l(\mu_j)$ 和 $\mu^j \subseteq [l_j + 1, M_j]$。根据定义 3.2，我们有 $|\mu^j| = \sum_{i=1}^{M_j} m_i^j \cdot i$ 和 $|\nu^j| = \sum_{i=1}^{M_j} n_i^j \cdot i$。结合定义 3.2、引理 3.3 和引理 3.4，可得方程 (3.47) 和 (3.48)。□

设 $\{\mathbf{x}\} = \{x_1, \cdots, x_n\}$。引入斜舒尔函数

$$s_{\mu/\nu}(x) = \begin{cases} x^{|\mu| - |\nu|}, & \mu \succ \nu, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.49}$$

其中，舒尔函数通过设置 $\nu = \emptyset$ 得到，其形式如下

$$s_\mu\{\mathbf{x}\} = \frac{\det\left(x_i^{\mu_j - j + n}\right)_{1 \le i,j \le n}}{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)}, \tag{3.50}$$

其满足

$$s_\mu\{x_1,\dots,x_n\}=\sum_{\nu\subseteq[n-1,\infty]} s_{\mu/\nu}(x_n)\, s_\nu\{x_1,\dots,x_{n-1}\}. \tag{3.51}$$

结合命题 3.5 和式 (3.49)，可得以下性质。

**命题 3.6.** 以下等式成立

$$\mathcal{M}\bar{\mathbb{B}}_1(x)\bar{\mathbb{B}}_2(y)|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}=\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\subseteq[l_1+1,M_1]\\ \nu^2\prec\mu^2\subseteq[l_2+1,M_2]}} s_{\mu^1/\nu^1}(x)s_{\mu^2/\nu^2}(y)|\mu^1,\mu^2\rangle, \tag{3.52}$$

$${}^{(2)}\langle n^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|\bar{\mathbb{C}}_2(y)\bar{\mathbb{C}}_1(x)\mathcal{M}^*=\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\subseteq[l_1+1,M_1]\\ \nu^2\prec\mu^2\subseteq[l_2+1,M_2]}} s_{\mu^1/\nu^1}(x)s_{\mu^2/\nu^2}(y)\langle\mu^2,\mu^1|. \tag{3.53}$$

## 4. The scalar product and boxed UC plane partitions

本节中，我们构造盒装 UC 平面分拆以及双站点广义相位模型的标量积。借助一系列单值矩阵算子对基向量的作用，我们推导出盒装 UC 平面分拆的生成函数。同时，生成函数也可以用斜舒尔函数表示为舒尔函数的乘积。

**定义 4.1.** 对于 $i\in\mathbb{Z}$ 以及一对盒形分拆 $\alpha^i$ 和 $\beta^i$，将盒装 2–分拆$(\chi_i)=(\alpha^i,\beta^i)$记作。盒装 *UC* 平面分拆指放置在有限尺寸盒子中的 *UC* 平面分拆，其定义为 $\Pi'=(\dots,\chi_{-1},\chi_0,\chi_1,\dots)$，表示一对盒装平面分拆$\pi^1=(\dots,\alpha^{-1},\alpha^0,\alpha^1,\dots)$和 $\pi^2=(\dots,\beta^{-1},\beta^0,\beta^1,\dots)$。

**命题 4.2**。 以下等式成立

$$\mathcal{M}\overleftarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(y_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}=\sum_{\substack{[N_1,M_1]\ni\pi_0^1\succ\cdots\succ\pi_{N_1}^1=\emptyset\\ [N_2,M_2]\ni\pi_0^2\succ\cdots\succ\pi_{N_2}^2=\emptyset}}\prod_{i=1}^{N_1}x_i^{|\pi_{i-1}^1|-|\pi_i^1|}\prod_{j=1}^{N_2}y_j^{|\pi_{j-1}^2|-|\pi_j^2|}|\pi_0^1,\pi_0^2\rangle, \tag{4.1}$$

$${}^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\overrightarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{C}}_2(y_j)\overrightarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{C}}_1(x_i)\mathcal{M}^*=\sum_{\substack{\emptyset=\pi_{-N_1}^1\prec\cdots\prec\pi_0^1\in[N_1,M_1]\\ \emptyset=\pi_{-N_2}^2\prec\cdots\prec\pi_0^2\in[N_2,M_2]}}\prod_{i=1}^{N_1}x_i^{|\pi_{i-1}^1|-|\pi_i^1|}\prod_{j=1}^{N_2}y_j^{|\pi_{j-1}^2|-|\pi_j^2|}\langle\pi_0^2,\pi_0^1|, \tag{4.2}$$

它们分别对 $[N_j,M_j]\ni\pi_0^j\succ\cdots\succ\pi_{N_j}^j=\emptyset$和 $\emptyset=\pi_{-N_j}^j\prec\cdots\prec\pi_0^j\in[N_j,M_j]$求和。

证明。 由式(3.39)可得

$$\overleftarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(y_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}=\overleftarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)|0\rangle^{(1)}\bigotimes\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(y_j)|0\rangle^{(2)}. \tag{4.3}$$

分别将式(3.41)和式(3.42)与 $|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}=|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}$反复迭代 $N_1$ 次和 $N_2$ 次，我们得到

$$\begin{aligned}&\overleftarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)|0\rangle^{(1)}\bigotimes\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(y_j)|0\rangle^{(2)}\\=&\sum_{\substack{|m^a\rangle^{(1)}\triangleright|m^{a+1}\rangle^{(1)}\\a=1,\cdots,N_1}}\sum_{\substack{|n^b\rangle^{(2)}\triangleright|n^{b+1}\rangle^{(2)}\\b=1,\cdots,N_2}}\prod_{l=1}^{N_1}\prod_{i=1}^{M_1}x^{i(m_i^l-m_i^{1+1})}\prod_{k=1}^{N_2}\prod_{j=1}^{M_2}y^{j(n_j^k-n_j^{k+1})}|m^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^1\rangle^{(2)},\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中 $|m^{N_1+1}\rangle^{(1)}=|0\rangle^{(1)}$ 和 $|n^{N_2+1}\rangle^{(2)}=|0\rangle^{(2)}$。

