arXiv:2601.03952v1 [math.OA] 7 Jan 2026

广义富斯滕伯格边界的刚性及其在中间交叉积中的应用

TATTWAMASI AMRUTAM 与 Chunlin Liu

谨以此文致敬 *Swadheen Pattanayak*教授，祝贺他 *85* 岁生日。

Abstract. 我们为离散群在紧空间上的作用发展了一套相对边界理论，并用它推导出约化交叉积的刚性结果。对于作用在紧空间 X 上的离散群 Γ 及其子群 H，我们构造了一个覆盖 X 的通用边界；它作为 Γ 系统是极小的，并且相对于 H 强近端。当 $H \leq_c \Gamma$ 可公度且 H 在 X 上的作用是极小时，我们证明，这个通用边界以一种规范的Γ等变方式与 (H, X) 的广义 Furstenberg 边界一致，从而统一并推广了先前关于相对边界的结果。

作为应用，给定一个 Γ-空间 X，我们引入 X-丰足子群的概念，这是针对交叉积量身定制的丰裕性推广。在自然的动力学假设下，这带来了新的不可约 C^*-包含例子。在附加假设下，我们还证明，每个中间C^*-代数都是一个交叉积。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. 子群的普适强近端扩张 17 4. 相对边界扩张定理 21 5. X-丰足 32 参考文献 40

1. Introduction

边界为研究群作用、刚性现象与算子代数结构之间的相互作用提供了一个统一框架。对于离散群Γ，Furstenberg 边界 $\partial_F\Gamma$ 被刻画为普适的极小强近端 Γ空间，并已成为分析交叉积 [11], 的 C^*单性 [21], 理想结构以及边界可 amenable性的基础对象。

日期: 2026年1月8日。

越来越多的研究表明，$C_r^*(\Gamma$的微妙代数性质，反映在其对 $\partial_F\Gamma$ 的作用动力学及其拓扑因子 [31]中。

在许多值得关注的情形中，给定的并非孤立的群，而是一个群作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 以及一个子群 $H \leq \Gamma$，后者编码了额外的几何或代数结构。例如，Hecke 对（若G, H的每个双陪集都是 H 的有限个左陪集之并，则称G, H为 Hecke 对）、局部紧群中的格、点或子空间的稳定子，以及源自算术或几何构造的作用。在这类情形下，自然会提出这样的问题：相对于底空间 X，边界现象会如何表现，又会如何与 Γ的子群结构相互作用。

沿袭 Glasner 的思路，广义富斯滕伯格边界 $\partial_F(\Gamma, X)$ 被定义为 Γ-空间 X [17,30]的泛极小强近端扩张。当 X 是一个点时，这一构造还原为经典 Furstenberg 边界；但一般而言，它编码了与 X上的动力学相容的最强近端行为。广义富斯滕伯格边界已在若干背景中出现，尤其是在 Naghavi [30] 和 Kawabe [23], 近期的工作中，他们证明，在作用 $\partial_F(\Gamma, X)$ 极小的条件下，作用的自由性刻画了约化交叉积 $C(X) \rtimes_r \Gamma$ 的单性 $\Gamma \curvearrowright X$。尽管取得了这些进展，但描述广义边界在群与子群之间转换时如何变化——类似于 Furstenberg 边界的理论——仍未发展起来。因此，我们的首个主要结果是，为任意子群构造一个泛广义 H-边界（定义见第2节）。

定理 A。设 $H \leq \Gamma$。设 X 为一个 Γ-空间，且该空间是 H-极小的。考虑所有满足以下条件的 Γ-扩张 $\pi : Y \to X$ 所构成的类 $\mathcal{C}$：

(i) Y 是 Γ-极小的；(ii) π 是关于 X的 H-强近端扩张。

$\mathcal{C}$中的态射是 Γ-等变连续映射 $f\colon Y \to Y'$，满足 $\pi' \circ f = \pi$。那么，在 $\mathcal{C}$中存在一个泛对象 $\pi_{RB}\colon RB_X(\Gamma, H) \to X$：对于每个 $\pi : Y \to X \in \mathcal{C}$，存在一个 Γ-态射 $f\colon RB_X(\Gamma, H) \to Y$，使得 $\pi \circ f = \pi_{RB}$。

现在，给定 $H \leq \Gamma$，能否将 $RB_X(\Gamma, H)$ 与广义 Furstenberg 边界 $\partial_F(H, X)$ 识别为（作为关于 X的 Γ-扩张）？要回答这个问题，我们首先必须问：能否将广义边界 $\partial_F(H, X)$ 提升为广义Γ-边界？当 X 是一个单点空间时，Li 和 Scarparo [28]（另见 [13]）证明了：当 $H \leq_c \Gamma$ 可公度时，可以通过对作用作典范延拓，从 H的 Furstenberg 边界重构出 Γ的 Furstenberg 边界。Breuillard、Kalantar、Kennedy 和 Ozawa [11], 提出的关于 C^*-单性的基于边界的方法中，相关技术也发挥了关键作用；在这些方法中，首先针对正规子群 $N \lhd \Gamma$ 证明了相对于 Furstenberg 边界的此类扩张。

在本文中，我们将 Li 和 Scarparo 的结果推广到广义 Furstenberg 边界的情形。回顾一下，如果满足以下条件，则称 $H \leq \Gamma$ 为一个 可公度子群：

对于所有 $g \in \Gamma$，$H \cap gHg^{-1}$ 在 H 和 gHg^{-1} 中的指数均有限。尽管可公度子群与正规子群具有某些大尺度特征，但它们缺乏共轭等变性，因此经典的延拓论证并不适用。主要的技术难点在于构造一个 Γ-作用于 $\partial_F(H, X)$，使其与给定的 H-作用相容，并且不依赖于辅助的有限指数选择。

我们的第二个主要结果表明，在对基空间作用施加自然的极小性假设后，可以克服这一困难。我们证明，广义 Furstenberg 边界 $\partial_F(H, X)$ 具有将 H-作用典范且唯一地扩展到 Γ 的扩张；并且在此扩展作用下，$\Gamma \curvearrowright \partial_F(H, X)$ 是 X 上的相对边界，从而可将其识别为 $RB_X(\Gamma, H)$。

定理 B。设 X 是一个极小的 Γ-空间，且 $H \leq \Gamma$ 是一个可公度子群。那么，广义 Furstenberg 边界 $\partial_F(H, X)$ 具有将 H-作用扩展为极小 Γ-作用的唯一扩张。此外，在此扩展作用下，$\partial_F(H, X)$ 与 $\partial_F(\Gamma, X)$ H-等变同胚。

该证明依赖于有限指数限制下极小强近端作用的刚性现象，以及对沿 H 的共轭子群交集进行典范扩张的细致分析。

当 X 是一个 H-极小的 Γ-空间且 $H \leq_c \Gamma$ 可公度时，定理 A 中构造的普适广义 H 边界 $RB_X(\Gamma, H)$，与定理 B 中赋予扩展 Γ 作用的广义 Furstenberg 边界 $\partial_F(H, X)$ 相一致（见定理 4.16）。特别地，存在一个 Γ-等变同胚 $RB_X(\Gamma, H) \cong \partial_F(H, X)$。

在本文的第二部分，我们探讨边界延拓理论的算子代数后果。我们的方法受到 Powers 平均原理的启发；这一原理是离散群的约化群 C^*-代数具有单性的基础，此后也成为研究 C^*-单性的核心机制 [19,24]。基于这一思想，第一作者提出了**丰满子群** [1]，的概念，它给出了由环境群的子群确定的动力平均判据。最近，第一作者与 Ursu [8] 发展了广义 Powers 平均框架，将这一机制扩展到交换 C^*-代数的交叉积。

受这些进展的启发，我们引入 X-**丰足子群**的概念（见定义5.1），它刻画了与给定 Γ-空间 X 及其广义富斯滕伯格边界相适配的一种相对平均形式。这个概念可视为丰足性的相对类比，适用于如下形式的交叉积$C(X) \rtimes_r \Gamma$（约化交叉积的更多内容见第2.2 节）。利用 X-丰足性，以及环境群的广义富斯滕伯格边界与其子群的广义富斯滕伯格边界之间的关系，我们得到了一些新的不可约C^*-包含。

定理 C。设 $\pi : X \to Y$ 是一个连续的 Γ-等变满射，其中X，Y 是 Γ-空间。假设存在一个子群 $H \leq \Gamma$ 使得 $H \curvearrowright$

Y 是极小的，且 H 是 Y-丰足的。那么，每个中间 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 满足$C(Y) \rtimes_r H \subseteq \mathcal{A} \subseteq C(X) \rtimes_r \Gamma$，都是单的。

在附加的动力学假设下，我们还得到了关于中间 C^*-代数的刚性结果。具体而言，我们证明，在 X-丰足性成立时，C^*与 $C(X) \rtimes_r H$和 $C(X) \rtimes_r \Gamma$之间的每个中间 C^*-代数本身都是一个交叉积 [1] -代数。这将 [35] 的主要刚性定理从群情形推广到了相对交叉积的情形，并得到了超越 Suzuki [1, 2, 4]和第一作者此前 $\mathbb{E}$ 所得结果的新例类。下文中，

定理 D。令 X 为一个 Γ-空间，$\mathcal{B}$ 为一个含幺的 Γ-C^*-代数。考虑$C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}$及其对角作用。令 $N = \ker(\Gamma \curvearrowright \mathcal{B})$。假设 N 是X-丰足的，且 $N \curvearrowright X$ 是极小的。那么，对于每个满足以下条件的中间 C*-代数 $\mathcal{A}$

$$C(X) \rtimes_r \Gamma \subseteq \mathcal{A} \subseteq (C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$$

我们有 $E(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$。此外，若 Γ 具有逼近性质（AP），则 $\mathcal{A}$ 是如下形式的交叉积：$(C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$。这里，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$的一个 Γ-不变C^*-子代数。

值得强调的是，这类刚性现象本质上是相对的；当 X 是一个点时，不能期待它们成立。事实上，子群的丰裕性会迫使环境群 C^*-单。尽管 Amrutam–Glasner–Glasner [3] 的研究已知，对于非 amenable 群，约化群 C^*-代数存在并非交叉积的中间C^*-代数，但非平凡底空间 X 的存在对于恢复交叉积刚性起着关键作用。

论文结构。本文结构如下。第2节回顾相对边界、强近端扩张的必要背景，并建立有限指数子群的基本稳定性结果。第3节通过逆极限论证构造万有广义边界 $RB_X(\Gamma, H)$，并证明定理A。第4 节聚焦于动力学扩张问题；我们证明相对边界扩张定理（定理B），并通过子群的中心化子分析扩展作用的自由性（见定理4.7）。本节还证明，对于可公度子群，通用边界与扩展广义 Furstenberg 边界一致（定理4.16）。最后，第5 节专门讨论应用。我们在此引入 X-丰足性的概念，并证明中间交叉积的单性与刚性结果（定理C 和D），最后给出若干具体示例类别。

致谢。C. Liu 获得了博士后研究人员资助计划和中国博士后科学基金项目编号 BX20250067 的资助，并

获得了中国博士后科学基金基金编号 2025M773074 的资助。作者感谢 Yongle Jiang 抽出时间阅读本文几近完整的初稿，并提出多条意见和修正建议。第一作者感谢 Mehrdad Kalantar 进行的多次有益讨论。我们还感谢 Kang Li、Eduardo Scarparo 和 Zahra Naghavi 提出的许多有用意见。

2. Preliminaries

2.1. **动力学**。 本小节将建立支撑本文结果的动力学框架。我们回顾 Γ-空间和因子映射理论，重点讨论扩张的层级——近端、强近端和极小扩张——该理论推广了对边界作用的经典研究（最初由 [17]引入）。这一分析中的关键工具是Glasner刚性引理的相对版本，它断言广义 Furstenberg 边界是其范畴中的唯一泛对象。最后，我们考察一些具体构造，说明除平凡的乘积结构之外，广义边界也确实存在。

设 X 是一个 Γ-空间，即在连续作用Γ下， X 是一个紧豪斯多夫空间。若对每个 $g \in \Gamma \setminus e$ ，不动点集 $\mathrm{Fix}_X(g)$ 在 X中的内部均为空，则称作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 为拓扑自由。若闭不变子集 $B \subset X$满足对每个 $x \in B$ 均有$\Gamma x = B$，则称其为 Γ-极小的。当作用群由上下文明确时，我们称 B 为极小子集，并省略 Γ。令 $\mathrm{Prob}(X)$ 表示 X上的博orel概率测度空间。对于 $\mu \in \mathrm{Prob}(X)$，记 $\mathrm{supp}(\mu)$ 为 μ的（拓扑）支集。

两个 Γ-空间之间的映射 $\pi_Y\colon Y \to X$ 称为因子映射，如果 π_Y 是连续满射且满足 $g \circ \pi_Y = \pi_Y \circ g$.

