arXiv:2601.03949v1 [math.NT] 7 Jan 2026

自然基数和冗余字母表数制中不同表示的集合

Mykola Pratsiovytyi，Oleh Vynnyshyn

摘要。本文研究一种以自然基数$s \geq 2$和冗余字母表 $A_r = \{0, 1, \ldots, r\}$为基础的数制，其中 $s \leq r \leq 2s-2$。我们考察区间 $\left[0, \frac{r}{s-1}\right]$ 内具有唯一表示$\infty x = \sum \frac{\alpha_n}{s^n} \equiv \Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $\underline{\alpha_n} \in A_r$的数所构成集合的拓扑、度量和分形性质。我们建立了数具有唯一表示$_{n=1}$的判据。证明了具有唯一表示的数所构成集合的豪斯多夫–贝西科维奇维数等于 $\frac{\ln(2s-r-1)}{\ln s}$。我们还分析了具有简单周期（单个数字为周期）的纯周期表示的数的表示数量。证明了具有不可数多个不同表示的数所构成的集合具有满勒贝格测度。并根据数的一种表示给出了该数属于此集合的条件。

1. 引言

令 s，r 为固定的自然数，$2 \leq s \leq r \leq 2s-2$；令 $A_r = \{0, 1, \ldots, r\}$ 为一个字母表（数字的集合），$L_r = A_r \times A_r \times \cdots$为由字母表中的元素构成的序列集合。已知 [1, 10]对于任意数 $x \in \left[0; \frac{r}{s-1}\right]$ 存在一个序列$(a_k) \in L_r$ 使得

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^{-k} = \Delta^{r_s}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}. \tag{1.1}$$

数的级数展开式（ $x = \Delta^{r_s}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ （1.1）的符号（缩写）表示 r_s表示数 x，或表示 x 在底数为 s 且字母表为 A_r的数制中。

本研究得到西蒙斯基金会的资助（SFI-PD-Ukraine- 00014586，P.M.，V.O.）。
*2010*年数学主题分类：28A80，11A67，28E15关键词：具有自然基数和冗余字母表的数制；具有唯一表示的数；表示数量有限的数的集合；康托尔集类型；豪斯多夫-贝西科维奇维数。

下文中，数的表示中的括号表示一个周期。显然,

$$\Delta^{r_s}_{a_1a_2\ldots} = \Delta^{r_s}_{a_1a_2\ldots a_m(0)} + \Delta^{r_s}_{0\ldots0a_{m+1}a_{m+2}\ldots} = \Delta^{r_s}_{a_1a_2\ldots a_m(0)} + \frac{1}{s^m}\Delta^{r_s}_{a_{m+1}a_{m+2}\ldots}, \tag{1.2}$$

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} + \Delta^{r_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots} = \Delta^{r_s}_{[\alpha_1+\beta_1][\alpha_2+\beta_2]\ldots[\alpha_n+\beta_n]\ldots}, [\alpha_n+\beta_n] \in A_r.$$

If

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} = \frac{c}{s} + \frac{d}{s^2}, \quad \text{which is equivalent to} \quad s(a-c) = d-b,$$

那么，数的表示中的数对 (a, b) 和 (c, d) 可以相互替换（互为替代）。

字母表 A_r 的冗余性保证了存在这样的数：它们有无限多个，甚至连续统多个不同的 r_s-表示 [12]。这类实数编码数制 [7] 已在多项研究中得到探讨，尤其是 [1, 4]。然而，我们尚未找到关于区间 $\left[0;\ \frac{r}{s-1}\right]$ 中一个数的不同表示数量问题的完整答案。因此，我们继续此前开展的研究，对某些结果作出уточ，并给出更详细的论证。

具有自然基数和冗余字母表的数制已用于随机变量分布理论，尤其是无限伯努利卷积 [10, 5, 9]，、分形理论 [6]，、数值级数几何 [11, 3]，、具有分形性质的局部复函数理论 [8]，等领域。它们自然地出现在这些理论的交汇处。

2. 具有纯周期表示和简单周期的数

引理 2.1. 每个具有周期为 (c) 的纯周期 r_s- 表示的数 $x_0 \in \left[0;\ \frac{r}{s-1}\right]$，其中 $c \in \{0, r\} \cup \{r-s+2, \ldots, s-2\}$，都有唯一表示。