根据假设

$$\mathcal{M}|m^a\rangle^{(1)}\bigotimes|n^b\rangle^{(2)}=|\pi^{a-1}\rangle^{(1)}\bigotimes|\pi^{b-1}\rangle^{(2)},\tag{4.5}$$

可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\overleftarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(y_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}\\=&\sum_{\substack{[N_1,M_1]\ni\pi_0^1\succ\cdots\succ\pi_{N_1}^1=\emptyset\\[N_2,M_2]\ni\pi_0^2\succ\cdots\succ\pi_{N_2}^2=\emptyset}}\prod_{i=1}^{N_1}x_i^{|\pi_{i-1}^1|-|\pi_i^1|}\prod_{j=1}^{N_2}y_j^{|\pi_{j-1}^2|-|\pi_j^2|}|\pi_0^1,\pi_0^2\rangle.\end{aligned}\tag{4.6}$$

采用类似的方法，可以证明式（4.2）。 □

设 $\{\mathbf{a^j}\}=\{a_1,\cdots,a_{N_j}\}$，其中 $\mathbf{a}$ 可以替换为 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{z}$，$\mathbf{v}$ 和 $j=1,2$。考虑双站点广义相位模型的标量积

$$\begin{aligned}&S(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{z^1}\},\{\mathbf{v^2}\})\\=&\left\langle{}^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\overrightarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{C}}_2(y_j)\overrightarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{C}}_1(x_i)\mathcal{M}^*,\mathcal{M}\overleftarrow{\prod_{l=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(z_i)\overleftarrow{\prod_{k=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(v_k)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}\right\rangle.\end{aligned}\tag{4.7}$$

由式（3.18）可得

$$\begin{aligned}&S(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{z^1}\},\{\mathbf{v^2}\})\\=&{}^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\overrightarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{C}}_2(y_j)\overrightarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{C}}_1(x_i)\overleftarrow{\prod_{l=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(z_i)\overleftarrow{\prod_{k=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(v_k)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

利用引理 4.2 可得

$$S(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{z^1}\},\{\mathbf{v^2}\})=\sum_{\substack{\pi^1\subseteq[N_1,N_1,M_1]\\\pi^2\subseteq[N_2,N_2,M_2]}}A_{\pi^1}(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{z^1}\})A_{\pi^2}(\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{v^2}\}),\tag{4.9}$$

其中注意 $\Pi'=(\ldots,\chi_{-1},\chi_0,\chi_1,\ldots)$、$(\chi_i)=(\pi_i^1,\pi_i^2)$、$\pi^t=(\ldots,\pi_{-1}^t,\pi_0^t,\pi_1^t,\ldots)(t=1,2)$ 和

$$A_{\pi^1}(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{z^1}\})=\prod_{i,l=1}^{N_1}x_i^{|\pi_{i-1}^1|-|\pi_i^1|}z_l^{|\pi_{l-1}^2|-|\pi_l^2|},\tag{4.10}$$

$$A_{\pi^2}(\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{v^2}\})=\prod_{j,k=1}^{N_2} y_j^{|\pi^1_{j-1}|-|\pi^1_j|}v_k^{|\pi^2_{k-1}|-|\pi^2_k|}. \tag{4.11}$$

由式 (4.9) 可知，标量积是盒装 UC 平面分拆的生成函数。

**命题 4.3.** 以下等式成立

$$\mathcal{M}\overleftarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(y_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}=\sum_{\substack{\mu^1\subseteq[N_1,M_1]\\ \mu^2\subseteq[N_2,M_2]}} s_{\mu^1}\{\mathbf{x^1}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{y^2}\}|\mu^1,\mu^2\rangle, \tag{4.12}$$

$${}^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\overrightarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{C}}_2(y_j)\overrightarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{C}}_1(x_i)\mathcal{M}^*=\sum_{\substack{\mu^1\subseteq[N_1,M_1]\\ \mu^2\subseteq[N_2,M_2]}} s_{\mu^1}\{\mathbf{x^1}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{y^2}\}\langle\mu^2,\mu^1|. \tag{4.13}$$

证明. 将式 (3.53) 中的 $|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}=|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}$ 取特殊情形可得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\bar{\mathbb{B}}_1(x)\bar{\mathbb{B}}_2(y)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}&=\sum_{\substack{\emptyset\prec\mu^1\subseteq[1,M_1]\\ \emptyset\prec\mu^2\subseteq[1,M_2]}} s_{\mu^1/\emptyset}(x)s_{\mu^2/\emptyset}(y)|\mu^1,\mu^2\rangle\\ &=\sum_{\substack{\emptyset\prec\mu^1\subseteq[1,M_1]\\ \emptyset\prec\mu^2\subseteq[1,M_2]}} s_{\mu^1}(x)s_{\mu^2}(y)|\mu^1,\mu^2\rangle.\end{aligned} \tag{4.14}$$

同时，对于所有 $N_1,N_2\geq 2$，假设

$$\mathcal{M}\prod_{i=1}^{N_1-1}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\prod_{j=1}^{N_2-1}\bar{\mathbb{B}}_2(y_i)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}=\sum_{\substack{\nu^1\subseteq[N_1-1,M_1]\\ \nu^2\subseteq[N_2-1,M_2]}} s_{\nu^1}\{\bar{\mathbf{x}}^1\}s_{\nu^2}\{\bar{\mathbf{y}}^2\}|\nu^1,\nu^2\rangle, \tag{4.15}$$

其中

$$\{\bar{\mathbf{x}}^1\}=\{x_1,\cdots,x_{N_1-1}\},\quad \{\bar{\mathbf{y}}^2\}=\{y_1,\cdots,y_{N_2-1}\}. \tag{4.16}$$

结合映射 $\mathcal{M}$ 的定义与式 (4.15) 可得

$$\prod_{i=1}^{N_1-1}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\prod_{j=1}^{N_2-1}\bar{\mathbb{B}}_2(y_i)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}=\sum_{\substack{|n^1\rangle^{(1)}|\Sigma_0^{n^1}=N_1-1\\ |n^2\rangle^{(2)}|\Sigma_0^{n^2}=N_2-1}} s_{\nu^1}\{\bar{\mathbf{x}}^1\}s_{\nu^2}\{\bar{\mathbf{y}}^2\}|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}, \tag{4.17}$$