定义 2.1. 设 X 和 Y 是两个 Γ-空间，且 $\pi_Y : Y \to X$ 是一个因子映射。若对于任意 $y, y' \in \pi_Y^{-1}(x)$ 对某个$x \in X$成立，都存在一个序列 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得 (Y, π_Y) 称为近端扩张，当且仅当

$$\lim_{i\to\infty} g_i y = \lim_{i\to\infty} g_i y'.$$

定义 2.2. 设 X 和 Y 是两个 Γ-空间，且 $\pi_Y : Y \to X$ 是一个因子映射。那么

(i) 若 Y是极小的，则 (Y, π_Y) 称为极小扩张。(ii) 若对于任意 $\nu \in \mathrm{Prob}(Y)$，当 $\mathrm{supp}(\nu) \subset \pi_Y^{-1}(x)$ 对某个 $x \in X$成立时，都存在 $y \in Y$ 使得 $\delta_y \in \Gamma\nu$，则 (Y, π_Y) 称为强近端扩张。

为了建立扩张之间的层级关系，我们首先验证强近端性的概念确实强化了标准近端性。

命题 2.3。 设 X 和 Y 是两个 Γ-空间，并设 $\pi_Y : Y \to X$ 是一个因子映射。若 (Y, π_Y) 是一个强近端扩张，则它是一个近端扩张。

证明。 对于任意 $y, y' \in \pi_Y^{-1}(x)$，存在某个 $x \in X$，使得

$$\mathrm{supp}\left(\frac{1}{2}(\delta_y + \delta_{y'})\right) \subset \pi_Y^{-1}(x).$$

由于 (Y, π_Y) 是强近端的，因此存在一个网 $\{t_i\}_{i\in I} \subset \Gamma$ 以及 $y^* \in Y$，使得

$$\lim_{i\in I} \frac{1}{2}\left(\delta_{t_i y} + \delta_{t_i y'}\right) = \lim_{i\in I} t_i \frac{1}{2}\left(\delta_y + \delta_{y'}\right) = \delta_{y^*}.$$

因此，有

$$\lim_{i\in I} t_i y = \lim_{i\in I} t_i y' = y^*.$$

由于 $(y, y') \in Y \times Y$ 是任意的，(Y, π_Y) 是近端的。 □

近端扩张对扩张空间施加了强结构约束。具体而言，在极小基底上，近端性的收缩特性迫使极小子集具有唯一性。尽管证明很直接，我们仍将其给出以求完整。

引理 2.4。设 Y 是一个 Γ-空间，并设 X 是一个极小 Γ-空间。假设 $\pi_Y\colon\ Y \to X$ 是一个近端扩张。那么 Y 有唯一的极小子集。

证明。反设存在两个不同的极小子集Y_1 和 Y_2。由于 π_Y 是满射，且 $\pi_Y(Y_i)$、$i = 1,2$ 是闭且不变的，因此可知

$$\pi_Y(Y_1) = X = \pi_Y(Y_2).$$

取 $y_i \in Y$、$i = 1$，2，使得 $\pi(y_1) = \pi(y_2)$。由于 π_Y 是近端的，因此可得

$$\lim_{i\to\infty} g_i y = \lim_{i\to\infty} g_i y'.$$

这意味着 $Y_1 = Y_2$，矛盾。 □

本文的一个核心主题是群及其子群的动力学之间的关系。我们首先注意到，近端性可传递到有限指数子群。

引理 2.5。设 X 是一个极小的 H-空间，且 $K \le H$ 是一个子群，满足$[K\colon\ H] < \infty$。设 $\pi_Y\colon\ Y \to X$ 是一个因子映射。如果 π_Y 是 H-近端的，那么 π_Y 是 K-近端的。

证明。由于 π_Y 是 H-近端的，对于任意 $(y,\ y') \in Y \times Y$，存在 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\lim_{i\to\infty} h_i y = \lim_{i\to\infty} h_i y'.$$

由于 $[K\colon\ H] < \infty$，存在 $h \in H$ 以及一个子列 $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 t

$$\lim_{i\to\infty} h k_i y = \lim_{i\to\infty} h k_i y'.$$

由连续性可知，取子列后可得

$$\lim_{i\to\infty} k_i y = \lim_{i\to\infty} k_i y',$$

这意味着 π_Y 是 K-近端的，因为 $(y,\ y') \in Y \times Y$ 是任意的。 □

同样，在我们将注意力限制在正规子群和近端空间时，极小性在有限扩张下表现良好。这使我们能够将 H 的动力学性质传递到其有限指数子群。

引理 2.6. 设 X 是一个极小 H-空间，且 $K \leq H$ 是满足 $[H : K] < \infty$ 的正规子群。设 $\pi_Y : Y \to X$ 是一个因子映射。若 π_Y 是 H-近端的，且 Y 是 H-极小的，则 Y 是 K-极小的。

证明。由于 π_Y 是 H-近端的，由引理 2.5 可知 π_Y 是 K-近端的。结合引理 2.4，可得 Y 有唯一的 K-极小子集，记为 M_Y。

现在我们证明 $Y = M_Y$，从而证明 Y 是 K-极小的。为此，我们考虑所有 $h \in H$ 对应的集合 hM_Y。由于 K 是 H 的正规子群，对任意 $k \in K$，存在 $k' \in K$ 使得 $kh = hk'$。由于 M_Y 是 K- 不变的，因此

$$k(hM_Y) = hk'M_Y = hM_Y.$$

因此，对于所有 $h \in H$，$hM_Y \subset M_Y$。于是，M_Y 是 H-不变闭子集，这意味着 $M_Y = Y$。□

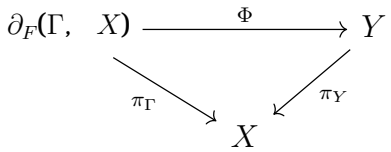
我们回顾文献 [17] 中的以下定义。

定义 2.7. 设 X 是一个 Γ-空间。(Γ, X)-边界是满足以下条件的一对 (Y, π_Y)：(Y, π_Y) 是 X 的一个极小强近端扩张。

定义 2.8（广义 Furstenberg 边界）。如果 $(\partial_F(\Gamma, X)\ \pi_\Gamma)$ 具有以下泛性质，则称其为 (Γ, X) 的广义 ***Furstenberg*** 边界：对于每个 (Γ, X)-边界 (Y, π_Y)，存在唯一的连续 Γ-等变满射

$$\Phi : \partial_F(\Gamma, X) \to Y$$

使得交换图



可交换，即 $\pi_Y \circ \Phi = \pi_\Gamma$。

注 2.9. 广义 Furstenberg 边界存在，并且在 Γ-同构意义下唯一；也就是说，如果 $(Y,\ \pi_Y)$ 是另一个具有相同泛性质的 $(\Gamma,\ X)$-边界，那么存在唯一的 G-同构 Ψ：$\partial_F(\Gamma,\ X) \to Y$ 满足 $\pi_Y \circ \Psi = \pi_G$（见 [30, 第 7] 页）。

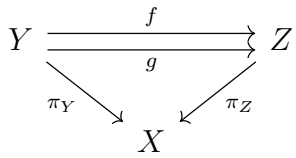
在 X 仅由一个点构成（且具有平凡的 Γ-作用）的特殊情形下，$(\partial_F(\Gamma,\ X)\ \pi_\Gamma)$ 化为经典 Furstenberg 边界 $\partial_F\Gamma$。

经典 Furstenberg 边界的一个定义性特征是其刚性：唯一的等变自映射是恒等映射。下面的引理将这一基本刚性原理推广到扩张的相对情形。这是 [18, 第二章，引理 4。1] 的相对版本。

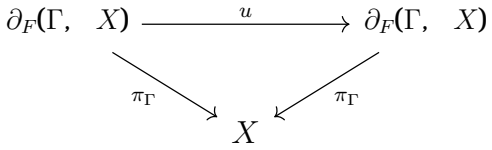
引理 2.10。设 X 是一个 Γ-空间，且 (Y,π_Y) 和 (Z,π_Z) 是两个 (Γ,X)-边界。假设 $f,g:Y\to Z$ 是连续的 Γ- 等变映射，使得

$$\pi_Z\circ f=\pi_Y=\pi_Z\circ g. \tag{1}$$

则 $f=g$，即下列交换图成立：



特别地，任意 Γ-等变连续自映射 $u\ \partial_F(\Gamma,X)$，若满足 $\pi_\Gamma\circ u=\pi_\Gamma$，则为恒等映射，即下列交换图成立。



证明。集合

$$E:=\{y\in Y:f(y)=g(y)\}.$$

我们证明 E 非空、闭且具有 Γ-不变性，因此 $E=Y$，因为 Y 是极小的。

由于 f 和 g 连续，E 是闭的。同时，由于 f，g 是 Γ-等变的，因此 E 是 Γ-等变的。最后，为了证明 E 非空，固定 $y_0\in Y$并考虑测度

$$\mu:=\frac{1}{2}\big(\delta_{f(y_0)}+\delta_{g(y_0)}\big)\in\mathrm{Prob}(Z).$$

注意到

$$\pi_Z(f(y_0))=\pi_Y(y_0)=\pi_Z(g(y_0)),$$

因此

$$\mathrm{supp}(\mu)\subset\pi_Z^{-1}(\pi_Y(y_0)).$$

由于 $(Z,\ \pi_Z)$ 是强近端扩张，存在一个网 $(t_i)_{i\in I}$，其中的元素属于 Γ，以及一个点 $z\in Z$，使得 $\lim_i t_i\mu=\delta_z$ 属于概率测度 $\mathrm{Prob}(Z)$。

另一方面，

$$t_i\mu=\frac{1}{2}\big(\delta_{t_if(y_0)}+\delta_{t_ig(y_0)}\big)=\frac{1}{2}\big(\delta_{f(t_iy_0)}+\delta_{g(t_iy_0)}\big),$$

其中最后一个等式用到了 f 和 g 的 Γ-等变性。因此，有

$$\lim_i f(t_iy_0)=z,\ \text{and}\ \lim_i g(t_iy_0)=z.$$

由 Y的紧致性，存在一个子网 $(t_{i_j}y_0)_j$ 收敛到某个 $y_* \in Y$。由连续性，

$$f(y_*) = z = g(y_*),$$

这意味着 $y_* \in E$。因此， $E \neq \emptyset$。

根据上述讨论，必有 $E = Y$。因此，对于所有 $y \in Y$， $f(y) = g(y)$，即 $f = g$。

对于这一特例，设 $Y = Z = \partial_F(\Gamma, X)$， $\pi_Y = \pi_Z = \pi_\Gamma$，并设 $u : \partial_F(\Gamma, X) \to \partial_F(\Gamma, X)$ 是一个 Γ-等变自同胚，且满足 $\pi_\Gamma \circ u = \pi_\Gamma$。由上述论证，取 $f = u$ 和 $g =$ 恒等映射$_{\partial_F(\Gamma,X)}$，可得 $u =$ 恒等映射$_{\partial_F(\Gamma,X)}$。□

尽管广义富斯滕伯格边界在理论上十分重要，但据我们所知，明确的例子相对较少。以下构造通过提供一类自然的例子来弥补这一不足，这些例子源自对角作用。

例 2.11 （典范边界扩张）。设 Γ是一个非 amenable 群，且 X 是一个极小的 Γ-空间。设 B 是一个非平凡的 Γ-边界。现在我们以典范的方式构造一个（Γ， X）-边界。考虑乘积空间

$$Y := B \times X$$

赋予对角 Γ-作用，并令

$$\pi : Y \longrightarrow X, \qquad \pi(b, x) = x$$

为到第二个坐标的投影。我们断言 π 是一个强近端扩张。设 $\nu \in \mathrm{Prob}(Y)$满足

$$\mathrm{supp}(\nu) \subset \pi^{-1}(x) \quad \text{for some } x \in X.$$

由于 $\pi^{-1}(x) = B \times \{x\}$，测度 ν 支集于 $B \times \{x\}$，因此可写为

$$\nu = \eta \otimes \delta_x$$

对于某个 $\eta \in \mathrm{Prob}(B)$。由于 $\Gamma \curvearrowright B$ 是一个边界作用，存在一个网 $(s_j)_j \subset \Gamma$ 和一个点 $b \in B$，使得

$$s_j\eta \longrightarrow \delta_b \quad \text{in } \mathrm{Prob}(B).$$

如有必要，取一个子网后，我们还可以假设 $s_j x \to x'$ 对于某个 $x' \in X$成立。于是

$$s_j\nu = (s_j\eta) \otimes \delta_{s_j x} \longrightarrow \delta_b \otimes \delta_{x'}$$

它是支集于纤维 $\pi^{-1}(x')$ 上的狄拉克测度。这表明 π 是一个强近端扩张。

根据命题 2.3， π 是近端的。由于基系统 X 是极小的，引理 2.4ˆ 表明 Y 包含一个唯一的极小 Γ-不变子集；将其记为 $\hat{X}$。限制

$$\pi|_{\hat{X}} : \hat{X} \longrightarrow X$$

ˆ 因而是一个极小强近端扩张。特别地，$(X,\ \pi|_{\hat{X}})$ 是一个 $(\Gamma,\ X)$-边界。

ˆ 注 2.12. 一般而言，例 2.11 中构造的 (Γ, X)-边界 $\hat{X}$ 与 (Γ, X) 的广义 Furstenberg 边界并不一致。设 Γ 是一个非 amenable 群。根据 [18, 定理 III.6.1], ，每个极小强近端Γ-流都与每个承载不变概率测度的极小 Γ-流不相交。特别地，设 X 是一个承载 Γ-不变 Borel 概率测度的无限极小 Γ-空间。那么 X 与 $\partial_F\Gamma$ 不相交，因此对角作用 $\Gamma \curvearrowright X \times \partial_F\Gamma$ 是极小的。在这种情况下，将例 2.11 应用于 $B = \partial_F\Gamma$可得

$$\hat{X} = \partial_F\Gamma \times X$$

是一个广义 $(\Gamma,\ X)$-边界。

ˆ 反设 X 与广义 Fursten- ˆ berg 边界 $\partial_F(\Gamma,\ X)$（同构）。根据 [23, 命题 3.3], $\partial_F(\Gamma,\ X)$ 是 Stonean。因此 X也必定是 Stonean。由于 Γ 是非 amenable 的，根据 [9, 推论 ˆ 3.13] 可知， X 是有限的。这就产生了矛盾。因此，一般而言， X 不可能与广义 Furstenberg 边界同构。

当然，上述构造不适用于可 amenable 群。不过，当群具有非平凡的 amenable 根时，可以在任意给定空间上构造这样的边界。

例 2.13. 设 Γ是一个具有非平凡 amenable 根 N的非 amenable 群。设 X 是一个紧致 Γ-空间，且限制作用 $N \curvearrowright X$ 是极小的。记 $\partial_F\Gamma$ 为 Γ的 Furstenberg 边界。

根据 [15, 推论 8], ，amenable 根 N 包含于在 $\partial_F\Gamma$上的作用的核中，即 $N \subset \ker(\Gamma \curvearrowright \partial_F\Gamma)$。由于每个 Γ-边界 B都是 Γ的一个因子，因此 N 也在 B 上平凡作用。

我们断言，对于任意 Γ-边界 B，有序对

$$(X \times B,\ \pi_X), \qquad \pi_X(x, b) = x,$$

是一个$(\Gamma,\ X)$-边界。

首先，如例2.11中那样，考虑乘积 $Y := X \times B$ ，赋予其对角Γ-作用，并考虑投影 $\pi_X : Y \to X$。与例2.11中相同的论证表明， π_X 是一个强近端扩张：每当 $\nu \in \text{Prob}(Y)$的支集包含于纤维 $\pi_X^{-1}(x)$时，都可以找到一个网$(\gamma_i)_i \subset \Gamma$ ，使得对某个$(x',\ b') \in Y$，$\gamma_i\nu \to \delta_{(x',b')}$ ，因此 π_X 在 X之上是强近端的。

剩下需要证明的是，作用 $\Gamma \curvearrowright Y$ 是极小的。固定 $(x, b) \in X \times B$ ，并任取 $(x', b') \in X \times B$。我们将证明 (x', b') 位于 (x, b) 的Γ-轨道的闭包中。

