arXiv:2601.03947v1 [math.GR] 7 Jan 2026

自由积自同构群的非周期性性质

Yassine Guerch

2026年1月8日

摘要

设 $G = G_1 * \ldots * G_k * F_N$ 是有限表示群的自由积，其中 F_N 是秩为 $N \in \mathbb{N}$ 的自由群。设 $\mathrm{Out}(G,\ \mathcal{G})$ 是 $\mathrm{Out}(G)$ 的子群，它保持共轭类集合 $\mathcal{G} = \{[G_1],\ \ldots,\ [G_k]\}$ 不变。在群 G_i（其中 $i \in \{1,\ \ldots, k\}$）满足自然条件时，我们证明群 $\mathrm{Out}(G,\ \mathcal{G})$ 有一个有限指数子群 $\mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$，具有显著的非周期性性质。我们证明群 $\mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$ 无挠；并且，若 $\phi \in \mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$，则 ϕ 中每个周期共轭类的元素都被 ϕ 固定，而 G 中每个周期自由因子共轭类都被 ϕ 固定。

作为应用，我们证明，对于每个环面相对双曲群 G，群 $\mathrm{Out}(G)$ 具有一个有限指数子群 $\mathrm{IA}(G,\ 3)$ 该子群具有上述相同的非周期性性质。特别地，我们给出了 Handel–Mosher 所证明定理的另一种证明：$\mathrm{Out}(F_N)$ 在 $H_1(F_N,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$上的作用的核满足自然的非周期性性质。 [1]

1 引言

设 G 是一个有限生成群，并设 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 是G的一个外自同构。在研究 ϕ的动力学性质时，通常需要取 ϕ 的某个幂，使得任意周期轨道都逐点固定。然而，这个幂通常取决于所选的外自同构，并且在复合下并不保持稳定。这就是为什么构造 $\mathrm{Out}(G)$ 的一个有限指数子群，使得其中每个外自同构都具有逐点固定的周期轨道，在实践中特别有用。

我们用三个标准例子来说明这一理念。第一个著名的例子是群 G，其外自同构群包含这样的无周期有限指数子群：秩为 $n \geqslant 1$ 的自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}^n$。事实上，Minkowski 的一个标准结果表明，群

$$\mathrm{IA}(\mathbb{Z}^n, 3) = \ker\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\right)$$

[1]**关键词：** 群的外自同构群、群的自由积、群在树上的作用、群的 JSJ 分解。**AMS 分类号：** 20E36、20F65、20F28、20E08

是无挠的。由此容易推出，对于每个 $\phi \in \mathrm{IA}(\mathbb{Z}^n,\ 3)$， $\mathbb{Z}^n$ 中的每个ϕ周期元素都被 ϕ 固定（例如参见命题 6.1）。

当 G 是闭连通双曲曲面 Σ的基本群时，该曲面的映射类群 $\mathrm{MCG}(\Sigma)$ =外自同构群 $(\pi_1(\Sigma))$ 也包含一个具有显著非周期性性质的有限指数子群。事实上，Serre [Ser] 证明了群

$$\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3) = \ker\left(\mathrm{MCG}(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}))\right)$$

也是无挠的。此外，Ivanov [Iva，定理 1.2] 后来证明，若 $\phi \in \mathrm{MCG}(\Sigma)$，则 Σ 中任意 ϕ-周期简单闭曲线的同伦类都被 ϕ 固定，而 Σ 中任意 ϕ-周期子曲面的同伦类都被 ϕ固定。随后，Ivanov 利用群 $\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$ 证明了 $\mathrm{MCG}(\Sigma)$的 Tits 二择一：$\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$的每个子群要么包含一个非阿贝尔自由子群，要么是自由阿贝尔群。他的证明依赖于 $\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$ 在 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 及其 Thurston 紧化$\mathcal{T}(\Sigma)$上的作用；在此处，$\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$ 上述非周期性性质转化为 $\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$ 在 $\mathcal{T}(\Sigma)$上的作用的非周期性性质。后来，Kida [Kid] 研究了群 $\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$，并证明 $\mathrm{MCG}(\Sigma)$ 在测度等价意义下是刚性的。这同样利用了这样一个事实：$\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$的非周期性性质赋予 $\mathrm{IA}(\pi_1(\Sigma), 3)$ 在 Σ的曲线复形上的作用以非周期性性质。

设 F_N 是秩为 $N \geqslant 1$的自由群。Handel–Mosher [HM1] 证明，外自同构群 $\mathrm{Out}(F_N)$也包含一个具有显著非周期性性质的有限指数子群。事实上，设

$$\mathrm{IA}(F_N, 3) = \ker\left(\mathrm{Out}(F_N) \to \mathrm{Aut}(H_1(F_N, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}))\right).$$

群 $\mathrm{IA}(F_N, 3)$ 是无挠的（例如参见 [BFH3, Corollary 5.7.6]）。Handel–Mosher 证明，对于每个 $\phi \in \mathrm{IA}(F_N, 3)$，群 F_N 中元素的每个 ϕ周期共轭类都被 ϕ 固定（[HM1, Theorem II.4.1]），而 F_N 的自由因子的每个 ϕ周期共轭类都被 ϕ 保留（[HM1, Theorem II.3.1]）。后来，他们证明 $\mathrm{IA}(F_N, 3)$ 的每个虚阿贝尔子群都是阿贝尔的 [HM2],，而作者证明 $\mathrm{IA}(F_N, 3)$ 满足唯一开根性质 [Gue]。与曲面情形一样，这些非周期性性质有助于理解群 $\mathrm{Out}(F_N)$的结构性质，例如 Tits 二择一 [BFH3, BFH2, BFH4]，子群分解性质 [HM1] 或测度等价刚性 [GH3]。这是基于这样一个事实：$\mathrm{IA}(F_N, 3)$ 的非周期性性质也转化为 $\mathrm{IA}(F_N, 3)$ 在某些自然的 $\mathrm{Out}(F_N)$复形上的作用的非周期性性质，例如 Culler–Vogtmann 外空间 [CV] 或自由因子复形 [BF]。

本文旨在为更广泛的群外自同构群构造具有良好无周期性性质的有限指数子群。回顾一下，环面相对双曲群 是指相对于有限生成自由阿贝尔群而言双曲的无挠有限生成群。这尤其包括所有无挠 Gromov 双曲群，也包括所有 Sela 极限群（见 [Ali, Dah1]）。我们特别证明以下定理。

定理 1.1 (见推论 6.7)。 设 G 是一个环面相对双曲群。存在一个有限指数子群 $\mathrm{IA}(G, 3)$，属于外自同构群(G)，并具有以下性质。

(1) 群 $\mathrm{IA}(G,3)$ 是无挠的。*(2)* 若 $\phi \in \mathrm{IA}(G,3)$，则 G 中每个 ϕ-周期共轭类都被 ϕ 固定。*(3)* 若 $\phi \in \mathrm{IA}(G,3)$，则 G 的自由因子中每个 ϕ-周期共轭类都被 ϕ 固定。*(4)* 若 $\Phi \in$ 自同构群(G) 满足 $[\Phi] \in \mathrm{IA}(G,3)$，则 G 中每个 Φ-周期元素都被 Φ 固定。

IA$(G,\ 3)$ 的构造是显式的；当 G 是自由群、自由阿贝尔群或曲面的基本群时，它与上述群一致。我们尤其给出了自由群情形的另一种证明，该证明不使用 Feighn–Handel [FH] 引入的 CT 映射技术。相反，我们采用群在典范树上的作用，以及第一代（相对）自由积列车轨道，参见 [CT、FM、Lym2]，以及 Bestvina–Handel [BH] 在自由群情形下的开创性工作。事实上，本文中的大多数结果都是在自由积的一般背景下证明的。

一个自由积 是一个二元组 $(G,\ \mathcal{G})$ 其中 G 是有限生成群，而 $\mathcal{G} =\{[G_1],\ \ldots,\ [G_k]\}$ 是 G中有限生成子群的共轭类的有限集，满足

$$G = G_1 * \ldots * G_k * F_N,$$

其中 F_N 是秩为 $N \in \mathbb{N}$的自由群。根据 Stallings 关于群的端的定理 [Sta]，每个有限生成、无限端、无挠群都具有非平凡的自由积结构。令 $\xi(G,\ \mathcal{G}) = k + N$为 $(G,\ \mathcal{G})$的*Grushko* 秩 。

我们研究保持集合$\mathcal{G}$的 G 的外自同构群 Out$(G,\ \mathcal{G})$ 。该群是 Out(F_N) 的自然推广，过去几十年来已得到深入研究 [GL3, Hor2, FM, GH1, GH2, DL, Lym1]。如果对每个 $[G_i] \in \mathcal{G}$，群 G_i 都是单端的，那么 Out(G) = Out$(G,\ \mathcal{G})$。

本文旨在为 Out$(G,\ \mathcal{G})$找到一个无周期有限指数子群，也就是说，找到一个满足定理 1.1 中四条断言的有限指数子群。此类无周期有限指数子群的存在存在一些自然障碍。例如，如果存在 $[G_i] \in \mathcal{G}$ ，使得 Out(G_i) 没有无周期有限指数子群，那么我们就无法为 Out$(G,\ \mathcal{G})$找到这样的无周期有限指数子群。我们证明，这基本上是唯一的限制。事实上，我们将构造 Out$(G,\ \mathcal{G})$的无周期有限指数子群所需的关于群 G_i、Out(G_i) 和 Aut(G_i)的所有假设汇集起来，称之为既定假设（见第 3.1 节）。基本上，我们假设 G_i 是有限表示的， G_i 无挠，并且 Out(G_i) 和 Aut(G_i) 都包含无周期有限指数子群。实际上，我们对 Out(G_i) 作出了比定理 1.1 的第 (2) 项更强的假设，因为我们还假设，将元素的共轭类替换为周期子群的共轭类后，同样的结论也成立。我们的主定理如下。

定理 1.2 (参见命题 3.11、定理 4.1、5.1、推论 4.10)。 设 $(G,\mathcal{G})$ 是满足既定假设的自由积。那么 外自同构群$(G,\mathcal{G})$ 包含一个无周期有限指数子群 IA$(G,\mathcal{G},3)$。

同样，无周期有限指数子群 IA$(G,\ \mathcal{G},\ 3)$ 的构造是显式的。它由以下子群构成：外自同构群 Out(G_i)（其中 $[G_i]\in\mathcal{G}$）的无周期有限指数子群；外自同构群 Out$(G,\ \mathcal{G})$ 中逐元素固定集合 $\mathcal{G}$ 的有限指数子群；以及外自同构群 Out$(G,\ \mathcal{G})$ 中在 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上作用平凡的有限指数子群。

必须指出的是，构造满足定理 1.1 第 (3) 项的 Out$(G,\ \mathcal{G})$ 的有限指数子群，依赖于构造满足定理 1.1 第 (2) 项的 Out$(G,\ \mathcal{G})$ 的有限指数子群。事实上，设 $G = G_1 * G_2 * F_3$，令 $\Phi_i \in$Aut(G_i) 为无限阶元素，并令 $\Phi_3 \in$ Aut(F_3) 为有限阶非平凡自同构。取 F_3 的一个本原元素 $x \in F_3$，使得 x 的 Φ_3-轨道大小等于 Φ_3 的阶。令 $\Phi \in$ Aut(G) 在 G_i 上的作用为 Φ_i，在 F_3 上的作用为 Φ_3。那么 Φ 是无限阶的，而 $G_1 * \langle x\rangle$ 是 Φ 的周期自由因子，其周期取决于 Φ_3 的阶。

现在我们简述定理 1.2 的证明。设 IA$(G,\ \mathcal{G},\ 3)$，令 $\phi \in$IA$(G,\ \mathcal{G},\ 3)$，并令 $\Phi \in \phi$。考虑群 $G \rtimes_\Phi \mathbb{Z}$，即由自同构 Φ 所诱导的、以 G 为底群、$\mathbb{Z}$ 为作用群的半直积。该群的同构类仅取决于外类 ϕ，因此我们将 $G \rtimes_\Phi \mathbb{Z}$ 记为 G_ϕ。如前所述，证明 ϕ 的非周期性性质中的每一项，都依赖于构造一个 ϕ-不变树 T 上的 G 作用：G 在 T 上的作用可扩展为 G_ϕ 的作用。商群 $G\backslash T$ 自然具有群图结构，而 Φ 诱导出群图 $G\backslash T$ 的一个自同构。

粗略地说，群图自同构的周期行为有两个来源。首先，群图 $G\backslash T$ 的自同构会诱导出 $G\backslash T$的底层图 $G\backslash T$ 的自同构。由于 Φ 在 $H_1(G,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$上平凡作用，这一周期性来源便被排除了。事实上，这意味着 Φ 也在 $H_1(G\backslash T,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上平凡作用，而一个初等观察（见引理 3.5）表明，Φ 诱导出的图 $G\backslash T$的自同构是平凡的。其次，如果 $G\backslash T$ 的自同构逐点固定图 $G\backslash T$，它会诱导出 $G\backslash T$ 的顶点群的自同构，而这些自同构可能具有周期行为。要处理这一周期性来源更为微妙，并且在很大程度上取决于树 T。

构造 ϕ-不变树 T 的方式取决于要证明定理 1.1 的哪一项。我们说明元素的 ϕ-周期共轭类和自由因子的 ϕ-周期共轭类这一情形。设 $g \in G$ 的共轭类 $[g]$ 是 ϕ-周期的，且 $\mathcal{H} = \{[\langle\Phi^n(g)\rangle]\}_{n\in\mathbb{N}}$。由于 $[g]$ 是 ϕ-周期的，它是 G 的循环子群共轭类的一个有限集。由于 $(G,\ \mathcal{G})$ 是一个自由积，群G 相对于 $\mathcal{G}$ 是双曲的。此外，通过对 (G 的 Grushko 秩进行归纳，$\mathcal{G}$)，我们可以假设 G 相对于 $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$ 是单端的，也就是说，不存在 G 的真自由积结构 $(G、\ \mathcal{F})$，使得对于每个 $[A]\in\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$，都存在$[B]\in\mathcal{F}$ 满足 $A\subseteq B$。在这种情况下，Guirardel–Levitt [GL2] 构造了一个规范的（JSJ）ϕ-不变树 T，其上有一个 G-作用，使得所有边稳定子要么是循环的，要么共轭于某个 G_i 的子群。此外，每个满足 $n\in\mathbb{N}$ 的子群 $\langle\Phi^n(g)\rangle$ 在 T 中都是椭圆的，并且每个顶点稳定子要么是某个 G_i 的共轭，要么是循环群、曲面群，或所谓的刚性稳定子，也就是说，ϕ 在顶点群的外自同构群中的像是有限的（见定理 2.13）。因此，顶点群足够

简单，从而可以证明 ϕ 在每个顶点群上的作用都是非周期的。这将在第 4 节中完成。

现在我们转而研究 ϕ-周期自由因子的共轭类。事实上，只需证明：若 $(G,\mathcal{F})$ 是 G 上的一个自由积结构，且 $\mathcal{F}$ 是 ϕ-周期的，那么 $\mathcal{F}$ 就被 ϕ 固定。设 $(G,\mathcal{F})$ 是这样一个 ϕ-周期自由积结构。同样，通过归纳论证可知，我们可以假设 $(G,\mathcal{F})$ 的 Grushko 秩在所有 ϕ-周期自由积结构 $(G,\mathcal{F})$ 中达到极大值。这类极大的自由积结构分为两种，取决于是否存在一个 ϕ-周期树 T，其上有一个 G 作用，使得每条边的稳定子都是平凡的，并且 $\mathcal{F}$ 是 T 的非平凡顶点稳定子共轭类的集合。

如果不存在这样的 ϕ-周期树，那么可以运用相对列车轨道理论中的标准论证（见 [Lym1]），证明我们可以为 $\mathcal{F}$ 关联一个吸引层片 $\Lambda_{\mathcal{F}}$。设 $\partial_\infty(G,\mathcal{G})$ 为与相对双曲结构 $(G,\mathcal{G})$ 相关联的 Bowditch 边界。$(G,\mathcal{G})$ 的层叠是双重边界的一个闭合、G-不变且翻转不变的子集

$$\partial^2(G,\mathcal{G}) = \partial_\infty(G,\mathcal{G}) \times \partial_\infty(G,\mathcal{G}) - \mathrm{Diag}.$$

ϕ 的一个吸引层片是（G的一个特定的 ϕ周期层状结构，$\mathcal{G}$）它编码了关于 ϕ 在 G上的动力学信息。通常可以证明，为了说明 ϕ 固定 $\mathcal{F}$，只需证明 ϕ 固定 $\Lambda_{\mathcal{F}}$（见引理 5.14）。ϕ 在其（有限）个吸引层片集合上的作用，由 ϕ的一个相对列车轨道编码；这是一种将 ϕ 表示为群图的同伦等价的方法。于是，只需知道 ϕ 逐元素固定集合 $\mathcal{G}$ 和 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 即可说明ϕ 也逐元素固定其吸引层片集合以及 $\mathcal{F}$。

最后，假设 $\mathcal{F}$ 是某个具有平凡边稳定子的 ϕ周期 G树 T 的非平凡顶点稳定子的共轭类集合。令 $\ell > 0$ 满足 T是 ϕ^ℓ不变的。我们所使用的关键观察——我们认为这一观察本身也具有独立意义——是：任何 ϕ^ℓ不变的此类树 T 都会诱导出一个具有无限循环边群的群图 $G_{\phi^\ell}\backslash T$，使得 $\pi_1(G_{\phi^\ell}\backslash T) \simeq G_{\phi^\ell}$。将这样的群图分解称为 G_{ϕ^ℓ}-循环分裂。反过来，任何这样的 G_{ϕ^ℓ}-循环分裂都会诱导出一个 ϕ^ℓ不变的 G树，其边群为平凡群。因此，我们归结为理解具有无限循环边群的群图分解 $G_{\phi^\ell}\backslash T$ 的可能形式。Dahmani [Dah2] 曾利用这一观察，解决了 ϕ 关于其诱导悬挂 G_ϕ 为 Gromov 双曲的 F_N 的外自同构的共轭问题。Mutanguha [Mut]也曾提出这一思想，用以证明在自由循环群扩张中，多项式增长是一个几何不变量。

这种观点的优点在于，我们可以运用 Rips–Sela [RS] 提出的群的 JSJ 分解理论，理解给定的有限呈示单端群的所有循环分裂。这一理论结合 Guirardel–Levitt [GL4], 提出的圆柱树 构造，产生一棵 Aut(G_{ϕ^ℓ})-不变G_{ϕ^ℓ}-树 U，它编码了所有 G_{ϕ^ℓ}-循环分裂。尽管 U 不一定具有循环边稳定子，但它是 Aut(G_{ϕ^ℓ})-不变的这一事实已足以满足我们的考量。事实上，群 G_{ϕ^ℓ} 是 G_ϕ的正规子群，因此 G_ϕ 作用于

U，因此 U 可以视为一棵 ϕ-不变的 G-树。由于 U 编码了所有具有平凡边稳定子的 ϕ-周期 G-树T，因此，只需理解 ϕ 在 U上的作用及其顶点稳定子，就能证明 ϕ 必定保持 T 和 $\mathcal{F}$。我们强调，这是唯一需要假设 G 有限表示、以便应用 Rips–Sela 理论的地方。

我们以一个尚未解决的问题结束本引言。定理 1.2 的主要应用涉及环面相对双曲群，因为我们成功证明了它们满足既定假设。不过，既定假设相当灵活，我们希望更广泛的群类也满足这些假设。我们特别提出以下问题。

问题 1.3. *(1)* 设 Γ 是一个有限简单图。相应的直角阿廷群 A_Γ 是否满足既定假设？

(2) 外自同构群(A_Γ) 在 $H_1(A_\Gamma, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上的作用的核 $\mathrm{IA}(A_\Gamma, 3)$ 是否为无周期有限指数子群？

有证据表明问题 1.3 的答案是肯定的。首先，根据 Day–Wade 的一项结果（[DW，定理 B]），群 IA$(A_\Gamma, 3)$ 是无挠的（事实上是 F 型）。其次，Fioravanti [Fio] 最近证明了如何为外自同构群 Out(A_Γ) 的子群构造典范的（JSJ）树，其思路与本文使用的树十分接近。我们希望这些树有助于证明 A_Γ 满足既定假设。

现在我们说明本文的结构。第 2 节介绍相关背景，包括自由因子系统、群的分裂、群的 JSJ 分解或相对列车轨道。第 3 节阐述既定假设，并证明群 IA$(G,\ \mathcal{G},\ 3)$的一些直接性质，例如其无挠性（见命题 3.11）。第 4 节证明定理 4.1，由此可知，若 $\phi \in$I A$(G,\ \mathcal{G},\ 3)$，则 G中的每个元素的 ϕ-周期共轭类都被 ϕ固定。第 5 节致力于证明定理 5.1，由此可知， G 的自由因子的每个 ϕ-周期共轭类都被 ϕ固定。这也就完成了定理 1.2 的证明。最后，在第 6 节，我们说明如何由定理 1.2 推导出 G 为环面相对双曲群的情形（定理 1.1）。我们还证明，任何环面相对双曲群都满足既定假设。

致谢

衷心感谢 Naomi Andrew、Camille Horbez、Sam Hughes、Gilbert Levitt 和 Ric Wade 进行富有帮助的交流。我还要感谢 LABEX MILYON (ANR-10-LABX- 0070) 在我从事博士后研究期间提供的资助；本项目的部分内容正是在此期间完成的。

献辞

谨以此文献给我的祖父 Jean-Jacques Lesage。

2 背景

2.1 自由积，自由因子系

设 $N \in \mathbb{N}$、 G_1、.....、 G_k 为有限生成群，并设

$$G = G_1 * \ldots * G_k * F_N$$

为相应的自由积，其中 F_N 是秩为 N的自由群。令 $\mathcal{G}$ ={$[G_1], \ldots, [G_k]$}，其中 [.] 表示 G-共轭类。 $(G, \mathcal{G})$的*Grushko* 秩 为 $\xi(G, \mathcal{G}) = k + N$。

定义 2.1 （自由因子系统，自由因子）。 A $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统 是由 G 的子群共轭类构成的有限集$\mathcal{F} = \{[H_1], \ldots, [H_n]\}$，满足：

- for every $i \in \{1, \ldots, k\}$, there exists $j \in \{1, \ldots, n\}$ such that $G_i \subseteq H_j$;
- 存在一个（必然是自由的）子群 B，它是 G 的子群，满足

$$G = H_1 * \ldots * H_n * B.$$

A $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F}$ 是真 的，当且仅当 $\mathcal{F} \neq \{[G]\}$。

A $(G, \mathcal{G})$-自由因子是 G 的一个子群，其共轭类包含于某个$(G, \mathcal{G})$-自由因子系统中。

如果 $\mathcal{F}$是一个 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统，那么这一对 $(G, \mathcal{F})$ 也是一个自由积，因此 $\xi(G, \mathcal{F})$ 是定义良好的。真 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统的集合 $\mathrm{FF}(G, \mathcal{G})$ 带有偏序集结构，其中 $\mathcal{F}_1 \sqsubseteq \mathcal{F}_2$ 当且仅当对每个 $[A] \in \mathcal{F}_1$，都存在$[B] \in \mathcal{F}_2$ 使得 $A \subseteq B$。请注意，在这种情况下， $\xi(G, \mathcal{F}_2) \leqslant \xi(G, \mathcal{F}_1)$，因此

$$\begin{array}{rccc} \xi\colon & \mathrm{FF}(G, \mathcal{G}) & \to & \mathbb{N} \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \xi(G, \mathcal{F}) \end{array}$$

是一个逆序偏序映射。

若 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F}$满足 $\xi(G, \mathcal{F}) \leqslant 2$，则称其为稀有的。这恰好发生在以下情形：

- $\mathcal{F} = \{[G]\}$;
- $\mathcal{F} = \{[H_1], [H_2]\}$ 和 $G = H_1 * H_2$;
- $\mathcal{F} = \{[H]\}$ 和 $G = H * \mathbb{Z}$。

设 $\mathcal{F}$ 是一个 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统。我们将保持 $\mathcal{F}$ 不变的 $\mathrm{Aut}(G, \mathcal{F})$ 子群记为 $\mathrm{Aut}(G)$。注意，$\mathrm{Aut}(G, \mathcal{F})$ 中的元素可以置换 $\mathcal{F}$ 的元素。 G 的内自同构群 $\mathrm{Inn}(G)$ 包含于 $\mathrm{Aut}(G, \mathcal{F})$ 中。保持 $\mathcal{F}$ 不变的 G 外自同构群 $\mathrm{Out}(G, \mathcal{F})$ 是商群 $\mathrm{Aut}(G, \mathcal{F})/\mathrm{Inn}(G)$。

更一般地，设 $\mathcal{H}$ 是 G 的子群共轭类的有限集。我们将保持集合 $\mathcal{H}$ 不变的 $\mathrm{Out}(G,\ \mathcal{H})$ 子群记为 $\mathrm{Out}(G)$。令 $\mathrm{Out}(G,\ \mathcal{H}^{(t)})$ 为 $\mathrm{Out}(G,\ \mathcal{H})$ 的子群，它由所有满足以下条件的 $\phi \in \mathrm{Out}(G,\ \mathcal{H})$ 组成：对于每个 $[H] \in \mathcal{H}$，都存在 $\Phi \in \phi$，使得 $\Phi(H) = H$ 且 $\Phi_{|H} = \mathrm{Id}_H$。

设 H 是 G 的子群。如果 H 包含在某个 G_i 的共轭子群中，则群 H 是 $(G,\ \mathcal{G})$-外围的；否则称为 $(G,\ \mathcal{G})$-非外围的。

进一步假设 H 是有限生成的。若 X 是 H 的子集，我们用 $[X]_H$ 表示 X 的 H-共轭类。任意 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F}$ 都会通过以下方式诱导出 H 的一个自由因子系统 $\mathcal{F}_{|H}$：对每个满足 $[A] \in \mathcal{F}$ 的 $A \subseteq G$，取其 H-共轭类$[H \cap A]_H$。我们注意到，可能存在 $A,\ B \subseteq G$，使得 $[A] = [B] \in \mathcal{F}$，但 $[H \cap A]_H$ 和 $[H \cap B]_H$ 在 $\mathcal{F}_{|H}$ 中诱导出不同的元素。自由因子系统$\mathcal{F}_{|H}$ 将 H 转化为自由积 $(H,\ \mathcal{F}_{|H})$。

2.2 群的分解

设 Γ 是一个有限生成群（不一定是自由积）。设 $\mathcal{A}$ 是一个非空的子群族，在共轭和取子群运算下封闭。一个 $(\Gamma;\mathcal{A})$- 分解 是 Γ-等变的等距类，其中 Γ 通过等距变换作用在单纯树 T 上，并满足：

- 边稳定子属于 $\mathcal{A}$；
- Γ 不保持 T 的任何真子树（我们称该作用为极小）；
- 不存在 $g \in \Gamma$ 在翻转 T 的端点的同时保持其一条边的情况。

我们用 VT 表示 T 的顶点集，用 ET 表示 T的（无向）边集。如果 $v \in VT$（分别地，$e \in ET$），我们用 Γ_v（分别地，Γ_e）表示 Γ中 v（分别地，e）的稳定子。若 $(\Gamma;\ \mathcal{A})$-分解 T 满足退化 条件，则 T 缩为一个点。设 $v \in VT$ 满足 Γ_v 有限生成。若 Γ 配备了自由积结构 $(\Gamma,\ \mathcal{G})$，且 $\mathcal{F}$ 是一个$(\Gamma,\ \mathcal{G})$-自由因子系统，则我们用 $\mathcal{F}_v$ 表示 Γ_v的自由因子系统 $\mathcal{F}_{|\Gamma_v}$。

我们还需要分解的相对版本。设 $H_1, \ldots, H_n \subseteq \Gamma$ 为有限生成子群，并设 $\mathcal{H} = \{[H_1], \ldots, [H_n]\}$。$(\Gamma, \mathcal{H};\ \mathcal{A})$-分解 是一个 $(\Gamma;\ \mathcal{A})$-分解 T，满足对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，群 H_i 都在 T中固定一个点。

我们主要研究以下几类分解。

定义 2.2（自由、循环分裂）。设 Γ 是一个有限生成群，设 H_1、.....、H_n 是 Γ 的有限生成子群，并设 $\mathcal{H} = \{[H_1]$、.....、$[H_n]\}$。

- 一个 $(\Gamma$、$\mathcal{H})$分解 是一个 $(\Gamma$、$\mathcal{H};\ \mathcal{A})$分解，其中 $\mathcal{A}$ 是Γ 的所有子群组成的族。
- 一种 $(\Gamma,\ \mathcal{H})$-自由分裂是一个 $(\Gamma,\ \mathcal{H};\ \mathcal{A})$-分解，其中 $\mathcal{A}$ 是仅由平凡群组成的族。

• 一种 $(\Gamma,\ \mathcal{H})$-循环分裂是一个 $(\Gamma,\ \mathcal{H};\ \mathcal{A})$-分解，其中 $\mathcal{A}$ 是 Γ的所有循环的（可能为平凡的）子群组成的族。

一个 $(\Gamma,\mathcal{H})$-自由分解尤其是一个 $(\Gamma,\mathcal{H})$-循环分解。当 $\mathcal{H}=\varnothing$ 时，我们通常将 $(\Gamma,\mathcal{H})$-分解简称为 Γ-分解。

群 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 通过对作用进行前复合，在 Γ-分解的集合上作用。由于 $\mathrm{Inn}(\Gamma)$ 在该集合上平凡作用（回想一下，分解是在 Γ-等变等距意义下定义的），$\mathrm{Aut}(\Gamma)$的作用诱导出 $\mathrm{Out}(\Gamma)$ 在 Γ-分解集合上的作用。

设 S 是一个 Γ-分解。现在我们描述 $\mathrm{Out}(\Gamma)$中 S 的稳定子 $\mathrm{Stab}(S)$ 。这一描述归功于 Levitt [Lev]。

注意，由于 Γ 是有限生成的，且 Γ 在 S 上的作用是极小的，商群 $\Gamma\backslash S$ 具有有限群图的结构。群 $\mathrm{Stab}(S)$ 通过底层图$\Gamma\backslash S$ 的图自同构作用于 $\Gamma\backslash S$。这给出一个同态

$$\mathrm{Stab}(S)\to \mathrm{Aut}_{gr}(\overline{\Gamma\backslash S}),$$

其中 $\mathrm{Aut}_{gr}(\Gamma\backslash\overline{S})$ 是 $\Gamma\backslash S$的图自同构群。由于 $\Gamma\backslash S$ 是有限图，上述映射的核 $\overline{\mathcal{K}(S)}$ 是 $\mathrm{Stab}(S)$的有限指数子群。

设 $\phi\in\mathcal{K}(S)$ ，并设 $v\in VS$。 ϕ 的任意代表元都会诱导 S上的唯一 Γ-等变等距映射。若 $\Phi_1,\ \Phi_2$ 是 ϕ 的两个固定顶点 v的代表元，那么它们相差一个内自同构 ad_g ，其中 $g\in\Gamma_v$。这表明，对于任意外自同构 $\phi\in\mathcal{K}(S)$，都可以自然地关联一个外自同构 $\phi_v\in\mathrm{Out}(\Gamma_v)$。类似地，对于每条边 $e\in ES$ 以及每个 $\phi\in\mathcal{K}(S)$，都可以自然地关联一个外自同构 $\phi_e\in\mathrm{Out}(\Gamma_e)$。因此我们有一个自然限制同态

$$\mathcal{K}(S)\to\prod_{v\in V\overline{\Gamma\backslash S}}\mathrm{Out}(\Gamma_v),$$

其核记为 $\mathcal{T}(S)$。

下面的命题描述了 $\mathcal{T}(S)$ 的结构，其中 S 是一个 Γ-自由分解。

命题 2.3 ([Lev，命题 3。1])。 设 S 是一个 Γ-自由分裂。群 $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ 同构于一个直积

$$\prod_{v\in V\overline{\Gamma\backslash S}}\Gamma_v^{n_v}/Z(\Gamma_v),$$

其中， n_v 是顶点 v 的度， $\Gamma\backslash S$ 的 $Z(\overline{\Gamma_v})$ 对角地嵌入于 $\Gamma_v^{n_v}$ 中。

当 S 是一个 Γ-自由分裂时，我们还可以对群 $\mathcal{K}(S$ 进行另一种描述).