其中求和遍历所有满足占据数 $\Sigma_0^{n^j}=\sum^{M_j} n_k^j=N_j-1\,(j=1,2)$，且对应于 $2-$分拆 $(\chi)=(\nu^1,\nu^2)$ 的基向量 $|n^1\rangle^{(1)}\bigotimes|n^2\rangle^{(2)}$。利用式 (2.56)，并将$k=0^{-}$ $^{-}$作用于上述方程中的 $\mathcal{M}\mathbb{B}_1(x_{N_1})\mathbb{B}_2(y_{N_2})$，得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\bar{\mathbb{B}}_1(x_{N_1})\bar{\mathbb{B}}_2(y_{N_2})\prod_{i=1}^{N_1-1}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\prod_{j=1}^{N_2-1}\bar{\mathbb{B}}_2(y_i)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}\\ =&\sum_{\substack{\nu^1\subseteq[N_1-1,M_1]\\ \nu^2\subseteq[N_2-1,M_2]}} s_{\nu^1}\{\bar{\mathbf{x}}^1\}s_{\nu^2}\{\bar{\mathbf{y}}^2\}\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\subseteq[N_1,M_1]\\ \nu^2\prec\mu^2\subseteq[N_2,M_2]}} s_{\mu^1/\nu^1}(x_{N_1})s_{\mu^2/\nu^2}(y_{N_2})|\mu^1,\mu^2\rangle.\end{aligned} \tag{4.18}$$

考虑交错关系 $\nu^j \prec \mu^j$ 和式 (3.51)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\overleftarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(x_i)\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(y_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}\\
=&\sum_{\substack{\mu^1\subseteq[N_1,M_1]\\ \mu^2\subseteq[N_2,M_2]}}\ \sum_{\substack{\nu^1\subseteq[N_1-1,\infty]\\ \nu^2\subseteq[N_2-1,\infty]}} s_{\mu^1/\nu^1}(x_{N_1})s_{\nu^1}\{\bar{\mathbf{x}}^1\}s_{\mu^2/\nu^2}(y_{N_2})s_{\nu^2}\{\bar{\mathbf{y}}^2\}|\mu^1,\mu^2\rangle\\
=&\sum_{\substack{\mu^1\subseteq[N_1,M_1]\\ \mu^2\subseteq[N_2,M_2]}} s_{\mu^1}\{\mathbf{x^1}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{y^2}\}|\mu^1,\mu^2\rangle,
\end{aligned}\tag{4.19}$$

这意味着它对任意 $N_1, N_2 \geq 1$ 都成立。

公式（4.13）的证明非常相似，因此略去。 □

根据引理 4.3，标量积可改写为

$$\begin{aligned}
&S(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{z^1}\},\{\mathbf{v^2}\})\\
=&{}^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\overrightarrow{\prod_{j=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{C}}_2(y_j)\overrightarrow{\prod_{i=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{C}}_1(x_i)\overleftarrow{\prod_{l=1}^{N_1}}\bar{\mathbb{B}}_1(z_i)\overleftarrow{\prod_{k=1}^{N_2}}\bar{\mathbb{B}}_2(v_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}\\
=&\sum_{\substack{\mu^1\subseteq[N_1,M_1]\\ \mu^2\subseteq[N_2,M_2]}} s_{\mu^1}\{\mathbf{x^1}\}s_{\mu^1}\{\mathbf{z^1}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{y^2}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{v^2}\},
\end{aligned}\tag{4.20}$$

这意味着

$$\sum_{\substack{\pi^1\subseteq[N_1,N_1,M_1]\\ \pi^2\subseteq[N_2,N_2,M_2]}} A_{\pi^1}(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{z^1}\})A_{\pi^2}(\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{v^2}\}) = \sum_{\substack{\mu^1\subseteq[N_1,M_1]\\ \mu^2\subseteq[N_2,M_2]}} s_{\mu^1}\{\mathbf{x^1}\}s_{\mu^1}\{\mathbf{z^1}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{y^2}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{v^2}\}.\tag{4.21}$$

盒装 UC 平面分拆的生成函数已表示为舒尔函数的乘积。

## 5. The generating function of boxed UC plane partitions with the double scaling limit

本节从带电费米子福克空间的角度研究交错 2–分拆。我们研究无限晶格极限下的双侧广义相位模型（$M_1$， $M_2 \to \infty$）。我们证明，盒装 UC 平面分拆的生成函数在双重标度极限下导出 UC 平面分拆的生成函数，这意味着晶格点数 $M_1$， $M_2 \to \infty$以及粒子数 $N_1$， $N_2 \to \infty$。

### 5.1. **生成交错 2–分拆**。定义顶点算子

$$\Gamma_+(z,v) = e^{H_+(z,v)} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n}H_n + \frac{v^n}{n}\tilde{H}_n\right)\right),\tag{5.1}$$

$$\Gamma_-(z,v) = e^{H_-(z,v)} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n}H_{-n} + \frac{v^n}{n}\tilde{H}_{-n}\right)\right).\tag{5.2}$$

由于

$$[H_+(z,v),H_-(x,y)]=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{z^m x^n}{mn}[H_m,H_{-n}]+\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{v^m y^n}{mn}[\tilde{H}_m,\tilde{H}_{-n}]$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(zx)^m}{m}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(vy)^n}{n}, \tag{5.3}$$

于是我们有

$$\Gamma_+(z,v)\Gamma_-(x,y)=e^{[H_+(z,v),H_-(x,y)]}\Gamma_-(x,y)\Gamma_+(z,v)$$
$$=\frac{1}{1-zx}\frac{1}{1-vy}\Gamma_-(x,y)\Gamma_+(z,v). \tag{5.4}$$