由于 $\Gamma \curvearrowright B$ 是极小的，且 B 是一个 Γ-边界，因此存在一个网 $(\gamma_i)_i \subset \Gamma$ ，使得

$$\gamma_i b \longrightarrow b'.$$

如有必要，取其子网后，我们可以假设

$$\gamma_i x \longrightarrow x_0$$

对某个 $x_0 \in X$。由 N 在 X 上作用的极小性，存在一个网 $(n_j)_j \subset N$，使得

$$n_j x_0 \longrightarrow x'.$$

现在考虑 Γ 中由有向集（由各对组成）索引的网 $(n_j\gamma_i)_{(j,i)}$。于是

$$(n_j\gamma_i)x = n_j(\gamma_i x) \longrightarrow x',$$

并且，由于 N 在 B 上的作用是平凡的，

$$(n_j\gamma_i)b = n_j(\gamma_i b) = \gamma_i b \longrightarrow b'.$$

Thus

$$(n_j\gamma_i)(x,b) \longrightarrow (x',b'),$$

这表明 $(x,\ b)$ 的 Γ-轨道在 $X \times B$ 中稠密。由于 $(x,\ b)$ 是任意的，作用 $\Gamma \curvearrowright X \times B$ 是极小的。

综上，$\pi_X :\ X \times B \to X$ 是一个极小强近端扩张，因此 $(X \times B,\ \pi_X)$ 是一个 $(\Gamma,\ X)$- 边界。

为了将可公度化定义的局部作用拼接起来，我们需要通过同构传递边界结构。下面的引理允许我们以规范的方式识别在等价空间上作用的同构群的边界。

引理 2.14。设 Γ_1、Γ_2 是可数离散群，且 $\psi :\ \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 是群同构。设 X_1 是一个 Γ_1-空间，X_2 是一个 Γ_2-空间。假设存在同胚 $\varphi\colon X_1 \to X_2$，使得

$$\varphi(gx) = \psi(g)\,\varphi(x) \qquad \textit{for all } g \in \Gamma_1,\ x \in X_1. \tag{2}$$

那么存在唯一的同胚

$$\widetilde{\psi} : \partial_F(\Gamma_1, X_1) \longrightarrow \partial_F(\Gamma_2, X_2)$$

使得

(i) $\widetilde{\psi}$ 是 Γ_1-等变的，即

$$\widetilde{\psi}(gy) = \psi(g)\,\widetilde{\psi}(y), \qquad \forall g \in \Gamma_1,\ y \in \partial_F(\Gamma_1, X_1),$$

其中 Γ_1 通过 ψ 作用于 $\partial_F(\Gamma_2,\ X_2)$；

(ii) 因子映射满足

$$\varphi \circ \pi_{\Gamma_1} \ =\ \pi_{\Gamma_2} \circ \widetilde{\psi},$$

即下列交换图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \partial_F(\Gamma_1, X_1) & \xrightarrow{\ \widetilde{\psi}\ } & \partial_F(\Gamma_2, X_2) \\ {\scriptstyle \pi_{\Gamma_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\Gamma_2}} \\ X_1 & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & X_2. \end{array}$$

证明。 考虑由下式定义的作用 $\Gamma_1 \curvearrowright \partial_F(\Gamma_2, X_2)$

$$g \cdot y := \psi(g)y, \qquad g \in \Gamma_1,\ y \in \partial_F(\Gamma_2, X_2).$$

因此， $\partial_F(\Gamma_2, X_2)$ 成为一个 Γ_1-空间。由于 $\pi_{\Gamma_2}\colon \partial_F(\Gamma_2, X_2) \to X_2$ 是 Γ_2-等变的，我们定义

$$\pi := \varphi^{-1} \circ \pi_{\Gamma_2} : \partial_F(\Gamma_2, X_2) \to X_1.$$

那么，对于任意 $g \in \Gamma_1$ 和 $y \in \partial_F(\Gamma_2, X_2)$，我们有

$$\begin{aligned}\pi(g \cdot y) &= \varphi^{-1}\big(\pi_{\Gamma_2}(\psi(g)\, y)\big) = \varphi^{-1}\big(\psi(g)\, \pi_{\Gamma_2}(y)\big)\\ &= g\varphi^{-1}\big(\pi_{\Gamma_2}(y)\big) = g\pi(y),\end{aligned}$$

这表明 π 是 Γ_1-等变的。由于 ψ 是一个群同构，且 Γ_2-作用在 $\partial_F(\Gamma_2, X_2)$ 上是极小且强近端的，因此诱导的 Γ_1-作用也极小且强近端。因此， π 恰好是使$\partial_F(\Gamma_2, X_2)$ 成为(Γ_1, X_1)-边界的因子映射。

Th泛性质给出一个唯一的连续 Γ_1-等变满射

$$\widetilde{\psi} : \partial_F(\Gamma_1, X_1) \to \partial_F(\Gamma_2, X_2)$$

使得

$$\pi \circ \widetilde{\psi} = \pi_{\Gamma_1} \implies \pi_{\Gamma_2} \circ \widetilde{\psi} = \varphi \circ \pi_{\Gamma_1}.$$

因此，按构造，该映射满足 (i) 和 (ii)。

因此，是只需证明。使用逆同构进行相同的构造

$$\psi^{-1} : \Gamma_2 \to \Gamma_1,$$

我们将 $\partial_F(\Gamma_1,\ X_1)$ 视为一个 $(\Gamma_2,\ X_2)$-边界，并得到一个连续的 Γ_2-等变满射

$$\widehat{\psi} : \partial_F(\Gamma_2, X_2) \to \partial_F(\Gamma_1, X_1)$$

使得

$$\pi_{\Gamma_1} \circ \widehat{\psi} = \varphi^{-1} \circ \pi_{\Gamma_2}.$$

考虑复合映射

$$\begin{aligned}\alpha &:= \widehat{\psi} \circ \widetilde{\psi} : \partial_F(\Gamma_1, X_1) \to \partial_F(\Gamma_1, X_1),\\ \beta &:= \widetilde{\psi} \circ \widehat{\psi} : \partial_F(\Gamma_2, X_2) \to \partial_F(\Gamma_2, X_2).\end{aligned}$$

由于 ψ 满足 (ii)，因此 α 是 Γ_1-等变的，并且

$$\pi_{\Gamma_1} \circ \alpha = \pi_{\Gamma_1} \circ \widehat{\psi} \circ \widetilde{\psi} = \varphi^{-1} \circ \pi_{\Gamma_2} \circ \widetilde{\psi} = \pi_{\Gamma_1}.$$

类似地， β 是 Γ_2-等变的，并且

$$\pi_{\Gamma_2} \circ \alpha = \pi_{\Gamma_2}.$$

根据引理 2.10 分别应用于 (Γ_1, X_1) 和 (Γ_2, X_2)，两者 α 和 β 都必须是恒等映射：

$$\alpha = \mathrm{id}_{\partial_F(\Gamma_1, X_1)}, \qquad \beta = \mathrm{id}_{\partial_F(\Gamma_2, X_2)}.$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$因此， ψ 是 ψ 的逆映射，故其为同胚。 □

要将相对边界作用从可公度子群提升到整个群，关键在于理解相对边界在限制后的表现。下面的引理表明，广义边界在过渡到有限指数子群时保持稳定，并且实际上保持不变。

引理 2.15。设 X 是一个 H-空间，且 $K \leq H$ 是一个有限指数子群，$[H: K] < \infty$。设 $\pi_Y: Y \to X$ 是一个因子映射。则有：

(i) 如果 (Y, π_Y) 作为一个 H-空间是强近端扩张，那么它作为一个 K-空间也是强近端扩张。*(ii)* 如果 (Y, π_Y) 是一个 (H, X)-边界，那么它是一个 (K, X)-边界。

证明。由于 $[H: K] < \infty$，存在 h_1，……，h_n，其中某个 $n \in \mathcal{N}$ 使得

$$H = \bigsqcup_{j=1}^{n} h_j K. \tag{3}$$

(i)：对于任意 $\nu \in$ 概率测度(Y)，若 $\text{supp}(\nu) \subset \pi_Y^{-1}(x)$ 对某个 $x \in X$成立，由于 (H, Y) 是强近端的，因此存在 $y \in Y$ 以及一个网 $\{t_i\}_{i\in I} \subset I$，使得 $\lim_i t_i\nu = \delta_y$。由 (3)，取子列后，不失一般性，我们可以假设存在 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 以及一个网 $\{k_i\}_{i\in I} \subset K$，使得

$$t_i = h_j k_i, \text{ for all } i \in I.$$

Then

$$\delta_y = \lim_i t_i\nu = \lim_i h_j k_i \nu,$$

这意味着

$$\lim_i k_i\nu = (h_j^{-1})_*\delta_y = \delta_{h_j^{-1}y}.$$

由于 $h_j^{-1}y \in Y$，且 $\nu \in$ 概率测度(Y) 是任意的，因此 (Y, π_Y) 作为一个 K-空间是强近端扩张。

(ii)：由于 (Y, π_Y) 是一个 (H, X)-边界，因此 (Y, π_Y) 作为一个 H-空间是极小强近端扩张。由 (i) 可知，我们只需证明 Y 作为一个 K-空间是极小的。

由于 $[H: K] < \infty$，由 [20, 第 26] 页可知，存在 H 的一个正规子群 N，它包含于 K，且满足 $[H: N] < \infty$，使得 $N \subset K$。现在我们知道 (Y, π_Y) 是一个强近端扩张，因此由命题 2.3 可知它是一个近端扩张。由引理 2.5 和引理 2.6 可知，Y 是一个极小的 N-空间。由于 $N \subset K$，可知 Y 是一个极小的 K-空间。

结合这两个事实，我们得到 (Y, π_Y) 是一个 (K, X)-边界。 □

虽然上述引理保证边界性质可以传递到有限指数子群，但我们还必须了解它们如何与环境群结构相互作用。对于正规子群，边界映射的等变性会带来很强的刚性：正规子群的作用唯一地

确定整个群的一个作用。我们遵循 [18, 命题 43]中的证明，并将其调整为适用于我们的情形。

命题 2.16. 设 $N \triangleleft \Gamma$ 是一个正规子群，且 X 是一个 Γ-空间，它作为 N-空间是极小的。那么， $N \curvearrowright \partial_F(N, X)$ 可以延拓到 $\Gamma \curvearrowright \partial_F(N, X)$。

证明。 对每个 $h \in \Gamma$，定义共轭自同构

$$\psi_h : N \to N, \qquad \psi_h(n) := hnh^{-1}.$$

由于 $N \triangleleft \Gamma$, ψ_h 是 N 的群自同构。另定义同胚 $\varphi_h : X \to X$ ，使得 $\varphi_h(x) := hx$。于是，对于每个 $n \in N$ 和 $x \in X$ ，我们有

$$\varphi_h(nx) = h(nx) = (hnh^{-1})(hx) = \psi_h(n)\varphi_h(x).$$

因此 φ_h 满足引理 2.14 中的 条件，取 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = N$, $X_1 = X_2 = X$，以及 $\psi = \psi_h$。因此，应用引理 2.14，我们得到唯一的同胚

$$T_h : \partial_F(N, X) \longrightarrow \partial_F(N, X)$$

使得

$$T_h(ny) = \psi_h(n)T_h(y), \qquad \forall\, n \in N,\ y \in \partial_F(N, X), \tag{4}$$

$$\pi_N(T_h(y)) = h\pi_N(y) = \varphi_h(\pi_N(y)) \qquad \forall y \in \partial_F(N, X)。 \tag{5}$$

特别地，我们有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \partial_F(N, X) & \xrightarrow{T_h} & \partial_F(N, X) \\ {\scriptstyle \pi_N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ X & \xrightarrow{\varphi_h} & X. \end{array}$$

现在定义一个作用，使 Γ 作用于 $\partial_F(N, X)$，定义如下：

$$hy := T_h(y), \qquad h \in \Gamma,\ y \in \partial_F(N, X).$$

我们有以下两个断言。

断言1. $T_{h_1h_2} = T_{h_1} \circ T_{h_2}$ 对所有 $h_1, h_2 \in \Gamma$。

断言 *1*的证明。 利用 $\varphi_{h_1h_2} = \varphi_{h_1} \circ \varphi_{h_2}$，可知

$$\pi_N \circ (T_{h_1} \circ T_{h_2}) \overset{eqn\ (5)}{=} (\varphi_{h_1} \circ \pi_N) \circ T_{h_2} \overset{eqn\ (5)}{=} \varphi_{h_1} \circ (\varphi_{h_2} \circ \pi_N) = \varphi_{h_1h_2} \circ \pi_N \overset{eqn\ (5)}{=} h_1h_2\pi_N.$$

此外，利用恒等式 $\psi_{h_1h_2} = \psi_{h_1} \circ \psi_{h_2}$，我们有对于所有 $n \in N$ 和 $y \in \partial_F(N, X)$，

$$\begin{aligned} (T_{h_1} \circ T_{h_2})(ny) &\overset{eqn\ (4)}{=} T_{h_1}(\psi_{h_2}(n)T_{h_2}(y)) \\ &\overset{eqn\ (4)}{=} \psi_{h_1}(\psi_{h_2}(n))(T_{h_1} \circ T_{h_2})(y) = \psi_{h_1h_2}(n)(T_{h_1} \circ T_{h_2})(y). \end{aligned}$$

因此， $T_{h_1} \circ T_{h_2}$ 满足与4)–(5)相同的两个性质， $T_{h_1h_2}$。 根据引理2.14的唯一性部分，我们得到 $T_{h_1h_2} = T_{h_1} \circ T_{h_2}$。 由于 $T_e =$ 恒等映射，我们可知

$$\mathrm{id} = T_e = T_{hh^{-1}} = T_h \circ T_{h^{-1}}, \ \forall h \in \Gamma.$$

因此，我们可知，对于所有 $h \in \Gamma$， $T_h^{-1} = T_{h^{-1}}$。 □

断言 2. Γ 作用扩展了原有的 N 作用。

断言 2 的证明。对于 $h \in N$，我们将原来的作用记为 L_h 定义如下$L_h(y) := hy$。于是 $\pi_N \circ L_h = h\pi_N$，因此 L_h 满足方程（5）。此外，对于任意$n \in N$和 $y \in \partial_F(N, X)$,

$$L_h(ny) = hny = (hnh^{-1})(hy) = \psi_h(n)L_h(y),$$

因此 L_h 满足方程（4）。由引理 2.14 的唯一性， $T_h = L_h$，即 $T_h(y) = hy$。 □

结合断言 1 和断言 2，规则 $(h, y) \mapsto T_h(y)$ 定义了 Γ 在 Y 上的一个由同胚构成的群作用，并且限制后得到给定的 N 作用。最后，（5）表明 π_N 是 Γ-等变的。 □