命题 2.4 ([Lev，命题 4。2])。 设 S 是一个 Γ-自由分裂。群 $\mathcal{K}(S)$ 分解为一个直积

$$\mathcal{K}(S)=\prod_{v\in V\overline{\Gamma\backslash S}}M_v$$

其中，对每个 $v\in V\Gamma\backslash\overline{S,}$ 都存在 $n_v\geqslant 1$ ，使得群 M_v 适合于一个短正合列

$$1\to\Gamma_v^{n_v-1}\to M_v\to\mathrm{Aut}(\Gamma_v)\to 1.$$

2.3 有限表示群的 JSJ 分解与柱树 s

设 Γ 是一个有限表示群。设 $H_1, \dots, H_n \subseteq \Gamma$ 是有限生成子群，并设 $\mathcal{H} = \{[H_1], \dots, [H_n]\}$。本节中，我们定义相对于 $\mathcal{H}$的 Γ *JSJ* 分解，这一概念。群的 JSJ 分解是 Γ-分解，由 Sela [Sel] 为双曲群引入，之后得到了极大的推广 [RS, Bow1, DS, FP]。这里我们介绍 Guirardel–Levitt [GL1]提出的观点。

我们将给出两种构造 JSJ 分解的方法。第一种方法具有一般性，不要求 Γ 满足任何其他假设。第二种方法要求 Γ 相对于一个由有限生成子群组成的有限集是双曲的。第二种构造的优势在于，JSJ 分解在每个保持抛物结构的 Γ 自同构下都不变。此外，如下文所述（见定理 2.13），我们对 Aut(Γ) 在 JSJ 分解所谓的刚性顶点 上的作用有更深入的了解。

2.3.1 关于群的 JSJ 分解术语

设 $\mathcal{A}$ 是 Γ 的一个子群族，它在取子群和共轭下封闭。

定义 2.5（普遍椭圆分裂）。设 S 是一个 $(\Gamma, \mathcal{H}; \mathcal{A})$-分裂。若对于每个 $e \in ES$，群 Γ_e 在每个 $(\Gamma, \mathcal{H}; \mathcal{A})$-分裂中都是椭圆的，则称 S 为普遍椭圆的 。

定义 2.6（刚性顶点、柔性顶点）。设 S 是一个 $(\Gamma, \mathcal{H}; \mathcal{A})$-分解。设 $v \in VS$。若 Γ_v 在每一个 $(\Gamma, \mathcal{H}; \mathcal{A})$-分解中都是椭圆的，则称 v 为刚性顶点。否则，称 v 为柔性顶点。

设 Σ 是一个连通、紧致的双曲曲面（不一定可定向）。 Σ 的边界子群是 $\pi_1(\Sigma)$ 中与 $B = \pi_1(C)$ 共轭的子群，其中 $B = \pi_1(C)$ 是 Σ 的某个边界分支的基本群。

定义 2.7（QH 顶点、映射类群）。设 S 是一个 $(\Gamma, \mathcal{H}; \mathcal{A})$-分解。设$v \in VS$。若存在一个连通、紧致的双曲曲面（不一定可定向） Σ_v，满足下列条件，则称 v 为*QH* 顶点。

- 群 Γ_v 与 $\pi_1(\Sigma_v)$ 同构。
- 对于每个与 v相邻的 $e \in ES$，群 Γ_e 都包含在 Σ_v的一个边界子群中。
- 若 $[H] \in \mathcal{H}$ 满足 $H \cap \Gamma_v \neq \{1\}$，则 $H \cap \Gamma_v$ 包含在 Σ_v的一个边界子群中。

的映射类群，记作 MCG(Γ_v)，是 Out(Γ_v)的一个子群，它保持 Σ_v的边界子群的共轭类集合不变。

注意，如果 v 是一个分解 S 的 QH 顶点，并且 S 不退化为一个点，那么 Γ_v 是无限端的，因为 $\partial\Sigma_v \neq \varnothing$。

2.3.2 JSJ 分裂与圆柱树

回忆一下，如果不存在具有有限边稳定子的非退化 $(\Gamma,\ \mathcal{H})$-分解，那么 Γ 就是相对于..... 单端 $\mathcal{H}$ 的。

定理 2.8 ([GL1，定理 2.20、6。2])。 设 Γ 是一个无挠有限表示群，且 $\mathcal{H}$ 是 Γ的有限生成子群的共轭类的有限集。假设 Γ 相对于 $\mathcal{H}$单端。则存在一个 $(\Gamma、\ \mathcal{H})$-循环分裂 $T^{\mathcal{H}}_{JSJ}$，具有以下性质。

(1) 树 $T^{\mathcal{H}}_{JSJ}$ 是普遍椭圆的。*(2)* $T^{\mathcal{H}}_{JSJ}$ 的边稳定子是无限循环的。

(3) $T^{\mathcal{H}}_{JSJ}$ 的顶点稳定子在每个普遍椭圆分裂中都是椭圆的。

(4) 若 $v \in VT^{\mathcal{H}}_{JSJ}$，则以下条件之一成立。

(a) 群 Γ_v 是无限循环的。*(b)* 顶点 v 是拟同调的。特别是，若 $T^{\mathcal{H}}_{JSJ}$ 不止是一个点，则其稳定子是无限端的。*(c)* 顶点 v 是刚性的。

由定理 2.8 给出的分解称为 JSJ $(\Gamma,\ \mathcal{H})$-分解。一般而言，JSJ $(\Gamma,\ \mathcal{H})$-分解并非唯一。然而，若 T和 T'是两个不同的 JSJ $(\Gamma,\ \mathcal{H})$-分解，则它们具有相同的圆柱树，其定义见 Guirardel–Levitt [GL4]。令T 为一个 Γ-循环分解。令 $\mathcal{E}$ 为 T 的边上的等价关系，由以下条件生成： Γ_e 和 $\Gamma_{e'}$ 当且仅当具有公共有限指数子群时， $e \sim e'$ 。等价关系 $\mathcal{E}$ 是 GL4 意义下的可容许关系 [，见 GL4，定义 3.1]。 T 的圆柱T 是 T 的一个子森林，由给定等价类中的所有边组成。根据 [GL4，引理 4.1], ，圆柱是 T的一棵子树。

定义 2.9（圆柱树）。 令 T 为一个 Γ-循环分解。 T 的圆柱树 T_c 是如下定义的二部树 $VT_c = V_0 \sqcup V_1$：

(1) 对于 T 中每个至多属于一个圆柱的顶点， V_0 中都有一个顶点；(2) 对于 T 的每个圆柱， V_1 中都有一个顶点；(3) 当且仅当 x （视为 T 的一个顶点）包含于 C （视为 T 的一棵子树）时， (x, C) 中的 $x \in V_0$ 与 $C \in V_1$ 之间存在一条边。

一个 Γ-循环分解的圆柱树自然带有一个 Γ-作用，从而成为一个 Γ-分解。不过请注意， 一般而言， Γ-循环分解的圆柱树不一定是 Γ-循环分解。事实上，圆柱树的边稳定子不一定是循环的。

使用圆柱树而非 JSJ Γ-分解的优势在于，它具有如下意义上的典范性。

命题 2.10 ([GL4，推论 4。10])。 设 Γ 是一个有限表示无挠群， $\mathcal{H}$ 是 Γ 的有限生成子群的共轭类的有限集。假设 Γ 相对于 $\mathcal{H}$ 是单端的。

若 T_1 和 T_2 是两个 *JSJ* $(\Gamma, \mathcal{H})$-分裂，则它们的圆柱树是 Γ-等变同构的。特别地，若 T 是一个 *JSJ* $(\Gamma, \mathcal{H})$-分裂，则其圆柱树 T_c 是自同构群$(\Gamma, \mathcal{H})$-不变的。

设 T_1, T_2 是两个 Γ-分裂。若 T_2 可由 T_1 压缩某些边轨道得到，我们称 T_1 压缩到 T_2 。在这种情况下，我们称 T_1 是 T_2的细分。若两棵树 T_1 和 T_2 有公共细化，则称它们相容。下面的引理表明，JSJ Γ-分裂的圆柱树与每一个Γ-循环分裂相容。

引理 2.11。 设 Γ 是一个有限表示无挠群， $\mathcal{H}$ 是 Γ的有限生成子群的共轭类组成的有限集。假设 Γ 相对于 $\mathcal{H}$ 单端，并设 T 是一个 *JSJ* $(\Gamma, \mathcal{H})$-分裂。

T_c 的圆柱树 T 与每个 $(\Gamma, \mathcal{H})$-循环分解相容。此外，若 T 的所有顶点稳定子都是刚性的，则可通过在 T_c 中对应于 T圆柱子树的顶点处等变地扩张树，得到一个公共细化。

证明。 第一个断言由 [GL4，推论 8.4]得出。尽管该陈述只涵盖 $\mathcal{H} = \varnothing$的情形，但其证明在相对情形下完全相同。

若 T 的所有顶点稳定子都是刚性的，那么用 Guirardel–Levitt 的术语来说， T支配 每个 $(\Gamma, \mathcal{H})$-循环分解。因此，最后一个断言可由构造相容树的过程推出，参见 [GL4，命题 8.1]的证明。 □

2.3.3 相对双曲构造

回顾相对双曲群的定义，例如见 [Bow2]。设Γ 是一个有限表示无挠群。假设 Γ 相对于一组有限生成子群的共轭类 $\mathcal{P} = \{[P_1], \dots, [P_k]\}$ 是双曲的。设$H_1, \dots, H_n \subseteq \Gamma$ 是有限生成子群，并设 $\mathcal{H} = \{[H_1], \dots, [H_n]\}$。

定义 2.12 （初等子群、分解）。 **(1)** Γ的子群若为循环群，或共轭于群 P_i 中的某个群，则称为初等子群，其中 $i \in \{1, \dots, k\}$。

(2) $(\Gamma, \mathcal{P} \cup \mathcal{H})$-初等分解 是一个 $(\Gamma, \mathcal{P} \cup \mathcal{H};\ \mathcal{A})$-分解，其中 $\mathcal{A}$ 是初等子群族。

研究相对双曲群的一个优势是，可以构造出典范初等分裂，如下述定理所述。回忆一下，若 Γ-分解 S 是 K-弧稳定的 ，则称其为某个 $K > 0$ 下的该性质，若 S 中长度至少为 $K + 1$ 的任意弧的 Γ-稳定子都是有限群。

定理 2.13 ([GL2,GL1])。 设 Γ 是一个相对于 $\mathcal{P}$ 的无挠有限生成双曲群，且 $\mathcal{H}$ 是 Γ 的有限生成子群的一个有限共轭类集合。假设 Γ 相对于 $\mathcal{P} \cup \mathcal{H}$ 是单端的。则存在一个 $(\Gamma, \mathcal{P} \cup \mathcal{H})$-初等分解 $T_{\mathcal{P} \cup \mathcal{H}}$ ，具有以下性质。

(1) *[GL1，定理 9.18]* 边稳定子是无限初等的。此外，每条边都有一个端点的稳定子是初等稳定子群，另一个端点的稳定子是非初等稳定子。

(2) *[GL4，命题 5.13]* Γ 在 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 上的作用是2-棘轮的。

(3) 任一初等子群至多固定一个具有初等稳定子的顶点。

(4) *[GL2，引理 3.7]* 边稳定子和顶点稳定子均为有限生成的。

(5) *[GL1，定理 9.18]* 若 $v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$，则以下条件之一成立：

(a) 群 Γ_v 是双端的；*(b)* Γ_v 的共轭类包含于 $\mathcal{P}$ 中；*(c)* 顶点 v 是非初等且拟同调的；*(d)* 顶点 v 是非初等且刚性的。

(6) *[GL1，定理 9.18]* 群自同构群$(\Gamma, \mathcal{P}, \mathcal{H})$ 中的保 $\mathcal{P}$ 和$\mathcal{H}$ 的自同构，会保留 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的 Γ-等变等距类。

(7) *[GL2，命题 4.1]* 对于每条边 $e \in ET_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$，其像

$$\mathcal{K}(T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}) \cap \mathrm{Out}(\Gamma, \mathcal{P}, \mathcal{H}^{(t)}) \to \mathrm{Out}(\Gamma_e)$$

是有限的。

(8) *[GL2，命题 4.1]* 对于每个刚性顶点 $v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$，其像

$$\mathcal{K}(T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}) \cap \mathrm{Out}(\Gamma, \mathcal{P}, \mathcal{H}^{(t)}) \to \mathrm{Out}(\Gamma_v)$$

是有限的。

(9) *[GL2，命题 4.1]* 对于每个 *QH* 顶点 $v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$，其像 $\mathcal{K}(T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}})$ →外自同构群 (Γ_v) 包含于 映射类群(Γ_v)。

定理 2.13 给出的分解 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 称为 *JSJ* $(\Gamma, \mathcal{P}\cup\mathcal{H})$-初等分解。

注 2.14. 定理 *2.13*(3) 由以下事实可得。首先，树 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 是关于共初等性等价关系的圆柱树 *[GL4，命题 6.1]*。此外，$T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 中具有初等稳定子群的顶点对应于与圆柱相关联的顶点。最后，任意初等子群至多保留一个圆柱。

注 2.15. 若 $v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 是一个 *QH* 顶点，且 Σ_v 同构于一个三穿孔球面，则 映射类群(Γ_v) 是有限的。因此，在本文余下部分中，我们将假设：若 $v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 是一个 *QH* 顶点，且 Σ_v 同构于一个三穿孔球面，则 v 是一个刚性顶点。这与定理 *2.13*(8) 以及 *Guirardel–Levitt* 在 *[GL2，注 3.6]*中的假设一致。

我们记录定理 2.13 的一个直接推论。

引理 2.16. 设 Γ 是一个无挠有限生成双曲群，且相对于 $\mathcal{P}$，并令 $\mathcal{H}$ 为 Γ的有限生成子群组成的有限集。假设 Γ 相对于 $\mathcal{P}\cup\mathcal{H}$是单端的。

设 H 是 Γ 的一个子群，并且固定 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$中的一个点。那么 H 固定 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 的一个唯一初等顶点，或固定 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的一个唯一非初等顶点。

证明。这是由 Γ在 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 上的作用是 2-棱柱稳定（定理 2.13(2)），以及每条边都有一个初等端点和一个非初等端点（定理 2.13(1)）这一事实得出的。

□

2.4 自由积的外空间

设 $(G,\mathcal{G})$ 是群的一个自由积。本节中，我们沿用 Guirardel–Levitt [GL3]的方法（对于情形 $(G,\mathcal{G})=(F_N,\varnothing)$，参见 [CV]），定义一个图，其上外自同构群 Out$(G,\mathcal{G})$的作用是余紧的；这个图称为 $(G$的外空间的脊 $,\mathcal{G})$。我们将用到的一个重要性质是，外自同构群 Out$(G,\mathcal{G})$ 的任意有限子群都固定其中的一个点。

定义 2.17（Grushko 自由分裂）。一个$Grushko$ $(G,\ \mathcal{G})$-自由分裂 是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由分裂，满足：对于每个 $v\in VT$，要么 G_v 是平凡的，要么 $[G_v]\in\mathcal{G}$。

定义 2.18（[GL3，外空间的脊]）。设 $(G,\ \mathcal{G})$ 是一个自由积。$(G,\ \mathcal{G})$的外空间的脊记作 $\mathcal{O}(G,\ \mathcal{G})$，它是一个图，其顶点为 Grushko$(G,\ \mathcal{G})$-自由分裂；两个这样的分裂 S 和 T 相邻，当且仅当 S 塌缩为 T，或反之。

群 Aut$(G,\ \mathcal{G})$ 通过对作用进行前复合，在 $\mathcal{O}(G,\ \mathcal{G})$ 上作用。由于群 Inn(G) 在 $\mathcal{O}(G,\ \mathcal{G})$上平凡作用，该作用可下降到商群，从而给出外自同构群 Out$(G,\ \mathcal{G})$ 在 $\mathcal{O}(G,\ \mathcal{G})$上的作用。

现在我们回顾一个由 Hensel–Kielak [HK], 提出的定理，该定理描述了外自同构群 Out$(G,\ \mathcal{G})$ 的有限子群在 $\mathcal{O}(G,\ \mathcal{G})$上的作用。

定理 2.19 ([HK，推论 6。1])。设 $(G,\mathcal{G})$ 是群的自由积（回忆一下，G 是有限生成的），且 H 是 外自同构群$(G,\mathcal{G})$ 的有限子群。那么 H 固定了 $\mathcal{O}(G,\mathcal{G})$ 的一个点。

我们还将经常利用 Grushko $(G,\mathcal{G})$-自由分裂构造 $(G,\mathcal{G})$-自由因子系统，方法如下。设 S 是一个 Grushko $(G,\mathcal{G})$-自由分裂，且 T 是 G-等变子森林，包含每个具有非平凡稳定子的顶点。商群$G\backslash T$ 是一个（不一定连通的）群图，它可识别为 $G\backslash S$ 的一个群图子图。设 $U_1,\dots,U_t$是 $G\backslash T$ 的连通分支（视为群图），并设 $\mathcal{F}(T)=\{[\pi_1(U_i)]\}_{i=1}^t$，其中 $[\pi_1(U_i)]$是基本群 $\pi_1(U_i)$ 作为 G的子群时的共轭类。由于 T 包含每个具有非平凡稳定子的顶点，集合 $\mathcal{F}(T)$是一个 $(G,\mathcal{G})$-自由因子系统。我们称 $\mathcal{F}(T)$为由 T 诱导的$(G,\mathcal{G})$-自由因子系统。

2.5 自由积的双重边界及其层状结构

设 $(G,\mathcal{G})$ 是群的自由积。群 G 相对于集合 $\mathcal{G}$是双曲的。因此，可以考虑 $(G,\mathcal{G})$ 的 Bowditch 边界 $\partial_\infty(G,\mathcal{G})$（见 [Bow2]）。它可以描述如下。设 S 是一个 Grushko $(G,\mathcal{G})$-自由分裂。设 $\partial_\infty S$ 是 S 的 Gromov 边界，并设 $V_\infty(S)$ 是 S 中具有无限价的顶点集合。令 $S = S \cup \partial_\infty S$带有度量拓扑。对于两个不同的点 $x,y \in S$， x 在 y 处的方向是 $S\backslash\{y\}$ 中包含 x的连通分支。 S 上的观察者拓扑（见 [CHL]）是由 S中的方向集合生成的拓扑。 $(G,\overline{\mathcal{G}})$ 的 Bowditch 边界 $\partial_\infty(G,\mathcal{G})$ 是配备观察者拓扑的集合 $\partial_\infty \overline{S} \cup V_\infty(S)$。其同胚类不依赖于 S的选择。

Let

$$\partial^2(G,\mathcal{G}) = (\partial_\infty(G,\mathcal{G}) \times \partial_\infty(G,\mathcal{G})) - \Delta/\sim$$

称为的双重边界 $(G,\ \mathcal{G})$，其中 Δ 是对角线，而 $\sim$ 是由翻转 $(x、\ y) \sim (y、\ x)$生成的等价关系。可以从几何上如下看待$\partial^2(G、\ \mathcal{G})$ 中的一个元素。 $\{x、\ y\}$ 中的一个点 $\partial^2(G、\ \mathcal{G})$ 由一条连接S 中分别表示 x 和 y的点的（不一定有限的）无向测地路径表示。因此，我们将 $\partial^2(G、\ \mathcal{G})$ 中的一个元素称为的直线 $(G、\ \mathcal{G})$。

注意，群 G 自然地作用于 $\partial^2(G、\ \mathcal{G})$。 $(G、\ \mathcal{G})$ 的一个层叠是 $\partial^2(G、\ \mathcal{G})$的一个闭$G$-不变子集。

设 A 是一个 $(G、\ \mathcal{G})$-自由因子。包含映射 $A \subseteq G$ 诱导出一个 A-等变嵌入$\partial_\infty(A、\ \mathcal{G}_{|A}) \hookrightarrow \partial_\infty(G、\ \mathcal{G})$，以及一个具有闭像的 A-等变嵌入 $\partial^2(A、\ \mathcal{G}_{|A}) \hookrightarrow \partial^2(G、\ \mathcal{G})$。我们将 $\partial^2(A、\ \mathcal{G}_{|A})$ 与其在 $\partial^2(G、\ \mathcal{G})$中的像等同。一个 $(G、\ \mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F}$通过考察集合 $g\partial^2(A、\ \mathcal{G}_{|A})$（其中 $[A] \in \mathcal{F}$ 和 $g \in G$）的并集，诱导出 $(G、\ \mathcal{G})$ 的一个层叠 $\partial^2(\mathcal{F}、\ \mathcal{G})$。

2.6 自由积的相对列车轨道映射

设 $(G,\ \mathcal{G})$ 是群的一个自由积。设 $\phi \in$外自同构群$(G,\ \mathcal{G})$。本节回顾一种特殊拓扑代表元的构造，它们称为 ϕ相对列车轨道。它们编码了 ϕ的若干动力学不变量。Bestvina–Handel 首先在自由群自同构的背景下引入了相对列车轨道 [BH]，随后 Collins–Turner 将其推广到自由积的背景下 [CT]（另见 Francaviglia–Martino [FM] 以及 Lyman [Lym2、Lym1]的工作）。

设 T是一个 Grushko $(G,\ \mathcal{G})$-自由分裂，并设 $\Phi \in$自同构群$(G,\ \mathcal{G})$。一个态射 $F\colon T \to T$ 与 Φ 相关联，是一个将顶点映到顶点、将 S 的边映到非平凡边路径的映射，并且对所有 $g \in G$ 和 $x \in T$，均有

$$F(gx) = \Phi(g)F(x).$$

设 γ 是 T 中的一条路径。存在一条唯一的测地线位于 T 中，并且与 γ 相对于其端点同伦。这条测地线记作 $[\gamma]$，称为与 γ 关联的约化路径。

T 的过滤是一个递增序列

$$\varnothing = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_n = T$$

既是 G 又是 F 不变的子图。过滤中的图不一定是连通的。

设 $r \in \{0, \ldots, n\}$。T 的第 r 层，记作 H_r，是 $T_r - T_{r-1}$ 的闭包。

对每个层 H_r，都可以按如下方式自然地关联一个 转移矩阵 M_r。矩阵 M_r 是一个方阵，其指标由 H_r 的无向边的 G-轨道构成。设 $e, e' \in EH_r$。那么，M_r 的 (Ge', Ge) 项的值等于路径 $[F(e)]$ 中包含 Ge' 中的边的次数。由于 F 是 Φ-等变的，这与 Ge 的代表元的选取无关。如果每个转移矩阵都不可约或为零矩阵，则称过滤是极大的 。

假设转移矩阵 M_r 不可约。与 M_r 相关联的是一个 Perron– Froebenius 特征值 $\lambda_r \geqslant 1$。如果 $\lambda_r > 1$，则称 H_r 为指数增长（*EG*）；否则称其为非指数增长（*NEG*）。

设 $v \in VT$。回顾一下，在 v 处的方向是 $T \backslash \{v\}$ 的一个连通分支，或者等价地说，是一条起点为 v的有向边。若 d 是 v处的一个方向，则 F 将 d 映射到 $F(v)$处的一个方向 $DF(d)$。因此，映射 F 诱导出一个映射 DF，其定义域为 T 的方向集。转向是 T 的一个顶点处两个方向组成的无序对。若转向 $\{d, d'\}$ 满足 $d = d'$，则称其为退化；若存在 $m \geqslant 1$ 使得 $(DF)^m(d) = (DF)^m(d')$，则称其为非法；否则称其为合法。

设 $\gamma = e_1 \ldots e_m$ 是 T 中的一条有向测地边路径。注意，对于每个$i \in \{1, \ldots, m\}$，集合 $\{e_i^{-1}, e_{i+1}\}$ 都是一个转向。若对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，转向 $\{e_i^{-1}, e_{i+1}\}$ 都是合法的，则称 γ 为一条合法路径。

令 $r \in \{0, \ldots, n\}$。若 $e, e' \in EH_r$，则转向 $\{e, e'\}$ 的高度为 r。若一条测地边路径γ 的所有高度为 r 的转向均合法，则该路径γ 是 r-合法的。

现在我们可以定义相对列车轨道映射。

定义 2.20（相对列车轨道映射）。令 $\Phi \in \mathrm{Aut}(G, \mathcal{G})$，令 $F\colon T \to T$ 为与 Φ 相关联的态射，并令 $\varnothing = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_n = T$ 为一个过滤。映射 F 是一个相对列车轨道，当且仅当该过滤是极大的，并且对每个 EG 层H_r，以下条件均成立。

（1）H_r 中的方向经 DF 映射到 H_r中的方向。

（2）若 $\sigma \subseteq T_{r-1}$ 是一条端点位于 H_r 中的非退化测地边路径，则$[F(\sigma)]$ 是一条端点位于 H_r 中的非退化测地边路径。