证明。 如果 $c \in \{0, r\}$，则结论显然。考虑数$x_0 = \Delta^{r_s}_{(r-s+1+m)}$，其中 $m \in \{1, 2, \ldots, 2s-r-3\}$。假设该数 x_0 存在另一个 r_s-表示 $\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$。由于这些表示不同，存在最小的 k，使得 $\alpha_k \neq c$。我们分以下情况讨论:

1. 若 $\alpha_k > c$，那么，考虑到（1.2），我们有

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} \geq \Delta^{r_s}_{\alpha_k(0)} \geq \Delta^{r_s}_{[c+1](0)} = \Delta^{r_s}_{c(s-1)} > \Delta^{r_s}_{c(c)},$$

因为 $c < s-1$。这与以下事实矛盾： $\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ and$\Delta^{r_s}(c)$ 是同一个数的不同表示。

2. 如果 $\alpha_k < c$，那么

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\cdots} \le \Delta^{r_s}_{\alpha_k(r)} \le \Delta^{r_s}_{[c-1](r)} = \Delta^{r_s}_{c(r-(s-1))} < \Delta^{r_s}_{c(c)},$$

因为 $c > r-(s-1)$。这再次导致矛盾： $\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$和 $\Delta^{r_s}(c)$ 是同一个数的表示。□

引理 2.2。每个满足 $x_0 \in \left[0;\ \frac{r}{s-1}\right]$ 且具有周期为 (c)、其中 $c \in \{1,2,\ldots,r-s,s,s+1,\ldots,r-1\}$ 的纯周期 r_s 表示的数，都有不可数多个不同表示。

证明。如果 $c \in \{1,2,\ldots,r-s\}$，那么对于每一对相邻数字 cc，都存在一对可相互替换的数字 $(c-1,c+s)$。如果 $c \in \{s,s+1,\ldots,r-1\}$，那么对于数字对 cc，另一种选择是 $(c+1,c-s)$。由于该数 x_0 的 r_s 表示中，有无穷多个位置上的相邻数字对可以替换，因此我们得出结论： x_0 有不可数多个不同表示。□

引理 2.3。每个具有周期为 (c) 的纯周期 r_s-表示的数 $x_0 \in \left[0;\ \frac{r}{s-1}\right]$（其中 $c \in \{r-s+1,s-1\}$）都拥有一个由不同 r_s-表示组成的无限集合。

证明。如果 $c = s-1$，则等式成立

$$\Delta^{r_s}_{(s-1)} = \Delta^{r_s}_{s(0)} = \Delta^{r_s}_{[s-1]s(0)} = \Delta^{r_s}_{[s-1][s-1]\ldots[s-1]s(0)}$$

，且给定的数拥有一个表示的无限集合。如果 $c = r-s+1$，则同样有

$$\Delta^{r_s}_{(r-s+1)} = \Delta^{r_s}_{[r-s](r)} = \Delta^{r_s}_{[r-s+1][r-s](r)} = \Delta^{r_s}_{[r-s+1]\ldots[r-s+1][r-s](r)}.$$

因此，数 x_0 拥有一个表示的无限集合。□

3. 具有唯一表示的数

下面的陈述是显而易见的。

引理 *3.1*。*</style}*数 $x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ 有唯一的 r_s 表示，当且仅当数 $x' = \Delta^{r_s}_{[r-\alpha_1][r-\alpha_2]\ldots[r-\alpha_n]\ldots}$ 有唯一的表示。

事实上，如果数 x 有另一个表示 $\Delta^{r_s}_{\beta_1\ldots\beta_n\ldots}$，其中 $\beta_k \neq \alpha_k$ 对某个 k 成立，那么 $\Delta^{r_s}_{[r-\beta_1][r-\beta_2]\ldots[r-\beta_n]\ldots}$ 就是该

数 x' 的另一个表示。反过来，反方向也同样成立。这与该数的 r_s 表示的唯一性相矛盾。

定理 3.2（数表示的唯一性判据）。数 $x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ 属于区间 $\left(0, \frac{r}{s-1}\right)$ 时，若要使其具有唯一的 r_s 表示，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，以下两个条件成立是充要的：

(1) $\Delta^{r_s}_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{k+n}\ldots} < 1$ *or* $\alpha_k = r$;
(2) $\Delta^{r_s}_{[r-\alpha_{k+1}][r-\alpha_{k+2}]\ldots[r-\alpha_{k+n}]\ldots} < 1$ *or* $\alpha_k = 0$.