**命题 5.1.** 对于带电费米子的生成函数

$$\psi(k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_n k^{-n-1/2},\quad \psi^*(k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_n^* k^{-n-1/2}, \tag{5.5}$$

$$\phi(k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2}\phi_n k^{-n-1/2},\quad \phi^*(k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2}\phi_n^* k^{-n-1/2}, \tag{5.6}$$

以下等式成立

$$[H_+(z,v),\psi(k)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(zk)^n}{n}\psi(k),\quad [H_-(z,v),\psi^*(k)]=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{k}\right)^n\psi^*(k), \tag{5.7}$$

$$[H_+(z,v),\phi(k)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(vk)^n}{n}\phi(k),\quad [H_-(z,v),\phi^*(k)]=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{v}{k}\right)^n\phi^*(k). \tag{5.8}$$

证明. 结合式 (2.31) 和 (5.1) 可得

$$[H_+(z,v),\psi(k)]=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}+1/2}\frac{z^n}{n}\Big[H_n,\psi_m\Big]\cdot k^{-m-\frac{1}{2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}k^n\sum_{m'\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_{m'}k^{-m'-1/2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(zk)^n}{n}\psi(k). \tag{5.9}$$

其他公式也可用同样的方法证明。 □

**引理 5.2.** 以下等式成立

$$\Gamma_+(z,v)\psi(k)\Gamma_+^{-1}(z,v)=\frac{1}{1-zk}\psi(k), \tag{5.10}$$

$$\Gamma_-(z,v)\psi^*(k)\Gamma_-^{-1}(z,v)=\left(1-\frac{z}{k}\right)\psi^*(k), \tag{5.11}$$

$$\Gamma_+(z,v)\phi(k)\Gamma_+^{-1}(z,v)=\frac{1}{1-vk}\phi(k), \tag{5.12}$$

$$\Gamma_-(z,v)\phi^*(k)\Gamma_-^{-1}(z,v)=\left(1-\frac{v}{k}\right)\phi^*(k). \tag{5.13}$$

证明. 由公式（5.7）可得

$$\begin{aligned}\Gamma_+(z,v)\psi(k)\Gamma_+^{-1}(z,v) &= e^{H_+(z,v)}\psi(k)e^{-H_+(z,v)}\\ &= \psi(k)+[H_+(z,v),\psi(k)]+\frac{1}{2!}[H_+(z,v),[H_+(z,v),\psi(k)]]+\dots\\ &= \psi(k)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(zk)^n}{n}\psi(k)+\frac{1}{2!}\xi_{\pm}^2(\mathbf{x}-\tilde{\partial}_{\mathbf{y}},k)\psi(k)+\dots\\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(zk)^n}{n}\right)\psi(k). \end{aligned}\tag{5.14}$$

通过 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(zk)^n}{n}=-\ln(1-zk)$，我们得到

$$\Gamma_+(z,v)\psi(k)\Gamma_+^{-1}(z,v)=\frac{1}{1-zk}\psi(k).\tag{5.15}$$

采用类似的步骤，我们可以证明其他方程。 □

**引理 5.** **3.** 顶点算子 $\Gamma_+(z,v)$ 和 $\Gamma_-(z,v)$ 对态矢量的作用满足 $y$

$$\Gamma_+(z,v)|\mu^1,\mu^2\rangle=\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\\ \nu^2\prec\mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|}v^{|\mu^2|-|\nu^2|}|\nu^1,\nu^2\rangle,\tag{5.16}$$

$$\langle\mu^2,\mu^1|\Gamma_-(z,v)=\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\\ \nu^2\prec\mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|}v^{|\mu^2|-|\nu^2|}\langle\nu^2,\nu^1|.\tag{5.17}$$

证明。 利用式 (2.34)，我们得到

$$\Gamma_+(z,v)|\mu^1,\mu^2\rangle=\Gamma_+(z,v)\psi_{m_1^1}\dots\psi_{m_{-l_1}^1}\phi_{m_1^2}\dots\phi_{m_{-l_2}^2}|l_1,l_2\rangle.\tag{5.18}$$

由引理 5.2 和式 (5.5) 可得

$$\Gamma_+(z,v)\sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_i k^{-i-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2}(zk)^n\psi_j k^{-j-1/2}\Gamma_+(z,v),\tag{5.19}$$

$$\Gamma_+(z,v)\sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2}\phi_i k^{-i-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2}(vk)^n\phi_j k^{-j-1/2}\Gamma_+(z,v).\tag{5.20}$$

比较两边 $k$ 的阶数，我们得到

$$\Gamma_+(z,v)\psi_i=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\psi_{(i+n)}\Gamma_+(z,v),\tag{5.21}$$

$$\Gamma_+(z,v)\phi_i=\sum_{n=0}^{\infty}v^n\phi_{(i+n)}\Gamma_+(z,v).\tag{5.22}$$

同理,

$$\Gamma_-(z,v)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{(i-n)}^*z^n=\psi_i^*\Gamma_-(z,v),\tag{5.23}$$

$$\Gamma_-(z,v)\sum_{n=0}^{\infty}\phi^*_{(i-n)}v^n=\phi_i^*\Gamma_-(z,v). \tag{5.24}$$

结合 $\Gamma_+(z,v)|l_1,l_2\rangle=|l_1,l_2\rangle$, 式（5.18）可改写为

$$\begin{aligned}\Gamma_+(z,v)|\mu^1,\mu^2\rangle=&\left(\sum_{i_1=0}^{\infty}z^{i_1}\psi_{(i_1+m_1^1)}\right)\cdots\left(\sum_{i_{-l_1}=0}^{\infty}z^{i_{-l_1}}\psi_{(i_{-l_1}+m^1_{-l_1})}\right)\\&\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}v^{j_1}\phi_{(j_1+m_1^2)}\right)\cdots\left(\sum_{j_{-l_2}=0}^{\infty}v^{j_{-l_2}}\phi_{(j_{-l_2}+m^2_{-l_2})}\right)|l_1,l_2\rangle.\end{aligned} \tag{5.25}$$