（3）如果 σ 是 r-合法测地边路径，那么 $[F(\sigma)]$ 也是。

现在我们可以陈述相对列车轨道的主要存在性定理。该定理以多种形式出现在文献中（参见 [CT], [FM、推论 8.25], [Lym2、定理 A]）。

定理 2.21 ([CT, FM, Lym2])。设 $(G, \mathcal{G})$ 是一个自由积，且 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$。存在一个相对列车轨道映射 $F\colon T \to T$，它与一个表示 ϕ 的自同构相关联。此外，如果 ϕ 保持一个 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F}$，则可以选择 $F\colon T \to T$，使得 T 的过滤中存在一个元素 T_i，且 $\mathcal{F}(T_i) = \mathcal{F}$。

2.7 相对完全不可约外自同构

设 $(G,\ \mathcal{G})$ 是一个自由积，且 $\phi \in$外自同构群$(G,\ \mathcal{G})$。我们称 ϕ 是相对于 $\mathcal{G}$ 完全不可约，如果对于每个 $n>0$，外自同构 ϕ^n 都不保持任何与 $\mathcal{G}$ 不同的真 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子系统。关于完全不可约外自同构，我们将要使用的主要性质是存在一棵 $\mathbb{R}$-树，它配备有一个 $(G,\ \mathcal{G})$-作用，该作用是通过对相对列车轨道映射进行迭代取极限而得到的。

定理 2.22 ([FMS])。 设 $(G,\mathcal{G})$ 是一个非零散自由积，设 $\phi \in$ 外自同构群$(G,\mathcal{G})$ 相对于 $\mathcal{G}$ 完全不可约，并设 $F\colon\ T \to T$ 是 ϕ的一个相对列车轨道代表元。存在 $\lambda>1$ 以及一棵 $\mathbb{R}$-树 X_ϕ，其上赋有 G 通过等距变换给出的作用，使得

$$X_\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n}\phi^n T.$$

树 X_ϕ 不依赖于相对列车轨道映射 $F\colon\ T \to T$的选取，并具有以下性质。

(1) X_ϕ 中的弧稳定子是平凡的。

(2) 存在一个（可能是平凡的）循环子群 $H \subseteq G$，使得 X_ϕ 中点稳定子的共轭类集合恰为 $\mathcal{G} \cup \{[H]\}$。

注 2.23。 X_ϕ 的存在性由 *[FMS* 引理 *2.14.1]* 得出。它不依赖于相对列车轨道映射这一事实由 *[FMS* 定理 *5.1.1]* 得出。关于 G 在 X_ϕ 上的作用的描述，例如可由 X_ϕ 是无理 这一事实得出（见 *[GH2* 定理 *3.4*、*4.1]*）。

3 同余子群的初步性质

设 $(G,\mathcal{G})$ 是一个满足 $G = G_1 * \ldots * G_k * F_N$ 的群的自由积。现在我们来介绍外自同构群 $\mathrm{Out}(G,\mathcal{G})$ 的一个有限指数子群，它将在本文余下部分中成为核心研究对象。

群 $\mathrm{Out}(G,\mathcal{G})$ 自然地置换 $\mathcal{G}$ 中的共轭类。此作用的核是一个有限指数子群，记为 $\mathrm{Out}^0(G,\mathcal{G})$。接下来，我们利用其在同调上的作用，进一步取一个有限指数子群。群 $\mathrm{Out}^0(G,\mathcal{G})$ 自然地作用于有限群 $H_1(G,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。我们将此作用的核记为 $\mathrm{IA}^0(G,\mathcal{G},3)$。本节记录 $\mathrm{IA}^0(G,\mathcal{G},3)$ 的一些直接得到的初步非周期性性质。

我们先介绍一些关于群图同调的标准引理。若 S 是群 G 的一个分解，回忆一下第 2.2 节中 $\mathcal{K}(S)$ 的定义。

引理 3.1. 设 G 是一个有限生成群，设 A 是一个平凡的 G-模，并设 $\mathbb{X}$ 是与 G-分解 S 相关联的群图。设 $v \in \mathbb{X}$，并令 Inc_v 为与 $\mathbb{X}$ 中起点为 v 的有向边相关联的边群的 G_v-共轭类集合。

令 H 为 $H_1(G_v$在 $H_1(G$中的像、$A)$ 在 $A)$ 中的像，并令 K_{Inc_v} 为由 $H_1(G_e$、$A)$ 的像生成的 $H_1(G_v$的子群，其中 $[G_e]_{G_v} \in \mathrm{Inc}_v$ 于 $H_1(G_v$、$A)$。

存在一个子群 $K \subseteq K_{\mathrm{Inc}_v}$，使得 H 适合于一个正合列

$$K \to H_1(G_v, A) \to H. \tag{1}$$

此外，对于每个 $\phi \in \mathcal{K}(S)$，方程 (1) 中的序列都是 ϕ-等变的。

证明。我们用 $\vec{E}\mathbb{X}$表示 $\mathbb{X}$的有向边集合。对于每个 $w \in V\mathbb{X}$（分别为 $e \in \vec{E}\mathbb{X}$），令 $(X_w, *_w)$（分别为 $(X_e, *_e)$）为一个带基点的CW复形，其可缩万有覆叠的基本群同构于 G_w（分别为 G_e）。此外，我们假设，对于每个起点为 w的 $e \in E\mathbb{X}$，都存在一个嵌入 $\iota_{w,e}$: $X_e \hookrightarrow X_w$，以及一条连接 $*_w$ 与 $\iota_{w,e}(*_e)$ 的路径 p_e，使得映射 $\iota_{w,e}$ 通过 p_e 诱导出一个嵌入 $G_e \hookrightarrow G_w$。令

$$X_G = \left(\coprod_{w \in V\overline{\mathbb{X}}} X_w \amalg \coprod_{e \in \vec{E}\overline{\mathbb{X}}} X_e \times [0,1] \right) / \sim$$

其中，对于每个起点为$\overline{w_1}$、终点顶点为 w_2的 $e \in \vec{E}\mathbb{X}$，$X_e \times [0,1]$ 与带有反向定向的 $X_{e^{-1}} \times [0,1]$ 等同，而子空间 $X_e \times \{0\}$ 和$X_e \times \{1\}$ 分别通过 $\iota_{w_1,e}$ 和 $\iota_{w_2,e}$粘合到 X_{w_1} 和 X_{w_2} 上。于是 $\pi_1(X_G)$ 与 G同构，且其万有覆叠是可缩的。

令 U 为 X_G 的开子集，它是.....的像

$$X_v \amalg \coprod_{e \in \vec{E}\overline{\mathbb{X}}, o(e)=v, t(e) \neq v} X_e \times \left[0, \frac{3}{4}\right) \amalg \coprod_{e \in \vec{E}\overline{\mathbb{X}}, o(e)=t(e)=v} X_e \times \left[0, \frac{1}{3}\right).$$

令 V 为 X_G 的开子集，它是.....的像

$$\coprod_{w \in V\overline{\mathbb{X}}, w \neq v} X_w \amalg \coprod_{e \in \vec{E}\overline{\mathbb{X}}, o(e), t(e) \neq v} X_e \times [0,1] \amalg \coprod_{e \in \vec{E}\overline{\mathbb{X}}, t(e)=v, o(e) \neq v} X_e \times \left[0, \frac{3}{4}\right) \amalg \coprod_{e \in \vec{E}\overline{\mathbb{X}}, o(e)=t(e)=v} X_e \times \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

于是，$U \cup V$ 覆盖 X_G。因此，我们可以对三元组 $(X_G,\ U,\ V)$应用Mayer–Vietoris正合列，即下列序列是正合的

$$H_1(U \cap V, A) \to H_1(U, A) \oplus H_1(V, A) \to H_1(G, A). \tag{2}$$

子集 U形变收缩到 X_v，因此 $H_1(U,\ A) = H_1(G_v,\ A)$ 以及 $H_1(U,\ A)$ 在 $H_1(G,\ A)$ 中的像为 H。此外，子集 $U \cap V$形变收缩到$\coprod_{e \in \vec{E}\mathbb{X},\ o(e)=v} X_e$，因此 $H_1(U \cap V,\ A)$ 同构于$\bigoplus_{e \in \vec{E}\mathbb{X},\ o(e)=v} H_1(G_e,\ A)$，并且 $H_1(U \cap V,\ A)$ 在 $H_1(G_v,\ A)$中的像恰为 K_{Inc_v}。因此，公式（1）可由公式（2）以及上述对 $H_1(U,\ A)$和 $H_1(U \cap V,\ A)$的描述推出。

设 $\phi \in \mathcal{K}(S)$。于是，ϕ 诱导出 X_G的一个同伦等价 ϕ_{X_G}。由于 $\phi \in \mathcal{K}(S)$，ϕ 在图 $\mathbb{X}$ 上平凡作用。因此，ϕ_{X_G}（在同伦意义下）保持子集 U 和 V。这表明公式（2）中的正合列是 ϕ_{X_G}-等变的，而公式（1）中的正合列是 ϕ-等变的。 □

引理 3.2。 设 $\mathcal{F}$为一个 $(G、\ \mathcal{G})$-自由因子系统，并设 $[A]\in\mathcal{F}$。

- 群 $H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 嵌入为 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$的一个直和项。
- 对于每个不同于 $[A]$ 的 $[B]\in\mathcal{F}$，包含映射 $A*B\subseteq G$ 诱导出一个嵌入$H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\oplus H_1(B,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\hookrightarrow H_1(G,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。
- 如果对于所有 $g\in G$ 和 $[G_i]\in\mathcal{G}$，群 gG_ig^{-1} 都不包含于 A 中，那么$H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$的一个非平凡直和项。

证明。 令 $[B]\in\mathcal{F}-\{[A]\}$，取 $C\subseteq G$ 使得 $G=A*C$，并取 $D\subseteq G$ 使得 $G=A*B*D$。 $H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\oplus H_1(B,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是$H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的一个直和项，这一事实源于 $A*B$ 是 G 的一个自由因子，以及将引理 3.1 应用于由 $G=A*B*D$ 诱导的 $\mathbb{X}$。这就证明了该引理的前两个断言。

现在假设对于所有的 $g\in G$ 和 $[G_i]\in\mathcal{G}$，群 gG_ig^{-1} 不包含于 A。现在我们证明 $H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是非平凡的。根据关于 A 的假设，对于每个 $[G_i]\in\mathcal{G}$，G_i 的某个共轭包含于 C 中。由于 $G=G_1*\ldots*G_k*F_N$，我们可以通过更换代表元 F_N，假设 $A\subseteq F_N$ 是 F_N 的一个非平凡自由因子。因此，我们有 $H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\neq\{0\}$。 □

引理 3.3. 设 $\phi\in\mathrm{IA}^0(G、\ \mathcal{G}、\ 3)$。设 $\mathcal{F}$ 是一个 ϕ-不变的 $(G、\ \mathcal{G})$-自由因子系统。那么 $\mathcal{F}$ 的每个元素都被 ϕ 固定。

证明。 设 $[A]\in\mathcal{F}$。首先，假设存在 $i\in\{1,\ .....,\ k\}$ 使得 $G_i\subseteq A$。那么对于每个不同于 $[A]$ 的 $[B]\in\mathcal{F}$，我们有 $G_i\cap B=\{1\}$。因此，由于 $\phi\in\mathsf{Out}^0(G,\ \mathcal{G})$，我们有 $\phi([A])=[A]$。

现在假设，对于所有 $i\in\{1、.....、\ k\}$ 以及所有 $g\in G$，都有 $A\cap gG_ig^{-1}=\{1\}$。根据引理 3.2，群 $H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$的一个非平凡直和项。此外，对于每个与 $[A]$不同的 $[B]\in\mathcal{F}$，$H_1(B,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 在 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$中的像与 $H_1(A,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 不同。由于 ϕ 在 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, 上平凡作用，我们可知 $\phi([A])=[A]$。 □

引理 3.4。 设 $\phi\in\mathrm{IA}^0(G、\ \mathcal{G}、\ 3)$，并设 A 是一个 $(G、\ \mathcal{G})$-自由因子，其共轭类是 ϕ-不变的。 ϕ 在 外自同构群(A) 中的像 $\phi_{|A}$ 包含于 $\mathrm{IA}^0(A、\ \mathcal{G}_{|A}、\ 3)$ 中。

证明。 由于 A 是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子，对于每个 $[H]_A\in\mathcal{G}_{|A}$，都存在唯一的 $[G_i]\in\mathcal{G}$使得 $[H]=[G_i]$。特别地，由于 $\phi\in\mathsf{Out}^0(G,\ \mathcal{G})$，$\phi$ 的像包含于 $\mathsf{Out}^0(A,\ \mathcal{G}_{|A})$中。

根据引理 3.2，由于 A 是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子，A 在 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像是一个由 ϕ 保持的直因子 F。由于 ϕ 在 $H_1(G,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, 上平凡作用，我们看到 ϕ 在 F上也平凡作用，因此 $\phi_{|A}\in\mathrm{IA}^0(A,\ \mathcal{G}_{|A},\ 3)$。 □

下一个引理给出了一个有用的判据，用于证明有限图的自同构是平凡的。

引理 3.5 ([Iva，引理 1。1])。 设 X 是一个有限连通图，且 $f\colon\ X\to X$ 是一个图自同构。假设 f 固定 X 的每个叶，并且 f 在 $H_1(X$ 上的作用 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是平凡的。那么以下情况之一成立。

- 图 X 同胚于一个圆，且 f 在 X 上的作用是旋转。
- 映射 f 是恒等映射。

引理 3.6. 设 G 是一个群， S 是一个 G-分解，且 $\phi \in$ 外自同构群(G) 是一个保持 S不变的外自同构。若 ϕ 在 $H_1(G$上平凡作用， $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, 则 ϕ 在$H_1(G\backslash S$上平凡作用， $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。

证明。 设 ϕ_{gr} 是由 ϕ诱导的 $G\backslash S$ 的图自同构。记 ϕ_* （分别为ϕ_{gr*}）为由 ϕ（分别由 ϕ_{gr}）在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$（分别在 $H_1(G\backslash S, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$）上的作用。由于 G 是群图 $G\backslash S$的基本群，因此存在一个自然的满同态 $G \to \pi_1(G\backslash S)$，进而诱导一个满射 p: $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to H_1(G\backslash S, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc} H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi_*} & H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ H_1(\overline{G\backslash S}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi_{gr*}} & H_1(\overline{G\backslash S}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}). \end{array}$$

由于 p 是满射且 ϕ_* 是平凡的，因此映射 ϕ_{gr*} 也是平凡的。 □

引理 3.7。 设 $\phi \in \mathrm{IA}^0(G, \mathcal{G}, 3)$。设 S是一个 ϕ-不变的 $(G, \mathcal{G})$-自由分裂。

(1) 由 ϕ 诱导的 $G\backslash S$ 的图自同构是平凡的。

(2) 对每个 $v \in VS$，自然同态 $\langle\phi\rangle \to$ 外自同构群(G_v) 的像包含于$\mathrm{IA}^0(G_v, \mathcal{G}_v, 3)$中。

证明。 我们不妨假设 S 是非退化的，否则无需证明。

我们证明第一个断言。由引理 3.6， ϕ 在$H_1(G\backslash S, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上的作用是平凡的。因此，为了应用引理 3.5，只需证明 ϕ 固定$G\backslash S$的每一片叶。注意， ϕ 保持由 S的顶点稳定子集合诱导的 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统。特别地，由引理 3.3，外自同构 ϕ 逐点固定 $G\backslash S$ 中具有非平凡顶点稳定子的顶点集合。由于根据 S的极小性， $G\backslash S$ 的每片叶都有非平凡稳定子，我们可知 ϕ 固定$G\backslash S$的每一片叶。因此，由引理 3.5，若 $G\backslash S$ 不是一个圆，则 ϕ 在 $G\backslash S$上的作用是平凡的。

接下来需要研究 $G\backslash S$ 是圆的情形。根据引理 3.5， ϕ 在 $G\backslash S$ 上作旋转。因此，要证明 ϕ 在 $G\backslash S$ 上平凡作用，只需证明 ϕ 固定了 $G\backslash S$ 的一个点。若 $\xi(G, \mathcal{G}) \geqslant 2$，则 $G\backslash S$ 有一个稳定子非平凡的顶点，因此被 ϕ 固定。否则，由于 S 非退化，我们有 $G = \mathbb{Z}$ 和 $\phi = \mathrm{id}$，因此 ϕ 在 $G\backslash S$ 上作恒等映射。这就完成了第一个断言的证明。

第二个断言由引理 3.4 得出，因为每个 $(G, \mathcal{G})$-自由分裂的非平凡顶点稳定子都是一个 $(G, \mathcal{G})$-自由因子。 □

3.1 既定假设与群 $\mathrm{IA}(G,\mathcal{G},3)$

本节中，我们构造 $\mathbf{IA}(G,\mathcal{G},3)$ 的另一个有限指数子群 $\mathbf{IA}^0(G,\mathcal{G},3)$，它将满足所需的非周期性性质。$\mathbf{IA}(G,\mathcal{G},3)$ 的构造依赖于对 G 的进一步假设，我们称之为既定假设。这些假设将在本文余下部分中使用。我们先回顾一些标准定义。

令 $\phi\in$ 外自同构群$(G,\mathcal{G})$。ϕ 的周期子群 是满足以下条件的子群 $H\subseteq G$：存在 $\ell>0$ 和 $\Psi\in\phi^{\ell}$，使得 $\Psi(H)=H$ 且 $\Psi_{|H}=\mathrm{id}_H$。若 $\Phi\in\phi$，令

$$\mathrm{Per}(\Phi)=\{g\in G\mid \exists \ell>0 \text{ such that } \Phi^{\ell}(g)=g\}$$

为 Φ的周期子群。

既定假设。设 G 是一个有限表示无挠群，设 $G=G_1*\ldots*G_k*F_N$ 是 G 的 *Grushko* 分解，且设 $\mathcal{G}=\{[G_1],\ldots,[G_k]\}$。令

$$p\colon \mathrm{IA}^0(G,\mathcal{G},3)\to\prod_{i=1}^{k}\mathrm{Out}(G_i)$$

为自然限制同态。

假设对于每个 $i\in\{1,\ldots,k\}$，都存在 (G_i)的一个子群 外自同构群*(G_i) 外自同构群，满足以下性质。

(1) 群 外自同构群*(G_i) 是 外自同构群(G_i)的有限指数子群。

(2) 群 外自同构群*(G_i) 是无挠的。

(3) 对每个 $\phi\in$外自同构群*(G_i) 以及 ϕ的每个 ϕ-周期有限生成子群 H，都有 $\phi\in$ 外自同构群$(G_i,[H]^{(t)})$。

(4) 记 自同构群*(G_i) 为 自同构群(G_i)中 外自同构群*(G_i) 的完全原像。对于每个 $\Phi\in$自同构群*(G_i)，G_i 的每个 Φ-周期元素都被 Φ固定，即 $\mathrm{Per}(\Phi)=\mathrm{Fix}(\Phi)$。

令 $\mathrm{IA}(G,\mathcal{G},3)$ 为 p 下 $\prod_{i=1}^{k}$外自同构群*(G_i)的原像。它是 $\mathrm{IA}^0(G,\mathcal{G},3)$的有限指数子群。

注 3.8。当 $G=F_N$ 和 $\mathcal{G}=\varnothing$时，群 $\mathrm{IA}(G,\mathcal{G},3)$ 恰好是自然同态 外自同构群$(F_N)\to\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的核；该同态由其在 $H_1(F_N,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$上的作用给出。

我们注意到，既定假设立即推出以下结论。

引理 3.9。设 G 是一个满足既定假设的群。设 $\phi\in\mathrm{IA}(G,\mathcal{G},3)$，并设 A 是一个 $(G,\mathcal{G})$-自由因子，其共轭类在 ϕ作用下不变。ϕ 在 外自同构群(A) 中的像 $\phi_{|A}$ 包含于 $\mathrm{IA}(A,\mathcal{G}_{|A},3)$。

证明。由引理 3.4，我们有 $\phi_{|A}\in\mathbf{IA}^0(A,\ \mathcal{G}_{|A},\ 3)$。对于每个 $[H]_A\in\mathcal{G}_{|A}$，都存在唯一的 $[G_i]\in\mathcal{G}$ 使得 $[H]=[G_i]$。因此，限制同态$p_H\colon\mathbf{IA}^0(G,\ \mathcal{G},\ 3)\to$外自同构群$(H)$ 可经由 $\mathbf{IA}^0(G,\ \mathcal{G},\ 3)\to\mathbf{IA}^0(A,\ \mathcal{G}_{|A},\ 3)$分解。由于 ϕ映入外自同构群*(H)，$\phi_{|A}$也如此，且我们有 $\phi_{|A}\in\mathbf{IA}(A,\ \mathcal{G}_{|A},\ 3)$。 □

引理 3.10。 设 G 是一个满足既定假设的群。

(1) 对于每个 $i \in \{1,\ldots,k\}$，群 $G_i/Z(G_i)$ 无挠。

(2) 设 S 是一个 *Grushko* $(G,\mathcal{G})$-自由分裂。群 $\mathcal{T}(S)$ 无挠。

证明。 设 $i \in \{1,\ldots,k\}$。群 $\mathrm{Inn}(G_i) \subseteq \mathrm{IA}^{\mathrm{Aut}}(G_i)$ 同构于 $G_i/Z(G_i)$。根据既定假设的第 (4) 项，群 $\mathrm{IA}^{\mathrm{Aut}}(G_i)$ 无挠。因此，群 $G_i/Z(G_i)$ 无挠。这证明了第一个断言。

现在证明第二个断言。设 S 是一个 Grushko $(G,\mathcal{G})$-自由分裂。根据命题 2.3，群 $\mathcal{T}(S)$ 同构于直积 $\prod_{v\in VG\setminus S} G_v^{n_v}/Z(G_v)$，其中 $Z(G_v)$ 对角嵌入。群 $\prod_{v\in VG\setminus S} G_v^{n_v}/Z(G_v)$ 投射到群 $\prod_{v\in VG\setminus S}(G_v/Z(G_v))^{n_v}$ 上，其核同构于 $\prod_{v\in VG\setminus S} Z(G_v)^{n_v}/Z(G_v)$。根据断言 (1)，群 $\prod_{v\in VG\setminus S}(G_v/Z(G_v))^{n_v}$ 无挠；核也无挠，因为它是由自由阿贝尔群的直积对其对角子群取商得到的（回想一下，G 无挠）。因此，$\mathcal{T}(S)$ 无挠。 □

现在检查 $\mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$ 的一个简单的非周期性性质。

命题 3.11。 设 G 是满足既定假设的群。群$\mathrm{IA}(G、\ \mathcal{G}、\ 3)$ 是无挠的。

证明。 自然同态 $p_{\mathrm{IA}}\colon \mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3) \to \prod_{i=1}^{k}$ 外自同构群(G_i) 的像根据既定假设的第 (2) 项是无挠的。因此，只需证明 $\ker(p_{\mathrm{IA}})$ 是无挠的。

设 H 是 $\ker(p_{\mathrm{IA}})$ 的一个有限子群。根据定理 2.19，群 H 固定一个 Grushko $(G,\ \mathcal{G})$-自由分裂 S。根据引理 3.7，群 H 包含于 $\mathcal{K}(S)$ 中。由于 $H \subseteq \ker(p_{\mathrm{IA}})$，群 H 包含于 $\mathcal{T}(S)$ 中。根据引理 3.10，群 $\mathcal{T}(S)$ 是无挠的。因此，H 是平凡的。 □

4 元素的周期共轭类

设 G 是满足既定假设的群。本节将描述 G 中元素的周期共轭类在 $\mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$ 自同构作用下的动力学。本节的目标是证明以下定理。

定理 4.1。 设 G 是满足既定假设的群。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G,\mathcal{G},3)$。设 $\mathcal{H}$ 是 ϕ-不变的有限集，其中包含 ϕ 的有限生成周期子群的共轭类。那么 $\phi \in$ 外自同构群$(G,\mathcal{H}^{(t)})$。

由此可得：

推论 4.2. 设 G 是一个满足既定假设的群。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G,\mathcal{G},3)$。$G$ 中每个 ϕ-周期共轭类都被 ϕ固定。

证明. 设 $g \in G$ 的共轭类是 ϕ-周期的，设 Φ 是 ϕ 的一个代表元，并设 $\mathcal{H} = \{[\langle \Phi^i(g) \rangle]\}_{i\in\mathbb{N}}$。那么 $\mathcal{H}$ 是 ϕ的有限生成周期子群的共轭类所构成的一个 ϕ-不变有限集。由定理 4.1，我们有 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{H}^{(t)})$，因此存在 $\Psi \in \phi$，使得 $\Psi(\langle g \rangle) = \langle g \rangle$ 且 $\Psi_{|\langle g \rangle} = \mathrm{Id}_{\langle g \rangle}$。于是 $\Psi(g) = g$，并且 g 的G-共轭类被 ϕ固定。 □

证明使用相对双曲对 $(G, \mathcal{G})$关于集合 $\mathcal{H}$的初等 JSJ 分解。事实上，通过归纳论证，我们可以假设 G 相对于 $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$是单端的。在这种情况下，根据定理 2.13（取 $G = \Gamma$ 和 $\mathcal{P} = \mathcal{G}$），存在一个典范的、 ϕ-不变的 JSJ 初等分解 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$。接下来，我们证明 ϕ 在此 JSJ 分解上的作用足够简单，从而能够证明所需结果。证明相当技术性，因此我们将其分为若干小节。

4.1 商图上的平凡作用

设 G 是一个满足既定假设的群，设 $\mathcal{H}$ 是 G 的有限生成子群的共轭类所成的有限集，并且 G 相对于 $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$是单端的。本节旨在证明，任何保持 $\mathcal{H}$ 且满足 $\mathcal{H}$ 由 ϕ 的周期子群组成的外自同构 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$都平凡作用于图 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上（见命题 4.6）。

———

我们的策略是应用引理 3.5。然而，为了应用该引理，我们需要证明 ϕ 固定 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$的每一片叶。这将在引理 4.4 中完成。在后者的证明过程中，我们将需要以下由 Horbez 得出的结果。

引理 4.3 ([Hor1，引理 6。11])。设 $(G、\mathcal{G})$ 为一个自由积，且 T为一个 $(G、\mathcal{G})$-循环分解，其边稳定子均为非平凡。存在 $v \in VT$，使得G_v 相对于 $\mathcal{G}_v$ 及关联边稳定子分解为自由积。

引理 4.4。设 G 为满足既定假设的群。设 $\mathcal{H}$ 为 G 的有限生成子群的共轭类组成的有限集，且 G 相对于 $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$单端。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G、\mathcal{G}、3)$ 为保持 $\mathcal{H}$不变的外自同构。ϕ 在$G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上诱导的图自同构固定 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$的每一片叶。 ———

证明。我们假设 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 不退化为一个点，否则便无事可证。我们先证明，ϕ 固定 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中每个具有非循环稳定子的叶。设 v是$G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中具有非循环稳定子的叶，并设 v 是 v 在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$中的一个提升。注意，由于 G_v 是非循环的，根据定理 2.13(5)，v 的稳定子要么是非初等的，要么其共轭类属于 $\mathcal{G}$。

首先假设 $[G_v] \in \mathcal{G}$。由于 G 在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上的作用是极小的，且 v是一个叶，我们可知 v 是 G_v固定的唯一点。由于 $\phi \in$ 外自同构群$^0(G, \mathcal{G})$，我们推得 v 被 ϕ固定。

假设 G_v是非初等的。首先假设存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$，使得 v 是 G_i的某个共轭元固定的唯一点。由于 $\phi \in$ 外自同构群$^0(G, \mathcal{G})$，我们可知v 被 ϕ固定。

否则，假设 v 不是某个 G_i 的共轭的唯一不动点，其中$i \in \{1, \ldots\ldots, k\}$。我们断言 $|\mathcal{G}_v| \leqslant 1$。事实上，令 $e \in EG\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$为与其相邻的迈

$\overline{v}$，并令 $e \in ET_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 为与 v相邻的 e 的一个提升。由于 v 是 $G\backslash\overline{T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}}$的一片叶，群 G_v 在与 v 相邻的边集上传递作用，并且在 G_v中存在唯一的 G_v-共轭类边群。令 $[A] \in \mathcal{G}$ 满足 $A \cap G_v \neq \{1\}$。由于 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 是一棵$(G, \mathcal{G}\cup\mathcal{H})$-初等树，群 A 在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$中是椭圆的。根据假设，$v$不是 A的唯一不动点，因此，经过取 A的一个 G_v-共轭，不妨设 $A \cap G_v \subseteq G_e$。于是，对于每个 $[B]_{G_v} \in \mathcal{G}_v$，存在 $B' \in [B]_{G_v}$ 使得 $B' \cap G_v \subseteq G_e$。由于 G_e是初等的，我们必然有 $|\mathcal{G}_v| \leqslant 1$。断言得证。