证明。**必要性**。设数 $x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ 具有唯一的 r_s 表示。我们证明条件 1) 和 2) 均成立。

由于 $0 \neq x \neq \frac{r}{s-1}$，存在 k，使得 $\alpha_k \neq r$。考虑数$x_k = \Delta^{r_s}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+n}\ldots}$。假设 $x_k \geq 1$。

若 $x_k = 1$，则 $x_k = \Delta^{r_s}_{(s-1)} = \Delta^{r_s}_{[s-1]s(0)}$，因此 $x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_k(s-1)} = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_k[s-1]s(0)}$，这与数 x 的 r_s 表示的唯一性矛盾。

假设 $x_k > 1$。那么，在 x_k 的表示的数字中存在 $\alpha_{k+j} > s-1$；我们取这样的 j 中最小的一个。如果 $j = 1$，那么

$$x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k+1][\alpha_{k+1}-s]\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots}.$$

如果 $\alpha_{k+1} \leq s-1$，那么

$$x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots[\alpha_{k+j-1}+1][\alpha_{k+j}-s]\alpha_{k+j+1}\ldots}.$$

在这两种情况下，我们都得到数 x 的另一个 r_s-表示，这与其唯一性相矛盾。这些矛盾证明了条件 1)。

条件 2) 的证明类似。此外，它可直接由条件 1) 和前一个引理推出。

充分性。假设对于数 $x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$，条件 1) 和 2) 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立，并且存在另一个表示 $x = \Delta^{r_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$。那么存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\alpha_k \neq \beta_k$，而对于所有 $j < k$ 都有 $\alpha_j = \beta_j$。

假设 $\alpha_k > \beta_k$。那么 $\alpha_k \neq 0$，根据条件 2) 我们有

$$\Delta^{r_s}_{(r)} - \Delta^{r_s}_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} = \Delta^{r_s}_{[r-\alpha_{k+1}][r-\alpha_{k+2}]\ldots[r-\alpha_{k+n}]\ldots} < 1.$$

那么 $\Delta^{r_s}{}_{(r)} - 1 < \Delta^{r_s}_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{k+n}\ldots}$，但是

$$\Delta^{r_s}_{(r)} - 1 = \Delta^{r_s}_{(r)} - \Delta^{r_s}_{(s-1)} = \Delta^{r_s}_{(r-s+1)} < \Delta^{r_s}_{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{k+n}\ldots}.$$

因此

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_k(r-s+1)} = \frac{\alpha_k}{s} + \frac{1}{s}\Delta^{r_s}_{(r-s+1)} < \frac{\alpha_k}{s} + \frac{1}{s}\Delta^{r_s}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+n}\ldots} = \Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+n}\ldots}.$$

然而，

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_k(r-s+1)} = \Delta^{r_s}_{[\alpha_k-1](r)},$$

因此

$$\Delta^{r_s}_{[\alpha_k-1](r)} < \Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+n}\ldots}.$$

因此，

$$\Delta^{r_s}_{\beta_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\ldots} \le \Delta^{r_s}_{\beta_k(r)} \le \Delta^{r_s}_{[\alpha_k-1](r)} < \Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots},$$

从而

$$\Delta^{r_s}_{\beta_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\ldots} < \Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots}.$$

因此，在 $\alpha_k > \beta_k$ 的情况下，我们得出了与“存在数 x 的另一种表示”这一假设相矛盾的结论。

现在假设 $\alpha_k < \beta_k$。根据条件 **1)**，我们有

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} < \Delta^{r_s}_{[\alpha_k+1](0)}$$

以及 $\alpha_k \neq r$。

此外，

$$\Delta^{r_s}_{[\alpha_k+1](0)} \le \Delta^{r_s}_{\beta_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\ldots},$$