由于

$$\left(\sum_{i_1=0}^{\infty}z^{i_1}\psi_{(i_1+m_1^1)}\right)=\left(\sum_{i_1=0}^{-m_1^1+m_2^1-1}z^{i_1}\psi_{(i_1+m_1^1)}\right)+z^{(-m_1^1+m_2^1)}\left(\sum_{l=0}^{\infty}z^{l}\psi_{(l+m_2^1)}\right), \tag{5.26}$$

$$\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}v^{j_1}\phi_{(j_1+m_1^2)}\right)=\left(\sum_{j_1=0}^{-m_1^2+m_2^2-1}v^{j_1}\phi_{(j_1+m_1^2)}\right)+v^{(-m_1^2+m_2^2)}\left(\sum_{l=0}^{\infty}v^{l}\phi_{(l+m_2^2)}\right), \tag{5.27}$$

并根据以下恒等式

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}z^{i}\psi_{(m+i)}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}z^{i}\psi_{(m+i)}\right)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}v^{i}\phi_{(m+i)}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}v^{i}\phi_{(m+i)}\right)=0, \tag{5.28}$$

可得

$$\begin{aligned}\Gamma_+(z,v)|\mu^1,\mu^2\rangle=&\left(\sum_{i_1=0}^{-m_1^1+m_2^1-1}z^{i_1}\psi_{(i_1+m_1^1)}\right)\cdots\left(\sum_{i_{-l_1}=0}^{-m^1_{-l_1}+m^1_{(-l_1+1)}-1}z^{i_{-l_1}}\psi_{(i_{-l_1}+m^1_{-l_1})}\right)\\&\left(\sum_{j_1=0}^{-m_1^2+m_2^2-1}v^{j_1}\phi_{(i_1+m_1^2)}\right)\cdots\left(\sum_{j_{-l_2}=0}^{-m^2_{-l_2}+m^2_{(-l_2+1)}-1}v^{j_{-l_2}}\phi_{(j_{-l_2}+m^2_{-l_2})}\right)|l_1,l_2\rangle.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Note

$$|\nu^1,\nu^2\rangle=\psi_{n_1^1}\dots\psi_{n^1_{-l_1}}\phi_{n_1^2}\dots\phi_{n^2_{-l_2}}|l_1,l_2\rangle. \tag{5.30}$$

考虑下标关系,

$$m_i^j\le n_j^i<m_{i+1}^j\implies\mu_i^j\ge\nu_i^j\ge\mu_{i+1}^j\quad\text{for all }1\le i\le -l_j,\ j=1,2, \tag{5.31}$$

then

$$\begin{aligned}\Gamma_+(z,v)|\mu^1,\mu^2\rangle=&\left(\sum_{m_1^1\le n_1^1<m_2^1}z^{(n_1^1-m_1^1)}\psi_{n_1^1}\right)\cdots\left(\sum_{m^1_{-l_1}\le n^1_{-l_1}<m^1_{(-l_1+1)}}z^{(n^1_{-l_1}-m^1_{-l_1})}\psi_{n^1_{-l_1}}\right)\\&\left(\sum_{m_1^2\le n_1^2<m_2^2}v^{(n_1^2-m_1^2)}\phi_{n_1^2}\right)\cdots\left(\sum_{m^2_{-l_2}\le n^2_{-l_2}<m^2_{(-l_2+1)}}v^{(n^1_{-l_2}-m^2_{-l_2})}\phi_{n^2_{-l_2}}\right)|l_1,l_2\rangle\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{\nu^1 \prec \mu^1 \\ \nu^2 \prec \mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|} v^{|\mu^2|-|\nu^2|} |\nu^1, \nu^2\rangle, \tag{5.32}$$

其中 $|\mu^j| - |\nu^j| = \sum_{i=1}^{-l_j} (n_j^i - m_i^j)$。

与上述推导类似，我们得到

$$\begin{aligned}\langle \mu^2, \mu^1 | \Gamma_-(z,v) = \langle l_2, l_1 | & \left( \sum_{m^2_{(-l_2+1)} < n^2_{-l_2} \le m^2_{-l_2}} z^{(m^2_{-l_2} - n^2_{-l_2})} \phi^*_{n^2_{-l_2}} \right) \cdots \left( \sum_{m^2_2 < n^1_2 \le m^2_1} z^{(m^2_1 - n^2_1)} \phi^*_{n^1_2} \right) \\ & \left( \sum_{m^1_{(-l_1+1)} < n^1_{-l_1} \le m^1_{-l_1}} z^{(m^1_{-l_1} - n^1_{-l_1})} \psi^*_{n^1_{-l_1}} \right) \cdots \left( \sum_{m^1_2 < n^1_1 \le m^1_1} z^{(m^1_1 - n^1_1)} \psi^*_{n^1_1} \right) \\ = & \sum_{\substack{\nu^1 \prec \mu^1 \\ \nu^2 \prec \mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|} v^{|\mu^2|-|\nu^2|} \langle \nu^2, \nu^1 |. \end{aligned} \tag{5.33}$$

□

**注 5.4.** 已证明，顶点算子对态矢量的作用会产生交错2–分拆。对于 $\mu^2 = \emptyset$ 的情形，可以由上述推导得出

$$\Gamma_+(z,v)|\mu^1\rangle = \sum_{\nu^1 \prec \mu^1} z^{|\mu^1|-|\nu^1|} |\nu^1\rangle, \tag{5.34}$$

$$\langle \mu^1 | \Gamma_-(z,v) = \sum_{\nu^1 \prec \mu^1} z^{|\mu^1|-|\nu^1|} \langle \nu^1 |. \tag{5.35}$$