断言意味着由 $\mathcal{G}_v$ 诱导的 G_v 的自由积分解为：

$$G_v = H * F_\ell,$$

其中，H 是某个 G_i 的某个共轭的一个（可能平凡的）子群，而 F_ℓ 是秩为 $\ell \geqslant 0$的非阿贝尔自由群。由于 G 在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上的作用是极小的，并且根据假设，v 并非 H的唯一不动点，因此我们有 $\ell \geqslant 1$。

断言。 F_ℓ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中诱导出一个非平凡子空间，该子空间与 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$的任何其他叶群所诱导的 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的任何子空间都不同。

证明。 若 H 非平凡，则与 v 相邻的边的稳定子包含于 H 中，因为v 不是极大抛物子群的不动点。因此，F_ℓ 是一个 $(G, \mathcal{G})$-自由因子，并且根据引理 3.2，F_ℓ在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像不包含于 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的任何其他叶群所诱导的 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$的任何子空间中。

假设 H 是平凡的。由于 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的边稳定子是初等的，与 v 相邻的边的稳定子是无限循环的。由于 G_v 是非初等的，我们有 $\ell \geqslant 2$。令 U 为将 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中除与 v 相邻的边 e 所在的边轨道以外的所有边轨道压缩后得到的树。于是 U 是一个_ $(G, \mathcal{G})$-循环分裂。由于 v 是一个叶节点，分裂 U 导出一个融合积 $G \simeq F_\ell *_{G_e} G_w$，其中 $w \in VU$。令 L' 为 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中除 v 以外的叶节点集合。那么，$\langle H_1(G_{v'}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\rangle_{v'\in L'}$ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像 V' 包含于 $H_1(G_w, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的像中。令 V 为 $H_1(G_e, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 在 $H_1(F_\ell, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, 中的一个补子空间；由于 $\ell \geqslant 2$ 和 $G_e \simeq \mathbb{Z}$，这样的补子空间存在。根据引理 3.1，V 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像不包含于 V'。因此，F_ℓ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像不包含于 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的任何由 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的其他叶节点所诱导的子空间中。 □

由于 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$，断言表明 v 被 ϕ 固定。这说明 ϕ 固定了 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中每个具有非循环稳定子的叶。

接下来要证明 ϕ 固定 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中每个具有循环稳定子的叶。设 v 是 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中一个具有循环稳定子的叶。根据定理 2.13(3)，G 的每个初等子群至多固定 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中一个具有初等稳定子群的顶点。因此，要证明 ϕ 固定 v，只需证明 ϕ 固定 $[G_v]$。

假设 G_v 是 $(G, \mathcal{G})$-外围的。由于 $\phi \in$ 外自同构群$^0(G, \mathcal{G})$，存在 $[G_i] \in \mathcal{G}$ 和$\Phi \in \phi$ 使得 $G_v \subseteq G_i$、$\Phi(G_i) = G_i$，且 $[G_v]_{G_i}$ 是 G_i的循环子群的 $\Phi_{|G_i}$-周期共轭类。根据既定假设的第 (3) 项，我们可知 $[G_v]$ 被 $\Phi_{|G_i}$固定。因此，顶点 v 被 ϕ固定。

现在假设 G_v 是 $(G,\mathcal{G})$-非外围的。令 $\mathcal{L}$ 为 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$中具有循环 $(G,\mathcal{G})$-非外围稳定子的叶节点 v' 的集合。令 U为通过压缩$G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中除与 $\mathcal{L}$的叶节点相邻的边以外的所有边而得到的 $(G,\mathcal{G})$-循环分解。注意，根据定理 2.13(1)， U 的每条边都有非平凡的无限循环边稳定子。

令 x 为 $G\backslash U$ 的中心顶点。那么 x 是 $G\backslash U$ 中稳定子为非循环的唯一顶点。特别地， x 是 $G\backslash U$ 中唯一一个其关联边稳定子能够诱导非平凡自由积分解的顶点。因此，由引理 4.3，群 G_x 相对于 $(G_x、\mathcal{G}_x)$-自由因子系统 $\mathcal{F}_x$ 分解为自由积；该系统由 $\mathcal{G}_x$ 添加每个 $v'\in\mathcal{L}$ 对应的一个循环子群共轭类得到。

由于 $G\backslash U$ 的每个叶的 $(G、\mathcal{G})$-非外围稳定子都是循环的，对于每个 $[H]\in\mathcal{G}$，群 H 都固定（ G 的一个平移） x。因此，对于每个 $[H]\in\mathcal{G}$，存在唯一的$[H_x]_{G_x}\in\mathcal{G}_x$ 使得 $[H]=[H_x]$。这表明集合 $\mathcal{F}=\mathcal{G}\cup\{[G_{v'}]\}_{v'\in\mathcal{L}}$ 是一个由 ϕ 保持的 $(G、\mathcal{G})$-自由因子系统。由引理 3.3，外自同构 ϕ 保持每个满足 $v'\in\mathcal{L}$ 的 $G_{v'}$ 的共轭类。特别地，它保持 $[G_v]$，因此固定 v。 □

证明 ϕ 在商图 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上平凡作用这一事实所需的下一个要素是以下引理，该引理研究 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的 QH 顶点，以及更一般地， G-分解的 QH 顶点（相关术语见第 2.3.1 节）。特别地，对于 v 这个 G-分解 S 的 QH 顶点，我们描述由 $G_v\hookrightarrow G$ 诱导的同态$H_1(G_v,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\to H_1(G,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的像。设 Σ_v 是与 v 相关联的紧双曲曲面。设 Bd_v 为 Σ_v 的边界子群共轭类的集合。设 Bd_S 为 Σ_v 的边界子群 C 的共轭类集合，其中存在 $e\in ES$ 使得 C 与 G_e 可公度。设 $\chi(\Sigma_v)$ 为 Σ_v 的欧拉示性数，并令 $\chi_S(\Sigma_v)=\chi(\Sigma_v)+|\mathrm{Bd}_S|$。注意，由于 Σ_v 是双曲的，我们有 $\chi(\Sigma_v)<0$。

引理 4.5. 设 G 是一个无挠有限生成群， S 是一个 G-分解，且 $v\in VS$ 是一个拟同调顶点。

(1) 假设 $\chi_S(\Sigma_v)<1$。对于不属于 G 的 v 轨道的每个 $w\in VS$，$H_1(G_v$ 在 $H_1(G$ 中的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 像不包含于 $H_1(G_w$ 在 $H_1(G$ 中的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 像。

(2) 设 C 是 Σ_v 的一个边界子群。以下情况之一成立。

> *(a)* 存在 $e\in ES$，使得 G_e 和 C 可公度。*(b)* $H_1(C、\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 在 $H_1(G、\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像是非平凡的。此外，对于 Σ_v 的每个边界子群 C'，若其不与 C 共轭于 G，则 $H_1(C、\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 与 $H_1(C'、\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的像彼此不同。*(c)* 曲面 Σ_v 可定向，且 C 是 Σ_v 中唯一一个（在 G- 共轭意义下）不包含于 Bd_S 的边界子群。*(d)* 曲面 Σ_v 可定向， C 不包含于 Bd_S，并且在 G-共轭意义下，恰好存在一个边界子群 D，它不与 C 共轭于 G，且 D 不包含于 Bd_S。此外，如果我们固定一个

Σ_v 的定向，并令 c 和 d 分别为 C 和 D 的正定向生成元，那么 c 和 d 在 $H_1(G$、 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中有不同的非平凡像。

证明。我们先固定一些将在证明中使用的记号。我们始终考虑系数取自 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的同调群。仅在本证明中，$\langle . \rangle$ 表示由该子集自由生成的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-模。若 Σ_v 可定向，我们考虑其第一同调群的如下表示:

$$H_1(\Sigma_v) = H_1(\Sigma_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t, c_1, \ldots, c_s \rangle / \langle \sum_{j=1}^{s} c_j \rangle, \; t \geqslant 0 \text{ and } s \geqslant 0. \quad (3)$$

此外，每个边界子群的像都等于某个 $\langle c_i \rangle$，其中 $i \in \{1, \ldots, s\}$，我们将该边界子群与相应的 $\langle c_i \rangle$ 等同。若 Σ_v 不可定向，我们考虑

$$\begin{aligned} H_1(\Sigma_v) &= \langle a_1, \ldots, a_t, c_1, \ldots, c_s \rangle / \langle 2\sum_{i=1}^{t} a_i + \sum_{j=1}^{s} c_j \rangle, \\ &= \langle a_1, \ldots, a_t, c_1, \ldots, c_s \rangle / \langle \sum_{j=1}^{s} c_j - \sum_{i=1}^{t} a_i \rangle, \; t \geqslant 1 \text{ and } s \geqslant 0. \end{aligned} \quad (4)$$

如上所述，每个边界子群的像都等于某个 $\langle c_i \rangle$，其中 $i \in \{1, \ldots, s\}$，我们将该边界子群与相应的 $\langle c_i \rangle$ 等同。无论哪种情况，都用 $p_{\Sigma_v}\colon \langle a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t, c_1, \ldots, c_s \rangle \to H_1(\Sigma_v)$ 表示自然投影。

我们回顾一些关于 $H_1(G_v)$ 在 $H_1(G)$ 中的像的一般事实。设 $K_S = p_{\Sigma_v}(\langle c_i \rangle_{c_i \in \text{边界}_S})$。根据 QH 顶点的定义，对于每条与 v 相邻的边 $e \in ES$，群 G_e 都包含在 Σ_v 的一个边界子群中。由引理 3.1 可知，$H_1(G_v) = H_1(\Sigma_v)$ 在 $H_1(G)$ 中的像是一个商群 $H_1(G_v)/K,$，其中 K 是 K_S 的子群。此外，对于每个不在 v 的 G- 轨道中的 $w \in VS$，$H_1(G_v)$ 和 $H_1(G_w)$ 在 $H_1(G)$ 中的像的交集包含在 K_S/K 中。

现在我们证明第一个断言。假设 $\chi_S(\Sigma_v) < 1$。根据上述讨论，只需证明 $K_S \neq H_1(\Sigma_v)$。根据 Σ_v 的可定向性，我们分两种情况讨论。

首先，假设 Σ_v 是不可定向的。回顾方程（4）中的记号。若$t \geqslant 2$，则根据方程（4），$p_{\Sigma_v}(\langle a_1 \rangle)$ 不包含在 K_S 中，结论随即成立。假设 $t = 1$。那么 $\chi(\Sigma_v) = 1 - s$。由于 $\chi_S(\Sigma_v) < 1$，存在 $j \in \{1, \ldots\ldots, s\}$，使得 $p_{\Sigma_v}(c_j) \notin K_S$。因此，我们有 $K_S \neq H_1(\Sigma_v)$。这证明了第一种情形。

现在假设 Σ_v 是可定向的。回顾方程（3）中的记号。若 Σ_v不是穿孔球面，则 $t \geqslant 1$ 且 $K_S \neq H_1(\Sigma_v)$。现在假设 Σ_v 是穿孔球面。那么 $\chi(\Sigma_v) = 2 - s$。由于 $\chi_S(\Sigma_v) < 1$，我们有 $|\mathrm{Bd}_v| = s \geqslant |\mathrm{Bd}_S| + 2$。因此，根据方程（3），我们看到 $K_S \subsetneq p_{\Sigma_v}(\langle c_i \rangle_{i \in \{1, \ldots\ldots, s\}})$。这证明了引理的第一个断言。

现在证明第二个断言。设 C 是 Σ_v的一个边界子群。假设不存在一条边 $e \in ES$，使得 C 和 G_e 可公度。因此，

不妨重新排序后，假设 C 在 $H_1(\Sigma_v)$ 中的像等于 $p_{\Sigma_v}(\langle c_1\rangle)$，并且由 $H_1(\Sigma_v)$ 中每个不同于 C 的边界子群的像生成的群 H 包含于 $p_{\Sigma_v}(\langle c_2, \ldots\ldots, c_s\rangle)$。我们证明 C 满足断言 $(2)(b)$、(c)或 (d)。同样，根据 Σ_v的可定向性，我们分两种情况讨论。

首先假设 Σ_v 是不可定向的。我们证明 C 满足断言 $(2)(b)$。如第一个断言的证明前一段所述，由于 $K_S \subseteq H$，只需证明子空间 $p_{\Sigma_v}(\langle c_1\rangle)$ 不包含于 H中。由方程（4），$t \geqslant 1$，因此子空间 $p_{\Sigma_v}(\langle c_1\rangle)$不包含于 $p_{\Sigma_v}(\langle c_2, \ldots\ldots, c_s\rangle)$中。特别地，我们看到 C 在 $H_1(\Sigma_v)$ 中的像（它包含于 $p_{\Sigma_v}(\langle c_1\rangle)$中）不包含于 $H \subseteq p_{\Sigma_v}(\langle c_2, \ldots\ldots, c_s\rangle)$中。这就证明了不可定向的情形。

现在假设 Σ_v 是可定向的。若 $|\mathrm{Bd}_v| = |\mathrm{Bd}_S| + 1$，则 C 满足断言 $(2)(c)$。因此，我们可以假设 $|\mathrm{Bd}_v| \geqslant |\mathrm{Bd}_S| + 2$。我们证明 C 满足断言 $(2)(b)$ 或断言 $(2)(d)$。若 $|\mathrm{Bd}_v| \geqslant |\mathrm{Bd}_S| + 3$，则由方程（3），群 $p_{\Sigma_v}(\langle c_1\rangle)$ 不包含于 H中，因此断言 $(2)(b)$ 成立。

最后，假设 $|\mathrm{Bd}_v| = |\mathrm{Bd}_S| + 2$，并固定 Σ_v 的一个定向。设 C，$D \in \mathrm{Bd}_v - \mathrm{Bd}_S$ 为非共轭的边界子群，并设 $c \in C$ 和 $d \in D$ 分别是 C 和 D 的生成元，它们诱导出 C 和 D 的定向。我们要证明 c 和 d 在 $H_1(G)$ 中的像不同。不妨重新排列，假设 c 被映到 $H_1(G)$ 中 c_1 的像，而 d 被映到 c_2 的像。

回忆一下，$H_1(\Sigma_v)$ 中唯一的关系是 $\sum_{i=1}^{s} p_{\Sigma_v}(c_i) = 0$，并且 $H_1(\Sigma_v)$ 在 $H_1(G)$ 中的像同构于 $H_1(\Sigma_v)$ 除以 $K \subseteq K_S \subseteq p_{\Sigma_v}(\langle c_3, \ldots\ldots, c_s\rangle)$ 所得的商群。因此，若 $\sum_{i=3}^{s} p_{\Sigma_v}(c_i)$ 在 $H_1(G)$ 中的像非平凡，则 c 和 d 生成 $H_1(G)$ 的不同子空间。若 $\sum_{i=3}^{s} p_{\Sigma_v}(c_i)$ 在 $H_1(G)$ 中的像平凡，则 c 和 d 在 $H_1(G)$ 中映为两个不同的非平凡元素：c 的像等于 d^{-1} 的像。 □

命题 4.6. 设 G 是满足既定假设的群。设 $\mathcal{H}$ 是 G 的有限生成子群的有限个共轭类组成的有限集，并且 G 相对于 $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ 单端。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$ 是一个保持 $\mathcal{H}$ 的外自同构，且 $\mathcal{H}$ 由 ϕ 的周期子群组成。ϕ 在 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上诱导的图自同构是平凡的。

证明。我们再次假设 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 不只是一个点。特别地，根据定理 2.13(1)，存在一个非初等顶点稳定子。

证明与引理 3.7 的证明类似，但我们还必须处理非平凡边稳定子。根据引理 4.4，自同构 ϕ 固定 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的每个叶。根据引理 3.6，ϕ 在 $H_1(G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上平凡作用。因此，根据引理 3.5，要么 ϕ 在 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上平凡作用，要么 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 是一个圆，且 ϕ 在其上通过旋转作用。第一种情形的结论显然成立，因此我们可以假设是第二种情形。于是，只需证明 ϕ 固定 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中的一个点。

设 $[H] \in \mathcal{G}$。根据引理 2.16，群 H 固定一个唯一的非初等顶点，或一个唯一的初等顶点。在这两种情况下，都可以将 $[H]$ 与 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中的一个唯一顶点关联起来。由于 $\phi \in$ 外自同构群 $^0(G, \mathcal{G})$，如果 $\mathcal{G} \neq \varnothing$，我们看到 ϕ 在 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中固定一个点。

因此，我们归结为 $\mathcal{G} = \varnothing$ 的情形。这意味着 $G = F_N$ 是一个非阿贝尔自由群。此外，每个初等子群都是无限循环的。对于 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的每个顶点 v，令 Inc_v 为与 v 相邻的边群的 G_v-共轭类集合。令 $\mathcal{F}_v$ 为 G_v 的最小自由因子系，使得对于每个 $[K_v] \in \mathrm{Inc}_v$，群 K_v 都是 $(G_v, \mathcal{F}_v)$-外围的。

根据引理 4.3，存在 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的一个顶点 v，使得 $\mathcal{F}_v \neq \{[G_v]_{G_v}\}$。由于 $\mathcal{F}_v \neq \{[G_v]_{G_v}\}$，且初等子群都是循环的，群 G_v 不是初等的。令 $n_v \geqslant 1$ 为满足 $\phi^{n_v}(v) = v$的极小整数。注意，$\mathcal{F}_v$ 在 ϕ^{n_v}作用下保持不变。此外，由于 ϕ 在 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上作为旋转作用，由 ϕ^{n_v} 诱导的$G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的图自同构是平凡的。

情形 1. 假设 ϕ^{n_v} 在外自同构群 $\mathrm{Out}(G_v, \mathcal{F}_v)$ 中的像是有限的。

注意，根据定理 2.13(8)，这尤其包括 v 是刚性的情形（回想一下，$\mathcal{H}$ 由 ϕ的周期子群组成）。

将定理 2.19 应用于自由积 $(G_v, \mathcal{F}_v)$ 以及 $\langle\phi_v^{n_v}\rangle$，群 $\langle\phi_v^{n_v}\rangle$固定了外空间中相对于 $\mathcal{F}_v$的 G_v 的一个 Grushko $(G_v, \mathcal{F}_v)$-自由分裂 U_v。

对于 v 的 ϕ-轨道中的每个 $w \in VG\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$，令 U_w 为 Grushko $(G_w, \mathcal{F}_w)$-自由分裂，其底层树与 U_v 相同，而 $g \in G_w$ 的作用由 $\Phi_w^{-n_w}(g) \in G_v$ 的作用给出，其中 n_w 是满足 $\phi^{n_w}(v) = w$ 且 $\Phi_w \in \phi^{n_w}$ 满足 $\Phi_w(G_v) = G_w$ 的最小正整数。我们断言，Grushko$(G_w, \mathcal{F}_w)$-自由分裂 U_w 仅取决于 U_v 和 ϕ。事实上，若 Φ_w，$\Phi'_w \in \phi^{n_w}$ 满足 $\Phi_w(G_v) = G_w = \Phi'_w(G_v)$，那么 $\Phi'_w \circ \Phi_w^{-1}$ 是 F_N 的一个保持 G_w 不变的内自同构 ad_h。由于 G_w 是非初等的，它在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中固定唯一一个顶点，因此它就是其在 F_N 中的正规化子。特别地，$h \in G_w$，而且 U_w 的构造不取决于 Φ_w 的选择。因此，分解 U_w 在 $\phi_w^{n_v}$ 的作用下保持不变。

令 U 为由 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 通过膨胀得到的 F_N 的分解：对每个 $m \geqslant 1$，在 $\phi^m(v)$ 处将分解 $U_{\phi^m(v)}$ 膨胀，并将 $\phi^m(v)$ 的相邻边附加到其边群固定的唯一点上。注意，由于利用 $w \in \langle\phi\rangle v$ 构造分解 U_w 是 ϕ-等变的，U 被 ϕ 固定。

令 S' 为由 U 通过压缩所有具有非平凡稳定子的边得到的 F_N 的自由分裂。则 S' 是 F_N 的一个 ϕ- 不变自由分裂。

我们断言，如果 ϕ 在 $F_N\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上作用非平凡，那么它在 $F_N\backslash S'$ 上的作用也非平凡。事实上，ϕ 在 $F_N\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上的任何非平凡作用，都会置换 S' 的子图；这些子图对应于 $(G_w$ 外空间中的点，$\mathcal{F}_w)$ 与 $w \in VF_N\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$。

根据引理 3.7，自同构 ϕ 在 $F_N\backslash S'$ 上平凡作用。因此，ϕ 在 $F_N\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上平凡作用。至此，情形 1 的证明完成。

情形 2. 假设 v 是柔性的。

根据定理 2.13(5)，顶点 v 是一个 QH 顶点。设 Σ_v 为相应的紧曲面。回顾引理 4.5 之前刚刚定义的记号 Bd_v、Bd_S 和 $\chi_S(\Sigma_v)$。由于$F_N\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 是一个圆，我们有 $|\mathrm{Bd}_S| \leqslant 2$。特别地，由于 Σ_v 是双曲的，我们有$\chi(\Sigma_v) \leqslant -1$ 和 $\chi_S(\Sigma_v) \leqslant 1$。

首先假设 $\chi_S(\Sigma_v) = 1$。那么 $\chi(\Sigma_v) = -1$ 和 $|\mathrm{Bd}_S| = 2$，因此 Σ_v 至少有两个边界分支。这意味着 Σ_v 同构于一个裤子曲面，或

一个双穿孔射影平面。在这两种情形下，这些曲面的映射类群都是有限的（参见 [Kor；关于双穿孔射影平面，参见推论 4.6]）。由于根据定理 2.13(9)， ϕ^{n_v}映射到 Σ_v 的映射类群中，因此 $\chi_S(\Sigma_v) = 1$的情形由情形 1 得出。

最后，假设 $\chi_S(\Sigma_v) < 1$。根据引理 4.5(1)，对于每个不属于 v 的 G 轨道的 $w \in VT_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$，$H_1(G_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像不同于 $H_1(G_w, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像。特别地，由于 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$，顶点 v 被 ϕ 固定。因此， ϕ 在 $F_N \backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上平凡作用。 □

4.2 理解顶点群上的外作用

根据命题 4.6，对于每个顶点 $v \in VT_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ （分别地，每条边 $e \in ET_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$），外自同构 ϕ 诱导一个外自同构 $\phi_v \in \mathrm{Out}(G_v)$ （分别地，($\phi_e \in \mathrm{Out}(G_e)$）。现在，我们根据 v 的性质来考察 ϕ_v 对 G_v 的外作用。

引理 4.7。设 G 是一个无挠有限生成群，且 S 是一个 G 分解。设 $v \in VS$ 是一个 *QH* 顶点，Σ_v 是与之关联的紧曲面。设 $\phi \in$外自同构群$(G) \cap \mathcal{K}(S)$ 是一个作用在 $H_1(G、\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上平凡的外自同构。

假设对于每条与 v 相邻且具有 $G_e \simeq \mathbb{Z}$ 的边 $e \in ES$，外自同构 ϕ_e 都是平凡的。那么 ϕ 保持 G-共轭类，即保持 $\pi_1(\Sigma_v)$ 的每个边界子群的一个生成元的 G-共轭类。

证明。首先假设 S 约化为顶点 v。那么 G 是一个曲面群，结论由 Ivanov [Iva 的工作（定理 1.2]）得出。

因此，我们可以假设 S 不约化为一个顶点。设 C 是 $\pi_1(\Sigma_v)$ 的一个边界子群，设 c 是 C 的一个生成元。注意，由于 G 是无挠的，群 C 是无限循环的。根据 QH 顶点的定义，对于每条与 v 相邻的边 $e \in ES$，群 G_e 都包含于 Σ_v 的一个边界子群中。现在，我们考察引理 4.5(2) 给出的四种可能情形。

假设引理 4.5(2)(a) 成立，因此存在 S 的一条边 e，使得G_e 是 C的有限指数子群。设 $\Phi \in \phi$ 是一个保 G_e 和G_v的自同构。根据假设，我们有 $\Phi_{|G_e} =$id$_{G_e}$。由于 $G_v \simeq \pi_1(\Sigma_v)$ 是有限生成自由群， G_e 包含于唯一的极大循环子群 C'中，因此 Φ 保 C' 和 $C \subseteq C'$。由于 Φ 逐元素固定 G_e，它也逐元素固定 C' 和 C。因此，我们看到 ϕ 保 c的共轭类。

假设引理 4.5(2)(b) 成立： $H_1(C, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像非平凡，并且对于 Σ_v 的每个不与 C共轭的边界子群 C'， $H_1(C, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 和 $H_1(C', \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像互不相同。由于 ϕ 置换 Σ_v 的边界子群生成元的共轭类，且 ϕ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, 上平凡作用，我们看到 c 的共轭类由 ϕ固定。

断言。假设引理 4.5(2)(c)或 (d) 成立，因此 Σ_v 是可定向的。那么 ϕ_v保持 Σ_v的定向。

证明。由于 S 是一个连通的 G 分解，存在 $\pi_1(\Sigma_v)$ 的一个边界分支 C'，它与 $e \in ES$ 的一个边稳定子 G_e 可公度。由于 ϕ_e 在 G_e 上平凡作用，

任何保持 e 的、属于 ϕ 外类的自同构也在 C' 上平凡作用。因此， ϕ_v 保持 Σ_v 边界上与 C' 关联的任意点处的定向。这表明 ϕ_v 诱导了 Σ_v 的一个保定向映射类。

□

假设引理 4.5(2)(c) 成立，从而 Σ_v 可定向，并且 C 是唯一一个不与某个边稳定子可公度的边界子群。我们固定 Σ_v 的一个定向，使得 c 是 C的正生成元。根据该断言， ϕ_v 保持 Σ_v的定向。因此， ϕ_v 将 $[c]$ 映射到 C 的某个生成元的共轭类，该生成元诱导给定定向，即 $\phi([c]) = [c]$。

最后，假设引理 4.5(2)(d) 成立，从而 Σ_v 可定向，并且 Σ_v 存在唯一的（在共轭意义下）边界子群 D ，它既不与 C 共轭，也不与某个边稳定子可公度。同样地，固定 Σ_v的一个定向，我们可以设 c 是 C 的正生成元，并且 $d \in D$ 是 D的正生成元。根据该断言， ϕ_v 保持 Σ_v的定向，因此 ϕ_v 将 $[c]$映射为其自身或 $[d]$。根据引理 4.5(2)(d) ， c 和 d 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像彼此不同。由于 ϕ 在 $H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, 上平凡作用，我们看到 ϕ 保持 c的共轭类。

□

引理 4.8。 设 G 是一个满足既定假设的群。设 $\mathcal{H}$ 是 G 的有限生成子群的共轭类的有限集，使得 G 相对于 $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ 单端。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$ 是一个保持 $\mathcal{H}$ 的外自同构，并且 $\mathcal{H}$ 由 ϕ 的周期子群组成。

设 $v \in VT_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 是一个刚性顶点。假设对于每条与 v 相邻且满足 $G_e \simeq \mathbb{Z}$ 的边 $e \in ET_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ ，外自同构 ϕ_e 是平凡的。则 ϕ_v =恒等。

证明。 根据定理 2.13(4)，群 G_v 是有限生成的。因此， (G_v、 $\mathcal{G}_v$) 定义了一个自由积。根据定理 2.13(8)，由 ϕ 诱导的 G_v 的外自同构 ϕ_v 具有有限阶。我们将证明 ϕ_v 实际上是平凡的。根据定理 2.19，存在一个由 ϕ_v 保持的 Grushko (G_v、 $\mathcal{G}_v$)-自由分裂 S_v 。

断言。 外自同构 ϕ_v 平凡作用于商图 $G_v \backslash S_v$。

证明。 我们将使用引理 3.5 证明该断言。注意，我们并不知道 ϕ_v 在 $H_1(G_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, 上平凡作用，因此无法应用引理 3.6。为克服这一困难，我们需要更详细地分析 ϕ_v 在 $G_v \backslash S_v$上的作用。

步骤 *1*。 ϕ_v 固定 $G_v \backslash S_v$ 中每个具有非平凡稳定子的顶点。特别地， ϕ_v 固定 $G_v \backslash S_v$的每个叶。