因此

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} < \Delta^{r_s}_{\beta_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\ldots}.$$

因此，在这种情况下，我们也得出矛盾：假设数 x 存在另一种表示。充分性以及整个定理由此得证。□

注3.3。如果一个数 x 的 r_s-表示具有周期 $(s-1)$ 或 $(r-s+1)$，那么 x 就有无穷多种互不相同的 r_s-表示。

事实上，考虑引理 2.3，我们有

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)} = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n s(0)} = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n[s-1]\ldots[s-1]s(0)},$$

$$\Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(r-s+1)} = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n[r-s](r)} = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n[r-s+1]\ldots[r-s+1][r-s](r)}.$$

引理 3.4. 设 $x_0 \in \left(0, \frac{r}{s-1}\right)$ 是一个具有唯一 r_s-表示$\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$的数。如果对于某个 k，有 $\alpha_k = 0$，那么对于所有 $i < k$，都有 $\alpha_i = 0$。x_0 的表示形式为

$$x_0 = \Delta^{r_s}_{0\ldots0\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+n}\ldots},$$

其中 $0 < \alpha_m < s$、 $\alpha_{m+j} \in \{r-s+1, r-s+2, \ldots, s-1\} \equiv N^{s-1}_{r-s+1}$以及序列$(\alpha_{m+n})$ 不能具有周期$(s-1)$ 或$(r-s+1)$。

证明。由于 $x_0 \neq 0$，其 r_s 表示至少包含一个非零数字。数 x_0 有唯一的 r_s 表示；因此，在其表示中所有相邻数字对里，都不存在可用替代形式 $(a-1, s)$ 替换的数字对 $(a,0)$。因此，若 $\alpha_k = 0$ 且 $\alpha_{k+1} \neq 0$，则对每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $\alpha_{k+j} \neq 0$。数字 α_{k+1} 不能大于 $s-1$，否则数字对 $(0, \alpha_{k+1})$ 就可以用替代形式 $(1, \alpha_{k+1}-s)$ 替换。因此，$0 < \alpha_{k+1} \leq s-1$。

数 x_0 表示的唯一性保证了其 r_s 表示中相邻数字之间不存在可相互替换的数字对，只有在 $r-s+1 \leq \alpha_{k+j} \leq s-1$ 时才可能如此。考虑到上述观察，命题得证。□

引理 3.5. 设 $x_0 \in \left(0, \frac{r}{s-1}\right)$ 是一个具有唯一 r_s 表示的数 $\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$。若对于某个 k，有 $\alpha_k = r$，则对所有 $i < k$，均有 $\alpha_i = r$。x_0 的表示形式为

$$x_0 = \Delta^{r_s}_{r\ldots r\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+n}\ldots}, \ where\ r-s < \alpha_m < r, \alpha_{m+i} \in N^{s-1}_{r-s+1},$$

且序列 (α_{m+n}) 的周期不能是 $(s-1)$ 或 $(r-s+1)$。

证明. 由于 $x_0 \neq \frac{r}{s-1}$，其 r_s 表示包含不同于 r 的数字。假设 $\alpha_k = r$。设存在一个指标 $i < k$，使得 $\alpha_i < r$，并令

$$j = \max\{i : \ \alpha_i < r, \ i < k\}.$$

那么，数对 $(\alpha_j, \alpha_{j+1}) = (\alpha_j, r)$ 存在另一种替换方式，即数对 $(\alpha_j + 1, r-s)$，这与数 x_0 的r_s-表示的唯一性矛盾。因此，数 x_0 的 r_s-表示具有如下形式

$$x_0 = \Delta^{r_s}_{r\ldots r\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots}.$$

假设 $\alpha_m \leq r-s$，那么数对 (r, α_m) 存在另一种替换方式，即数对 $(r-1, \alpha_m+s)$，这与数 x_0 的 r_s-表示的唯一性矛盾。因此，$r-s < \alpha_m < r$。

假设 $\alpha_{m+j} < r-s+1$ 或 $\alpha_{m+j} > s-1$。那么，对于某一对数字 $(\alpha_{m+j}, \alpha_{m+j+1})$，可以指定另一种替换方式，这再次与$x_0$的 r_s-表示的唯一性矛盾。