$\mu^1 = \emptyset$ 的情形类似。

5.2. **无限晶格上的双侧广义相位模型**。 我们通过取晶格点数为 $M_1, M_2 \to \infty$ 来考虑双侧广义相位模型。

**引理 5.5.** 基向量 $|n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} \in \mathcal{V}$和 ${}^{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle n^1| \in \mathcal{V}^*$ 分别通过映射 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^*$对应于态矢量 $|\mu^1, \mu^2\rangle \in \bar{\mathcal{F}}_{0,0}$ 和 $\langle \mu^2, \mu^1| \in \bar{\mathcal{F}}^*_{0,0}$。以下等式成立

$$\mathcal{M}\left[ \lim_{M_1, M_2 \to \infty} \bar{\mathbb{B}}_1(z) \bar{\mathbb{B}}_2(v) |n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} \right] = \Gamma_-(z,v) |\nu^1, \nu^2\rangle, \tag{5.36}$$

$$\left[ \lim_{M_1, M_2 \to \infty} {}^{(2)}\langle n^2| \bigotimes {}^{(1)}\langle n^1| \bar{\mathbb{C}}_2(v) \bar{\mathbb{C}}_1(z) \right] \mathcal{M}^* = \langle \nu^2, \nu^1 | \Gamma_+(z,v). \tag{5.37}$$

证明。 通过映射 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^*$的作用，公式 (3.47) 和 (3.48) 中的极限 $M_1, M_2 \to \infty$ 对应于极限 $l_1$, $l_2 \to \infty$。因此我们有

$$\mathcal{M}\left[ \lim_{M_1, M_2 \to \infty} \mathbb{B}_1(z) \mathbb{B}_2(v) |n^1\rangle^{(1)} \bigotimes |n^2\rangle^{(2)} \right] = \sum_{\substack{\nu^1 \prec \mu^1 \\ \nu^2 \prec \mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|} v^{|\mu^2|-|\nu^2|} |\mu^1, \mu^2\rangle, \tag{5.38}$$

$$\left[\lim_{M_1,M_2\to\infty}{}^{(2)}\langle n^2|\bigotimes{}^{(1)}\langle n^1|\mathbb{C}_2(v)\mathbb{C}_1(z)\right]\mathcal{M}^*=\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\\ \nu^2\prec\mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|}v^{|\mu^2|-|\nu^2|}\langle\mu^2,\mu^1|. \tag{5.39}$$

由引理 5.3 和公式 (2.36)，我们有

$$\langle\mu^2,\mu^1|\Gamma_-(z,v)|\nu^1,\nu^2\rangle=z^{|\mu^1|-|\nu^1|}v^{|\mu^2|-|\nu^2|}, \tag{5.40}$$

$$\langle\nu^2,\nu^1|\Gamma_+(z,v)|\mu^1,\mu^2\rangle=z^{|\mu^1|-|\nu^1|}v^{|\mu^2|-|\nu^2|}. \tag{5.41}$$

Thus

$$\Gamma_-(z,v)|\nu^1,\nu^2\rangle=\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\\ \nu^2\prec\mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|}v^{|\mu^2|-|\nu^2|}|\mu^1,\mu^2\rangle, \tag{5.42}$$

$$\langle\nu^2,\nu^1|\Gamma_+(z,v)=\sum_{\substack{\nu^1\prec\mu^1\\ \nu^2\prec\mu^2}} z^{|\mu^1|-|\nu^1|}v^{|\mu^2|-|\nu^2|}\langle\mu^2,\mu^1|. \tag{5.43}$$

□

对注记 5.4 的类似讨论可得

$$\Gamma_-(z,v)|\nu^1\rangle=\sum_{\nu^1\prec\mu^1} z^{|\mu^1|-|\nu^1|}|\mu^1\rangle, \tag{5.44}$$

$$\langle\nu^1|\Gamma_+(z,v)=\sum_{\nu^1\prec\mu^1} z^{|\mu^1|-|\nu^1|}\langle\mu^1|, \tag{5.45}$$

而 $\nu^1=\emptyset$ 的情形类似。

考虑与 $M_1,M_2\to\infty$ 的标量积，我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{M_1,M_2\to\infty} S(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{z^1}\},\{\mathbf{v^2}\})\\
=&\lim_{M_1,M_2\to\infty}{}^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\prod_{j=1}^{N_2}\rightarrow\bar{\mathbb{C}}_2(y_j)\prod_{i=1}^{N_1}\rightarrow\bar{\mathbb{C}}_1(x_i)\prod_{l=1}^{N_1}\leftarrow\bar{\mathbb{B}}_1(z_i)\prod_{k=1}^{N_2}\leftarrow\bar{\mathbb{B}}_2(v_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}\\
=&\sum_{\substack{\pi^1\subseteq[N_1,N_1,\infty]\\ \pi^2\subseteq[N_2,N_2,\infty]}} A_{\pi^1}(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{z^1}\})A_{\pi^2}(\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{v^2}\}).
\end{aligned} \tag{5.46}$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，利用式 (5.4) 和引理 5.5，可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{M_1,M_2\to\infty}{}^{(2)}\langle 0|\bigotimes{}^{(1)}\langle 0|\prod_{j=1}^{N_2}\rightarrow\bar{\mathbb{C}}_2(y_j)\prod_{i=1}^{N_1}\rightarrow\bar{\mathbb{C}}_1(x_i)\prod_{l=1}^{N_1}\leftarrow\bar{\mathbb{B}}_1(z_i)\prod_{k=1}^{N_2}\leftarrow\bar{\mathbb{B}}_2(v_j)|0\rangle^{(1)}\bigotimes|0\rangle^{(2)}\\
=&\langle 0|\Gamma_+(x_N,y_N)\cdots\Gamma_+(x_1,y_1)\Gamma_-(z_1,v_1)\cdots\Gamma_-(z_N,v_N)|0\rangle\\
=&\prod_{i,l=1}^{N_1}\frac{1}{1-z_lx_j}\prod_{j,k=1}^{N_2}\frac{1}{1-y_jv_k},
\end{aligned} \tag{5.47}$$

这意味着

$$\sum_{\substack{\pi^1\subseteq[N_1,N_1,\infty]\\ \pi^2\subseteq[N_2,N_2,\infty]}} A_{\pi^1}(\{\mathbf{x^1}\},\{\mathbf{z^1}\})A_{\pi^2}(\{\mathbf{y^2}\},\{\mathbf{v^2}\})=\prod_{i,l=1}^{N_1}\frac{1}{1-z_lx_j}\prod_{j,k=1}^{N_2}\frac{1}{1-y_jv_k}. \tag{5.48}$$