证明。 由于 S_v 中的边稳定子都是平凡的，并且 G_v 在 S_v 上的作用是极小的，只需证明 ϕ_v 保持 S_v的每个非平凡顶点稳定子 H 的 G_v-共轭类 $[H]_{G_v}$ 。设 $[H]_{G_v} \in \mathcal{G}_v$ 是 S_v的一个顶点稳定子H 的 G_v-共轭类。由于 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 是一个 (G, $\mathcal{G}$)-初等分解， H 在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中有一个不动点。此外， $[H]_G \in \mathcal{G}$ 和 v 要么是 H 的唯一不动点，要么 H 是 G_v 与一个初等顶点稳定子的交集，也就是说， H 是与 v相邻的一条边的稳定子。下面分别考察这两种情况。

假设 H 是与 v相邻的一条边 e 的稳定子。根据命题 4.6，外自同构 ϕ 在商图 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$上平凡作用。特别地， ϕ 有一个固定 e的代表元 Φ 。因此， $\Phi(G_v)=G_v$ 和 $\Phi(H)=H$，也就是说， ϕ_v 保持 H的G_v-共轭类。

现在假设 v 是 H 的唯一不动点，并且 $[H]_G\in\mathcal{G}$。由于 $\phi\in \mathsf{Out}^0(G,\ \mathcal{G})$，外类 ϕ 保持 G-共轭类 H。根据 [GL2，引理 2.2] （应用于 $K=G_v$），由于 H 不在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中固定一条边，外自同构 ϕ_v 保持 G_v- 共轭类 H。断言的第一部分得证。由于 G_v 对 S_v 的作用是极小的，$G_v\backslash S_v$ 的每个叶都有非平凡稳定子，因此根据断言的第一部分， ϕ_v 固定 $G_v\backslash S_v$ 的每个叶。■

令 Inc_v 为与 v 关联的 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的边稳定子的 G_v-共轭类集合。令 Inc_v^{cyc} 为 Inc_v 的子集，由与 v 关联的 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 的边稳定子的 G_v-共轭类组成，且具有 $(G,\ \mathcal{G})$-非外围循环稳定子。

步骤 *2.* 设 $[G_e]_{G_v}\in \mathsf{Inc}_v^{cyc}$，且 $c\in G_e$ 是一个生成元。那么 c 在 S_v上双曲地作用。此外，存在 $\Phi_v\in\phi_v$ 使得 $\Phi_v(c)=c$。因此， Φ_v 保持 c 在 S_v 中的轴 $\mathsf{Ax}(c)$ 及其定向。

证明。 由于 c 是 $(G,\mathcal{G})$-非外围的，它在 Grushko $(G_v,\mathcal{G}_v)$- 自由分裂 S_v中不固定任何点。因此， c 在 S_v上双曲地作用。根据假设， ϕ 在每个满足 $G_e\simeq\mathbb{Z}$ 的边群 G_e 上都平凡作用，因此存在 $\Phi_v\in\phi_v$ 使得 $\Phi_v(c)=c$ （取任意一个固定边 e的代表元即可）。因此， Φ_v 保持 c 在 S_v 中的轴 $\mathsf{Ax}(c)$ 及其定向。■

若 $[G_e]_{G_v}\in\mathsf{Inc}_v^{cyc}$，且若 c_e 是 G_e的一个生成元，我们将 γ_{c_e} 称为 (c_e) 在 $G_v\backslash S_v$中的轴 Ax 的投影。令 $K^{S_v\ \mathsf{Inc}_v^{cyc}}$为由满足 $[\langle c_e\rangle]_{G_v}\in\mathsf{Inc}_v^{cyc}$的类$[\gamma_{c_e}]$ 生成的 $H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})$ 的子群。令 K_{Inc_v} （分别为 $K_{\mathsf{Inc}_v^{cyc}}$）为由$\langle G_e\rangle_{[G_e]_{G_v}\in\mathsf{Inc}_v}$ （分别为$\langle G_e\rangle_{[G_e]_{G_v}\in\mathsf{Inc}_v^{cyc}}$）的像生成的 $H_1(G_v,\mathbb{Z})$的子群。

步骤 *3.* 外自同构 ϕ_v 在$H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})$上平凡作用。

证明. 根据步骤 2， ϕ_v 逐元素固定群 $K^{S_v\ \mathsf{Inc}_v^{cyc}}$。设 T 为商群$H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})/K^{S_v\ \mathsf{Inc}_v^{cyc}}$的挠部分，并设 V为 T在$H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})$中的原像。注意， V 是 $H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})$的直因子。于是 V 在 ϕ_v 作用下保持不变，且 $K^{S_v\ \mathsf{Inc}_v^{cyc}}$在 V中具有有限指数。由于 ϕ_v 逐元素固定 $K^{S_v\ \mathsf{Inc}_v^{cyc}}$，且 V是自由阿贝尔群，因此 ϕ_v 逐元素固定 V。

现在我们断言， ϕ_v 逐元素固定自由阿贝尔群$H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})/V$。由于 ϕ_v 具有有限阶，它在 $H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})/V$ 上诱导出一个有限阶自同构。由于

$$\ker\Big(\mathrm{GL}(H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})/V)\to\mathrm{GL}(H_1(G_v\backslash S_v,\mathbb{Z})/V\otimes\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\Big)$$

i是无挠的，只需证明 ϕ_v 对 $H_1(G_v\backslash S_v$平凡作用 $\mathbb{Z})/V\otimes\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。

令 H 为同态 $H_1(G_v,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\to H_1(G,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的像。令 $K_{\mathsf{Inc}_v}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 为 K_{Inc_v} 在 $H_1(G_v,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的像。根据命题 4.6，我们有

$\phi \in \mathcal{K}(T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}})$。因此，根据引理 3.1，存在 $K_{\mathrm{Inc}_v}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 的一个子群 K，使得群 H 适合于一个由 ϕ_v-等变映射构成的正合列

$$K \to H_1(G_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to H. \tag{5}$$

投影 $\widetilde{p}_v\colon H_1(G_v, \mathbb{Z}) \to H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z})$ 是满射且 ϕ_v-等变的。若$[G_e]_{G_v} \in \mathrm{Inc}_v\backslash\mathrm{Inc}_v^{cyc}$，则 G_e 是 S_v的不动点，因此，G_e 在 $\pi_1(G_v\backslash S_v)$和 $H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z})$ 中的像都是平凡的。因此，我们有

$$\widetilde{p}_v(K_{\mathrm{Inc}_v}) = \widetilde{p}_v(K_{\mathrm{Inc}_v^{cyc}}) = K_{\mathrm{Inc}_v^{cyc}}^{S_v} \subseteq V.$$

因此，投影

$$p_v\colon H_1(G_v, \mathbb{Z})/K_{\mathrm{Inc}_v} \to H_1(\overline{G_v\backslash S_v}, \mathbb{Z})/V$$

是良定义的、满射且 ϕ_v-等变的。将 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,张量化后，同态

$$H_1(G_v, \mathbb{Z})/K_{\mathrm{Inc}_v} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to H_1(\overline{G_v\backslash S_v}, \mathbb{Z})/V \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \tag{6}$$

是满射且 ϕ_v-等变的。群 $H_1(G_v, \mathbb{Z})/K_{\mathrm{Inc}_v} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 与$H_1(G_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/K_{\mathrm{Inc}_v}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 同构（回想一下，我们将 $K_{\mathrm{Inc}_v}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 定义为 K_{Inc_v}在 $H_1(G_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$中的像）。根据等式 (5)，群 $H_1(G_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/K_{\mathrm{Inc}_v}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 是 H的商群。因此，H 等变满射到群 $H_1(G_v, \mathbb{Z})/K_{\mathrm{Inc}_v} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$上。结合等式 (5) 和 (6)，我们得到一个 ϕ_v-等变满同态

$$H \to H_1(\overline{G_v\backslash S_v}, \mathbb{Z})/V \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

由于 $H \subseteq H_1(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，并且由于 $\phi_v \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$ 在 H 上平凡作用，因而也在 $H_1(\overline{G_v\backslash S_v}, \mathbb{Z})/V \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 上平凡作用。这证明 ϕ_v 逐点固定 $H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z})/V$。

令 $x \in H_1(\overline{G_v\backslash S_v}, \mathbb{Z})$。由于 ϕ_v 逐点固定 V 和 $H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z})/V$,，存在 $v_x \in V$ 使得 $\phi_v(x) = x + v_x$。由于 $\phi_v(v_x) = v_x$，且 ϕ_v 是 $H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z})$ 的有限阶自同构，我们必有 $v_x = 0$，因此 ϕ_v 逐点固定$H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z})$。■

根据步骤 3，ϕ_v 逐点固定 $H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z})$ 和 $H_1(G_v\backslash S_v, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。根据步骤 1，$\phi_v$ 固定 $G_v\backslash S_v$ 的每一条叶。根据引理 3.5，ϕ_v 要么逐点固定 $G_v\backslash S_v$，要么 $G_v\backslash S_v$ 是一个圆，且 ϕ_v 在其上作旋转。

为了证明 ϕ_v 逐点固定 $G_v\backslash S_v$，还需证明：如果 $G_v\backslash S_v$是一个圆，那么 ϕ_v 会固定其中的一个点。因此，设 $G_v\backslash S_v$ 是一个圆。由于 G_v 是非初等的，特别是非循环的，群图 $G_v\backslash S_v$ 包含一个稳定子非平凡的顶点。根据步骤 1，该顶点由 ϕ_v固定。结论得证。□

根据断言，ϕ_v 属于 $\mathcal{K}(S_v)$。现在我们利用命题 2.4 中的短正合列来证明 ϕ_v 是平凡的。先假设 $\mathcal{G}_v = \varnothing$。根据命题 2.4，我们有$\mathcal{K}(S_v) = \{\mathrm{id}\}$，因此此时结论成立。

假设 $\mathcal{G}_v \neq \varnothing$，并令 $[H] \in \mathcal{G}_v$ 满足 $H \neq \{1\}$。我们有一个自然同态 $\langle\phi_v\rangle \to \mathrm{Aut}(H)$，其定义为将 ϕ_v 映射到 ϕ_v 的唯一代表元 Φ_H；该代表元固定与 H 所固定的顶点相邻的一条指定边。

存在唯一的 $i \in \{1、\ldots\ldots、k\}$ 使得 $H \subseteq G_i$。G_i 的唯一性意味着，自同构 Φ_H 可延拓为 ϕ 的一个代表元 Φ，且该代表元保持 G_i 不变。由于 $\phi_{|G_i} \in \mathrm{Out}^*(G_i)$，我们有 $\Phi_{|G_i} \in \mathrm{Aut}^*(G_i)$。特别地，根据既定假设的条目 (4)，H 中所有 Φ-周期的元素（因而也是 Φ_H-周期的元素）都保持不变。由于 ϕ_v 是有限阶的，Φ_H 也是有限阶的，因此我们看到 ϕ_v 在 $\mathrm{Aut}(H)$ 中的像是平凡的。

根据命题 2.4，外自同构群 ϕ_v 包含于群的直积 N中，其中每个直因子都同构于 G_v 的一个子群 H，且具有 $[H] \in \mathcal{G}_v$。由于 G 无挠，我们看到 N 也是无挠的。特别地，ϕ_v 是平凡的。□

4.3 结论及定理 4.1 的证明

在本节中，我们结合上述各节的结果来证明定理 4.1。我们首先记录下面的初等引理。

引理 4.9。设 $(G,\mathcal{G})$ 为自由积，其中 G 无挠；设 $g \in G$ 为 $(G、\mathcal{G})$-非外围的。则 $N_G(\langle g\rangle) = C_G(g)$ 是根封闭的无限循环群。

证明。设 $h \in G - \{1\}$，并令 $m > 0$ 满足 $h^m \in N_G(\langle g\rangle)$。设 T 为一个 Grushko$(G, \mathcal{G})$-自由分裂。由于 g是 $(G, \mathcal{G})$-非外围的，它在 T上双曲地作用。令 $\mathrm{Ax}(g)$ 为 g的轴。于是对于每个 $n \in \mathbb{Z}^*$，我们有 $\mathrm{Ax}(g) = \mathrm{Ax}(g^n)$。由于$h^m \in N_G(\langle g\rangle)$，我们有

$$h^m \mathrm{Ax}(g) = \mathrm{Ax}(h^m g h^{-m}) = \mathrm{Ax}(g).$$

因此，群 $\langle g, h^m\rangle$ 保留 $\mathrm{Ax}(g)$。

群 $H = \mathrm{Stab}_G(\mathrm{Ax}(g))$ 有一个指数为二的子群 H'，它保留 $\mathrm{Ax}(g)$的定向。因此，我们有一个同态 $H' \to \mathbb{Z}$，它由 $\mathrm{Ax}(g)$中的平移长度给出。由于 T 是一个自由分解，$H' \to \mathbb{Z}$ 的核是平凡的。因此，H 是虚循环的。由于 G 无挠，群 H 是循环的，由一个在 $\mathrm{Ax}(g)$上双曲地作用的元素生成。由于 $h^m \in H - \{1\}$、h 和 h^m 在T 上双曲地作用，且 $\mathrm{Ax}(h)$ =$\mathrm{Ax}(h^m)$ =$\mathrm{Ax}(g)$。因此，h 包含于循环群 H中，所以 h与 g可交换。□

现在我们可以证明本节的主定理了。

定理 *4.1* 的证明。证明采用归纳法，归纳对象是 $(G, \mathcal{G})$的 Grushko 秩 $\xi(G, \mathcal{G})$。如果 $\xi(G, \mathcal{G}) = 1$，那么要么 $G = G_1$，要么 $G = \mathbb{Z}$。如果 $G = G_1$，则结论由既定假设的第 (3) 项推出。如果 $G = \mathbb{Z}$，则 $\mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3) = \{\mathrm{Id}\}$，结论显然成立。

现在假设 $\xi(G, \mathcal{G}) \geqslant 2$。令 $\mathcal{F}$为极小的 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统，使得对于每个 $[H] \in \mathcal{H}$，群 H都是 $(G, \mathcal{F})$-外围的。那么 ϕ保持 $\mathcal{F}$。根据引理 3.3，$\mathcal{F}$ 中的每个元素都被 ϕ保持。

令 $[A] \in \mathcal{F}$，并令 $\phi_{|A} \in \mathrm{Out}(A)$ 为由 ϕ 诱导的 A 的外自同构。令 $\mathcal{H}_A$ 为由 $\mathcal{H}$ 诱导的 A 的子群的 A-共轭类集合。假设 $\mathcal{F} \neq \{[G]\}$。那么，对于每个 $[A] \in \mathcal{F}$，我们有 $\xi(A, \mathcal{G}_{|A}) < \xi(G, \mathcal{G})$。由引理 3.9 及

归纳假设，对于每个 $[A]\in\mathcal{F}$，我们有 $\phi_{|A}\in\mathrm{Out}(A,\ \mathcal{H}_A^{(t)})$。由此可得 $\phi\in\mathrm{Out}(G,\ \mathcal{H}^{(t)})$。

因此，我们可以假设 $\mathcal{F}=\{[G]\}$，也就是说，G 相对于 $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$ 是单端的。群 G 相对双曲于 $\mathcal{G}$。令 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 为定理 2.13 给出的 JSJ $(G,\ \mathcal{G}\cup\mathcal{H})$-初等分解。树 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 在 ϕ 下保持不变。根据命题 4.6，由 ϕ 在 $G\backslash T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 上诱导的图自同构是平凡的。因此，对于每个 $v\in VT_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$，都有一个自然同态 $\langle\phi\rangle\to\mathrm{Out}(G_v)$。回顾一下，我们将 ϕ 的像记为 ϕ_v。类似地，对于每条边 $e\in ET_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$，都有一个自然同态$\langle\phi\rangle\to$Out$(G_e)$，并将 ϕ 的像记为 ϕ_e。

对于每个 $v\in VT_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$，令 $\mathcal{H}_v$ 为由 $\mathcal{H}$ 诱导的 G_v 的 G_v-共轭类子群集合。由于对于每个 $[H]\in\mathcal{H}$，群 H 在 $T_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 中都是椭圆的，只需证明对于每个 $v\in VT_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$，都有 $\phi_v\in\mathrm{Out}(G_v,\ \mathcal{H}_v^{(t)})$。我们首先需要以下断言。

断言。 令 $e\in ET_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$ 满足 $G_e\simeq\mathbb{Z}$。则 $\phi_e=\mathrm{id}$。

证明。令 $\Phi_e\in\phi_e$ 由代表元 Φ 限制到 G_e 后诱导，该代表元属于 ϕ且保持 e；令 t 为 G_e的一个生成元。则 $\Phi_e(t)=t$ 或 $\Phi_e(t)=t^{-1}$。因此，t 是 Φ_e 和 Φ的周期元素。假设 G_e 包含于外围子群G_i中，其中 $i\in\{1,\ .....,\ k\}$。由于 G_i是自正规的，G_i是 G中包含G_e 且满足 $[G_i]\in\mathcal{G}$的唯一子群。因此 $\Phi(G_i)=G_i$。根据既定假设的第 (4) 项，我们得出 $\Phi_e(t)=\Phi_{|G_i}(t)=t$。

因此，我们可以假设 G_e 是 $(G,\ \mathcal{G})$-非外围的。在这种情况下，根据引理 4.9，t 在 G中不与 t^{-1} 共轭。因此，只需证明 ϕ 保持 G中 t 的共轭类。

由引理 4.3，群 G_e 包含于一个真 $(G,\mathcal{G})$-自由因子中。令 A 为包含 G_e的极小（必为真）$(G,\mathcal{G})$-自由因子。则 $[A]$ 在 ϕ作用下保持不变。此外，由于 A 是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子，根据引理 3.9，ϕ 在外自同构群 (A) 中的像 $\phi_{|A}$ 包含于 $\mathrm{IA}(A,\mathcal{G}_{|A},3)$。由于外自同构群 (G_e) 是有限群，G_e 中任一元素的每个 A-共轭类都是 $\phi_{|A}$-周期的。由于 A 是真因子，我们有 $\xi(A,\mathcal{G}_{|A})<\xi(G,\mathcal{G})$。根据归纳假设，我们得到 $\phi_{|A}$ 保持 t 的 A-共轭类，且 Φ_e逐元素固定 G_e。 □

现在我们证明，对每个 $v\in VT_{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}$，都有 $\phi_v\in$外自同构群 $\mathrm{Out}(G_v,\mathcal{H}_v^{(t)})$。根据 v 的性质，我们分几种情况讨论。

情形 1. 假设 G_v 是初等非循环的。

在这种情况下，我们有 $[G_v]\in\mathcal{G}$。根据既定假设的第 (3) 项，由于$\phi\in$IA$(G,\ \mathcal{G},\ 3)$，我们可知 $\phi_v\in$外自同构群$(G_v,\ \mathcal{H}_v^{(t)})$。

情形 2. 假设 G_v 是初等循环的。

由于边稳定子都是无限的，存在一条与 v 相邻的边 e，使得 G_e在 G_v中的指数有限。由断言可知，ϕ_e 在 G_e上平凡作用。由于 $G_e\subseteq G_v$是无限循环的，这意味着 ϕ_v 在 G_v上平凡作用。

情形 3. 假设 v 是刚性的。

由断言可知， ϕ 在与带有 v 的 e 相邻的每条边的稳定子上平凡作用 $G_e \simeq \mathbb{Z}$。由引理 4.8，外自同构 ϕ_v 是平凡的。

情况 4。 假设 G_v 是一个柔性非初等顶点。

回顾一下，由定理 2.13(5)，存在一个紧曲面 Σ_v ，使得 G_v与 $\pi_1(\Sigma_v)$同构。此外，对于每条与 G_v相邻的边 e ，群 G_e 包含于 $\pi_1(\Sigma_v)$ 的某个边界子群中；并且对于每个 $[H] \in \mathcal{H}_v$，群 H 包含于 $\pi_1(\Sigma_v)$的某个边界子群中。

外类 ϕ_v 进而诱导出 $\pi_1(\Sigma_v)$ 的一个外自同构，它保持 $\pi_1(\Sigma_v)$的边界子群的共轭类集合。因此，只需证明 ϕ_v 固定 $\pi_1(\Sigma_v)$的每个边界子群的生成元的共轭类。由断言可知，ϕ 在与带有 $G_e \simeq \mathbb{Z}$的 v相邻的每条边 e 的稳定子上平凡作用。由引理 4.7，外自同构 ϕ_v 保持每个边界子群的生成元的共轭类。至此，最后一种情况的证明以及定理的证明均告完成。

□

我们以证明定理 4.1 的自同构版本来结束本节。

推论 4.10. 设 G 是满足既定假设的群。考虑自同构 $\Phi \in \mathrm{IA}^{\mathrm{Aut}}(G, \mathcal{G}, 3)$。$G$ 的每个 Φ-周期元素都被 Φ 固定。

证明. 设 g 是 G 的一个 Φ-周期元素，设 $H = \langle \phi^\ell(g) \rangle_{\ell \in \mathbb{N}}$ ，并设 $\mathcal{H} = \{[H]\}$。由于 g 是 Φ-周期的，群 H 是有限生成且 Φ-不变的。令 A 为包含 H 的极小 $(G, \mathcal{G})$-自由因子。于是 A 在 Φ 下保持不变。因此，利用归纳论证，我们可以假设 $G = A$。

那么，群 G 相对于 $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ 是单端的。令 $T_{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}}$ 为定理 2.13 给出的相应 JSJ$(G, \mathcal{G} \cup \mathcal{H})$-初等分解。

令 $\phi = [\Phi] \in \in$外自同构群(G)。根据命题 4.6，外自同构 ϕ 平凡作用于商图 $G \backslash T_{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}}$。此外，根据定理 4.1 证明中的断言，外自同构 ϕ 平凡作用于每个具有循环稳定子的边群。

群 H 在 $T_{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}}$中固定一个点 v 。此外，可以选择 v ，使得 G_v 在 Φ的作用下保持不变。事实上，根据引理 2.16，群 H 固定一个唯一的初等顶点或一个唯一的非初等顶点。我们根据 v考察不同的情形。

如果 G_v 是初等非循环的，那么根据既定假设的第 (4) 项，自同构 Φ 在 H上平凡作用。

假设 G_v 是初等循环的。由于 ϕ 在 $T_{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}}$的循环边稳定子上平凡作用，我们可以看出，$\Phi_v$ 在 H上平凡作用。

假设 G_v 是非初等且刚性的。根据引理 4.8，自同构 Φ在 G_v 上的作用是由元素 $h \in G_v$给出的整体共轭。因此，对于每个 $\ell > 0$，都有$\Phi^\ell(g) = h^\ell g h^{-\ell}$。由于 g 是 Φ-周期的，存在 $m > 0$ 使得 $h^m \in C(g)$。

假设 g 是 $(G, \mathcal{G})$-非外围的。根据引理 4.9，它的中心化子是无限循环的且根封闭。因此，$h \in C(g)$ 和 g 被 Φ 固定。

假设存在 $[G_i] \in \mathcal{G}$ 且满足 $g \in G_i$。那么 G_i 由 Φ保持不变。此情形由既定假设的第 (4) 项推出。

最后，假设 G_v 是非初等且柔性的。由定理 2.13(5)，存在一个紧曲面 Σ_v，使得 G_v 与 $\pi_1(\Sigma_v)$同构。此外，群H 包含于唯一的边界子群中。由引理 4.7，自同构 Φ逐元素固定该边界子群。证明至此完成。

□

5 周期自由因子系

设 G 是满足既定假设的群。本节中，我们证明以下定理。

定理 5.1. 设 G 是满足既定假设的群。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$。每个 ϕ-周期的 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统均由 ϕ固定。

定理 5.1 的证明依赖于对极大的 ϕ-周期 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统的研究。我们根据该自由因子系统是否稀有，采用两种不同的技巧。

如果该自由因子系统是稀有的，那么它会自然诱导出一个 ϕ-周期 $(G, \mathcal{G})$-自由分裂。因此，剩下的问题是研究 ϕ-周期 $(G, \mathcal{G})$-自由分裂。这是第 5.1 节的内容。

当该自由因子系统不是稀有的时，可以自然地将其与 ϕ 的吸引层片 关联起来。吸引层状集是 ϕ 的动力学不变量，ϕ 在其上自然地作用。ϕ 在（有限个）吸引层状集上的作用由 ϕ 的一个相对列车轨道编码。第 5.2 节将详细研究这一作用。

5.1 悬挂的 JSJ 分解与周期自由分裂

设 G 是一个满足既定假设的群，并设 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$。在本节中，我们证明以下定理。

定理 5.2. 设 G 是一个满足既定假设的群。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$。每个 ϕ-周期的 $(G, \mathcal{G})$-自由分裂都被 ϕ 固定。

设 $\Phi \in \phi$ 是 ϕ 的一个代表元。证明需要理解由 Φ 对 G 产生的悬挂，即群

$$G_\Phi = G \rtimes_\Phi \mathbb{Z} = \langle G, t \mid tgt^{-1} = \phi(g)\ \forall g \in G \rangle.$$

如果 $\Psi \in$ 自同构群$(G, \mathcal{G})$ 与 Φ 属于同一个外类，那么 G_Φ 和 G_Ψ 同构。因此，如果 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$ 和 $\Phi \in \phi$，我们可以用 G_ϕ 表示一个群，其某个表示为 G_Φ。

我们将在命题 5.6 中看到，JSJ G_ϕ-循环分裂的圆柱树编码了所有 ϕ-周期 $(G, \mathcal{G})$-自由分裂的集合。这表明，为了理解所有 ϕ-周期的 $(G, \mathcal{G})$-自由分裂，只需理解 G_ϕ 在其圆柱树上的作用。

注意，如果 T 是一个 G_ϕ 分解，且 G 不固定任何点，那么 G 在 T 上的限制作用会导出一个 G 分解 T^G。事实上，G 在 T 上的作用

是极小的，这可由以下事实得出：G 是 G_ϕ 的正规子群，且 G_ϕ 在 T 上的作用是极小的。我们在下面的引理中记录关于树 T 的信息，它既可视为一个 G_ϕ 分解，也可视为一个 G 分解。

引理 5.3 ([Dah2，引理 2.6、2.7、2.8、2.9])。设 $(G,\mathcal{G})$ 是一个自由积，且令 $\phi\in$ 外自同构群$(G,\mathcal{G})$。设 T 是一个 G_ϕ-分解，其中 G 不固定任何点。

(1) 若 c 是 T 的一个胞腔，则 c 的 G_Φ-稳定子同构于 $G_c\rtimes\mathbb{Z}$，其中 c 的 G-稳定子为 G_c。*(2)* 若所有 G_Φ-边稳定子都是虚循环的，则 T 不存在一个其 G_Φ-稳定子为无限端的胞腔 c。*(3)* 若 T 是一个 G_ϕ-循环分解，且对每个 $[G_i]\in\mathcal{G}$，群 G_i 都是椭圆的，则 T^G 是一个 $(G,\mathcal{G})$-自由分裂。

设 $\mathcal{F}$ 是一个稀有的真 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子系统。可以规范地为 $\mathcal{F}$ 关联一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由分裂 $T_\mathcal{F}$。$T_\mathcal{F}$ 的顶点稳定子的共轭类包含于 $\mathcal{F}$ 中，且 $T_\mathcal{F}$ 有唯一一个边轨道。群 $\mathrm{Aut}(G,\ \mathcal{F})$ 保持 $T_\mathcal{F}$ 的 G-等变等距类。特别地，我们有如下结论，其中最后一个断言由引理 5.3(1) 得出。

引理 5.4. 设 $(G,\mathcal{G})$ 是一个自由积，且 $\mathcal{F}$ 是一个稀有的 $(G,\mathcal{G})$-自由因子系统。设 $\Phi\in$ 自同构群$(G,\mathcal{F})$。

(1) G 在 $T_\mathcal{F}$ 上的作用可扩展为 G_Φ 在 $T_\mathcal{F}$ 上的作用。

(2) G_Φ-分解 $T_\mathcal{F}$ 是一个 G_Φ-循环分解。 □

由引理 5.3(1)，群 G_ϕ 是单端的。由于根据既定假设，G 是有限表示的，G_ϕ 也如此。

设 $T_{JSJ}(G_\phi)$ 是定理 2.8 给出的一个 JSJ G_ϕ-循环分解，并设 $T_c(G_\phi)$ 是与之相关的圆柱树。我们注意到，当 G 是自由群时，Guirardel–Horbez [GH3 的定理 6.12] 已经讨论过树 $T_c(G_\phi)$。

现在我们描述树 $T_c(G_\phi)$ 的顶点稳定子（将其视为一个 G_ϕ-分解）。若 $\Phi\in\phi$，请回忆 $\mathrm{Per}(\Phi)$ 是 Φ 的周期子群。