基于引理也可以得出相同的结论3.1，因为数 $x = \Delta^{r_s}_{r\ldots r\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots}$ 当且仅当数

$$x_0' = \frac{r}{s-1} - x_0 = \Delta^{r_s}_{0\ldots 0[r-\alpha_m][r-\alpha_{m+1}][r-\alpha_{m+2}]\ldots}$$

具有唯一的 r_s-表示。根据引理 3.4， x_0' 的表示必须满足以下条件

$$0 < r - \alpha_m < s \quad \text{and} \quad r - s + 1 \le r - \alpha_{m+1} \le s - 1,$$

这与当前陈述中的条件等价。考虑到上述观察，引理得证。□

定理3.6。 具有唯一 r_s-表示的数 $x \in \left(0, \frac{r}{s-1}\right)$ 的集合 E，恰好由以下数构成：其 r_s-表示不含等于$(s-1)$ 或$\overline{(r-s+1)}$ 的周期，并且具有以下形式之一：

$$\Delta^{r_s}_{c\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},\ \Delta^{r_s}_{00\ldots0a\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},\ \Delta^{r_s}_{rr\ldots rb\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

其中 $0 \le a < s,\ r - s < b \le r,\ \beta_i \in N^{s-1}_{r-s+1}$.

证明。 若一个具有唯一表示的数的 r_s-表示中含有数字 0 或 r，那么，正如前两个引理所证明的，该数的表示具有如下形式

$$\Delta^{r_s}_{00\ldots0a\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots} \quad \text{or} \quad \Delta^{r_s}_{rr\ldots rb\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

其中 $0 \le a < s, r - s < b \le r, \beta_i \in N^{s-1}_{r-s+1}$。

考虑那些具有唯一 r_s-表示，且其 r_s-表示完全不使用数字 0 和 r 的数。设 $x_0 = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$是这种类型的一个数。假设对于某个 $k > 1$，数字为 $\alpha_k \in\{1,\ldots,r-s\} \cup \{s, s+1,\ldots,r-1\}$，那么数对 $(\alpha_{k-1},\ \alpha_k)$ 存在另一种替换方式。当 $1 \le \alpha_k \le r - s$时，这种替换是数对 $(\alpha_{k-1} - 1,\ \alpha_k + s)$，；当 $s \le \alpha_k \le r - 1$ 时，另一种替换是数对 $(\alpha_{k-1} + 1,\ \alpha_k - s)$。在这两种情况下，这都与数 x_0的 r_s-表示的唯一性矛盾。因此，

$$\alpha_k \in N^{s-1}_{r-s+1} \quad \text{for all } k \in \{2, 3, \ldots\}.$$

也可以通过应用唯一性判据（定理 3.2）得出相同的结论。□

定理3.7。 具有唯一 r_s表示的数的集合 E 关于点 $2\ \frac{r}{s-1()}$对称，但不是闭集，其豪斯多夫–贝西科维奇分形维数为 $\frac{\ln(2s-r-1)}{\ln s}$ 。

证明。 容易验证，如果数 $x = \Delta^{r_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ 属于集合 E，那么数 $x' = \Delta^{r_s}_{[r-\alpha_1][r-\alpha_2]\ldots[r-\alpha_n]\ldots}$ 也属于 E，反之亦然。因此，集合 E 的对称性显而易见。

形如 $\Delta^{r_s}_{0\ldots0\,a\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\,(c)}$ 的每个点，其中 $c\in\{s-1,r-s+1\}$,k $k\in\mathbb{N}$ 是集合 E的极限点，但不属于该集合。因此，集合 E 不是闭集。

令 D 表示所有其 r_s 表示的周期为 $(s-1)$ 或 $(r-s+1)$ 的数所组成的集合。如上所述， $E\cap D=\varnothing$。众所周知，任何可数集的勒贝格测度和豪斯多夫–别西科维奇维数均为零。因此，在度量问题中可以忽略这类集合。