此外，由式(4.20)可知

$$\sum_{\substack{\mu^1\subseteq[N_1,\infty]\\ \mu^2\subseteq[N_2,\infty]}} s_{\mu^1}\{\mathbf{x^1}\}s_{\mu^1}\{\mathbf{z^1}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{y^2}\}s_{\mu^2}\{\mathbf{v^2}\}=\prod_{i,l=1}^{N_1}\frac{1}{1-x_iz_l}\prod_{j,k=1}^{N_2}\frac{1}{1-y_jv_k}. \tag{5.49}$$

我们将证明，在双重标度极限下，式(5.48)可以改写为 UC 平面分拆的生成函数。设

$$x_n=z_n=p^{n-\frac{1}{2}},\ y_m=v_m=q^{m-\frac{1}{2}},\quad \text{for all } 1\le n\le N_1,\ 1\le m\le N_2. \tag{5.50}$$

将式(5.50)代入式(5.47)，得到

$$\begin{aligned}&\langle 0|\Gamma_+(p^{N-\frac{1}{2}},q^{N-\frac{1}{2}})\cdots\Gamma_+(p^{\frac{1}{2}},q^{\frac{1}{2}})\Gamma_-(p^{\frac{1}{2}},q^{\frac{1}{2}})\cdots\Gamma_-(p^{N-\frac{1}{2}},q^{N-\frac{1}{2}})|0\rangle\\ &=\prod_{i,l=1}^{N_1}\frac{1}{1-p^{l+i-1}}\prod_{j,k=1}^{N_2}\frac{1}{1-q^{j+k-1}}.\end{aligned} \tag{5.51}$$

由式(5.42)和(5.43)，我们假设

$$\Gamma_-(p^{i-\frac{1}{2}},q^{i-\frac{1}{2}})|\nu^1,\nu^2\rangle=\sum_{\substack{\nu^1\prec\pi^1_{i-1}\\ \nu^2\prec\pi^2_{i-1}}} p^{(i-\frac{1}{2})(|\pi^1_{i-1}|-|\nu^1|)}q^{(i-\frac{1}{2})(|\pi^2_{i-1}|-|\nu^2|)}|\pi^1_{i-1},\pi^2_{i-1}\rangle, \tag{5.52}$$

$$\langle\nu^2,\nu^1|\Gamma_+(p^{i-\frac{1}{2}},q^{i-\frac{1}{2}})=\sum_{\substack{\nu^1\prec\pi^1_{-i+1}\\ \nu^2\prec\pi^2_{-i+1}}} p^{(i-\frac{1}{2})(|\pi^1_{-i+1}|-|\nu^1|)}q^{(i-\frac{1}{2})(|\pi^2_{-i+1}|-|\nu^2|)}\langle\pi^2_{-i+1},\pi^1_{-i+1}|. \tag{5.53}$$

利用公式(5.42) –(5.45)，可得

$$\begin{aligned}&\Gamma_-(p^{\frac{1}{2}},q^{\frac{1}{2}})\cdots\Gamma_-(p^{N-\frac{1}{2}},q^{N-\frac{1}{2}})|0\rangle\\ &=\sum_{\substack{[N_1,\infty]\ni\pi^1_0\succ\cdots\succ\pi^1_{N_1}=\emptyset\\ [N_2,\infty]\ni\pi^2_0\succ\cdots\succ\pi^2_{N_2}=\emptyset}}\prod_{j=1}^{N_1}p^{(j-\frac{1}{2})(|\pi^1_{j-1}|-|\pi^1_j|)}\prod_{k=1}^{N_2}q^{(l-\frac{1}{2})(|\pi^1_{k-1}|-|\pi^2_k|)}|\pi^1_0,\pi^2_0\rangle,\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}&\langle 0|\Gamma_+(p^{N-\frac{1}{2}},q^{N-\frac{1}{2}})\cdots\Gamma_+(p^{\frac{1}{2}},q^{\frac{1}{2}})\\ &=\sum_{\substack{\emptyset=\pi^1_{-N_1}\prec\cdots\prec\pi^1_0\in[N_1,\infty]\\ \emptyset=\pi^2_{-N_2}\prec\cdots\prec\pi^2_0\in[N_2,\infty]}}\prod_{i=1}^{N_1}p^{(i-\frac{1}{2})(|\pi^1_{-i+1}|-|\pi^1_i|)}\prod_{l=1}^{N_2}q^{(l-\frac{1}{2})(|\pi^2_{-l+1}|-|\pi^2_l|)}\langle\pi^2_0,\pi^1_0|,\end{aligned} \tag{5.55}$$

then

$$\langle 0|\Gamma_+(p^{N_1-\frac{1}{2}},q^{N_2-\frac{1}{2}})\cdots\Gamma_+(p^{\frac{1}{2}},q^{\frac{1}{2}})\Gamma_-(p^{\frac{1}{2}},q^{\frac{1}{2}})\cdots\Gamma_-(p^{N_1-\frac{1}{2}},q^{N_2-\frac{1}{2}})|0\rangle$$

$$= \sum_{\substack{\pi^1 \subseteq [N_1, N_1, \infty] \\ \pi^2 \subseteq [N_2, N_2, \infty]}} p^{|\pi^1|} q^{|\pi^2|}. \tag{5.56}$$

容易证明

$$\sum_{\substack{\pi^1 \subseteq [N_1, N_1, \infty] \\ \pi^2 \subseteq [N_2, N_2, \infty]}} p^{|\pi^1|} q^{|\pi^2|} = \prod_{i,l=1}^{N_1} \frac{1}{1 - p^{l+i-1}} \prod_{j,k=1}^{N_2} \frac{1}{1 - q^{j+k-1}}. \tag{5.57}$$

考虑粒子数 $N_1,\ N_2 \to \infty$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\pi^1 \text{ and } \pi^2 \text{ are} \\ \text{plane partitions}}} p^{|\pi^1|} q^{|\pi^2|} &= \lim_{N_1, N_2 \to \infty} \left( \prod_{i=1}^{N_1} \frac{1}{1 - p^i} \cdots \prod_{i=N_1}^{2N_1} \frac{1}{1 - p^i} \right) \left( \prod_{j=1}^{N_2} \frac{1}{1 - q^j} \cdots \prod_{j=N_2}^{2N_2} \frac{1}{1 - q^j} \right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - p^n} \right)^n \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - q^m} \right)^m. \end{aligned} \tag{5.58}$$