引理 5.5. 令 $v\in VT_c(G_\phi)$。

(1) 假设 v 对应于一个圆柱 $C\subseteq T_{JSJ}(\phi)$。令 $e\in EC$，令 $\ell>0$，并令 $\Phi\in\phi^\ell$ 生成 $(G_\phi)_e$。存在整除 ℓ 的 $m>0$ 和 $\Psi\in\phi^m$，使得 v 在 G_ϕ 中的稳定子等于 $\mathrm{Per}(\Phi)\rtimes_\Psi\mathbb{Z}$。*(2)* 若 v 是 $T_{JSJ}(G_\phi)$ 的一个顶点，则存在一个 $(G、\mathcal{G})$-自由因子 A、$\ell>0$，以及一个保持 A 的代表元 $\Phi\in\phi^\ell$，使得 $(G_\phi)_v$ 等于 $A\rtimes_\Phi\mathbb{Z}$。此外，$T^G_{JSJ}(G_\phi)$ 的顶点稳定子的 G-共轭类集合诱导出一个 $(G、\mathcal{G})$-自由因子系统。

证明。 圆柱顶点的稳定子同构于 $\mathrm{Per}(\Phi) \rtimes_\Psi \mathbb{Z}$ 这一事实由 [AGH，引理 6.2] 得出。

现在我们证明第二个断言。树 $T_{JSJ}(G_\phi)$ 是一个 G_ϕ-循环分裂。因此，根据引理 5.3(3)，树 $T^G_{JSJ}(G_\phi)$ 是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由分裂。特别地，$T^G_{JSJ}(G_\phi)$ 的每个顶点稳定子都是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子，并且 $T^G_{JSJ}(\phi)$ 的顶点稳定子的 G-共轭类集合是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子系统。根据引理 5.3(1)，对于 $T_{JSJ}(G_\phi)$ 的每个顶点 v，存在 $(G,\ \mathcal{G})$ 的一个自由因子 A、$\ell > 0$ 以及一个保持 A 的代表元 $\Phi \in \phi^\ell$，使得 $(G_\phi)_v$ 等于 $A \rtimes_\Phi \mathbb{Z}$。 □

命题 5.6. 设 S 是一个 ϕ-不变的 $(G,\mathcal{G})$-自由分裂。那么 S 和 $T^G_c(G_\phi)$ 作为 $(G,\mathcal{G})$-分裂是相容的。此外，一个公共细化可通过在 $T^G_c(G_\phi)$ 的圆柱顶点处对树进行膨胀而得到。

证明。 由于 S 是 ϕ-不变的，G对 S 的作用可延拓为一个 G_ϕ-作用。根据引理 5.3，S 是一个 G_ϕ-循环分解。我们希望应用引理 2.11 来完成证明。因此，只需证明 $T_{JSJ}(G_\phi)$ 的每个顶点都是刚性的。

根据定理 2.8，柔性顶点都是无限端的。根据引理 5.3(2)，不存在具有无限端顶点稳定子的 G_ϕ-循环分解。因此，$T_{JSJ}(G_\phi)$ 的每个顶点都是刚性的。于是，根据引理 2.11，可通过在其圆柱顶点处对树进行膨胀，从 $T_c(G_\phi)$ 得到一个公共细化。 □

现在我们可以证明本节的主定理。

定理 *5.2* 的证明。 令 $\phi \in \mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$。令 S 为一个 ϕ-周期的 $(G,\ \mathcal{G})$-自由分解。设 $\ell > 0$ 满足：ϕ^ℓ 固定 S，并在 $G\backslash S$ 上平凡作用。令 $T_c(G_{\phi^\ell})$ 为与命题 2.10 给出的 JSJ $(G_{\phi^\ell},\ \mathcal{G})$-循环分解相关联的圆柱树。注意，对每个 $[G_i] \in \mathcal{G}$，群 G_i 在 $T_c(G_{\phi^\ell})$ 中都是椭圆的，因为它在任何 JSJ $(G_{\phi^\ell},\ \mathcal{G})$-循环分解中都是椭圆的。我们将 $T_c(G_{\phi^\ell})$ 所考虑的树 $T^G_c(G_{\phi^\ell})$ 记作一个$(G,\ \mathcal{G})$-分解。它配备了其顶点集的一个划分 $VT^G_c(G_{\phi^\ell}) = \tilde{V}_0 \coprod \tilde{V}_1$；其中，对每个 $v \in V_0$，v 对应于 $T_{JSJ}(G_{\phi^\ell})$ 中的一个顶点；对每个 $v \in V_1$，v对应于 $T_{JSJ}(G_{\phi^\ell})$的一个圆柱。令 $VG\backslash T^G_c(G_{\phi^\ell}) = V_0 \coprod V_1$为诱导划分。

注意到，群 G_{ϕ^ℓ} 是 G_ϕ的正规子群，因此 G_ϕ 通过共轭对 G_{ϕ^ℓ}的作用诱导出一个同态 $G_\phi \to \mathrm{Aut}(G_{\phi^\ell})$。由于根据命题 2.10，$T_c(G_{\phi^\ell})$ 在 $\mathrm{Aut}(G_{\phi^\ell})$ 下保持不变，我们得到 G_ϕ 对 $T_c(G_{\phi^\ell})$的作用。特别地，外自同构 ϕ 保持 $T^G_c(G_{\phi^\ell})$不变。

断言 1. 设 $v \in V_1$ 是一个圆柱顶点。存在 $\Phi \in \phi$ 使得 $G_v = \mathrm{Fix}(\Phi)$。

证明。 由引理 5.5，存在 $\Psi \in \phi^\ell$，使得 v 的 G-稳定子同构于 $\mathrm{Per}(\Psi)$。将定理 4.1 应用于 $\mathcal{H} = \{\phi^n[\mathrm{Per}(\Psi)]\}_{n\in\mathbb{N}}$，可得存在 $\Phi \in \phi$ 使得 $\mathrm{Per}(\Psi) = \mathrm{Fix}(\Phi)$。特别地，$T^G_c(G_{\phi^\ell})$ 中任意圆柱的 G-稳定子都是某个 $\Phi \in \phi$的不动子群。 □

断言 2. 外类 ϕ 逐点固定图 $G\backslash T^G_c(G_{\phi^\ell})$。

证明。 根据引理 3.6， ϕ 在 $H_1(G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell}),\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上平凡作用。为了应用引理 3.5，我们需要证明 ϕ 逐点固定 $G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 的每个叶。

步骤 *1.* 设 $v\in V_0$。若 G_v 非平凡，则 ϕ 固定 v。

~证明。 由引理 5.5(1)， V_0 中顶点的 G-稳定子集合是一个 ϕ-不变的 $(G,\ \mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F}_{\tilde{V}_0}$。因此， V_0 中由 G_v 固定的顶点 v 是唯一的。所以，只需证明 ϕ 保持 G 的 G_v 共轭类。由引理 3.3， $\mathcal{F}_{\tilde{V}_0}$ 中每个 G-共轭类都是 ϕ-不变的。特别地，$[G_v]$ 是 ϕ-不变的，且 v 被 ϕ 固定。■

步骤 *2.* 外类 ϕ 固定 $G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 的每个叶。

证明。 设 v 是 $G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 的一个叶，设 e 是其相邻边，并设 e 中不同于 v 的端点为 w。

首先假设 $v\in V_0$。由于 v 是一片叶，根据 G 在 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 上作用的极小性，它的 G-稳定子非平凡。因此，由步骤 1 可知， v 被 ϕ 固定。

现在假设 $v\in V_1$。由断言 1，存在 $\Phi\in\phi$ 使得 $G_v=\mathrm{Fix}(\Phi)$。根据 G 在 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 上作用的极小性，我们有 $G_v\not\subseteq G_w$。因此， v 是 $\mathrm{Fix}(\Phi)$ 的唯一不动点，所以 ~~Φ~~（进而 ϕ）固定 v。因此， ϕ 固定 $G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 的每一片叶。■

由步骤 2 和引理 3.5 可知， ϕ 要么逐点固定 $G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell})$，要么 $G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 是一个圆，且 ϕ 在其上作旋转。因此，为了证明 ϕ 逐点固定 $G\backslash T_c^G(G_{\phi^\ell})$，还需证明 ϕ 在其上有一个不动点。

根据步骤 1，如果存在 $v\in V_0$ 使得 $G_v\neq\{1\}$，那么 ϕ 固定 v。假设对于每个 $v\in V_0$，都有 $G_v=\{1\}$。由于 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 的每条边都以 $\tilde{V}_0$为端点，因此 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 是一个 $(G,\ \mathcal{G})$-自由分解。根据引理 3.7，由于 $\phi\in\mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$， ϕ逐点固定 $G\backslash T_c^G(\phi^\ell)$。由于我们已经排除了所有情况，断言得证。 □

~命题 3。 </style}设 $v\in V_1$ 为一个圆柱顶点。存在 $\Phi\in\phi$ 使得 Φ 逐点固定 $T_c(G_{\phi^\ell})$中 v 的星。

证明。 设 $C\subseteq T_{JSJ}(\phi^\ell)$ 为对应于 v 的圆柱，并设 $\Psi\in\phi^\ell$ 为 C中边稳定子的一个生成元（Ψ 不包含在 ϕ^ℓ 的真幂中，因为 $\phi^\ell\in\mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$根据引理 3.7 在 $G\backslash T_{JSJ}^G(\phi^\ell)$ 上平凡作用）。根据推论 4.10， Ψ 的周期子群等于其不动子群，因此 $G_v=\mathrm{Fix}(\Psi)$。

步骤 *1.* 令 $e_1,\dots,e_n$ 为与 v 相邻且具有平凡 G 稳定子的边的 G_v-轨道的代表元。存在 $\Phi\in\phi$ ，使得 $G_v=\mathrm{Fix}(\Phi)$ ，并且对于每个 $i\in\{1,\dots,n\}$，边 e_i 都被 Φ 固定。

证明。 我们首先断言，存在 $m>0$，使得对于每个 $i\in\{1,\dots,n\}$，自同构 Ψ^m 固定 e_i。事实上，根据圆柱的定义，C 中的所有边稳定子都是可公度的。由于 Ψ 固定 C中的一条边，存在 $m>0$ 使得 Ψ^m

逐点固定 C 的一个有限子树，该子树包含 C 中与 V_0 中各条边的~端点相对应的每个顶点。这证明了该断言。

令 $i \in \{1、\ldots、n\}$。由断言 2，存在 $\Phi_i \in \phi$，它固定 e_i。由于 e_i 的 G-稳定子是平凡的，e_i 的 G_ϕ-稳定子是循环的。因此，Φ_i 和 Ψ^m 有一个共同的幂，使得 $\mathrm{Per}(\Phi_i) = \mathrm{Per}(\Psi^m) = \mathrm{Fix}(\Psi) = G_v$。由推论 4.10，我们有 $\mathrm{Per}(\Phi_i) = \mathrm{Fix}(\Phi_i) = G_v$。

因此，对于每个 $i \in \{1、\ldots、n\}$，都存在 $\Phi_i \in \phi$，使得 $\mathrm{Fix}(\Phi_i) = G_v$、$\Phi_i$ 固定 e_i，并且 Φ_i 和 Ψ 有一个共同的幂。对于任意 i、$j \in \{1、\ldots、n\}$，Φ_i 和 Φ_j 相差一个元素 $g_i,\ _j$ 属于 $G_v = \mathrm{Fix}(\Phi_i) = \mathrm{Fix}(\Phi_j)$。于是 Φ_i 将 e_j 映射到 $g_i,\ _j e_j$。因此，对每个 $p > 0$，都有 $\Phi_i^p(e_j) = g_i^p,\ _j e_j$。但是 Φ_i、Φ_j 和 Ψ 有一个共同的幂，因此存在 $p_0 > 0$ 使得 $\Phi_i^{p_0}(e_j) = e_j$。由于 G 是无挠的，这迫使 $g_i,\ _j = 1$。因此 $\Phi_i = \Phi_j$。令 $\Phi = \Phi_1$，可知 Φ 固定每条满足 $i \in \{1、\ldots、n\}$ 的边 e_i，且其不动子群等于 G_v。这就证明了第一步。■

令 $\Phi \in \phi$ 为步骤 1 给出的代表元。令 $g \in G_v$，并令 $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$。由于 $G_v = \mathrm{Fix}(\Phi)$，我们有 $\Phi(ge_i) = ge_i$，因此 Φ 固定 G_v-轨道中 e_i 的每条边。

步骤 *2*。自同构 Φ 固定与 v 相邻且满足 G_e 非平凡的每条边 e。

证明。令 e 为与 v 相邻且满足 G_e 非平凡的一条边。令 w 为 e 的另一个端点。根据引理 5.5，群 G_w 是一个 $(G, \mathcal{G})$-自由因子。此外，其 G-共轭类在 Φ 下不变。由于 $G_e \neq \{1\}$，群 G_w 是其G-共轭类中唯一包含 G_e 的群。由于 $G_e \subseteq \mathrm{Fix}(\Phi)$，群 G_w 在 ~Φ 下保持不变。由于 w 是 V_0 中由 G_w 固定的唯一顶点，我们得出 w 和 e 由 Φ 固定。步骤 2 得证。■

结合步骤 1 和步骤 2，我们看到自同构 Φ 满足断言的条件。

□

由于 S 被 ϕ^ℓ固定，根据命题 5.6，可以通过在 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 的圆柱顶点处对树进行膨胀，得到 S 和 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$的一个公共细化 U（我们将 U 视为一个 G-~分解，而不是一个 G_{ϕ^ℓ}-分解）。设 V 为从 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 变到 U时在 V_1 中被膨胀的顶点集合。根据命题 3，对于每个 $v \in \tilde{V}$，自同构 ϕ都有一个代表元 Φ_v，它逐点固定 G_v，并固定与 v相邻的 $T_c^G(\phi^\ell)$的每条边。因此，自同构 Φ_v 固定了通过在 v 处膨胀一个子树而从 $T_c^G(\phi^\ell)$得到的每一棵 G-树。特别地，U 被 ϕ保留。

我们断言 ϕ 在 $G\backslash U$上平凡作用。事实上，令 $p_U\colon\ U \to T_c^G(G_{\phi^\ell})$ 为自然的G-等变投影，并令 x 为 $T_c^G(G_{\phi^\ell})$中的一个点。若 $p_U^{-1}(x)$ 是一个点，则根据断言 2 以及 p_U 的 G-等变性，ϕ 保持 $p_U^{-1}(x)$的 G-轨道。若 $p_U^{-1}(x)$~不退化为一个点，则 $x \in V$。根据命题 3，ϕ 有一个代表元逐点固定 $p_U^{-1}(x)$。因此，ϕ 逐点固定 $G\backslash U$。

因此，ϕ 保留所有 $(G, \mathcal{G})$-分解，而 U 会在这些分解上塌缩。由于 U 是 S的细分，这表明 ϕ 保留了 S。 □

5.2 层状结构与非零散自由因子系统

设 G 是一个满足既定假设的群，并令 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$。设$\mathcal{F}_{\max}(\phi)$ 为所有真、极大的 ϕ-周期 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统的集合。集合$\mathcal{F}_{\max}(\phi)$ 有一个划分

$$\mathcal{F}_{\max}(\phi) = \mathrm{S}(\phi) \coprod \mathrm{NS}(\phi),$$

其中，$\mathrm{S}(\phi)$ 包含 $\mathcal{F}_{\max}(\phi)$ 中所有稀有的 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统，而$\mathrm{NS}(\phi)$ 包含 $\mathcal{F}_{\max}(\phi)$ 中所有非零散的 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统。本节重点关注 ϕ 在$\mathrm{NS}(\phi)$上的作用。本节的主要结果是以下命题。

命题 5.7。设 G 是满足既定假设的群。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G、\ \mathcal{G}、\ 3)$，且 $\mathcal{F} \in \mathrm{NS}(\phi)$。那么 $\mathcal{F}$被 ϕ 固定。

命题 5.7 的证明用到了与 ϕ相关的吸引层状集的存在性。吸引层片是 G 双重边界的一个特定闭子集，并且在 ϕ的一个代表元的某个幂作用下保持不变。我们特别证明（见引理 5.11），对于任意极大的 ϕ-周期非零散自由因子系统，都可以规范地关联到 ϕ 的一个吸引层片。因此，我们不研究 ϕ 在其周期非零散自由因子系统上的动力学，而是研究 ϕ 在其吸引层片集合上的动力学。借助定理 2.21 给出的 ϕ 的一个相对列车轨道代表元，可以很好地描述这种动力学。

首先，我们介绍研究吸引层片所需的背景。令 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$。继 Bestvina–Feighn–Handel [BFH1、BFH3]在自由群背景下的工作之后，Lyman [Lym1] 引入了一组与 ϕ相关的层状结构 $\mathcal{L}(\phi)$，称为的吸引层状集。我们不对吸引层片作精确定义（参见 [Lym1, Section 4]），而是介绍 $\mathcal{L}(\phi)$ 的若干性质，以及它与表示 ϕ的相对列车轨道之间的联系。

设 $F\colon T \to T$ 是由定理 2.21 给出的 ϕ 的相对列车轨道代表元。现在我们记录集合 $\mathcal{L}(\phi)$的若干性质。

引理 5.8 ([Lym1, Lemma 4.4])**.** 设 $(G, \mathcal{G})$ 是一个自由积，设 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$，并设$F\colon T \to T$ 是 ϕ 的相对列车轨道代表元。以下结论成立。

(1) 对于每个吸引层片 $\Lambda \in \mathcal{L}(\phi)$，存在一条 $\partial^2(G$ 的直线 ℓ_Λ，$\mathcal{G})$，使得 Λ 是包含 ℓ_Λ 的 $\partial^2(G$ 的极小层状集 $\mathcal{G})$。这样的直线 ℓ_Λ 称为 的一般直线。*(2)* 对于每个 $\Lambda \in \mathcal{L}(\phi)$，存在一个 *EG* 层 H_r，使得对于 Λ 的每条一般直线 ℓ_Λ，层 H_r 都是 ℓ_Λ 穿过的最高层。*(3)* 令 $\Lambda \in \mathcal{L}(\phi)$，并令 H_r 为其关联的 *EG* 层。存在一条边 $e \in EH_r$ 和 Λ 的一条一般直线 ℓ_Λ，使得对于 ℓ_Λ 的任意有限子路径 γ，都存在 $n > 0$ 和 $g \in G$，使得 $\gamma \subseteq g[F^n(e)]$。

引理 5.8(2) 蕴含存在一个 ϕ-等变映射 p_ϕ: $\mathcal{L}(\phi) \to$ EG，其中 EG 是 T 的 EG 层集合。现在我们来描述这个映射的性质。

设 H_r 为一个 EG 层。若其关联的转移矩阵 M_r 是非周期的，即存在 $\ell > 0$ 使得 M_r^ℓ 的每个元素均为正，则称该层 H_r 是非周期的 。若 H_r 不是非周期的，则有如下结论，其证明归功于 Lyman [Lym1]。由于原文未明确写出该断言，我们补充一个证明概要。

引理 5.9 ([Lym1，引理 4 的证明。6])。 设 $(G, \mathcal{G})$ 是一个自由积，令 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$, 并令 F: $T \to T$ 为 ϕ的一个相对列车轨道代表元。设 $H_r \in$ EG 是一个非周期的 *EG* 层。

存在一个 G-不变划分

$$EH_r = P_1^{(r)} \amalg \dots P_{n_r}^{(r)}$$

将 H_r 的边划分，使得以下结论成立。

(1) 对于每个 $i \in \{1, \dots, n_r\}$ 以及每条边 $e \in P_i^{(r)}$，路径 $[F(e)]$ 都包含于$T_{r-1} \cup P_{i+1}^{(r)}$ 中，其中指标按模 n_r取值。

(2) 对任意互不相同的 $i, j \in \{1, \dots, n_r\}$，有

$$\mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_i^{(r)}) \neq \mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_j^{(r)}).$$

证明思路。 由一般理论 [Sen] 可知， EH_r 的划分来自 $G \backslash H_r$ 的边集及其转移矩阵。第二个断言由以下事实推出：存在 $s > 0$，使得对每个 $i \in \{1, \dots, n_r\}$，集合 $P_i^{(r)}$ 都是相对列车轨道映射 F^s: $T \to T$的一个非周期 EG 层的边集（见 [Lym1，引理 4.6] 的证明）。对于每个 $i \in \{1, \dots, n_r\}$，层 $P_i^{(r)}$ 都是 F^s 的 EG 层，这一事实意味着，对于任意互不相同的 $i, j \in \{1, \dots, n_r\}$，存在一个 $g \in G$，它既是 $(G, \mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_i^{(r)}))$-外围的，又是 $(G, \mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_j^{(r)}))$-非外围的。事实上，只需取群图$\pi_1(G \backslash (T_{r-1} \cup P_i^{(r)}))$ 的基本群中的任意非平凡元素，使其对应的约化路径经过 $P_i^{(r)}$（这样的元素存在，因为 $P_i^{(r)}$ 是一个 EG 层）。这就说明了 $\mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_i^{(r)}) \neq \mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_j^{(r)})$。

□

命题 5.10 ([Lym1]). 设 $(G, \mathcal{G})$ 是一个自由积，设 $\phi \in$外自同构群$(G, \mathcal{G})$，并设 F: $T \to T$ 是 ϕ 的一个相对列车轨道代表。以下结论成立。

(1) [Lym1，引理 4.3] 映射 p_ϕ: $\mathcal{L}(\phi) \to$ EG 是满射。

(2) [Lym1，引理 4.6] 的证明。如果 $H_r \in$EG 是非周期的，那么 $|p_\phi^{-1}(H_r)| = 1$。

(3) [Lym1，证明引理 4.6] 假设 $H_r \in$ E_G 不是非周期的，并令 $EH_r = P_1^{(r)} \amalg \dots P_{n_r}^{(r)}$为引理 *5.9* 给出的相关划分。对于每个 $i \in \{1, \dots, n_r\}$，都存在唯一的 $\Lambda \in p_\phi^{-1}(H_r)$，使得 Λ 的某条一般直线（等价地，任意一条一般直线）包含 $P_i^{(r)}$ 的边。

(4) *[Lym1*，引理 *4.6]*集合 $\mathcal{L}(\phi)$ 是有限的。*(5)* *[Lym1*，证明引理 *4.6]* 对于每个 $\ell > 0$，都有 $\mathcal{L}(\phi^\ell) = \mathcal{L}(\phi)$。

引理 5.11. 设 $(G, \mathcal{G})$ 是一个自由积，且 $\phi \in$ 外自同构群$(G, \mathcal{G})$。对于每个 $\mathcal{F} \in \mathrm{NS}(\phi)$，都存在唯一的 $\Lambda_{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}(\phi)$，使得 $\Lambda_{\mathcal{F}} \nsubseteq \partial^2(\mathcal{F}, \mathcal{G})$。特别地，将 $\mathcal{F}$ 映射到 $\Lambda_{\mathcal{F}}$ 的映射ρ_ϕ: NS $(\phi) \to \mathcal{L}(\phi)$ 是 ϕ-等变的。

证明. 设 $\mathcal{F} \in$NS(ϕ)。设 $\ell > 0$ 满足 ϕ^ℓ 保持 $\mathcal{F}$。设 $F^\ell \colon T \to T$ 是表示 ϕ^ℓ 的相对列车轨道，且有一个过滤 $T_0 \subseteq \ldots \subseteq T_n$，使得 T 的过滤中存在一个元素 T_{r-1}，满足 $\mathcal{F}(T_{r-1}) = \mathcal{F}$。

注意，由于 $\mathcal{F}$ 是极大的，ϕ^ℓ 相对于 $\mathcal{F}$ 完全不可约。特别地，可以选择相对列车轨道 $F^\ell \colon T \to T$，使得 $r = n$。此外，由于 $\mathcal{F}$ 是非零散的，层 H_r 是一个 EG 层。

我们断言 H_r 是非周期的。事实上，反设 H_r 不是非周期的，并令

$$EH_r = P_1^{(r)} \amalg \ldots P_{n_r}^{(r)}$$

为引理 5.9 给出的相应边的划分，其中 $n_r \geqslant 2$。回想一下，F^ℓ在集合 $\{P_1^{(r)}$、.....、$P_{n_r}^{(r)}\}$上诱导一个置换。于是，$F^{\ell n_r!}$ 保持集合 $\{P_1^{(r)}$、.....、$P_{n_r}^{(r)}\}$中的每个元素不变。因此，$F^{\ell n_r!}$ 保持一个真过滤

$$T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_{r-1} \subseteq T_{r,1} \subsetneq \ldots \subsetneq T_{r,n_r} = T$$

T。

回想一下，根据命题 5.10(3)，对于每个 $i \in \{1$、.....、$n_r\}$，都可以将一个吸引层片 Λ_i 与T_r、$_i$相关联。此外，根据引理 5.8，对于Λ_i的每条一般直线 ℓ，ℓ 都会穿过T_r、$_i$。因此，不存在 Λ_i 的一般直线 ℓ和共轭类$[A] \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(T_{r-1})$，使得 $\ell \in \partial^2(A$、$\mathcal{G}_{|A})$。所以，对于每个 $i \in \{1$、.....、$n_r\}$，都有$\mathcal{F} = \mathcal{F}(T_{r-1}) < \mathcal{F}(T_r$、$_i)$。由于 $n_r \geqslant 2$，根据引理 5.9(2)，对于每个 $i \in \{1$、.....、$n_r - 1\}$，都有$\mathcal{F}(T_r$、$_i) < \{[G]\}$。特别地，可以找到一个真 ϕ^ℓ-周期 $(G$、$\mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{F}'$。这与 $\mathcal{F}$的极大性矛盾。因此，H_r是非周期的。

因此，根据命题 5.10(2)，可以通过将 $\mathcal{F}$ 映射到与H_r关联的唯一吸引层片 $\Lambda_{\mathcal{F}}$，为 $\mathcal{F}$ 关联一个$\mathcal{L}(\phi^\ell) = \mathcal{L}(\phi)$ 的吸引层片。由于以下事实，这个吸引层片不依赖于相对列车轨道的选择。注意，H_r 是唯一一个未包含在 T_{r-1}中的 EG 层。因此，根据引理 5.8，吸引层片$\Lambda \in \mathcal{L}(\phi)$的一般直线包含在 T_{r-1}中，当且仅当 $\Lambda \neq \Lambda_{\mathcal{F}}$。由于 $\mathcal{F}(T_{r-1}) = \mathcal{F}$，这意味着$\Lambda \subseteq \partial^2(\mathcal{F}$，$\mathcal{G})$当且仅当 $\Lambda \neq \Lambda_{\mathcal{F}}$。因此，吸引层片 $\Lambda_{\mathcal{F}}$仅取决于 $\mathcal{F}$，并且我们有一个定义良好的 ϕ-等变映射 ρ_ϕ: NS$(\phi) \to \mathcal{L}(\phi)$。

□

现在我们描述层叠在ρ_ϕ下的原像。首先需要一些技术性引理。第一个引理称为有界消去引理，专家们对此早已熟知。关于自由群情形的证明归功于 Cooper [Coo, Bounded Cancellation]。

引理 5.12 ([Lym1, 引理 1。8])。 设 $(G,\mathcal{G})$ 为自由积，设 $\phi\in$外自同构群$(G,\mathcal{G})$，设 T为一个 *Grushko* $(G,\mathcal{G})$-自由分裂，并设 $F\colon\ T\to T$为与 ϕ相关联的态射。存在一个常数 $C(F)\geqslant 0$，使得对 T 中的任意约化路径 $\rho=\rho_1\rho_2$，都有

$$\ell([F(\rho)])\geqslant \ell([F(\rho_1)])+\ell([F(\rho_2)])-2C(F).$$

第二个引理讨论了相对列车轨道映射对某个非法路径中一条合法子路径的迭代作用。在自由群的情形下，这一结论隐含于 Bestvina–Feighn–Handel [BFH1 的引理 5.5]中。

引理 5.13 ([FMS，推论 6.1。8])。 设 $(G,\mathcal{G})$ 是一个非零散自由积。设$\phi\in$外自同构群 $(G,\mathcal{G})$ 是完全不可约的，并设 $F\colon\ T\to T$ 是ϕ的一个相对列车轨道映射。设 $g\in G$ 是 $(G,\mathcal{G})$- 非外围的，并设 $L_g\subseteq T$ 是相应的测地线。假设序列 $\{\ell_T(\phi^n([g])\}_{n\in\mathbb{N}}$ 无界。对于每个 $C>0$，都存在$M>0$，使得约化路径 $[F^M(L_g)]$ 包含一条长度大于 C 的合法子路径。