这一扩张结果使我们能够通过将不同子群对应的边界变换到一个共同的正规核上，来比较这些边界。结合限制稳定性（引理 2.15）与扩展作用的泛性质（命题 2.16），现在可以证明广义 Furstenberg 边界在有限指数意义下是不变的。

定理 2.17. 设 $K \leq H$ 是一个有限指数子群， X 是一个极小的 K-空间。 $\partial_F(H, X)$ 和 $\partial_F(K, X)$ 均为(K, X)-边界。此外，存在唯一的 K-等变同胚

$$\varphi : \partial_F(H, X) \to \partial_F(K, X)$$

使得 $\pi_K \circ \varphi = \pi_H$。特别地， $\partial_F(H, X)$ 和 $\partial_F(K, X)$ 作为(K, X)-边界是 K-同构的。

证明. 设 N 是 的正规子群，且 H 包含于 K 中，并且在其中仍具有有限指数 H(参见例如 [20, 第 26] 页)。根据 $\partial_F(H, X)$ 的泛性质，利用命题2.16，存在一个 H–因子映射

$$\alpha : \partial_F(H, X) \longrightarrow \partial_F(N, X) \quad \text{with} \quad \pi_N \circ \alpha = \pi_H. \tag{6}$$

利用引理 2.15 (ii)， $\partial_F(H, X)$ 和 $\partial_F(K, X)$ 均为 (K, X)-边界。因此，再次由泛性质可知，存在一个 K–等变因子映射

$$\psi : \partial_F(K, X) \longrightarrow \partial_F(H, X) \quad \text{such that} \quad \pi_H \circ \psi = \pi_K, \tag{7}$$

其中， π_H： $\partial_F(H, X) \to X$和 π_K： $\partial_F(K, X) \to X$分别是相应的因子映射。类似地，将 $\partial_F(N, X)$ 和 $\partial_F(K, X)$ 视为 (N, X)–边界，可得一个 N–等变因子映射

$$\eta : \partial_F(N, X) \longrightarrow \partial_F(K, X) \quad \text{with} \quad \pi_K \circ \eta = \pi_N. \tag{8}$$

现在考虑复合映射

$$\partial_F(N, X) \xrightarrow{\eta} \partial_F(K, X) \xrightarrow{\psi} \partial_F(H, X) \xrightarrow{\alpha} \partial_F(N, X).$$

这是一个连续的 N–等变自映射，定义在 $\partial_F(N,X)$ 上，并利用 (6)–(8) 可计算得

$$\pi_N \circ \alpha \circ \psi \circ \eta = \pi_H \circ \psi \circ \eta = \pi_K \circ \eta = \pi_N.$$

由引理 2.10，任意 N–等变自映射 $\partial_F(N,X)$ 若固定 π_N，则必为恒等映射。因此

$$\alpha \circ \psi \circ \eta = \mathrm{id}_{\partial_F(N,X)}, \tag{9}$$

结合 α、ψ 和 η 均为满射这一事实，可知 ψ 是同胚。

最后，按构造，ψ 是 K–等变的，因此 $\varphi := \psi^{-1}\colon \partial_F(H,X) \to \partial_F(K,X)$ 是一个 K–等变同胚，且满足 $\pi_K \circ \varphi = \pi_H$。这表明 $\partial_F(H,X)$ 和 $\partial_F(K,X)$ 作为 (K,X)–边界是 K–同构的，从而完成证明。□

2.2. 交叉积 C^*-代数。我们简要回顾约化交叉积的构造，详细内容请参阅 [12] 。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 Γ-C^*-代数，其中离散群 Γ 通过 $*$-自同构（记作 α）作用于 $\mathcal{A}$。

固定一个忠实的 $*$ 表示 $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$。我们考虑定义在 Γ 上、取值于 $\mathcal{H}$ 的平方可和函数构成的希尔伯特空间：

$$\ell^2(\Gamma,\mathcal{H}) = \left\{ \xi : \Gamma \to \mathcal{H} : \sum_{t\in\Gamma} \|\xi(t)\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty \right\}.$$

我们定义一个酉表示 $\lambda\colon \Gamma \to \mathbb{B}(\ell^2(\Gamma,\ \mathcal{H}))$，其作用方式为左平移：

$$(\lambda_s \xi)(t) = \xi(s^{-1}t), \quad \text{for } s,t \in \Gamma.$$

此外，我们定义一个忠实的 $*$ 表示 $\sigma\colon \mathcal{A} \to \mathbb{B}(\ell^2(\Gamma,\ \mathcal{H}))$，其定义为

$$(\sigma(a)\xi)(t) = \pi(\alpha_{t^{-1}}(a))\xi(t), \quad \text{for } a \in \mathcal{A}.$$

C^*-代数的约化交叉积记作 $\mathcal{A} \rtimes_r \Gamma$，定义为 $\mathbb{B}(\ell^2(\Gamma,\ \mathcal{H}))$ 中这些扭积张成空间的范数闭包：

$$\mathcal{A} \rtimes_r \Gamma = \overline{\mathrm{Span}\left\{\sigma(a)\lambda_s : a \in \mathcal{A}, s \in \Gamma\right\}}^{\|\cdot\|}.$$

对所有 $s \in \Gamma$ 和 $a \in \mathcal{A}$，生成元都满足协变关系 $\lambda_s \sigma(a) \lambda_s^* = \sigma(\alpha_s(a))$。注意，$\mathcal{A} \rtimes_r \Gamma$ 自然包含约化群 C^*-代数 $C_r^*(\Gamma) = \mathsf{Span}\{\lambda_s :\ s \in \Gamma\}$，作为一个子代数。

最后，存在一个典范的 Γ-等变条件期望 $\mathbb{E}\colon \mathcal{A} \rtimes_r \Gamma \to \mathcal{A}$。在有限和构成的稠密子空间上，它通过选取单位元对应的系数来定义：

$$\mathbb{E}\left(\sigma(a)\lambda_s\right) = \begin{cases} a & \text{if } s = e, \\ 0 & \text{if } s \neq e. \end{cases}$$

3. Universal Strongly Proximal Extension for Subgroups

在确立了广义边界的刚性性质后，我们现在转而探讨其存在性问题。我们考虑这样一个范畴，其中的 Γ-扩张作为 Γ-空间是极小的，但仅相对于某个子群才具有强近端性 H。利用基于纤维积的逆极限构造（见 [18]），我们证明了该范畴中存在一个泛对象。特别地，我们证明了定理A。

设 $H \leq \Gamma$，并设 X 是一个 Γ-空间。设 F 为有限集，并且对每个 $\alpha \in F$，令 $\pi_\alpha \colon Y_\alpha \to X$ 为一个 Γ-扩张。定义（有限）纤维积

$$Z_F := \Big\{ (x, (y_\alpha)_{\alpha \in F}) \in X \times \prod_{\alpha \in F} Y_\alpha : \ \pi_\alpha(y_\alpha) = x \ \forall \alpha \in F \Big\},$$

以及 Γ 在 Z_F 上的作用，定义为

$$t(x, (y_\alpha)_\alpha) := \big(tx, (ty_\alpha)_\alpha\big), \qquad t \in \Gamma.$$

于是显然可验证， Z_F 是一个 Γ-空间。定义映射

$$\pi_F : Z_F \to X, \qquad \big(x, (y_\alpha)_{\alpha \in F}\big) \mapsto x.$$

那么， π_F 显然是一个 Γ-因子映射。构造普适对象的一种标准方法是使用纤维积。我们首先验证，取有限纤维积时， H-强近端性得以保持。

引理 3.1. 设 $H \leq \Gamma$，且 X 是一个 Γ-空间。给定有限集 F，设 $\pi_\alpha : Y_\alpha \to X$ 是一个 Γ-扩张， $\alpha \in F$。假设每个 π_α 都是 H-强近端扩张，且其基空间为 X。那么 π_F 是一个 H-强近端扩张，且其基空间为 X。

证明。 我们对 $|F|$ 使用归纳法。 $|F| = 1$ 的情形即为假设 .

假设 $|F| \geq 2$，且该结论对所有更小的有限集都成立。取 $\alpha_0 \in F$，并记 $F' := F \setminus \{\alpha_0\}$。令

$$Z_{F'} := \Big\{ (x, (y_\alpha)_{\alpha \in F'}) \in X \times \prod_{\alpha \in F'} Y_\alpha : \ \pi_\alpha(y_\alpha) = x \ \forall \alpha \in F' \Big\}.$$

则 Z_F 可通过映射与纤维积 $Y_{\alpha_0} \times_X Z_{F'}$ 等同

$$(x, (y_\alpha)_{\alpha \in F}) \mapsto \big(y_{\alpha_0}, (x, (y_\alpha)_{\alpha \in F'})\big),$$

在此等同下， π_F 是到 X 的诱导映射。固定 $x \in X$，并令 $\nu \in$ 为 $\mathrm{Prob}(Z_F)$，其中 $\mathrm{supp}(\nu) \subset \pi_F^{-1}(x)$。令 $q_1 \colon Z_F \to Y_{\alpha_0}$ 和 $q_2 \colon Z_F \to Z_{F'}$ 为坐标投影。此外，注意对每个 $(x, (y_\alpha)_{\alpha \in F}) \in Z_F$，都有 $\pi_{\alpha_0}(y_{\alpha_0}) = x$，因此

$$\pi_{\alpha_0} \circ q_1(x, (y_\alpha)_{\alpha \in F}) = \pi_{\alpha_0}(y_{\alpha_0}) = x = \pi_F(x, (y_\alpha)_{\alpha \in F}).$$

因此 $\pi_{\alpha_0} \circ q_1 = \pi_F$ 在 Z_F 上。由此， $\mathrm{supp}\big((q_1)_*\nu\big) \subset \pi_{\alpha_0}^{-1}(x)$。根据 π_{α_0} 的 H-强近端性，存在 $y_0 \in Y_{\alpha_0}$ 以及一个网 $(h_i) \subset H$，使得

$$h_i (q_1)_* \nu \to \delta_{y_0} \quad \text{in } \mathrm{Prob}(Y_{\alpha_0}).$$

取一个子网后，我们可以假设 $h_i\nu \to \nu'$ 属于 $\mathrm{Prob}(Z_F)$。于是

$$(q_1)_*\nu' = \lim_i (q_1)_*(h_i\nu) = \lim_i h_i(q_1)_*\nu = \delta_{y_0},$$

因此 ν' 支集包含于 $q_1^{-1}(y_0)$。

由于 π_F 是 Γ-等变的，对于所有 i，我们有 $\mathrm{supp}(h_i\nu) \subset \pi_F^{-1}(h_i x)$。由于 X 是紧致的，进一步取一个子网后，我们可以假设 $h_i x \to x_1 \in X$。我们断言

$$\mathrm{supp}(\nu') \subset \pi_F^{-1}(x_1).$$

事实上，反设存在 $z \in \mathrm{supp}(\nu') \setminus \pi_F^{-1}(x_1)$，因此存在 z 的一个开邻域 U，使得 $U \cap \pi_F^{-1}(x_1) = \emptyset$ 且 $\nu'(U) > 0$。于是 $x_1 \notin \pi_F(U)$。由于 $\pi_F(U)$ 是紧致的，存在 x_1 的一个开邻域 V，使得 $V \cap \pi_F(U) = \emptyset$。当 i 充分大时，我们有 $h_i x \in V$，因此 $\pi_F^{-1}(h_i x) \cap U = \emptyset$。于是，对所有充分大的 i，$(h_i\nu)(U) = 0$；根据 Portmanteau 定理（例如参见 [37, 第149页注释（3）]），有 $\nu'(U) = 0$。这与假设矛盾，从而证明了该断言。

因此 ν' 支集于

$$q_1^{-1}(y_0) \cap \pi_F^{-1}(x_1) = \{y_0\} \times \pi_{F'}^{-1}(x_1) \subset Y_{\alpha_0} \times_X Z_{F'}.$$

Cons因此，测度 $\widetilde{\nu} := (q_2)_*\nu' \in$ 概率测度$(Z_{F'})$ 满足 $\mathrm{supp}(\widetilde{\nu}) \subset \pi_{F'}^{-1}(x_1$).