引入以下记号。对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，定义

$$E^a_{0n}=\{x:\ x=\Delta^{r_s}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}a\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},\beta_n\in N^{s-1}_{r-s+1}\},0<a<s;$$

$$E^b_{rn}=\{x:\ x=\Delta^{r_s}_{\underbrace{r\ldots r}_{n}b\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},\beta_n\in N^{s-1}_{r-s+1}\},r-s<b<r;$$

$$\overline{E}^a_{0n}\equiv E^a_{0n}\setminus D,\quad \overline{E}^b_{rn}\equiv E^b_{rn}\setminus D.$$

于是，集合 E 具有如下结构:

$$E=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left[\bigcup_{a=1}^{s-1}\overline{E}^a_{0n}\ \cup\ \bigcup_{b=r-s+1}^{r-1}\overline{E}^b_{rn}\right].$$

所有具有固定 n 的集合 E^j_{in} 都彼此等距，且是自相似的。它们中的每一个都与集合相似:

$$C=\{x:\ x=\Delta^{r_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},\beta_n\in N^{s-1}_{r-s+1}\},$$

它由可用经典s 进制数制表示的数构成，所用数字取自集合 N^{s-1}_{r-s+1}。该集合是满足开集条件 [2]的自相似康托型集合。因此，它的相似维数$\log_s($ $2s-r-1)$ 与其豪斯多夫–别西科维奇维数 $\alpha_0(C)$相同。

集合 E 和 C 的豪斯多夫–别西科维奇维数相同，这是维数的可数稳定性所致（$\alpha_0(\bigcup F_i)=\sup\ \alpha_0(F_i)$）。$i$ i

□

4. 具有连续统多个表示的数集

定理 4.1. 一个数 x_0 ，若其某个 r_s-表示 $\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$没有周期 (0) 或(r)，但包含来自集合的无穷多个数字

$$A_r\setminus N^{s-1}_{r-s+1}=\{0,1,2,\ldots,r-s,\ s,s+1,\ldots,r-1,r\},$$

则有连续统多个互不相同的 r_s-表示。

证明。 引理的条件允许以下几种情况:

(1) 该数包含无穷多个零；(2) 该数包含无穷多个等于 r 的数字；
(3) 该数仅包含有限个等于 0 或 r 的数字。

我们分别考虑这些情况。

情况 1。 由于数 x_0 的给定 r_s-表示不具有周期 (0)，序列 (α_k) 中包含无限多对 $(a,\ 0)$，其中$a \neq 0$ 在 x_0的 r_s-表示中作为相邻数字出现。然而，每一对这样的数字都可以替换为另一种形式 $(a-1,\ s)$。存在无限多种此类替换，这意味着数 x_0 的不同 r_s-表示集合具有连续统基数。

情况 2。 第二种情况也类似。由于数 x_0 的 r_s-表示不具有周期 (r)，因此存在无限多对 $(a,\ r)$，其中 $a \neq r$ 在 x_0的r_s-表示中作为相邻数字出现。由于这对数字可以替换为另一种形式，即 $(a+1,\ r-s)$，我们再次得到数 x_0的r_s-表示具有连续统基数。

情形 3。 假设给定的 r_s进制表示中仅有有限个数字等于 0 和 r。那么存在一个属于集合 $\{1,2,\ldots,r-s\}$ 或 $\{s,s+1,\ldots,r-1,r\}$ 的数字 c，在该 r_s进制表示中出现无穷多次。

如果 r_s进制表示 x_0 具有周期 (c)，其中 $c \neq 0$且 $c \neq r$，那么根据引理 2.2，数字 x_0 具有连续统多个不同的r_s进制表示。

另一方面，如果 x_0 的 r_s进制表示不是周期性的，那么序列 (α_k) 中包含无穷多对相邻数字 $(b,\ c)$，使得 $c \neq b \neq 0,\ b \neq r$。如果 c 属于集合 $\{1,2,\ldots,r-s\}$，那么数字对 $(b,\ c)$ 可以进行替代 $(b-1,\ c+s)$。如果 c 属于 $\{s,s+1,\ldots,r-1\}$，那么 $(b,\ c)$ 的替代形式为 $(b+1,\ c-s)$。在这两种情况下，无穷多次进行替代都意味着数字 x_0 的不同 r_s进制表示的集合具有连续统基数。□

定理 4.2。 关于区间 $\left(0,\ \frac{r}{s-1}\right)$ 上的勒贝格测度，几乎所有数都有连续统个不同的 r_s-表示；也就是说，这类数的集合的勒贝格测度等于 $\frac{r}{s-1}$。