因此，通过双重标度极限可得到 UC 平面分拆的生成函数。

## 6. Conclusions and discussions

本文关注双侧广义相位模型与盒装 UC 平面分拆之间的关系。我们定义了盒装 UC 平面分拆，并研究双侧广义相位代数的表示。同时，借助映射 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^*$，生成了交错的盒装2–分拆。通过双站点广义相位模型的标量积，我们讨论了盒装 UC 平面分拆的生成函数及其双重标度极限情形（$M_j,\ N_j \to \infty,\ j = 1,\ 2$）。值得指出的是，五顶点模型标量积的极限形式与完全对称多项式之间的关系已在 [33] 中阐述。双站点广义相位模型中标量积的极限形式及其行列式表示值得进一步探索。

## 7. Acknowledgements

本文谨献给首都师范大学的 Ke Wu 教授，以庆祝他八十华诞。本研究获得国家自然科学基金委员会（项目编号：12061051）及内蒙古自治区高校青年科技人才计划（项目编号：NJYT23096）的资助。作者谨此衷心感谢中国首都师范大学 Ke Wu 教授和 Weizhong Zhao 教授的支持。

## References

[1] I. G. Macdonald, 《对称函数与霍尔多项式》, 克拉伦登出版社，牛津，1995年。[2] R. P. Stanley, 《枚举组合学》第二卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[3] W. Fulton 和 J. Harris, 《表示论：入门课程》, 施普林格，纽约，1991年。

[4] Y. You，BKP 层次的多项式解与对称群的射影表示，载于《无穷维李代数与群》，《数学物理进展丛书》第 7 卷（1989年），449-464。[5] J. J. C. Nimmo，霍尔-利特尔伍德对称函数与 BKP 方程，《物理学杂志 A》23（1990年），751-760。[6] V. G. Kac，《无穷维李代数》，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[7] E. Date、M. Kashiwara、M. Jimbo 和 T. Miwa，孤子方程的变换群：非线性可积系统的经典理论与量子理论（京都，1981年），世界科学出版公司，新加坡，1983年。[8] N. H. Jing，顶点算子与霍尔-利特尔伍德对称函数，《数学进展》87（1991年），226-248。[9] N. H. Jing，霍尔-利特尔伍德多项式的玻色子-费米子对应，《数学物理杂志》36（1995年），7073-7080。[10] K. Koike，借助普适特征分解经典群表示的张量积，《数学进展》74（1989年），57-86。[11] T. Tsuda，普适特征与 KP 层级的扩展，《数学物理通讯》248（2004年），501-526。[12] Y. Ogawa，广义 Q 函数与 B 型 UC 层次，《东京数学杂志》32（2009年），350-380。[13] L. D. Faddeev，场论中的量子完全可积模型，《苏联科学评论 C：数学物理》1（1980年），107-155。[14] N. M. Bogoliubov、R. K. Bullough 和 J. Timonen，$1+1$ 维强耦合关联玻色子系统的临界行为，《物理评论快报》72（1994年），3933-3936。[15] N. M. Bogoliubov 和 R. K. Bullough，一种 $q$ 变形的完全可积玻色气体模型，《物理学杂志 A》25（1992年），4057。[16] N. M. Bogoliubov、A. G. Izergin 和 N. A. Kitanine，相位模型的关联函数，《物理学快报 A》231（1997年），347-352。[17] N. M. Bogoliubov、A. G. Izergin 和 N. A. Kitanine，强关联玻色子系统的关联函数，《核物理 B》516（1998年），501-528。[18] N. Bogoliubov 和 J. Timonen，强耦合玻色子系统的关联函数与平面分拆，《英国皇家学会哲学汇刊 A》369（2011年），1319-1333。[19] N. V. Tsilevich，$q$玻色子模型的量子逆散射方法与对称函数，《泛函分析及其应用》40（2006年），207-217。[20] N. Wang 和 C. Z. Li，普适特征、相位模型与 $C^3$上的拓扑弦，《欧洲物理学杂志 C》79（2019年），953。[21] X. Zhang 和 Z. W. Yan，广义相位模型的费米子表示，《核物理 B》1002（2024），116532。[22] R. Rajesh 和 D. Dhar，三维中的一种可精确求解的各向异性定向渗流模型，《物理评论快报》81（1998年），1646-1649。[23] M. Aganagic、A. Klemm、M. Marino 和 C. Vafa，拓扑顶点，《数学物理通讯》254（2005年），425-478。[24] A. Okounkov、N. Reshetikhin 和 C. Vafa，量子卡拉比-丘与经典晶体，arXiv:hep-th/0309208。[25] G. E. Andrews，《分拆理论》，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[26] R. P. Stanley，《枚举组合学》，剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[27] O. Foda、M. Wheeler 和 M. Zuparic，自由费米子与平面分拆，《代数杂志》321（2009年），3249-3273。[28] O. Foda、M. Wheeler，BKP 平面分拆，《高能物理学杂志》01（2007年），075。[29] N. M. Bogoliubov，作为可精确求解玻色子模型的盒装平面分拆，《物理学杂志 A》38（2005年），9415-9430。[30] K. Shigechi 和 M. Uchiyama，盒装斜平面分拆与可积相位模型，《物理学杂志 A》38（2005年），10287-10306。[31] S. Y. Zhang 和 Z. W. Yan，UC 与 BUC 平面分拆，《欧洲物理学杂志 C》371（2024年），84。

[32]M. Wheeler, 《经典与量子可积模型中的自由费米子》, 博士论文, 墨尔本大学, arXiv:1110.6703v1。[33] N.M. Bogoliubov 和 C.L. Malyshev, 《五顶点模型的标量积与完全对称多项式》, 《数学科学》284 (2024) 654-664。