令 $\mathcal{F}\in$NS(ϕ)，并令 $\ell>0$ 为满足 $\phi^\ell(\mathcal{F})=\mathcal{F}$ 的极小整数。由 $\mathcal{F}$ 的极大性，外自同构 ϕ^ℓ 视为 Out(G 中的元素，$\mathcal{F}$)，相对于 $\mathcal{F}$ 是完全不可约的。我们将定理 2.22 给出的、带有 G 作用的 $\mathbb{R}$-树记为 $T_{\mathcal{F}}$。令 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ 为 $T_{\mathcal{F}}$ 中非平凡点稳定子的共轭类集合。

引理 5.14. 令 $\Lambda\in\mathcal{L}(\phi)$。

(1) 令 $\mathcal{F},\mathcal{F}'\in\rho_\phi^{-1}(\Lambda)$。每个 $(G,\mathcal{F}')$-外围元素在 $T_{\mathcal{F}}$ 中都是椭圆的。

(2) 对任意 $\mathcal{F},\mathcal{F}'\in\rho_\phi^{-1}(\Lambda)$，有 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}=\mathcal{A}_{\mathcal{F}'}$。

(3) 假设 G 满足既定假设。假设 $\phi\in\mathrm{IA}(G,\mathcal{G},3)$，且 $\phi(\Lambda)=\Lambda$。则 ϕ 逐元素固定 $\rho_\phi^{-1}(\Lambda)$。

证明。 引理 5.14 的第一条结论在对 ϕ 取幂后仍然成立，因此我们可以假设 $\phi(\mathcal{F})=\mathcal{F}$ 和 $\phi(\mathcal{F}')=\mathcal{F}'$。

反设存在一个 $(G,\ \mathcal{F}')$-外围元素 g，它在 $T_{\mathcal{F}}$ 中不是椭圆的。令 $F\colon T\to T$ 为完全不可约外自同构 $\phi\in$Out$(G,\ \mathcal{F})$ 的列车轨道代表，并令 λ 为其 Perron–Frobenius 特征值。对 ϕ 取幂后，我们可以假设 $\lambda>2$。由定理 2.22，得到 $\ell_{T_{\mathcal{F}}}(g)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda^n}\ell_T(\phi^n([g]))$。

令 $C(F)$ 为引理 5.12 给出的 F 的有界抵消常数。由于 $\ell_{T_{\mathcal{F}}}(g)>0$，序列 $\{\ell_T(\phi^n([g])\}_{n\in\mathbb{N}}$ 无界。由引理 5.13，存在 $M>0$ 使得 $[F^M(L_g)]$ 包含一条长度大于 $2C(F)+1$ 的合法子路径 γ。

记 $\gamma=\sigma_1e\sigma_2$，其中 $\ell(\sigma_1),\ \ell(\sigma_2)\geqslant C(F)$ 且 e 是一条非平凡边。由于 γ 是合法的，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，路径 $[F^n(\gamma)]$ 的长度都大于 $\lambda^n(2C(F)+1)\geqslant 2^n(2C(F)+1)$，并且存在长度至少为 $2^nC(F)$ 的约化路径 γ_1^n，γ_2^n，使得 $[F^n(\gamma)]=\gamma_1^n[F^n(e)]\gamma_2^n$。由于 $C(F)$ 是 F 的有界抵消常数，根据

引理 5.12，对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $[F^n(\gamma)]$ 中包含于 $[F^n(L_g)]$ 的子路径，是通过从 $[F^n(\gamma)]$ 中删去一个长度至多为 $2^n C(F)$ 的起始段和一个终止段得到的。特别地，对于每个 $n \geqslant M$，路径 $[F^{n-M}(e)]$ 包含于 $[F^n(L_g)]$ 中。

回想一下， T 是完全不可约外自同构的列车轨道代表，因此 T 只有一个层，且其转移矩阵是本原的。特别地，对于每条边 $e' \in ET$ 和每个 $n \geqslant 0$，都存在 $h_n \in G$ ，使得路径 $h_n[F^n(e')]$ 包含在 e 在 F作用下的某个约化迭代中。因此，边 e 满足引理 5.8(3)的结论，即存在 Λ 的一般直线 ℓ_Λ ，使得 ℓ_Λ 中的任意有限约化边路径都包含在 e 在 F作用下某个约化迭代的 G-轨道中。由于对于每个 $n \geqslant M$， $[F^{n-M}(e)]$都是 $[F^n(L_g)]$ 的子路径， ℓ_Λ的每个有限子路径都包含在 L_g 在 F作用下某个约化迭代的G-轨道中。因此，对于ℓ_Λ的每个开邻域 V，都存在 $n \geqslant 1$ 和 $h \in G$，使得 $h[F^n(L_g)] \in V$。这表明闭包 ~~$G\{[F^n(L_g)]\}_{n\in\mathbb{N}}$~~ 包含 $\Lambda = G\ell_\Lambda$。

由于 $\phi(\mathcal{F}') = \mathcal{F}'$和 g是 $(G,\ \mathcal{F}')$-外围的，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，直线 $[F^n(L_g)]$代表 $\partial^2(\mathcal{F}',\ \mathcal{G})$中的一个元素。由于 $\partial^2(\mathcal{F}',\ \mathcal{G})$是 G-不变且闭的，我们有

$$\Lambda \subseteq \overline{G\{[F^n(L_g)]\}_{n\in\mathbb{N}}} \subseteq \partial^2(\mathcal{F}', \mathcal{G}).$$

Thi这与引理 5.11 矛盾。因此，每个 $(G,\ \mathcal{F}')$-外围元素在 $T_\mathcal{F}$中都是椭圆的。

现在我们证明第二个断言。设 $\mathcal{F},\ \mathcal{F}' \in \rho_\phi^{-1}(\Lambda)$。我们假设 $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$，否则该断言显然成立。集合 $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}'}$ 由两两交集平凡的自正规子群的共轭类组成，因为它们是 G 在具有平凡弧稳定子的 $\mathbb{R}$-树上作用的点稳定子集合（见定理 2.22）。因此，根据 $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathcal{F}'}$中各群的自正规性，只需证明，对于每个$[A] \in \mathcal{A}_\mathcal{F}$，群 A 在 $T_{\mathcal{F}'}$中是椭圆的。随后，应用对称论证即可得到，对于每个 $[A'] \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}'}$，群 A' 在 $T_\mathcal{F}$中是椭圆的。这将完成第二个断言的证明。

根据定理 2.22，存在 G 的一个（可能是平凡的）循环子群 H ，使得$\mathcal{A}_\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{[H]\}$。根据第一个断言，对于每个 $[A] \in \mathcal{F}$，群 A 在$T_{\mathcal{F}'}$中都是椭圆的。

现在我们证明 H 在 $T_{\mathcal{F}'}$中是椭圆的。注意，根据第一个断言，共轭类属于 $\mathcal{F}'$的每个子群在 $T_\mathcal{F}$ 中都是椭圆的。由于 $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$，且由于 $\mathcal{F}'$是极大的，我们有 $\mathcal{F}' \not\equiv \mathcal{F}$。由于 $\mathcal{A}_\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{[H]\}$，我们看到 H是 $(G,\ \mathcal{F}')$-外围的。因此，根据定理 2.22， H 在 $T_{\mathcal{F}'}$中是椭圆的。这证明了第二个断言。

最后我们证明第三个断言。令 $\mathcal{F} \in \rho_\phi^{-1}(\Lambda)$。根据第二个断言，集合 $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ 是$\rho_\phi^{-1}(\Lambda)$ 的一个不变量，因此 ϕ 保持 $\mathcal{A}_\mathcal{F}$。

根据定理 2.22，存在 G 的一个（可能是平凡的）循环子群 H ，使得$\mathcal{A}_\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{[H]\}$。根据定理 4.1，由于 H 是循环的且 $\phi \in \mathrm{IA}(G,\ \mathcal{G},\ 3)$，我们看到$\phi([H]) = H$，因此 $\phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$。根据引理 3.3， ϕ逐元素固定 $\mathcal{F}$。根据第二个断言和定理 2.22， $\rho_\phi^{-1}(\Lambda)$ 的每个元素都可通过取 $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ 的一个有限子集得到。因此，我们看到 ϕ 逐元素固定 $\rho_\phi^{-1}(\Lambda)$。

□

现在我们证明本节的主要技术结果。

命题 5.15. 设 G 是满足既定假设的群。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$ 并设 $\Lambda \in \mathcal{L}(\phi)$。那么 Λ 由 ϕ 固定。

证明. 证明沿用 [HM1，引理 II.4.2]。设 n 为 Λ在 ϕ的迭代下的轨道大小。设 $F\colon T \to T$ 是 ϕ的一个相对列车轨道代表。由命题 5.10，存在一个 EG 层 H_r，具有以下性质。

- Λ 的每条一般直线所穿过的最高层是 H_r。

  H_r 若为非周期的，则 $n = 1$。

  H_r 若不是非周期的，则存在一个 G-不变划分

  $$EH_r = P_1^{(r)} \amalg \dots P_{n_r}^{(r)}$$

  将 H_r的边划分，使得对于每个 $i \in \{1、\dots...、\ n_r\}$ 以及每条边 $e \in P_i^{(r)}$，路径 $[F(e)]$ 都包含在 $T_{r-1} \cup P_{i+1}^{(r)}$中，其中指标按模 n_r计算。

反设 $n_r \geqslant 2$。注意，由于 $F(T_{r-1}) = T_{r-1}$，我们有 $\phi(\mathcal{F}(T_{r-1})) = \mathcal{F}(T_{r-1})$。根据引理 3.3， ϕ固定 $\mathcal{F}(T_{r-1})$的每个元素，因此F 保持 $G\backslash T_{r-1}$的每个连通分支不变。令 T' 为从 T压缩 $G\backslash T_{r-1}$ 的每个连通分支为一个点后得到的树。于是，T的过滤诱导出 T'的一个过滤。令 $\mathbb{X}_r$为 $G\backslash T'_r$的底层图，并令 $\mathbb{X}_{r-1}$为 $G\backslash T'_{r-1}$的底层图。那么 $\mathbb{X}_{r-1}$ 是一个顶点集。此外， F 诱导出一个同伦等价$F\colon \mathbb{X}_r \to \mathbb{X}_r$，它固定 $\mathbb{X}_{r-1}$的每个顶点。由于根据引理 3.6， ϕ 在 $H_1(\overline{G}\backslash T$上平凡作用，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，它在 $H_1(\mathbb{X}_r$上也平凡作用，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。

映射 F置换不同的图 $\{T_{r-1} \cup P_i^{(r)}\}_{i \in \{1、\ n_r\}}$。令 i、$j \in \{1、\dots...、\ n_r\}$互不相同。根据引理 5.9，我们有

$$\mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_i^{(r)}) \neq \mathcal{F}(T_{r-1} \cup P_j^{(r)}) \text{ and } EP_i^{(r)} \cap EP_j^{(r)} = \varnothing.$$

令 $\mathbb{X}^i$和 $\mathbb{X}^j$分别为由 $T_{r-1} \cup P_i^{(r)}$和 $T_{r-1} \cup P_j^{(r)}$诱导的 $\mathbb{X}_r$的底层子图。由于 $EP_i^{(r)} \cap EP_j^{(r)} = \varnothing$，且由于 EH_r的划分是 G-不变的，交集 $\mathbb{X}^i \cap \mathbb{X}^j = \mathbb{X}_{r-1}$ 仅由顶点组成。

断言。令 $i \in \{1、\dots...、\ n_r\}$。以下情形之一成立。

(1) 图 $\mathbb{X}^i$ 包含一个嵌入圆。(2) 存在两个不同的顶点 v、$w \in \mathbb{X}^i$，它们分别对应于 $G\backslash T_{r-1}$ 的两个不同的连通分支，使得 v 和 w 通过 $\mathbb{X}^i$中的一条弧相连。

———

证明。假设 $\mathbb{X}^i$ 不包含嵌入圆。令 Λ_i 为与 $T_{r-1} \cup P_i^{(r)}$ 相关联的 ϕ 的吸引层片，并令 ℓ_i 为 Λ_i的一般直线。由命题 5.10，直线 ℓ_i 与 $T_{r-1} \cup P_i^{(r)}$ 相交，因此 ℓ_i 在 $\mathbb{X}^i$ 中的投影是一条浸入直线ℓ_i，其中包含 $\mathbb{X}^i$的边。由于 ℓ_i 是连通且浸入的，并且 $\mathbb{X}^i$中不存在嵌入圆， ℓ_i 的某个子路径是 $\mathbb{X}^i$ 中的一条弧，其端点是 $\mathbb{X}^i$ 上的两个顶点，分别对应于 $G\backslash T_{r-1}$的两个不同连通分支。 ——— □

现在我们区分该断言的两种情形。首先，假设存在一个嵌入圆 γ，它位于 $\mathbb{X}^i$中。于是 γ 诱导出一个非平凡元素 $[\gamma] \in H_1(\mathbb{X}_r, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。此外，由于 $\gamma \nsubseteq \mathbb{X}_{r-1}$ 且由于 $\mathbb{X}^i \cap \mathbb{X}^j = \mathbb{X}_{r-1}$， $\mathbb{X}^j$ 中的任意嵌入圆都会诱导出 $H_1(\mathbb{X}_r, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 中的一个元素，该元素不同于 $[\gamma]$。由引理 3.6，由于 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$ 在 $H_1(\mathbb{X}_r, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 上平凡作用，我们可知 F保持 $\mathbb{X}^i$不变，且 F保持 $P_i^{(r)}$不变，这就产生了矛盾。

现在假设 $\mathbb{X}^i$ 没有嵌入圆，并且存在两个不同的顶点v， $w \in V\mathbb{X}^i$，它们分别对应于 $G\backslash T_{r-1}$ 的两个不同连通分支，且 v和 w 之间有一条弧 γ_i 位于 $\mathbb{X}^i$中。由于 $\mathbb{X}^i$ 不含任何嵌入圆，这条弧是唯一的。对每个 $m > 0$，图 $F^m(\mathbb{X}^i) = \mathbb{X}^{i+m}$ 中v 和 w 之间都有唯一的弧，因为 F固定了 v 和 w （此处及下文， $i + m$ 均按模 n_r计算）。

对于 $m \geqslant 0$，令 γ_{i+m} 为 $\mathbb{X}^{i+m}$ 中连接 v 和 w的弧。于是 $\gamma = \{\gamma_{i+m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{X}_r$ 的一个F-不变子图，它恰有两个顶点 v 和 w，以及 n_r 条连接它们的弧。由于 $n_r \geqslant 2$，图 γ 没有叶。由于 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$ 在$H_1(\mathbb{X}_r, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$上平凡作用。由于 γ是 $\mathbb{X}_r$的一个 F-不变子图，我们看到 ϕ逐点固定$H_1(\gamma, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$。

由引理 3.6 可知，要么 F与 γ上的恒等映射同伦等价，要么$n_r = 2$ 与 F 同伦等价于一个旋转。由于 F 固定 v 和 w，在这两种情况下，我们都可以看出 F 与 γ上的恒等映射同伦等价。这表明，对于任意互不相同的 i、 $j \in \{1, \ldots\ldots, n_r\}$，图 $\mathbb{X}^i$ 不可能被F映至 $\mathbb{X}^j$，矛盾。

因此， H_r 是非周期的，且 ϕ 在 $\mathcal{L}(\phi)$上平凡作用。 □

命题 *5.7* 的证明。设 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$，并设 $\mathcal{F}$是一个极大的 ϕ-周期 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统，且它是非 posradic。由引理 5.11，存在一个与 $\mathcal{F}$相关联的唯一层叠$\Lambda_{\mathcal{F}}$。此外，由引理 5.14(3)， $\mathcal{F}$ 被 ϕ 固定，当且仅当 $\Lambda_{\mathcal{F}}$被 ϕ固定。结论现由命题 5.15 得出。□

现在我们已经具备证明定理 5.1 所需的全部工具。

定理 *5.1* 的证明。令 $\phi \in \mathrm{IA}(G, \mathcal{G}, 3)$ 并令 $\mathcal{F}$为一个 ϕ-周期的真 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统。我们对 $\xi(G, \mathcal{G})$ 使用归纳法，证明 $\mathcal{F}$ 被 ϕ固定。情形$\xi(G, \mathcal{G}) = 1$ 显然，因为在此情形下，要么 $\mathcal{F} = \{[G]\}$，要么 $G = \mathbb{Z}$ 且 $\phi = \mathrm{Id}$。

假设 $\xi(G, \mathcal{G}) \geqslant 2$。令 $\mathcal{F}'$为一个极大的真 ϕ-周期 $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统，使得 $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{F}'$。我们断言 $\mathcal{F}'$被 ϕ固定。事实上，若 $\mathcal{F}'$是非零散的，这由命题 5.7 得出。若 $\mathcal{F}'$ 是稀有的，则它诱导出一个规范的 $(G, \mathcal{G})$- 自由分裂 $T_{\mathcal{F}'}$。由定理 5.2， 자유分裂 $T_{\mathcal{F}'}$ 被 ϕ 固定。因此 $\mathcal{F}'$ 被 ϕ 固定。

在这两种情况下， $(G, \mathcal{G})$-自由因子系统 $\mathcal{F}'$均由 ϕ固定。令 $[A] \in \mathcal{F}'$。根据引理 3.3，共轭类 $[A]$ 由 ϕ固定。此外，由于 A 是一个 $(G, \mathcal{G})$-自由因子，根据引理 3.9，由 ϕ 诱导的外自同构群 $\mathrm{Out}(A)$ 上的外自同构 $\phi_{|A}$ 包含于 $\mathrm{IA}(A, \mathcal{G}_{|A}, 3)$中。令 $\mathcal{F}_{|A}$为由 $\mathcal{F}$诱导的 $(A, \mathcal{G}_{|A})$-自由因子系统。由归纳法可知， $\mathcal{F}_{|A}$由 $\phi_{|A}$固定。由于 $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{F}'$，对每个 $[H] \in \mathcal{F}$，存在 $[A] \in \mathcal{F}'$和 $g \in G$，使得 $gHg^{-1} \subseteq A$和 $[gHg^{-1}]_A \in \mathcal{F}_{|A}$。因此存在 $\Phi_{|A} \in \phi_{|A}$

其保持 gHg^{-1}不变。由于 Φ_A 是某个 $\Phi \in \phi$在 A 上的限制，自同构Φ 保持 gHg^{-1}不变。因此，我们看到 $\mathcal{F}$ 由 ϕ固定。 □

6 环面相对双曲群外自同构群的无周期有限指数子群

设 H 是一个环面相对双曲群，也就是说，它是相对于有限集 $\mathcal{P}$ 中有限生成阿贝尔群而言的无挠双曲群。本节中，我们证明 H 满足既定假设（特别参见推论 6.7）。注意，假设仅与 H的 Grushko 分解中的单端因子有关，因此可以假设 H 是单端的。我们根据 H 是否为自由阿贝尔群，将证明分为两节。

6.1 有限生成自由阿贝尔群

设 $n > 0$。考虑群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) = \mathrm{Out}(\mathbb{Z}^n)$。令 $\mathrm{IA}(\mathbb{Z}^n, 3)$ 为自然同态的核

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}),$$

也就是说，$\mathrm{IA}(\mathbb{Z}^n, 3)$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$的 3 级主合同子群。群 $\mathrm{IA}(\mathbb{Z}^n, 3)$ 是无挠的。回忆一下，Φ 的周期子群 $\mathrm{Per}(\Phi)$ 是由所有 Φ-周期元素组成的 $\mathbb{Z}^n$ 的子群。

命题 6.1。设 $\Phi \in \mathrm{IA}(\mathbb{Z}^n, 3)$。那么，$\Phi$ 的周期子群中的每个元素都被 Φ固定。

证明。注意，对于每个 $m > 0$ 和每个 $v \in \mathbb{Z}^n$，元素 v 至多有一个 m次根。这意味着子群 $\mathrm{Per}(\Phi)$ 是根封闭的，因此是 $\mathbb{Z}^n$的一个直和项。

因此，Φ 在 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Per}(\Phi))$ 中的像由限制给出，是一个包含于 $\mathrm{IA}(\mathrm{Per}(\Phi), 3)$中的有限阶自同构。由于 $\mathrm{IA}(\mathrm{Per}(\Phi), 3)$ 无挠，Φ 在 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Per}(\Phi))$ 中的像是平凡的。因此，Φ 对 $\mathrm{Per}(\Phi)$ 平凡作用，且 Φ 的周期子群中的每个元素都被 Φ固定。 □

6.2 单端环面相对双曲群

设 H 是一个非初等单端环面相对双曲群，并设 $\mathcal{P}$ 是其外围结构。那么，$\mathcal{P}$ 由有限生成自由阿贝尔群组成。注意，在这种情况下，H 的初等子群是自由阿贝尔群。本节旨在构造 $\mathrm{Out}(H)$ 的一个有限指数子群，使其满足既定假设。首先，我们需要一些关于初等分裂的顶点稳定子的通用引理。这与 [GL2、引理 3.8], 类似，但后者仅针对 JSJ初等分裂进行了论述。

引理 6.2. 设 H 是一个环面单端相对双曲群，$\mathcal{P}$ 是其外围结构，S 是一个 $(H, \mathcal{P})$-初等分解。对于每个 $v \in VS$，群 H_v都是环面相对双曲的。

设 $\mathcal{P}_v$ 是包含于 H_v 中的极大抛物子群集合，且 $\mathrm{Inc}v$ 是关联边稳定子的集合。 H_v 的一个外围结构是 $\mathcal{P}_v \cup \mathrm{Inc}v$。

证明。 由于边稳定子是初等的，根据 [GL2，命题3.4], 的顶点稳定子是相对拟凸的，因此它们是环面相对双曲的。

现在我们明确 H_v的外围结构。根据 [Hru，定理9.1], ， H_v的一个外围结构由群 $H_v \cap gPg^{-1}$给出，其中 $g \in H$和 $[P] \in \mathcal{P}$。由于gPg^{-1}在 S中是椭圆的，且边稳定子是初等的，因此要么 $gPg^{-1} \subseteq H_v$，要么 $gPg^{-1} \cap H_v$ 是边稳定子。反过来，$\mathrm{Inc}v$ 中的任意边稳定子，若不等于某个 $H_v \cap gPg^{-1}$（其中 $g \in H$且 $[P] \in \mathcal{P}$），则是无限循环的。这些群可以加入外围结构中。 □

根据定理 2.13，存在一个由 $\mathrm{Aut}(H)$ 和外自同构群(H)保持不变的典范 $(H，\ \mathcal{P})$-初等分解 $T_{\mathcal{P}}$ 。

令 $\underline{\mathrm{Out}^0}(H)$ 为 $\mathrm{Out}(H)$ 的有限指数子群，它在商图 $H\backslash T_{\mathcal{P}}$ 上的作用是平凡的，并且固定 $\mathcal{P}$中每个群的共轭类。我们有自然限制同态

$$p_H^V \colon \mathrm{Out}^0(H) \to \prod_{v \in VT_{\mathcal{P}}} \mathrm{Out}(H_v)$$

and

$$p_H^E \colon \mathrm{Out}^0(H) \to \prod_{e \in ET_{\mathcal{P}}} \mathrm{Out}(H_e).$$

由定理 2.13(7)， p_H^E 的像是有限的。令 $\mathrm{Out}^1(H) =$ 为 $\ker(p_H^E)$。下一个引理描述了 p_H^V的核，并且更一般地适用于环面相对双曲群的初等分解。

引理 6.3. 设 H 是一个非初等单端环面相对双曲群， $\mathcal{P}$是其外围结构， S 是一个 $(H,$ $\mathcal{P})$-初等分解，且满足以下性质。

(1) 对每条边 $e \in ES$，都存在 e 的一个端点 v ，使得 H_e 在 H_v中自正规。

(2) 对每条边 $e \in ES$，都存在 e 的一个端点 v ，使得 H_v 是阿贝尔的 .

自然同态的核 $\mathcal{T}(S)$

$$\mathcal{K}(S) \to \prod_{v \in VS} \mathrm{Out}(H_v),$$

是一个有限生成自由阿贝尔群。

证明。 我们使用 [GL2] 中的定义和记号。由于每个边群在其某个端点的稳定子中都是自正规群，根据 [GL2，引理 2.12 (2)], ， $\mathcal{T}(S)$ 群是 S 的扭曲群（见 [Lev]）。

证明的其余部分沿用 [GL2，推论 4.4] 的证明。由于 H 是非初等的，其中心是平凡的（例如见 [Far]）。因此，根据 [Lev，命题 3.1]，，$\mathcal{T}(S)$ 群同构于 $\prod_{e\in\vec{E}(H\backslash S)} C_{H_{o(e)}}(H_e)$ 的一个商群（其中 $\vec{E}(H\backslash S)$ 是 $H\backslash S$ 的有向边集合）——即自然对角映射的像

$$j\colon \prod_{v\in V(\overline{H\backslash S})} Z(H_v) \times \prod_{e\in E(\overline{H\backslash S})} Z(H_e) \to \prod_{e\in\vec{E}(\overline{H\backslash S})} C_{H_{o(e)}}(H_e).$$

令 $v\in V(H\backslash\overline{S})$，并令 e 是与 v 相邻的 $H\backslash S$ 的一条边。假设 H_v 是非初等的。那么，根据引理 6.2，H_v 不是阿贝尔群，且 H_e 在 H_v 中是自正规的。此外，H_v 的中心是平凡的。因此，我们有 $C_{H_v}(H_e)=H_e$ 和 $Z(H_v)=\{1\}$。

因此，对每个 $e\in E(H\backslash\overline{S})$，由 $j(\prod_{e\in E(H\backslash S)} Z(H_e))$ 诱导的边关系将来自 e 的一个选定定向的 H_e 的两个副本等同起来。此外，群 $j(\prod_{v\in V(H\backslash S)} Z(H_v))$ 等于 $j(\prod_{v\in V(H\backslash S),\ H_v\text{阿贝尔}} Z(H_v))$。

这表明 $\mathcal{T}(S)$ 同构于直积

$$\prod_{v\in V(\overline{H\backslash S}),\, H_v \text{ abelian}} \left(\prod_{e\in \mathrm{Inc}_v} C_{H_v}(H_e)\right)/Z(H_v),$$

其中 $Z(H_v)$ 对角地嵌入。令 $v\in V(H\backslash S)$，其中 H_v 是阿贝尔的。那么，对每个 $e\in \mathrm{Inc}_v$，我们有 $C_{H_v}(H_e)=Z(H_v)=H_v$，因此群 $\left(\prod_{e\in\mathrm{Inc}_v} C_{H_v}(H_e)\right)/Z(H_v)$ 是自由阿贝尔群。□

设 $v\in VT_{\mathcal{P}}$。现在我们构造 $\mathrm{Out}^1(H)$ 在 $\mathrm{Out}(H_v)$ 中的像的一个有限指数子群 $\mathrm{IA}(H_v,3)$。

设 v 是刚性的。

根据定理 2.13(8)，$\mathrm{Out}^1(H)$ 的像是有限的。我们令 $\mathrm{IA}(H_v,3)=\{\mathrm{id}\}$。

设 v 是初等的。

在这种情况下，存在 $n\geqslant 1$，使得群 $\mathrm{Out}(H_v)$ 与 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 同构。令 $\mathrm{IA}(H_v,3)$ 为 $\mathrm{Out}^1(H)$ 的像与 $\mathrm{Out}(H_v)$ 的 3 级主合同子群的交集。

设 v 是柔性的。

根据定理 2.13(5)，存在一个紧双曲曲面 Σ_v，使得群H_v 与 $\pi_1(\Sigma_v)$同构。此外，$\mathrm{Out}^1(H)$ 在 $\mathrm{Out}(H_v)$ 中的像与 $\mathrm{MCG}(\Sigma_v)$同构，后者是 Σ_v的映射类群。根据 Ivanov [Iva 的一个结果，即定理 1.7]，存在一个 $\mathrm{MCG}(\Sigma_v)$ 的有限指数子群 $\mathrm{IA}(H_v,\ 3)$，具有以下性质。

(1) 群 $\mathrm{IA}(H_v,\ 3)$ 是无挠的。

(2) 对每个 $\phi\in\mathrm{IA}(H_v,\ 3)$ 以及每个 ϕ 的周期子群 $\mathrm{Per}(\phi)$，都有 $\phi\in\mathrm{Out}(H_v,\ [\mathrm{Per}(\phi)]^{(t)})$。

(3) 假设 K 是 Σ_v 的某个子曲面的基本群。如果 K 的共轭类 $[K]$ 是 ϕ-周期的，那么 $[K]$ 被 ϕ 固定。(4) 如果 $\Phi \in \mathrm{Aut}(H_v)$ 是一个自同构，其像包含于 $\mathrm{IA}(H_v,\ 3)$，那么 H_v 的每个 Φ-周期元素都被 Φ 固定。