由归纳假设，$\pi_{F'}: Z_{F'} \to X$ 在 X 上是 H-强近端的。因此，存在 $z \in Z_{F'}$ 和一个网 $(k_j) \subset H$，使得

$$k_j\widetilde{\nu} \to \delta_z \quad \text{in } \mathrm{Prob}(Z_{F'}).$$

考虑网 $k_j\nu' \in$ 概率测度(Z_F)。由于概率测度(Z_F)是紧致的，经过取子网后，我们可以假设 $k_j\nu' \to \nu''$ 属于概率测度(Z_F)。于是

$$(q_2)_*\nu'' = \lim_j (q_2)_*(k_j\nu') = \lim_j k_j(q_2)_*\nu' = \lim_j k_j\widetilde{\nu} = \delta_z.$$

另一方面，

$$(q_1)_*(k_j\nu') = k_j(q_1)_*\nu' = k_j\delta_{y_0} = \delta_{k_j y_0}.$$

再取一个子网后，我们可以假设$k_j y_0 \to y_1 \in Y_{\alpha_0}$，并且 n

$$(q_1)_*\nu'' = \lim_j (q_1)_*(k_j\nu') = \lim_j \delta_{k_j y_0} = \delta_{y_1}.$$

因此，$\nu'' = \delta_{(y_1,z)}$ 是 Z_F 上的狄拉克测度。最后，由于 $\nu' \in H\nu$ 和 $\nu'' \in H\nu'$，我们有 $\nu'' \in H\nu$。这表明 $H\nu$ 包含一个狄拉克测度，从而完成归纳法。□

为刻画泛性质，我们需要对所有可能的扩张取极限。这要求将稳定性结果推广到无限纤维积。同样，设 $\{\pi_\alpha : Y_\alpha \to X\}_{\alpha\in A}$ 是一族 Γ-扩张，并设

$$Z := \Big\{(x, (y_\alpha)_{\alpha\in A}) \in X \times \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha : \ \pi_\alpha(y_\alpha) = x \text{ for all } \alpha \in A\Big\}.$$

Then Z 在 $X \times \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ 中是闭的，因此是紧致的。在 Z b 上定义 Γ-作用 y

$$t(x,(y_\alpha)_\alpha) := \big(tx,(ty_\alpha)_\alpha\big), \qquad t\in\Gamma,$$

并定义

$$\pi_Z : Z \to X, \qquad \pi_Z(x,(y_\alpha)_\alpha) := x,$$

以及坐标映射

$$p_\alpha : Z \to Y_\alpha, \qquad p_\alpha(x,(y_\beta)_\beta) := y_\alpha.$$

那么 π_Z 和所有 p_α 都是连续的 Γ-映射，并且

$$\pi_\alpha \circ p_\alpha = \pi_Z \qquad (\forall \alpha \in A).$$

此外， π_Z 是满射：给定 $x \in X$，对每个 α 选择 $y_\alpha \in \pi_\alpha^{-1}(x)$（这是可行的，因为 π_α 是满射），于是 $(x,(y_\alpha)_\alpha) \in Z$。

引理 3.2。设 $H \le \Gamma$，并令 X 为一个 Γ-空间。设 $\{\pi_\alpha : Y_\alpha \to X\}_{\alpha\in A}$ 是一个 Γ-扩张族，使得每个 π_α 都是 *over*X上的 H-强近端扩张。那么 $\pi_Z : Z \to X$ 是 *over* X上的 H-强近端扩张。

证明。固定 $x \in X$ 和 $\nu \in$Prob(Z)，使得 supp(ν) $\subset \pi_Z^{-1}(x)$。对于每个有限子集 $F \subset A$，令 $p_F : Z \to Z_F$ 为到

$$Z_F := \Big\{(x,(y_\alpha)_{\alpha\in F}) \in X \times \prod_{\alpha\in F} Y_\alpha : \ \pi_\alpha(y_\alpha) = x \ \forall \alpha \in F\Big\},$$

并置 $\nu_F := (p_F)_*\nu \in \mathrm{Prob}(Z_F)$。将引理 3.1 应用于 ν_F，我们得到一个狄拉克测度 $\delta_{z_F} \in H\nu_F$。

选择一个网 $(h_i) \subset H$，使得 $h_i\nu_F \to \delta_{z_F}$ 属于 Prob(Z_F)。由于 Prob(Z) 是紧致的，经过取子网后，不妨设 $h_i\nu \to \mu_F$ 属于 Prob(Z)。于是根据推前的连续性，

$$(p_F)_*\mu_F = \lim_i (p_F)_*(h_i\nu) = \lim_i h_i(p_F)_*\nu = \lim_i h_i\nu_F = \delta_{z_F}.$$

定义闭集合

$$\mathcal{D}_F := \{\mu \in \mathrm{Prob}(Z) : \ (p_F)_*\mu \text{ is a Dirac measure on } Z_F\}.$$

因此，对于每个有限子集 $F \subset A$，都有 $H\nu \cap \mathcal{D}_F \neq \emptyset$。

如果 F_1、.....、F_n 是有限的，且 $F := \bigcup_{j=1}^n F_j$，那么 $\mathcal{D}_F \subset \bigcap_{j=1}^n \mathcal{D}_{F_j}$。因此，族$\{\overline{H\nu \cap \mathcal{D}_F}\}_{F\subset A,\ |F|<\infty}$具有有限交性质。由于 $H\nu$ 是紧致的，存在

$$\mu \in \bigcap_{F\subset A, |F|<\infty} \big(\overline{H\nu} \cap \mathcal{D}_F\big).$$

因此，我们看到 π_Z 在 X之上是 H-强近端的。 □

设 X 是一个 Γ-空间。 Γ-流形是一个带基点的 Γ-空间（X， x_0），满足轨道$\Gamma x_0 := \{tx_0 : t \in \Gamma\}$ 在 X中稠密。现在我们可以证明子群的万有广义边界存在；在此情形下，我们通过使用极大强近端扩张来构造相对 Furstenberg 边界。回顾一下， $\mathcal{C}$ 是所有满足下述条件的 Γ-扩张 $\pi : Y \to X$的集合

(i) Y 是 Γ-极小的；(ii) π 是位于 X之上的 H-强近端扩张。

More之上的， $\mathcal{C}$ 中的态射是 Γ-因子映射 f： $Y \to Y'$ 满足 $\pi' \circ f = \pi$。

定理 *A* 的证明。由于 X 是 H-极小的，且 $H \leq \Gamma$，因此 X 是 Γ-极小的。我们先给出以下初步观察。

断言 3。 存在一个代表元集合 $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{C}$，使得 $\mathcal{C}$中的每个对象都与 $\mathscr{A}$中的某个元素同构。

断言 *3* 的证明。取 $x_0 \in X$。由于 X 是 Γ-极小的，(X, x_0) 是一个 Γ-ambit。令 $\check{}\beta\Gamma$ 为离散群 Γ 的 Stone–Čech 紧化，其带有由左平移给出的典范Γ-作用，而 $e \in \Gamma$ 为恒等映射，即单位元。于是 $(\beta\Gamma, e)$ 是普适的 Γ-ambit（参见，例如 [32]）。

对于任意对象 π： 从 $\mathcal{C}$ 中取 $Y \to X$ $y_0 \in \pi^{-1}(x_0)$。由于 Y 是 Γ-极小的，(Y, y_0) 是一个 Γ-ambit，因此存在一个满射 Γ-映射 p： $\beta\Gamma \to Y$，满足 $p(e) = y_0$。于是， Y 是 $\beta\Gamma$ 的一个 Γ-商，因此对于某个定义在 $\beta\Gamma$ 上的闭 Γ-不变等价关系 R，有 $Y \cong \beta\Gamma/R$。

令 $\mathscr{R}$ 为所有定义在 $\beta\Gamma$ 上的闭 Γ-不变等价关系组成的集合（这是一个集合，因为它是 $\mathcal{P}(\beta\Gamma \times \beta\Gamma)$ 的子集）。对于每个 $R \in \mathscr{R}$，令 $Y_R := \beta\Gamma/R$，并赋予其诱导的 Γ-作用。令 $\mathscr{M}_R$ 为所有连续 Γ-映射 π： $Y_R \to X$ 组成的集合（这是一个集合，因为它是 X^{Y_R} 的子集）。定义

$$\mathscr{A} := \{(R, \pi) : R \in \mathscr{R},\ \pi \in \mathscr{M}_R,\ \pi : Y_R \to X \text{ belongs to } \mathcal{C}\}.$$

那么 $\mathscr{A}$ 是一个集合，并且 $\mathcal{C}$ 的每个对象都与某个 $(Y_{(R,\pi)}, \pi)$ 在 X 上 Γ-同构，其中 $(R, \pi) \in \mathscr{A}$。为简便起见，将 $\mathscr{A}$ 重新编号为集合 A，并将相应的族记作

$$\{(\pi_\alpha : Y_\alpha \to X)\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}$$

使得 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都 Γ-同构于 X 上的某个 (Y_α, π_α)。至此，命题 3 得证。□

现在，设

$$Z := \left\{(x, (y_\alpha)_{\alpha \in A}) \in X \times \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha : \ \pi_\alpha(y_\alpha) = x \text{ for all } \alpha \in A\right\},$$

并定义 Γ 在 Z 上的作用为

$$t(x, (y_\alpha)_\alpha) := \big(tx, (ty_\alpha)_\alpha\big), \qquad t \in \Gamma.$$

记

$$\pi_Z : Z \to X, \qquad (x, (y_\alpha)_\alpha) \mapsto x,$$

以及坐标映射

$$p_\alpha : Z \to Y_\alpha, \qquad (x, (y_\beta)_\beta) \mapsto y_\alpha.$$

那么 π_Z 以及所有 p_α 都是连续的 Γ映射，并且

$$\pi_\alpha \circ p_\alpha = \pi_Z \qquad (\forall \alpha \in A).$$

根据引理 3.2， π_Z 是 H上的强近端 X。

设 $M \subset Z$ 是一个非空的闭 Γ不变子集，且 Γ极小。令$\pi_M := \pi_Z|_M : M \to X$。则 π_M 是一个连续的 Γ映射。由于 π_Z 是 Γ等变的，像 $\pi_Z(M)$ 是 X的一个非空闭 Γ不变子集。由于 X是 Γ极小的，可得 $\pi_Z(M) = X$，因此 π_M是一个 Γ扩张。此外，由于 π_Z在 X上是 H强近端的，且 M 是 Z的一个 Γ不变闭子集，可得π_M 在 X上是 H强近端的。因此 $\pi_M : M \to X$ 属于 $\mathcal{C}$。

现在我们验证 π_M的泛性质。为此，我们首先记录以下观察。固定 $\alpha \in A$。由于 $M \subset Z$ 是 Γ–不变的，其像 $p_\alpha(M) \subset Y_\alpha$是一个非空紧致 Γ不变子集。由于 Y_α 是 Γ极小的，可得$p_\alpha(M) = Y_\alpha$。因此，限制映射

$$p_\alpha|_M : M \to Y_\alpha$$

是一个满射连续的 Γ-映射，而且

$$\pi_\alpha \circ (p_\alpha|_M) = \pi_Z|_M = \pi_M.$$

现在，令 $\pi : Y \to X$ 为 $\mathcal{C}$中的任意对象。根据族$\{(Y_\alpha, \pi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$的构造，存在 $\alpha \in A$ 以及一个关于 X的 Γ–同构，例如 $\theta : Y_\alpha \to Y$，使得 $\pi \circ \theta = \pi_\alpha$。定义

$$f := \theta \circ (p_\alpha|_M) : M \to Y.$$

那么 f 是一个 Γ-因子映射，并且

$$\pi \circ f = \pi \circ \theta \circ (p_\alpha|_M) = \pi_\alpha \circ (p_\alpha|_M) = \pi_M.$$

这证明 $\pi_M : M \to X$ 在范畴 $\mathcal{C}$中是泛的。 □

注 3.3。 当 X 是一个单点空间时，该陈述归结为[36,命题 4.1]。

4. Relative Boundary Extension Theorem

边界理论中的一个基本问题是，考察从子群转到环境群时，边界动力学如何延续。本节将探讨广义富斯滕伯格边界的这一扩张问题。利用极小强近端作用的刚性，我们证明，在基空间作用为极小的前提下，边界作用可以从一个可公度子群唯一且典范地扩张到整个群。由此得到了引言中陈述的定理B 的证明。

定义 4.1. 设 Γ 是一个群，$H \leq \Gamma$ 是其子群。若 H 在 Γ中可公度，记作 $H \leq_c \Gamma$，则称 H 在 Γ中可公度；也就是说，对每个 $g \in \Gamma$，子群 $H \cap gHg^{-1}$在 H中具有有限指数，即

$$[H : H \cap gHg^{-1}] < \infty.$$

等价地，$H \cap gHg^{-1}$ 在 H中有有限多个左陪集（或右陪集）。

以下定理将 [18, 定理 II.4。4], [11, 引理 5。2], 和[28, 定理 3。1] 推广到广义富斯滕伯格边界的情形。

定理 4.2。设 $H \leq_c \Gamma$ 是一个可公度子群。设 X 是一个极小Γ-空间，并记

$$\pi_H : \partial_F(H, X) \to X$$

为(H, X)的广义 *Furstenberg* 边界。那么，存在 Γ 在 $\partial_F(H, X)$ 上的唯一同胚作用，记作

$$\Gamma \overset{T}{\curvearrowright} \partial_F(H, X), \quad (g, y) \mapsto T_g(y),$$

使得：

(i) for every $h \in H$ and $y \in \partial_F(H, X)$, $T_h(y) = hy$;

(ii) 该映射 π_H 是等变的：

$$\pi_H\big(T_g(y)\big) = g\pi_H(y) \quad \text{for all } g \in \Gamma,\ y \in \partial_F(H, X).$$

证明。对每个 $g \in \Gamma$，我们定义

$$H_g := H \cap gHg^{-1}, \qquad H_{g^{-1}} := H \cap g^{-1}Hg.$$

由于 $H \leq_c \Gamma$，和 $H_{g^{-1}}$ 在 H中均为有限指数。因此，由定理2.17，存在唯一的（H_g, X）-边界同构和（$H_{g^{-1}}$, X）-边界同构

$$\varphi_g : \partial_F(H, X) \to \partial_F(H_g, X), \text{ and } \varphi_{g^{-1}} : \partial_F(H, X) \to \partial_F(H_{g^{-1}}, X),$$

它们分别是 H_g 和 $H_{g^{-1}}$-等变的，并且满足

$$\pi_{H_g} \circ \varphi_g = \pi_H, \text{ and } \pi_{H_{g^{-1}}} \circ \varphi_{g^{-1}} = \pi_H.$$

接下来，考虑共轭同构

$$c_g : H_{g^{-1}} \to H_g, \qquad c_g(h) = ghg^{-1}.$$

这是一个群同构。$H_{g^{-1}}$ 和 H_g 在 X 上的作用由c_g交织，即

$$c_g(h)x = (ghg^{-1})x, \quad h \in H_{g^{-1}},\ x \in X;$$

同时，我们考虑映射

$$\varphi_g : X \to X,\ x \mapsto gx.$$

于是由引理 2.14，存在唯一的同胚

$$\widetilde{c}_g : \partial_F(H_{g^{-1}}, X) \to \partial_F(H_g, X)$$

使得：

（a）对于所有的 $h \in H_{g^{-1}}$ 和 $y \in \partial_F(H_{g^{-1}}, X)$，

$$\widetilde{c}_g(hy) = c_g(h)\widetilde{c}_g(y) = ghg^{-1}\widetilde{c}_g(y);$$

(b) $\pi_{H_g} \circ \widetilde{c}_g = g\pi_{H_{g^{-1}}}$.