证明。令 B 表示所有满足以下条件的数字所组成的集合：至少有一种 r_s-表示不满足前述定理的条件；也就是说，在这种 r_s-表示的数字中，只有有限多个

属于集合 $A_r \setminus N_{r-s+1}^{s-1}$，而其余所有数字都属于集合 $\{r-s+1, r-s+2, \ldots, s-1\}$。

用 B_n 表示所有这样的数的集合：它们的 r_s 进制表示从第 n 位开始不含集合 $A_r \setminus N_{r-s+1}^{s-1}$ 中的任何数字，其中 $n \in \mathbb{N}$。

集合 B_n 中的每一个勒贝格测度都为零，因为对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意的 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A_r^n$，集合

$$\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{r_s} \cap B_n, \quad \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{r_s} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s^i}; \frac{r}{s^n(s-1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s^i} \right]$$

是无处稠密的，且勒贝格测度为零。

显然，

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots$$

and

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \lim_{n \to \infty} B_n.$$

∞ ∞因此，对于勒贝格测度，我们有 $\lambda(B) = \lambda(\bigcup B_n)$ $\leq \sum \lambda(B_n) = n=1$ $n=1$0。因此，满足定理条件的 r_s 进制表示所对应的数集具有满勒贝格测度。□

推论 4.3. 具有有限个或可数个不同 r_s 表示的数集的勒贝格测度为零。

注 4.4. 一个数 $x_0 \in \left[0, \frac{r}{s-1}\right]$ 拥有连续统多个不同表示的性质是典型的。

参考文献

[1] Ya.V. Goncharenko 和 I.O. Mykytyuk。冗余数字集数制中的实数表示及其应用。*Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky*, 5:242–254，2004。[2] J.E. Hutchinson。分形与自相似性。*Indiana Univ. Math. J.*, 30 747，1981 5 713( ): – 。[3] D. Karvatskyi、A. Murillo 和 A. Viruel。广义多重几何序列的成就集。*Results Math.*，79(132):32–37，2024。[4] I.O Mykytyuk 和 M.V. Pratsiovytyi。具有两个冗余数字的二进制数字系统及其相应的数的度量理论。*Scientific Notes of M.P. Dragomanov National Pedagogical University. Series:* 物理与数学科学，4:270–290，2003。[5] M.V. Pratsiovytyi。奇异分布的卷积。乌克兰国家科学院报告，5(5):36–42，1996。[6] M.V. Pratsiovytyi。研究奇异概率分布的分形方法。Nats.Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova，1998。

[7] M.V. Pratsiovytyi。实数的双符号编码及其应用。Nauk. Dumka，基辅，2022。[8] M.V. Pratsiovytyi、I.M. Lysenko、S.P. Ratushniak 和 O.A. Tsokolenko。一个分形自相似网状曲线上的单位质量分布。*Matematychni Studii*，62(1):21–30，2024。[9] M.V. Pratsiovytyi 和 O.P. Makarchuk。由三个同分布冗余数字表示的二进分数所对应的随机变量分布。《乌克兰数学杂志》，66(1):79–88，2022。[10] M.V. Pratsiovytyi 和 S.P. Ratushniak。具有数制表示的独立数字、自然基数和冗余字母表的随机变量的奇异分布。*Matematychni Studii*，63(2):199–209，2025。[11] Ya. Vynnyshyn、V. Markitan、M. Pratsiovytyi 和 I. Savchenko。其子和集合为康托区间的正项级数。《国际几何中心论文集》，12(2):26–42，2019。[12] Y. Zou、J. Lu 和 V. Komornik。多重展开的豪斯多夫维数。*Jour- nal of Number Theory*，233:198–227，2022。

M. Pratsiovytyi乌克兰国家科学院数学研究所，德拉戈马诺夫乌克兰国立大学
电子邮箱： prats4444@gmail.com*ORCID*： 0000-0001-6130-9413

O. Vynnyshyn乌克兰国家科学院数学研究所电子邮箱： oleh.vynnyshyn@imath.kiev.ua*ORCID*：
0009-0006-7113-1501