令 $\mathrm{IA}^1(H,\ 3)$ 为 $\mathrm{Out}^1(H)$ 中 $\prod_{v\in VT_{\mathcal{P}}}\mathrm{IA}(H_v,\ 3)$的原像。群 $\mathrm{IA}^1(H,\ 3)$是 $\mathrm{Out}^1(H)$的有限指数子群，因此也是 $\mathrm{Out}(H)$的有限指数子群。

令 $\mathrm{IA}(H,\ 3)$ 为 $\mathrm{IA}^1(H,\ 3)$ 中在 $H_1(H,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$上的作用是平凡的有限指数子群。现在我们证明群 $\mathrm{IA}(H,\ 3)$ 满足既定假设的假设条件。

引理 6.4。 群 $\mathrm{IA}(H,3)$ 是无挠的。

证明。 令 F为 $\mathrm{IA}(H,\ 3)$的有限子群。由于 $p_H^V(\mathrm{IA}(H,\ 3))$ 按构造是无挠的，群 F 包含于 $\ker(p_H^V)$中，而后者根据引理 6.3 是无挠阿贝尔群。因此 $F=\{1\}$。 □

命题 6.5。 设 $\phi \in \mathrm{IA}(H,3)$，且 $H' \subseteq H$ 是一个 ϕ-周期有限生成子群。那么 $\phi \in$ 外自同构群$(H,[H']^{(t)})$。

证明。 设 $\mathcal{H}=\{\phi^\ell[H']\}_{\ell\geqslant 0}$。由于 $[H']$ 是 ϕ-周期的，集合 $\mathcal{H}$ 是有限的。令 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 为由定理 2.13 给出的关联 JSJ $(H,\ \mathcal{P}\cup\mathcal{H})$- 初等分解。于是 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 在 ϕ 下保持不变。此外，根据 [GL1，定理 9.18 (3)]，树 $T_{\mathcal{P}}$ 和 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 相容。

令 U 为 $T_{\mathcal{P}}$ 和 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 的极小公共细化（见 [GL1，命题 A.26]）。树 U 具有以下性质。令 $p_{\mathcal{P}}\colon U\to T_{\mathcal{P}}$，并令 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}\colon U\to T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 为自然的 H-等变投影。那么不存在 U 中的边 e，使得 $p_{\mathcal{P}}(e)$ 和 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}(e)$ 都是顶点。根据极小性，由于 ϕ 同时保持 $T_{\mathcal{P}}$ 和 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$，我们可知 ϕ 保持 U，且投影 $p_{\mathcal{P}}$ 和 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 是ϕ-等变的。

断言。 由 ϕ 诱导的$H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 的图自同构是平凡的。

证明。 按照惯例，我们要应用引理 3.5。我们分几个步骤进行。

步骤 *1*。 设 v 是 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 中具有非初等稳定子的一个顶点。那么 ϕ 保持H的 v-轨道。

证明。 由于 H_v 是非初等的，顶点 v 是 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 中由 H_v固定的唯一点。因此，当且仅当 ϕ 保持H_v的 H-共轭类时，ϕ 保持 v 的 H-轨道。证明过程中我们将频繁使用这一等价关系。

考虑 U 中的原像 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}^{-1}(v)$。首先假设 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}^{-1}(v)$ 包含一条边 $\tilde{e}$。由 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 的等变性，如果 ϕ 保持 H-$\tilde{e}$ 轨道不变，那么 ϕ 就保持 H-v 轨道不变，因此我们聚焦于 H-$\tilde{e}$ 轨道。由 U 的极小性，记 $\tilde{e}$ 的内部为 $\mathring{\tilde{e}}$，投影 $p_{\mathcal{P}}$ 限制在 $\mathring{\tilde{e}}$ 上是一个同胚。由于 $\phi\in$ 外自同构群 $^0(H)$，ϕ 保持

H- $p_{\mathcal{P}}(\tilde{e})$ 轨道。由 $p_{\mathcal{P}}$ 的等变性， ϕ 保持 H- $\tilde{e}$ 轨道不变，因而保持 H- v 轨道不变。

现在假设 $p^{-1}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}(v)$ 是一个 $\tilde{v}$顶点。那么， $H_{\tilde{v}} = H_v$。因此， H_v 固定了 $T_{\mathcal{P}}$的顶点 $w = p_{\mathcal{P}}(\tilde{v})$。由于 H_v是非初等的， w也是非初等的。根据 w的性质，我们区分两种情形。

情形 *1*。 顶点 w 是刚性的。

在此情形下，由于 $\phi \in \mathsf{IA}(H, 3)$，外自同构 $\phi_w \in \mathsf{Out}(H_w)$ 是平凡的。因此， ϕ 在 $H_v \subseteq H_w$上作为整体共轭作用。所以， ϕ 保持 v的 H-轨道不变。

情形 *2*。 顶点 w 是柔性的。

那么， H_w 是一个紧双曲曲面的基本群 Σ_w。此外，由于 H_w 的初等子群是循环的， U 中 H_w的最小子树 $U_{H_w} \subseteq p^{-1}_{\mathcal{P}}(w)$ 是一个 H_w-循环分解。根据 [GL1，命题 5.4]，， 树 U_{H_w} 对偶于沿闭测地线对 Σ_w 进行的分解。由于 $\phi_w \in \mathsf{IA}(H_w, 3)$，该分解由 ϕ_w保持。因此， ϕ_w 在图$H_w\backslash U_{H_w}$上平凡作用。由于 $H_v \subseteq H_w$，树U_{H_w} 包含由H_v固定的 U 的唯一顶点 $\tilde{v}$ 。因此， ϕ_w 保持 $\tilde{v}$的 H_w-轨道不变，从而 ϕ 保持 $\tilde{v}$的 H-轨道不变。由于 $H_{\tilde{v}} = H_v$， ϕ 保持 H_v的 H-共轭类不变，因而保持 v的 H-轨道不变。由于我们已经排除了所有情形，这就完成了步骤 1 的证明。■

步骤 *2.* 外类 ϕ 固定$H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的每个叶。

证明。 设 $v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 投影到 $H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的一片叶上。根据步骤 1，如果 H_v 的稳定子是非初等的，那么 v 的 H-轨道由 ϕ固定。

因此我们可以假设 H_v 是初等的。设 $e \in ET_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 是与v相邻的一条边。由于 v 投影到$H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的一片叶上，根据 H 在 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$上的作用的极小性，我们有 $H_e \subsetneq H_v$。因此， H_v 固定 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的一个唯一顶点，所以只需证明 ϕ保持 H_v的 H-共轭类。

假设 $[H_v] \in \mathcal{P}$。由于 $\phi \in \mathsf{Out}^0(H)$，我们看到 ϕ 保持 $[H_v]$。因此，剩下的唯一情况是 H_v 为无限循环的。由于 H 是单端的，群 H_e 在 H_v中具有有限指数。由于 $T_{\mathcal{P}}$ 和 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 相容，群 H_e 固定 $T_{\mathcal{P}}$中的一个点。由于 H_v 是无限循环的，群 H_v 也固定 $T_{\mathcal{P}}$中的一个点 w 。因此， H_v 是 $\phi_w \in \mathsf{IA}(H_w, 3)$的一个周期子群。根据 $\mathsf{IA}(H_w, 3)$的定义， ϕ 固定 H_v的 H-共轭类。步骤 2 的证明到此结束。■

根据步骤 2， ϕ 固定$H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的每一片叶。由于 $\phi \in \mathsf{IA}(H, 3)$， ϕ 在$H_1(H, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$上平凡作用。根据引理 3.6， ϕ 在 $H_1(H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$上平凡作用。根据引理 3.5，$\phi$ 在 $H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 上平凡作用；否则， $H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 是一个圆，而 ϕ 在其上作为旋转作用。因此，为了证明 ϕ 在 $H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$上平凡作用，只需证明 ϕ在 $H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$中固定一个点。

由于 H 是非初等的，树 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 包含一个稳定子非初等的顶点。根据步骤 1， ϕ 固定该顶点的 H-轨道。因此， ϕ 在 $H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$中固定一个点。这就完成了断言的证明。□

根据该断言，外自同构 ϕ 在 $H\backslash T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$上平凡作用。由于 $\phi \in$IA$(H,\ 3)$，它在 $H\backslash T_{\mathcal{P}}$上也平凡作用。此外，由于 U的每条边在 $T_{\mathcal{P}}$ 或 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$中的像都非平凡，$\phi$ 在图 $H\backslash U$上也平凡作用。

令 $[K] \in \mathcal{H}$。那么，K 在 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$中有一个不动点。由于 K 在 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 上的作用是柱状的（定理 2.13(2)），其不动点集有界。令 v_K 为 K的不动点集的中心。令 $\ell > 0$，并令 $\Phi \in \phi^{\ell}$ 满足 $\Phi(K) = K$ 和 $\Phi_{|K} = \mathrm{id}_K$。由 v_K的唯一性，自同构 Φ固定 v_K。因此，K也是 $\phi_{v_K} \in$ Out(H_{v_K})的一个周期子群。这表明，要证明命题 6.5，只需证明：对于每个 $v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$，以及每个满足 $[H'_v] \in \mathcal{H}$的 H_v 的有限生成 ϕ_v-周期子群 H'_v，都有 $\phi_v \in$ Out$(H_v,\ [H'_v]^{(t)})$。因此，我们固定一个顶点$v \in VT_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 以及一个满足 $[H'_v] \in \mathcal{H}$ 的 ϕ_v-周期有限生成子群 $H'_v \subseteq H_v$。我们再次根据 v的性质，区分几种情况。

情形 *1.* 假设 v 是初等非循环的。

那么 H'_v 也在 $T_{\mathcal{P}}$中固定一个点。由引理 2.16，存在 $T_{\mathcal{P}}$ 中一个由 H'_v固定的典范点 w，因此，ϕ 中任何保持 H'_v 的自同构也保持 H_w。

由于 $\phi \in$IA$(H,\ 3)$，ϕ在外自同构群(H_w) 中的像包含于 IA$(H_w,\ 3)$。特别地，对于 H_w中每个 ϕ_w-周期有限生成子群 H'_w，都有 $\phi_w \in$外自同构群$(H_w,\ [H'_w]^{(t)})$。因此，我们有 $\phi_w \in$ 外自同构群$(H_w,\ [H'_v]^{(t)})$。由于 H_v 在H中自正规，H_w 中任何逐点固定 H'_v 的自同构也保持 H_v。因此，我们有$\phi_v \in$ 外自同构群$(H_v,\ [H'_v]^{(t)})$。

情形 *2*。 假设 v 是刚性的。

根据定理 2.13(8)，由 ϕ 诱导的 Out(H_v) 的外自同构 ϕ_v 具有有限阶。令 $U_{H_v} \subseteq p^{-1}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}(v)$ 为 H_v 在 U 中的最小子树（若 H_v 是椭圆的，我们假设 U_{H_v} 是 H_v 的有界不动子树的中心）。H_v-分解U_{H_v} 是 ϕ_v-不变的。

我们断言，ϕ_v 在 $H_v\backslash U_{H_v}$上平凡作用。事实上，令 $e \in EU_{H_v}$。我们需要证明 $\phi_v(e)$ 属于 H_v-轨道中的 e。由于 ϕ 在 $H\backslash U$上平凡作用，存在 $h \in H$使得 $\phi_v(e) = he$。但 ϕ_v 保持 $U_{H_v} \subseteq p^{-1}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}(v)$，因此 $e \in Ep^{-1}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}(v)$ 且 $he \in Ep^{-1}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}(v)$。由 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$的 H-等变性，我们有 $hv = v$ 且 $h \in H_v$。因此，ϕ_v保持 H_v-轨道中的 e，并且 ϕ_v 在 $H_v\backslash U_{H_v}$上平凡作用。这就证明了该断言。

上述断言意味着我们有一个限制同态

$$\langle \phi_v \rangle \to \prod_{w \in VU_{H_v}} \mathrm{Out}(H_w).$$

我们断言，上述同态的核是一个自由阿贝尔群。事实上，根据引理 6.2，群 H_v 是环面相对双曲的。令 $e \in EU_{H_v}$。由 U 的极小性，由于 $p_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}(e)$ 是一个点，e 在 $T_{\mathcal{P}}$ 中的像是一条边。根据引理 6.2，群 H_e 在 $p_{\mathcal{P}}(e)$ 的端点中是自正规的，并且具有非初等稳定子。于是，H_e在 e 的端点的顶点稳定子中是自正规的，而 e 的端点投影到该稳定子上。此外，e 的某个端点具有阿贝尔稳定子，因为 $p_{\mathcal{P}}(e)$ 的某个端点具有

阿贝尔稳定子。因此，根据引理 6.3，上述同态的核是自由阿贝尔群。由于 $\langle \phi_v \rangle$ 是一个有限群，上述同态是单射。

现在证明 ϕ_v 在 $\prod_{w \in VU_{H_v}}$ 外自同构群(H_w) 中的像是平凡的。令 $w \in VU_{H_v}$。则群 H_w 包含于顶点 $p_{\mathcal{P}}(w) = x \in VT_{\mathcal{P}}$ 的顶点稳定子 H_x 中。由于对 H_x 的每个 ϕ_x- 周期有限生成子群 H'_x，都有 $\phi \in \mathrm{IA}(H, 3)\mathrm{Out}(H_x, [H'_x]^{(t)})$。又因为 ϕ_v 在 $\mathrm{Out}(H_w)$ 中的像是有限阶的，所以群 H_w 是一个 ϕ_x-周期子群。根据定理 2.13(4)，$T_{\mathcal{P}}$ 和 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 中的边稳定子都是有限生成的，因此 U 中的边稳定子也是有限生成的。于是，群 H_w 也是有限生成的。因此 $\phi_x \in \mathrm{Out}(H_x, [H_w]^{(t)})$，且 ϕ_v 在 $\mathrm{Out}(H_w)$ 中的像是平凡的。

由于对每个 $w \in VU_{H_v}$，$\langle \phi_v \rangle$ 在 $\mathrm{Out}(H_w)$ 中的像都是平凡的，因此其像

$$\langle \phi_v \rangle \to \prod_{w \in VU_{H_v}} \mathrm{Out}(H_w)$$

是平凡的。这表明 $\phi_v = \mathrm{id}$。

情形 *3*。假设 v 是柔性的。

根据定理 2.13(5)，v 是一个 QH 顶点，且群 H_v 是一个紧双曲曲面 Σ_v的基本群。此外，子群 H'_v 共轭于 Σ_v的一个边界子群 $C_{H'_v}$ 的子群。于是，只需证明 ϕ_v 保持 $C_{H'_v}$ 的一个生成元的共轭类。我们利用引理 4.7证明这一事实。为了应用该引理，只需证明对于每个与 v相邻的 $e \in ET_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$，外自同构 ϕ_e 是平凡的。

设 $e \in ET_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 与 v相邻。注意，由于 H_e 固定了 U的一个顶点，因此它固定了 $T_{\mathcal{P}}$ 的一个顶点 x。设 $\Phi \in \phi$满足 $\Phi(e) = e$。然后，由于 $p_{\mathcal{P}}$的 Φ-等变性，Φ固定 x。由于 H_x 的每个 $\Phi_{|H_x}$-周期元素都被 $\Phi_{|H_x}$固定，H_e 的一个生成元被 Φ固定，因此 Φ 逐元素固定 H_e。根据引理 4.7，ϕ_v 保持 $C_{H'_v}$的一个生成元的 H_v-共轭类。

情况 *4*。假设 H_v 是无限循环群。

设 e 是与 v相邻的一条边。那么 H_e 和 H_v 可公度。因此，只需证明 ϕ_e 是平凡的。设 $\Phi \in \phi$ 满足 $\Phi(e) = e$，于是 $\Phi(H_e) = H_e$。设w 是 e 上异于 v的端点。那么 w 有非初等稳定子，$H_e \subseteq H_w$且 $\Phi(H_w) = H_w$。

如果 w 是刚性的，由情形 2，Φ 在 H_w上作用为整体共轭。由引理 6.2，H_e 在 H_w 中自正规，因此我们看到 Φ 逐元素固定 H_e。

如果 w 是柔性的，那么 H_w 包含在与 w相关联的曲面 Σ_w的一个边界子群中。由情形 3，ϕ 保持 H_w-共轭类，其中包含 Σ_w每个边界分支的一个生成元。特别地，Φ 固定 H_e的一个生成元。至此，最后一种情况的证明以及命题的证明均告完成。 □

命题 6.6. 设 H 是一个单端环面相对双曲群。设 $\Phi \in$ 自同构群(H)满足 $\phi = [\Phi] \in \mathrm{IA}(H, 3)$。$H$ 的每个 Φ-周期元素都被 Φ固定。

证明。 回忆一下，Per(Φ) 是 Φ的周期子群。根据 AGH，定理 5.22]，Per(Φ) 由 [有限生成。设 $\mathcal{H} = \{[\text{Per}(\Phi)]\}$，并设 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 为定理 2.13 给出的相应 JSJ $(H,\ \mathcal{P}\cup\mathcal{H})$-初等分解。则 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 被Φ保留。由于 H 在 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$ 上的作用是 acylindrical（定理 2.13(2)），群 Per(Φ)在 $T_{\mathcal{P}\cup\mathcal{H}}$中固定一个有界子树 T。因此，其中心 $v \in VT$ 被 Per(Φ) 固定，且 H_v被 Φ保留。和之前一样，我们考察所有可能的情形。

假设 v 是抛物型的。由命题 6.1，由于 $\phi \in \text{IA}(H,\ 3)$，我们有 Per($\Phi$) =Fix($\Phi$)。

若 v 是刚性的，则由 ϕ 诱导的 H_v 的外自同构 ϕ_v 是有限阶的。由命题 6.5，我们有 $\phi \in \text{Out}(H,\ [H_v]^{(t)})$。由于 H_v 是非初等的，v 是 H_v的唯一不动点，因此，ϕ 中任何逐元素固定 H_v 的自同构也会固定 v。这表明 ϕ_v 是平凡的外自同构。因此，Φ 通过由 H_v中的元素 h_v 实施的整体共轭作用于 H_v。由于 H 是环面相对双曲的，子群的中心化子是根封闭且阿贝尔的。由于 h_v 的某个幂中心化 Per(Φ)，我们可知 h_v 中心化 Per(Φ)，并且 Φ 逐点固定 Per(Φ)。

断言。 假设 Per(Φ) 包含在 H 的一个循环子群 C 中，且该子群被 Φ保留。那么 Φ 逐元素固定 C 和 Per(Φ)。

证明。 令 t 为 C的一个生成元。根据命题 6.5，Φ 保持 t的 H-共轭类。由于 H 是环面相对双曲群，不存在满足$hth^{-1} = t^{-1}$的 $h \in H$。特别地，Φ 逐元素固定 C 和 Per(Φ)。 □

因此，该断言讨论的是 H_v 为无限循环群的情形。

最后，假设 v 是柔性的，并令 Σ_v 为相应的紧曲面。则 Per(Φ) 包含于 Σ_v 的一个边界子群 C 中，且 C 由 Φ保持不变。根据断言，Φ 逐元素固定 Per(Φ)。证明至此完成。 □

由此我们得到以下直接推论，它蕴含定理 1.1。

推论 6.7。 令 G 为一个环面相对双曲群。存在 $\text{IA}(G, 3)$ 的一个有限指数子群，它是外自同构群(G) 的子群，并具有以下性质。

(1) 群 $\text{IA}(G, 3)$ 是无挠的。*(2)* 对每个 $\phi \in \text{IA}(G, 3)$ 以及每个 ϕ-周期有限生成子群 $H \subseteq G$，都有 $\phi \in \text{Out}(G, [H]^{(t)})$。*(3)* 若 $\phi \in \text{IA}(G, 3)$，则 G 的每个 ϕ-周期共轭类都被 ϕ 固定。*(4)* 若 $\phi \in \text{IA}(G, 3)$，则每个 ϕ-周期 G-自由分裂都被 ϕ 固定。*(5)* 若 $\Phi \in \text{Aut}(G)$ 满足 $[\Phi] \in \text{IA}(G, 3)$，则 G 的每个 Φ-周期元素都被 Φ 固定。

证明。 设 $G = G_1 * \ldots * G_k * F_N$ 是 G 的 Grushko 分解，并设 $i \in \{1, \ldots, k\}$。由引理 6.4 以及命题 6.5 和 6.6，群 $\mathrm{Out}(G_i)$ 有一个满足既定假设的有限指数子群。推论 6.7 的断言随即由定理 4.1、5.1、5.2 和推论 4.10 得出。 □

参考文献

[AGH] N. Andrew、Y. Guerch 和 S. Hughes。相对双曲群的悬挂与 Farrell–Jones 猜想。预印本 [arXiv:2311.14036].[Ali] E. Alibegovi´c。相对双曲群的组合定理。《伦敦数学会通报》37 (2005) 459–466.[BF] M. Bestvina 和 M. Feighn。自由因子复形的双曲性。《数学进展》256 (2014) 104–155.[BFH1] M. Bestvina、M. Feighn 和 M. Handel。自由群的层状结构、树与不可约自同构。《几何与泛函分析》7 (1997) 215–244；勘误 7 (1997) 1143–1143.[BFH2] M. Bestvina、M. Feighn 和 M. Handel。$\mathrm{Out}(\mathrm{F}_n)$ 的可解子群是虚阿贝尔群。《几何专论》104 (2004) 71–96.[BFH3] M. Bestvina、M. Feighn 和 M. Handel。$\mathrm{Out}(\mathrm{F}_n)$ 的 Tits 二择一 I：指数增长自同构的动力学。《数学年刊》151 (2000) 517–623.[BFH4] M. Bestvina、M. Feighn 和 M. Handel。$\mathrm{Out}(\mathrm{F}_n)$ 的 Tits 二择一 II：Kolchin 型定理。《数学年刊》161 (2005) 1–59.[BH] M. Bestvina 和 M. Handel。自由群的列车轨道与自同构。《数学年刊》135 (1992) 1–51.[Bow1] B. Bowditch。双曲群的割点与典范分裂。《数学学报》180 (1998) 145–186.[Bow2] B. Bowditch。相对双曲群。《国际代数与计算杂志》 (3) 22 (2012).[CHL] T. Coulbois、A. Hilion 和 M. Lustig。非唯一遍历性、观察者拓扑以及 $\mathbb{R}$-树的对偶层状结构。《伊利诺伊数学杂志》51 (2007) 897–911.[Coo] D. Cooper。自由群的自同构具有有限生成的不动点集。《代数杂志》111 (1987) 453–456.[CT] D.J. Collins 和 E.C. Turner。自由积自同构的高效代表元。《密歇根数学杂志》41 (1994) 443–464.

[*CV*] *M. Culler* 和 *K. Vogtmann*。图的模空间与自由群的自同构。《数学发明》*84 (1986) 91–120.*[*Dah*1] *F. Dahmani*。收敛群的组合。《几何与拓扑》*7 (2003) 933–963.*[*Dah*2] *F. Dahmani*。关于悬挂与双曲自同构的共轭。《美国数学会汇刊》*368 (2016) 5565–5577.*[*DL*] *F. Dahmani* 和 *R. Li*。自由积和自由群自同构的相对双曲性。《拓扑分析杂志》*14 (2022) 55–92.*[*DS*] *M.J. Dunwoody* 和 *M.E. Sageev*。纤细群上的有限表示群的 *JSJ* 分裂。《数学发明》*135 (1999) 25–44.*[*DW*] *M. Day* 和 *R.D. Wade*。直角阿廷群的相对自同构群。《拓扑学杂志》*12 (2019) 759–798.*[*Far*] *B. Farb*。相对双曲群与自动群及其在负曲率流形中的应用。博士论文，普林斯顿大学，*1994.*[*FH*] *M. Feighn* 和 *M. Handel*。*Out*(F_n)的识别定理。《群、几何与动力学》*(1) 5 (2011) 39–106.*[*Fio*] *E. Fioravanti*。虚拟特殊群的自同构的增长。预印本[*arXiv:2501.*12321].[*FM*] *S. Francaviglia* 和 *A. Martino*。自由积的伸缩因子、度量与列车轨道。《伊利诺伊数学杂志》*59 (2015) 859–899.*[*FMS*] *S. Francaviglia*、*A. Martino* 和 *D. Syrigos*。关于相对不可约自同构在其列车轨道上的作用。预印本 [*arXiv:2108.*01680], 即将发表于《傅里叶研究所年刊》.[*FP*] *K. Fujiwara* 和 *P. Papasoglu*。有限表示群的 *JSJ* 分解与群复形。《几何与泛函分析》*16 (2005) 70–125.*[*GH*1] *V. Guirardel* 和 *C. Horbez*。自由积与非有理树的代数层状。《代数与几何拓扑》*(5) 19 (2019) 2283–2400.*[*GH*2] *V. Guirardel* 和 *C. Horbez*。相对因子图的边界与自由积自同构的子群分类。《几何与拓扑》*26 (2022) 71– 126.*[*GH*3] *V. Guirardel* 和 *C. Horbez*。*Out*(F_N) 的测度等价刚性。预印本 [*arXiv:2103.*03696].[*GL*1] *V. Guirardel* 和 *G. Levitt*。群的 *JSJ* 分解。《星丛》*395 (2017)*，法国数学会。

[GL2] V. Guirardel 和 G. Levitt。相对双曲群的分裂与自同构。《群、几何与动力学》(2) 9 (2015) 599–663.[GL3] V. Guirardel 和 G. Levitt。自由积的外空间。《伦敦数学学会会刊》94 (2007) 695–714.[GL4] V. Guirardel 和 G. Levitt。圆柱树与典范分裂。《几何与拓扑》15 (2011) 977–1012.[Gue] Y. Guerch。自由群的外自同构的根与 Out(F_N)的阿贝尔子群的中心化子。《密歇根数学杂志》75 (2025) 1003–1020.[HK] S. Hensel 和 D. Kielak。通过粘合实现 Nielsen：极限群与自由积。《密歇根数学杂志》(1) 67 (2018) 199–223.[HM1] M. Handel 和 L. Mosher。Out(F_n) 中的子群分解。《美国数学学会回忆录》264 (2020)。[HM2] M. Handel 和 L. Mosher。IA$_n(\mathbb{Z}/3)$ 的几乎阿贝尔子群是阿贝尔的。《密歇根数学杂志》69 (2020) 465–485.[Hor1] C. Horbez。自由积外空间的边界。《以色列数学杂志》(1) 221 (2017) 179–234.[Hor2] C. Horbez。自由积自同构群的 Tits 二择一。《数学发明》240 (2025) 869–901.[Hru] G.C. Hruska。可数群的相对双曲性与相对拟凸性。《代数、几何与拓扑》10 (2010) 1807–1856.[Iva] N. V. Ivanov。Teichm ¨uller 模群的子群。《数学专著译丛》115, 美国数学学会 (1992)。[Kid] Y. Kida。映射类群的测度等价刚性。《数学年刊》171 (2010) 1851–1901.[Kor] M. Korkmaz。不可定向曲面的映射类群。《几何专论》89 (2002) 109–133.[Lev] G. Levitt。双曲群与群图的自同构。《几何专论》。(1) 114 (2005) 49–70.[Lym1] R.A. Lyman。自由积的 CT。预印本 [arXiv:2203.08868].[Lym 2] R.A. Lyman。群图上的火车轨道映射。《群、几何与动力学》16 (2022) 1389–1422.[Mut] J.P. Mutanguha。关于多项式自由交换循环群扩张。预印本[arXiv:2412.16150]。

[RS] E. Rips 和 Z. Sela。有限表示群的循环分裂与典范 *JSJ* 分解。《数学年刊》 (2)**146** (1997) 53–109.[Sel] Z. Sela。（*Gromov*）双曲群与秩一李群中的离散群的结构与刚性。*II*。《几何与泛函分析》**7** (1997) 561–593.[Sen] E. Seneta。非负矩阵与马尔可夫链。《施普林格统计学丛书》。施普林格出版社，纽约，第二版，1981 年。[Ser] J.-P. Serre。雅可比矩阵的刚性 $´e\ du\ fondeur\ de\ Jacobi\ d'´echelon\ \ n \geqslant 3$。H. Cartan 研讨班，1960/1961 年，第 17 讲附录，1961 年。[Sta] J.R. Stallings。关于具有无穷多个端的无挠群。《数学年刊》 (2)**88** (1968) 312–334。

Yassine Guerch 卡昂诺曼底
大学 法国国家科学研究中心
诺曼底大学 LMNO
UMR6139 F-14000 卡昂，法
国电子邮箱：
yassine.guerch@cnrs.fr