现在，对每个 $g \in \Gamma$，我们定义

$$T_g := \varphi_g^{-1} \circ \psi_g \circ \varphi_{g^{-1}} : \partial_F(H, X) \to \partial_F(H, X).$$

由于 ψ_g、$\varphi_{g^{-1}}$ 和 φ_g 都是同胚，因此 T_g 也是一个同胚。此外，对所有 $g \in \Gamma$,

$$\pi_H \circ T_g = \pi_H \circ \varphi_g^{-1} \circ \psi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = g\pi_H.$$

这表明 (ii) 成立。

设 $g \in \Gamma$、$h \in H_{g^{-1}} = H \cap g^{-1}Hg$ 和 $x \in \partial_F(H, X)$。那么

$$\begin{aligned} T_g(hx) &= \varphi_g^{-1}\Big(\psi_g\big(\varphi_{g^{-1}}(hx)\big)\Big) \\ &= \varphi_g^{-1}\Big(\psi_g\big(h\varphi_{g^{-1}}(x)\big)\Big) \\ &= \varphi_g^{-1}\Big(ghg^{-1}\psi_g(\varphi_{g^{-1}}(x))\Big) \\ &= ghg^{-1}\varphi_g^{-1}\big(\psi_g(\varphi_{g^{-1}}(x))\big) \\ &= ghg^{-1}T_g(x). \end{aligned}$$

因此，对于所有 $h \in H \cap g^{-1}Hg$ 以及所有 $x \in \partial_F(H, X)$，

$$T_g(hx) = ghg^{-1}T_g(x). \tag{10}$$

现在证明，对于所有 $T_{gh} = T_gT_h$ $g, h \in \Gamma$，都有.....设 $g, h \in \Gamma$，并定义

$$K := H \cap h^{-1}Hh \cap (gh)^{-1}H(gh).$$

由于 $H \leq_c \Gamma$，每个交集 $H \cap h^{-1}Hh$ 和 $H \cap (gh)^{-1}H(gh)$ 在 H 中都是有限指数的，因此 K 也是如此。特别地，$K \leq H$ 是一个有限指数子群。

首先，将 (10) 应用于 gh 而非 g，可知对所有 $k \in H \cap (gh)^{-1}H(gh)$ 以及 $x \in \partial_F(H, X)$,

$$T_{gh}(kx) = (gh)k(gh)^{-1}T_{gh}(x). \tag{11}$$

另一方面，对于 $k \in K$ 和 $x \in \partial_F(H, X)$，我们先用 (10) 得到

$$T_h(kx) = hkh^{-1}T_h(x),$$

因为 $K \subset H \cap h^{-1}Hh$。注意 $hkh^{-1} \in H \cap g^{-1}Hg$，因此由 (10),

$$T_g(hkh^{-1}y) = ghkh^{-1}g^{-1}T_g(y) = (gh)k(gh)^{-1}T_g(y)$$

对于所有 $y \in \partial_F(H, X)$。取 $y = T_h(x)$ 得到

$$T_gT_h(kx) = (gh)k(gh)^{-1}T_gT_h(x), \quad k \in K,\ x \in \partial_F(H, X). \tag{12}$$

Set

$$\alpha := (T_gT_h)^{-1} \circ T_{gh} \colon \partial_F(H, X) \to \partial_F(H, X).$$

结合（11）和（12），我们看到对于所有 $k \in K$ 和 $x \in \partial_F（H，X）$，

$$\alpha(kx) = (T_g T_h)^{-1}\big(T_{gh}(kx)\big) = (T_g T_h)^{-1}\big((gh)k(gh)^{-1}T_{gh}(x)\big) = k\alpha(x).$$

因此，α 是 K-等变的。此外，由于 $k \in K \subset H$，可得

$$\pi_H \circ \alpha = (gh)^{-1}gh \circ \pi_H = \pi_H. \tag{13}$$

由于 $[H\colon K] < \infty$，由定理2.17可知 $\partial_F(H，X)$与 $\partial_F(K，X)$作为$(K，X)$-边界是同构的。特别地，我们可以将引理2.10 应用于 K-等变映射 α. 由于 α 满足(13)，引理2.10 给出

$$\alpha = \mathrm{id}_{\partial_F(H,X)}, \text{ that is, } T_{gh} = T_g T_h.$$

接下来验证，对于任意 $g \in H$，$T_g = g$。固定 $g \in H$。则 $H \cap g^{-1}Hg = H$。由(10)，有

$$T_g(hx) = ghg^{-1}T_g(x), \text{ for any } h \in H \text{ and } x \in \partial_F(H, X).$$

Let

$$\beta := g^{-1}T_g : \partial_F(H, X) \to \partial_F(H, X).$$

于是，对于任意 $h \in H$,

$$\beta h = g^{-1}T_g h = g^{-1}ghg^{-1}T_g = h\beta,$$

即，β 是 H-等变的。此外,

$$\pi_H \circ \beta = g^{-1}g\pi_H = \pi_H.$$

因此，根据引理 2.10，可得

$$g^{-1}T_g = \mathrm{id}_{\partial_F(H,X)}, \text{ that is, } T_g = g.$$

最后，我们证明唯一性。若 $\{S_g\}_{g\in\Gamma}$ 是 $\partial_F(H, X)$ 上 Γ 的另一个作用，且满足定理中的 (i) 和 (ii)，由 (ii) 可知，对所有 $g \in \Gamma$，都有 $\pi_H \circ S_g^{-1} \circ T_g = \pi_H$；由 (i) 可知，对于任意 $h \in H \cap g^{-1}Hg$ 和 $x \in \partial_F(X, H)$,

$$S_g^{-1}(T_g(hx)) = S_g^{-1}(ghg^{-1}T_g(x)) = S_g^{-1}(S_{ghg^{-1}}T_g(x)) = hS_g^{-1}(T_g(x)).$$

再次使用引理 2.10，可得

$$S_g = T_g, \text{ for all } g \in \Gamma.$$

因此，该扩张是唯一的。 □

为了分析这一扩展作用的动力学性质，尤其是其自由性，我们需要了解不动点集的拓扑。我们回顾以下结构性结果，它由 [23, 命题 3.3] 与 Frol′ík 定理 [14] 结合而成。

引理 4.3. 设 X 是一个极小的 Γ-空间，并设 $\partial_F(\Gamma, X)$ 是广义 *Furstenberg* 边界。那么，对于任意 $g \in \Gamma$，g 在 $\partial_F(\Gamma, X)$ 中的不动点集合 $\mathrm{Fix}(g)$ 是闭开集（即既闭又开）。

设 X 是一个 Γ-空间，并设 $U \subset X$ 非空。我们记

$$N_\Gamma(U) := \{g \in \Gamma : gU \cap U \neq \emptyset\}$$

U （相对于 Γ）的 返回时间集 。我们将由返回时间集 $N_\Gamma(U)$ 生成的群记作 $L_\Gamma(U)$。当上下文中作用群明确时，我们省略下标，记作 $N(U)$ 和 $L(U)$。

基空间作用的极小性限制了扩张中开集的复现。这引出了关于返回时间群指数的如下观察。

引理 4.4。 设 X 是一个极小的 Γ-空间，且 U 是 X 的非空开子集。那么群 $L(U)$ 的指数有限。

证明。 由于 X是极小的，由 [16]（另见 [29,引理 2。2]）可知， $N(U)$ 是 稠密集 中的一个 Γ，也就是说，存在 S 的一个有限子集 Γ ，使得

$$\Gamma = \bigcup_{s\in S} sN(U).$$

因此，

$$[\Gamma : L(U)] \leq |S| < \infty,$$

这意味着 $L(U)$ 的指数有限。 □

我们称 X 为连通，如果不存在两个非空开集 U， $V \subset X$使得

$$U \cap V = \varnothing \quad \text{and} \quad X = U \cup V.$$

当底空间连通时，拓扑限制会变得更强，从而迫使局部返回时间行为全局化。这推广了 [11, 引理 5.1]，其中证明了单点集 X的情形。

引理 4.5。 设 $H \leq_c \Gamma$ 为一个可公度子群。设 X 为一个极小连通 Γ-空间，并记

$$\pi_H : \partial_F(H, X) \to X$$

$H, X)$的广义 *Furstenberg* 边界。给定 $\partial_F(H, X)$的一个非空开子集 U。则 $L(U) = \Gamma$。

证明。 由引理 4.4，存在一个有限子集 F 属于 Γ ，使得

$$\Gamma = \bigsqcup_{s\in F} sL(U),$$

这意味着 $\{sLU\}_{s\in F}$ 是 ∂_F（H， X）的开闭划分。

由于 $\partial_F(H,\ X)$ 是强近端（因而也是近端）扩张，如果 x， x' 位于划分 $\{sLU\}_{s\in F}$ 中不同的原子内，那么 $\pi_H(x) \neq \pi_H(x')$。由 π_H 的连续性，族 $\{\, s\cdot\pi_H(LU)\ \}_{s\in F}$ 是 $\pi_H(\partial_F(H,\ X)) = X$ 的两两不交的开闭划分。由于 X 连通，这就迫使 $|F| = 1$ 成立，从而 $\Gamma = L(U)$。□

下面的例子表明，一般而言，不能去掉关于 X 的连通性假设。

例 4.6. 令 $\Gamma = H = \mathbb{Z}$，并令 (X, T) 为经典 2-adic 里程表系统，即 X 是由 2-adic 整数组成的康托尔群，且 $T : X \to X$ 是加一映射 $T(x) = x+1$。众所周知，(X, T) 是一个极小的 $\mathbb{Z}$-系统。由于 X 全不连通，因此它特别地不是连通的。我们可以将每个元素 $x \in X$ 视为 $x = x_0x_1 \ldots$。定义闭开子集

$$U := \{x \in X : x_0 = 0\}.$$

现在很容易看出

$$T^nU \cap U \neq \emptyset \iff n \in 2\mathbb{Z},$$

因为加上奇数会翻转 x_0，而加上偶数则保持它不变。因此，$N(U) = \{n \in \mathbb{Z}: T^nU \cap U \neq \emptyset\} = 2\mathbb{Z}$，从而 $L(U) = 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$。现在令 $\pi_H : \partial_F(H, X) \to X$ 为 (H, X) 的广义 Furstenberg 边界，且 T 表示 H-作用。设

$$V := \pi_H^{-1}(U) \subset \partial_F(H, X).$$

于是，V是 $\partial_F(H, X)$的非空开子集。若 $T^nV \cap V \neq \emptyset$，我们可以选取$y \in V$使得 $T^ny \in V$。对于 $x = \pi_H(y) \in U$，并利用 π_H的 H-等变性，我们得到

$$T^nx = \pi_H(T^ny) \in U,$$

使得 $T^nU \cap U \neq \emptyset$。因此，$n \in N(U) = 2\mathbb{Z}$。于是 $N(V) \subset N(U) = 2\mathbb{Z}$，从而 $L(V) = 2\mathbb{Z}$。

结合扩张定理与不动点集的拓扑性质，我们得到扩展作用的如下二分，它将动力学自由性与稳定子的代数结构联系起来。

定理 4.7。 设 X 是一个 Γ-空间，且 $H \leq_c \Gamma$是一个可公度子群，使得

(1) X 是 H-极小的；*(2)* 作用
$H \curvearrowright \partial_F(H, X)$ 是自由的。
令 $\{T_g\}_{g\in G}$ 表示定理4.2给出的同胚。则对于每个$g \in \Gamma$ 以下两种情况恰有一种成立：

(i) T_g *is free, i.e.* $\mathrm{Fix}(T_g) = \emptyset$;
(ii) $g \in C_\Gamma\big(L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))\big)$.

此外：

- *if* X *is connected, then* $L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g)) = H \cap g^{-1}Hg$;
- *if* g *acts trivially on* X, *then* $g \in C_\Gamma\big(L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))\big)$ *implies* $T_g = \mathrm{id}_{\partial_F(H,X)}$.

证明。我们假设作用 T_g 不自由，并证明 $g \in C_\Gamma\big(L(\mathrm{Fix}(g))\big)$。由于$H \curvearrowright \partial_F(H,X)$是 X上的强近端极小扩张，且 $H\cap g^{-1}Hg$在 H中的指数有限，由引理 2.6 可知 $H \cap g^{-1}Hg \curvearrowright \partial_F(H,X)$ 是极小的。由引理 4.3，$\mathrm{Fix}(g)$ 是一个非空闭开子集。将引理 4.4 应用于 $U = \mathrm{Fix}(g)$ 和 $\Gamma = H \cap g^{-1}Hg$，我们看到

$$[H \cap g^{-1}Hg : L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))] < \infty.$$

对于任意 $k \in N_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))$ 和 $y \in k\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(g)$，有

$$T_g(y) = y, \text{ and } T_g(k^{-1}y) = k^{-1}y,$$

结合方程（10），可得

$$k^{-1}y = T_g(k^{-1}y) = gk^{-1}g^{-1}T_g(y) = gk^{-1}g^{-1}y.$$

注意到 k，$gk^{-1}g^{-1} \in H$。由于 $H \curvearrowright \partial_F(H,\ X)$ 是自由的，我们得到 $kg = gk$。这意味着 $g \in C_\Gamma(L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g)))$。

如果 X 是连通的，那么由引理 4.5，可立即得到

$$L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g)) = H \cap g^{-1}Hg.$$

最后，我们假设 $g =$ 恒等映射$_X$ 且 $g \in C_\Gamma$（$L(\mathrm{Fix}(g)$ ），并证明 T_g =恒等映射$_{\partial_F(H,X)}$。再次利用（10），对于任意 $l \in L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))$ 和 $y \in \partial_F$（H，X），有

$$T_g(ly) = glg^{-1}T_g(y) = lT_g(y).$$

因此，T_g 是 $L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))$-等变的。

由于 $[H \cap g^{-1}Hg:\ L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))] < \infty$ 且 $[H:\ H \cap g^{-1}Hg] < \infty$，可得 $[H:\ L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))] < \infty$。由引理2.15可知，$\partial_F(H,X)$是一个($L_{H\cap g^{-1}Hg}$(Fix($g$)) X)-边界。由于 T_g 是 $\partial_F(H,X)$的一个 $L_{H\cap g^{-1}Hg}(\mathrm{Fix}(g))$-等变连续自映射，且 $\pi_H \circ T_g = g \circ \pi_H = \pi_H$，利用引理2.10，$T_g = \mathrm{id}_{\partial_F(H,X)}$。□

本节最后，我们考察几个具体的群类及其作用。我们分析半直积和作用于树上的群，以确定满足边界扩张和平凡中心化子条件的具体情形。

先介绍一些记号。设 H和 N为群，并设 φ: $H \to \mathrm{Aut}(N)$ 是一个同态。在 $N \times H$ 上定义二元运算如下:

$$(n,h)\cdot(n',h') := \big(n\,\varphi(h)(n'),\, hh'\big), \qquad (n,h),(n',h') \in N \times H.$$

在此运算下，$N \times H$ 成为一个群，称为 N 关于 H 的半直积（相对于 φ），记作

$$\Gamma := N \rtimes_\varphi H.$$

我们通过嵌入将 N 与子群 $N \times \{e_H\} \le \Gamma$ 视为相同:

$$\iota\colon N \to \Gamma, \qquad n \mapsto (n, e_H).$$

很容易验证，N 是 Γ的正规子群。

对于 $n \in N$，令 $\mathrm{Ad}_n \in \mathrm{Aut}(N)$ 表示由下式给出的内自同构

$$\mathrm{Ad}_n(x) := nxn^{-1}, \qquad x \in N.$$

所有这类内自同构构成 $\mathrm{Aut}(N)$ 的一个子群，记为 $\mathrm{Inn}(N)$。该对应

$$\mathrm{Ad}\colon N \to \mathrm{Inn}(N), \qquad n \mapsto \mathrm{Ad}_n,$$

是一个群同态，其核为中心 $Z(N) := C_N(N)$。

命题 4.8。 设 N 和 H 是群，并设 $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ 是一个同态。假设

$$Z(N) = \{e_N\} \quad \textit{and} \quad \varphi^{-1}(\mathrm{Inn}(N)) = \{e_H\}.$$

设 $\Gamma := N \rtimes_\varphi H$ 为半直积。那么

$$C_\Gamma(N) = \{e_\Gamma\}.$$

此外，如果 N 和 H 是可 *amenable* 的，那么 Γ也是。

证明。 令 $(n,\ h) \in C_\Gamma(N)$。则对于每个 $x \in N$，我们有

$$(n,h)(x,e_\Gamma) = (x,e_\Gamma)(n,h).$$

计算两边：

$$(n,h)(x,e_\Gamma) = \big(n\varphi(h)(x),\ h\big), \qquad (x,e_\Gamma)(n,h) = \big(xn,\ h\big).$$

因此

$$n\varphi(h)(x) = xn \quad \forall\, x \in N.$$

等价地，

$$\varphi(h)(x) = n^{-1}xn \quad \forall\, x \in N,$$

因此 $\varphi(h) = \mathrm{Ad}_{n^{-1}} \in \mathrm{Inn}(N)$。

由假设 $\varphi^{-1}(\mathrm{Inn}(N)) = \{e_H\}$，这迫使 $h = e_H$。将 $h = e_H$代回 $n\varphi(h)(x) = xn$，得到对所有 $x \in N$均有 $nx = xn$，即 $n \in C_N(N)$。由于$Z(N) = \{e_N\}$，我们得到 $n = e_N$。因此 $(n,\ h) = (e_N,\ e_H)$，所以 $C_\Gamma(N) = \{e_\Gamma\}$。□

现在我们给出一些具体例子，以保证命题 4.8中的条件。

例 4.9。 [对称群] 令 $n \geq 5$，令 $N = A_n$ 为交错群，并令 $H = C_2 = \langle \tau \rangle$ 为一个 2-循环群。固定一个奇对合 $s \in S_n \setminus A_n$（例如 $s = (1\ 2)$），并定义

$$\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(A_n), \qquad \varphi(\tau)(x) := sxs^{-1}.$$

于是 $\varphi(\tau)^2 = c_{s^2}|_{A_n} = \mathrm{id}_{A_n}$，因此 φ 是一个同态。令 $\Gamma := N \rtimes_\varphi H$。此外， Γ 是作用于 n 个字母上的对称群 S_n 。

现在我们验证命题 4.8 中的假设，从而得到 $C_\Gamma(N) = \{e_\Gamma\}$。事实上，由于 A_n 是一个非阿贝尔单群，其中心是平凡的。因此，只需证明 $\varphi(\tau) \notin \mathrm{Inn}(A_n$。按如下方式选取 $x \in A_n$：

$$x = \begin{cases} (1\,2\,\ldots\,n), & \text{if } n \text{ is odd}, \\ (1\,2\,\ldots\,n-1), & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}$$

注意到，由于 s 是一个奇置换， sxs^{-1} 与 x 是 A_n-共轭的。

如果 $\varphi(\tau) \in \mathrm{Inn}(A_n)$，那么存在 $a \in A_n$ 使得 $sxs^{-1} = \varphi(\tau)(x) = axa^{-1}$，因此 sxs^{-1} 不是 A_n-共轭于 x。这就产生了矛盾。

因此，命题 4.8推出

$$C_\Gamma(N) = \{e_\Gamma\}.$$

设 K 为一个群， I 为一个集合。受限直和

$$\bigoplus_{i\in I} K$$

是 $\prod_{i\in I} K$ 的子群，由所有满足有限支撑的族 $x = (x_i)_{i\in I}$ 组成，也就是说，该集合为 $\{i \in I : \ x_i \neq e_K\}$ 是有限的。对于每个 $i \in I$，我们用 $K_i \leq \bigoplus_{j\in I} K$ 表示支集位于 i 的 K 的副本。

以下引理不难证明。

引理 4.10. 设 K 为一个群， I 为一个集合。令 $N := \bigoplus_{i\in I} K$。那么对每个 $n \in N$ 和每个 $i \in I$，内自同构 $\mathrm{Ad}_n \in \mathrm{Inn}(N)$ 满足

$$\mathrm{Ad}_n(K_i) = K_i.$$

证明。 固定 $n = (n_j)_{j\in I} \in N$ 和 $x \in K_i$。在 N 中，我们有

$$\mathrm{Ad}_n(x) = nxn^{-1}.$$

由于 x的支集仅在 i处，乘积 nxn^{-1} 的支集也仅在 i处，且其第 i 个坐标等于 $n_i x_i n_i^{-1} \in K$。因此 $\mathrm{Ad}_n(x) \in K_i$。于是 $\mathrm{Ad}_n(K_i) \subseteq K_i$，由 Ad_n 为双射可得等式成立。□

例 4.11 （移位半直积）。 设 K 为一个可 amen 群，且$Z(K) = \{e_K\}$ （例如有限群 $K = A_m$、 $m \geq 5$或无限二面体群 D_∞）。令

$$N := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} K.$$

令 $H = \mathbb{Z}$，并定义移位

$$\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N), \qquad \varphi(1)\big((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) := (x_{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

令 $\Gamma := N \rtimes_\varphi H$。

现在我们检验命题4.8中的条件。由于 $Z(N) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z(K)$ 且$Z(K) = \{e_K\}$，因此可得

$$Z(N) = \{e_N\}.$$

固定 $m \in \mathbb{Z}$。那么 $\varphi(m)$ 将 K_0 映到 K_m。若 $m \neq 0$，则 $K_m \neq K_0$，因此$\varphi(t^m)(K_0) \neq K_0$。另一方面，根据引理 4.10，$N$ 的每个内自同构都保持 K_0。因此，对于所有 $m \neq 0$，$\varphi(t^m) \notin \mathrm{Inn}(N)$，也就是说，$\varphi^{-1}(\mathrm{Inn}(N)) = \{0\}$。

因此，命题 4.8推出

$$C_\Gamma(N) = \{e_\Gamma\}.$$

注 4.12。在例 4.11中，可以用 $\mathbb{Z}$ 替换 $\mathbb{Z}^d$ 和 $H = \mathbb{Z}^d$，令 H通过平移作用于 $\mathbb{Z}^d$，并通过相应的移位定义 φ。所有验证均相同。

接下来，我们给出一个既不可 amenable、又不是 C^*-单的例子。

例 4.13。令 K 为一个非平凡的可 amenable 群 K，满足 $Z(K) = \{e\}$，并令H 为一个非平凡的非 amenable 群（例如自由群 $\mathbb{F}_n$）。设

$$N := \bigoplus_{g \in H} K,$$

并通过左平移移位定义 $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$

$$\varphi(h)\big((x_g)_{g\in H}\big) := (x_{h^{-1}g})_{g\in H} \qquad (h \in H).$$

令 $\Gamma := N \rtimes_\varphi H$。那么正规子群 N 满足 $C_\Gamma(N) = \{e_\Gamma\}$，且 Γ 不可 amenable，也不是 C^*-单。

证明。对于 h_1，$h_2 \in H$ 和 $x = (x_g)_{g\in H} \in N$，我们有

$$\varphi(h_1)\varphi(h_2)(x) = \varphi(h_1)\big((x_{h_2^{-1}g})_g\big) = (x_{h_2^{-1}h_1^{-1}g})_g = (x_{(h_1h_2)^{-1}g})_g = \varphi(h_1h_2)(x).$$

因此 $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ 是一个同态。

令 $z = (z_g)_{g\in H} \in Z(N)$。固定 $g_0 \in H$ 和 $a \in K$，并令 $u \in N$ 仅在 g_0 处有支集，且 $u_{g_0} = a$。由于 $zu = uz$，考察 g_0 坐标可得，对所有 $a \in K$，都有 $z_{g_0}a = az_{g_0}$，因此 $z_{g_0} \in Z(K) = \{e_K\}$。于是对所有 $g_0 \in H$，都有 $z_{g_0} = e_K$，所以 $z = e_N$ 且 $Z(N) = \{e_N\}$。通过类似于例 4.11 中的论证，可得 $\varphi^{-1}(\mathrm{Inn}(N)) = \{e_H\}$。

因此命题4.8 适用，并得到 $C_\Gamma(N) = \{e_\Gamma\}$。

由于 K 是可 amenable 的，因此 N 也是可 amenable 的。由于 $N \lhd \Gamma$ 和 $N \neq \{e\}$，Γ的 amenable 根（即最大的可 amenable 正规子群）是非平凡的。一个标准事实是，C^*-单群的 amenable 根是平凡的；因此，Γ不可能是 C^*-单群。另一方面，由于 H 不是可 amenable 的，我们看到 Γ 不是可 amenable 的。□

现在我们给出一个受 [26, 27], 启发的例子：一个 Γ 群，它不是 C^*-单的，并且具有一个真正规子群 $N \lhd \Gamma$，其中心化子是平凡的。

例 4.14. 我们简要回顾 Le Boudec [27] 引入的群族。设 Ω 是一个（有限或可数）集合，满足 $|\Omega| = d \geq 3$，且 T_Ω 是一棵配备了 Ω 上合法边染色的 d-正则树。设 $F \leq F' \leq S_\Omega$ 是置换群。

按照 [26,27],，定义 $G(F,F')\leq \mathrm{Aut}(T_\Omega)$ 为所有树自同构构成的群，其中每个顶点处的局部作用属于 F'，且除有限多个顶点外，均属于 F（形式化定义见 [27, 第 5] 节）。假设 F 在 Ω 上自由作用，保持 F'- 轨道，且 F' 中所有点稳定子均可 amenable。那么 $G(F,F')$ 不是 C^*-单群，且其 amenable 根是平凡的（由 [27,定理 C] 得出）。

此外，假设 F 在 Ω 上传递地作用。令 $G(F,\ F')^*\leq G(F,\ F')$ 为由保持 T_Ω 的顶点集的自然二分（类型）的自同构组成的指数二子群（参见定理 C 后的 [27, ）。对于 $(F,\ F')$ 的适当选择，群 $G(F,\ F')^*$ 是（非阿贝尔）单群（见定理 4.13 和推论 4.14]）。例如，如果 $d\geq 5$ 为奇数，$F'=A_d$，且 F 由一个 d- 循环生成（因此 F 传递且自由），那么 $G(F,\ F')^*$ 是单群（例 4.15]）。特别地，在这种情况下

$$Z\big(G(F,F')^*\big)=\{e_{G(F,F')^*}\}.$$

固定这样一个对 $(F,\ F')$，并令

$$\Gamma:=G(F,F'),\qquad N:=G(F,F')^*.$$

那么 $N\lhd\Gamma$ 是一个真正规子群（事实上 $[\Gamma:\ N]=2$），Γ 不是 C^*-单的，而且根据以下引理，$C_\Gamma(N)=\{e_N\}$。

引理 4.15。设 Γ 是一个群，且 $N\leq\Gamma$ 满足 $[\Gamma:\ N]=2$。假设$Z(N)=\{e_N\}$，并且 Γ 的 *amenable* 根平凡。那么

$$C_\Gamma(N)=\{e_\Gamma\}.$$

证明。令 $C:=C_\Gamma(N)$。由于 $[\Gamma:\ N]=2$，我们有 $N\lhd\Gamma$，因此 $C\lhd\Gamma$。此外，

$$C\cap N=Z(N)=\{e_N\}.$$

令 $\pi:\ \Gamma\to\Gamma/N$ 为商映射。那么

$$\ker(\pi|_C)=C\cap N=\{e_C\},$$

因此 $\pi|_C$ 是单射。由于 $|\Gamma/N|=2$，可得 $|C|\leq 2$，从而 C 是可 amenable 的。由于 Γ 的 amenable 根平凡，可得 $C=\{e_\Gamma\}$。□

我们调整一下记号，以更好地体现这些边界的相对性质。回顾 $RB_X(\Gamma,\ H)$ 是定理 A中得到的泛对象。具体而言，$RB_X(\Gamma,\ H)$ 是一个泛 Γ-极小扩张，属于 X，并且相对于 H是 X-强近端的。现在我们讨论这个泛空间与子群 H的广义 Furstenberg 边界之间的关系。当 H在 Γ中可公度时，我们证明二者相同。

定理 4.16。设 $H\leq_c\Gamma$ 是一个可公度子群。假设 X 是一个 H-极小 Γ-空间。那么存在一个 Γ-等变同胚

$$RB_X(\Gamma,H)\cong\partial_F(H,X),$$

其中 $\partial_F(H,\ X)$ 配备了在定理 *4.2*中构造的唯一 Γ-作用。

证明。由定理 4.2 可知，广义 Furstenberg 边界 $\partial_F(H, X)$ 存在一个连续的 Γ-作用，它扩张了 H-作用。此外，作为一个 H-空间，$\partial_F(H, X)$ 是 H-极小的，并且是位于 X 之上的相对 H-边界。由于 $H \leq \Gamma$，H-极小性蕴含 Γ-极小性。因此，空间 $\partial_F(H, X)$ 属于定理 A 中定义的类 $\mathcal{C}$ （它是 Γ-极小且 H-强近端的）。由 $RB_X(\Gamma, H)$ 的泛性质，存在唯一的 Γ-等变因子映射

$$\varphi : RB_X(\Gamma, H) \to \partial_F(H, X).$$

另一方面，将空间 $RB_X(\Gamma, H)$ 视为一个 H-空间。根据定义，映射 π_{RB}: $RB_X(\Gamma, H) \to X$ 是一个 H-强近端扩张。此外，由于 $RB_X(\Gamma, H)$ 是 Γ-极小的，且 π_{RB} 满射到 H-极小空间 X，因此 $RB_X(\Gamma, H)$ 含有唯一的 H-极小集合（见引理 2.4）。我们注意到，$RB_X(\Gamma, H)$ 是 H-扩张范畴意义下的一个边界。由广义 Furstenberg 边界 $\partial_F(H, X)$ 的泛性质（定义 2.8 ），存在一个 H- 等变映射

$$\psi : \partial_F(H, X) \to RB_X(\Gamma, H).$$

考虑复合映射 $\Phi := \varphi \circ \psi$: $\partial_F(H, X) \to \partial_F(H, X)$。由于 φ 是 Γ-等变的，因此它是 H-等变的。因此， Φ 是 $\partial_F(H, X)$ 的一个 H-等变自映射，且与到 X 的因子映射可交换。由引理 2.10， Φ必定是 $\partial_F(H, X)$ 上的恒等映射。因此， ψ 是一个嵌入，且 φ 是 ψ的左逆。由于 $\partial_F(H, X)$ 是极小的，可知 φ 是一个同胚。因此，这些空间是 Γ-等变同胚的。□

注 4.17。 我们想指出，先验地，并不清楚 $H \curvearrowright RB_X(\Gamma, H)$ 是否是极小的。不过，当 $H \leq_c \Gamma$ 时，由上述定理可知确实如此。

5. X-PLUMP

广义 Furstenberg 边界的动力学行为与相关约化交叉积的理想结构深刻交织。本节通过引入 X-丰足子群这一概念（它是广义 Powers 平均性质 [8] 的相对类比），将我们的动力学结果转化为算子代数的语言。我们将证明， X-丰裕性是阻止非平凡理想存在的有力障碍，由此得到关于中间 C^*-代数的单性结果，以及刻画此类代数何时必然是交叉积的刚性定理。

定义 5.1 (X-丰足)。 设 X 是一个 Γ-空间。若给定 $\varepsilon > 0$ 和 $a \in C(X) \rtimes_r \Gamma$，我们可以找到 $s_1, \ldots, s_m \in H$ 和 $g_1, \ldots, g_m \in C(X)^+$，满足 $\sum_{j=1}^m g_j^2 = 1$ ，使得 $H < \Gamma$ 是 X-丰足的。

$$\left\| \sum_{j=1}^m g_j \, \lambda(s_j) a \, \lambda(s_j)^* \, g_j - \mathbb{E}(a) \right\| < \varepsilon.$$

边界的动力学性质会直接影响群 C^*-代数的解析结构。下述定理确立了边界作用与 X-丰足这一概念之间的联系，从而架起了动力学与算子代数之间的桥梁。

定理 5.2。设 X 是一个 Γ-空间且 $H \leq \Gamma$。假设 Γ 在一个 $(\Gamma,\ X)$-边界 $\partial(\Gamma,\ X)$ 上存在拓扑自由作用，使得

(i) $H \curvearrowright X$ 是极小的。***(ii)*** 作用 $\Gamma \curvearrowright \partial(\Gamma,\ X)$ 限制在 H 上时，相对于 X 是强近端且极小的。

那么 H 是 X-丰足的。

证明。我们采用与 [8]中类似的论证，并将其调整为适合本文目的的形式。给定任意状态$\varphi \in S(C(X) \rtimes_r \Gamma$，我们断言

$$\{\nu \circ \mathbb{E} : \nu \in \mathrm{Prob}(X)\} \subseteq \overline{\{\varphi\mu : \mu \in P_f(H, C(X))\}}^{\mathrm{weak}^*}.$$

回忆一下，$P_f(H,\ C(X))$ 是所有 广义 $(C(X)\ H,\ \alpha)$-概率测度的集合，它是一个有限支撑函数 $f\colon H \to C(X)_+$，满足 $\sum_{s\in H} f(s)^2 = 1$（其中级数一致收敛）。为此，只需证明

$$\delta_x \circ \mathbb{E} \in \overline{\{\varphi\mu : \mu \in P_f(H, C(X))\}} \quad \forall x \in X.$$

给定一个 态 $\varphi \in S(C(X) \rtimes_r \Gamma)$，将其扩展为定义在 $C(\partial(\Gamma,\ X) \rtimes_r \Gamma)$ 上的态 $\tilde{\varphi}$，并令

$$\eta = \tilde{\varphi}|_{C(\partial(\Gamma,X))}$$

那么，由于 $H \curvearrowright X$ 是极小的，利用 [8, 引理 3.6]，$\exists \mu \in$ 概率测度$(H,\ C(X))$，使得对于某个 $x' \in X$，有 $\eta\mu \to \delta_{x'}$。取一个子网后，不妨设 $\eta\mu \to \tilde{\eta}$（其中 $\pi_*\tilde{\eta} = \delta_x$）。由于 $H \curvearrowright \partial(\Gamma,\ X)$ 是强近端且极小的，因此存在一个网 $\{t_i\} \subseteq H$，使得 $t_i\tilde{\eta} \to \delta_y$，其中 $y \in \partial(\Gamma,\ X)$ 是一个自由点，其含义是，对于所有非恒等元素 $t \in \Gamma$，都有 $ty \neq y$。接着，仿照 [8, 命题 3.7], 中的论证，我们可知

$$\delta_{\pi(y)} \circ \mathbb{E} \in \overline{\{\varphi\mu : \mu \in P_f(H, C(X))\}}^{w^*}$$

然而，由于 $H \curvearrowright X$ 是极小的，且后一个集合是凸的，结论得证。因此，按照 [8, 定理 1.2], 中从 (1) $\Longrightarrow$ (4) 的推导进行论证，我们看到，若 $a \in C(X) \rtimes_r \Gamma$ 且 $x \in X$，则

$$\mathbb{E}(a)(x) \in \overline{\{\mu a \mid \mu \in P_f(H, C(X))\}}^{\|\cdot\|}.$$

现在，我们可以用 $C(X)$-凸组合来逼近 $\mathbb{E}(a)(x)$，其中$x \in X$；论证方式与 [8, 定理 1.2]中从 (4) $\Longrightarrow$ (3) 的推导类似。由此得证。根据 [8, 注 2.10],，我们有 $\mathbb{E}(a) \in \{\mu a \mid \mu \in P_f(H,\ C(X))\}^{\|\cdot\|}$，因为该集合在 $C(X)$-凸组合下封闭。□

如果 X 是连通的，问题就会容易得多，尤其是当 H 是可公度子群时。

推论 5.3。 设 X 是一个连通的 Γ-空间，且 $H \leq_c \Gamma$。假设 $C_\Gamma(H) = \{e\}$。再假设 $H \curvearrowright X$ 是极小的，并且 $C(X) \rtimes_r H$ 是单的。那么 H 是 X-丰足的。

证明。 由于 $C(X) \rtimes_r H$ 是单的， $H \curvearrowright \partial_F(H, X)$ 是自由的。此外，利用定理 4.2， $H \curvearrowright \partial_F(H, X)$ 可扩展为作用 $\Gamma \curvearrowright \partial_F(H, X)$，且该作用 $\Gamma \curvearrowright \partial_F(H, X)$ 是自由的。由定理 5.2 即得结论。□

与 Γ 相关的中间 C^*-代数的结构性质此前已在我们的早期工作 [1] 中分析过（另见 [5]）。这里，我们证明 Γ 满足相对于其边界作用的丰足条件，从而推广了关于中间子代数的简单性结果。注意，若 X 是平凡的，则可得 H 在 Γ 中是丰足的，这使得 Γ 成为 C^*-单的。

为了有效地应用平均化论证，我们需要先对极小空间上非负函数的卷积作出估计。

引理 5.4. 设 X 是一个极小的 Γ-空间，并设 $\mu \in$ 概率测度(Γ) 是 Γ 上具有全支撑的概率测度。若 $f \in C(X)$ 非负且不恒为零，则存在 $\delta > 0$ 使得

$$\mu * f \geq \delta \quad on\ X.$$

证明。 由于 $f \geq 0$ 和 μ 具有全支撑，卷积

$$(\mu * f)(x) = \sum_{s \in \Gamma} \mu(s)\, f(s^{-1}x), \qquad x \in X,$$

是 X 上的连续非负函数。由于 X 是紧致的，只需证明对每个 $x \in X$ 都有 $(\mu * f)(x) > 0$；如此一来， $\mu * f$ 在 X 上的最小值将是一个严格为正的常数 δ。

As反设存在 $x \in X$ 使得 $(\mu * f)(x) = 0$。那么

$$0 = (\mu * f)(x) = \sum_{s \in \Gamma} \mu(s)\, f(s^{-1}x).$$

每一项 $\mu(s)f(s^{-1}x)$ 都是非负的，并且由全支撑可知，对所有 $s \in \Gamma$ 都有 $\mu(s) > 0$，因此必有

$$f(s^{-1}x) = 0 \quad \text{for all } s \in \Gamma.$$

由于作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 是极小的，轨道 Γx 在 X 中稠密；由 f 的连续性可知， $f \equiv 0$ 在 X 上成立，这与我们的假设矛盾。因此，对所有 $x \in X$ 都有 $(\mu * f)(x) > 0$。□

现在，我们可以运用 X-丰足性理论来研究中间 C^*-代数的理想结构。以下结果证明了一大类此类包含具有单性（特别地，我们证明定理C）。这是对 [8,定理 15]的推广，同时也给出了 C^*-不可约包含的新例子，意义见 [33] （另见 [7, 25]）。

定理 5.5。设 $\pi : X \to Y$ 是一个连续的 Γ-等变满射，其中 X 和 Y 是紧致豪斯多夫 Γ-空间。假设存在一个子群 $H \le \Gamma$，使得 $H \curvearrowright X$ 是极小的，且 H 是 Y-丰足的。那么，每个中间 C^*-代数

$$C(Y) \rtimes_r H \;\subseteq\; \mathcal{A} \;\subseteq\; C(X) \rtimes_r \Gamma$$

是单的。

证明。设 $\mathcal{A}$ 是这样一个中间 C^*-子代数，并设 $I \subseteq \mathcal{A}$ 是一个非零理想。我们旨在证明 $I = \mathcal{A}$。

任取 $0 \neq b \in I$，并令 $a = b^*b \in I$。则 $a \ge 0$ 且 $a \neq 0$。令 $\mathbb{E} : C(X) \rtimes_r \Gamma \to C(X)$ 表示典范条件期望。由于 $\mathbb{E}$ 忠实，$\mathbb{E}(a) \in C(X)^+$ 非零。

取一个概率测度 $\mu \in \mathrm{Prob}(H)$，其支集 $\mathrm{supp}(\mu) = H$。应用引理5.4，取 H 在 X 上的作用（根据假设，该作用是极小的），以及非零函数 $f = \mathbb{E}(a) \ge 0$，可得一个常数 $\delta > 0$，使得

$$(\mu * \mathbb{E}(a))(x) \;>\; \delta \qquad \text{for all } x \in X,$$

其中

$$(\mu * f)(x) := \sum_{s \in H} \mu(s)\, f(s^{-1}x), \quad f \in C(X).$$

对于这个固定的 μ，定义

$$\mu * a := \sum_{s \in H} \mu(s)\, \lambda(s)\, a\, \lambda(s)^* \;\in C(X) \rtimes_r \Gamma,$$

其中 $\lambda(s)$ 表示实现该作用的典范酉元。注意，对于每个 $s \in H$，我们有 $\lambda(s) \in C(Y) \rtimes_r H \subseteq \mathcal{A}$，并且由于 $a \in I$ 和 I 是 $\mathcal{A}$的一个（双边）理想，因此可得 $\mu * a \in I$。

条件期望 $\mathbb{E}$ 是 Γ-等变的，具体而言

$$\mathbb{E}\big(\lambda(s) b\, \lambda(s)^*\big) = \alpha_s\big(\mathbb{E}(b)\big), \qquad s \in \Gamma,\ b \in C(X) \rtimes_r \Gamma,$$

其中 $\alpha_s(f) = f \circ s^{-1}$ 是 $C(X)$上的诱导作用。因此

$$\mathbb{E}(\mu * a) = \sum_{s \in H} \mu(s)\, \alpha_s\big(\mathbb{E}(a)\big) = \mu * \mathbb{E}(a),$$

特别地，对于所有 $x \in X$，都有 $\mathbb{E}(\mu * a)(x) > \delta$。

现在固定 $0 < \varepsilon < 1$。利用 [8, 引理 4.1]，并根据 H 是 Y-丰足的假设，我们可以找到元素 $g_1, \ldots, g_m \in C(Y)$，使得 $0 \le g_j \le 1$ 且 $\sum_{j=1}^m g_j^2 = 1$；此外还存在元素 $s_1, \ldots, s_m \in H$，满足

$$\left\| \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{m} g_j\, \lambda(s_j) \big(\mu * a - \mathbb{E}(\mu * a)\big) \lambda(s_j)^* g_j \right\| < \varepsilon.$$

在此，我们通过 $g_j \circ \pi$ 将每个 $g_j \in C(Y)$ 视为 $C(X)$ 的一个元素，因此也将其视为 $\mathcal{A}$ 的一个元素。

定义

$$S := \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g_j\,\lambda(s_j)\,(\mu * a)\,\lambda(s_j)^* g_j, \qquad T := \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g_j\,\lambda(s_j)\,\mathbb{E}(\mu * a)\,\lambda(s_j)^* g_j.$$

于是 $S \in I$（因为 $\mu * a \in I$ 和 $g_j,\ \lambda(s_j) \in \mathcal{A}$），而上述不等式恰好说明

$$\|S - T\| < \varepsilon < 1.$$

接下来，我们断言 T 在 $\mathcal{A}$中可逆。对于每个 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g_j(x)^2\,\mathbb{E}(\mu * a)\big(s_j^{-1}x\big) \\ &= \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g_j(x)^2\,(\mu * \mathbb{E}(a))\big(s_j^{-1}x\big) \\ &\geq \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m} g_j(x)^2\,\delta = \sum_{j=1}^{m} g_j(x)^2 = 1, \end{aligned}$$

其中我们逐点用了 $\mathbb{E}(\mu * a) = \mu * \mathbb{E}(a)$ 以及 $(\mu * \mathbb{E}(a)) > \delta$。因此，$T$是满足 $T \geq 1$的正元素，故它可逆，且 $\|T^{-1}\| \leq 1$。

由于 $\|S - T\| < 1$和 $\|T^{-1}\| \leq 1$，我们有

$$\|T^{-1}(S - T)\| \leq \|T^{-1}\|\,\|S - T\| < 1.$$

因此，$\mathrm{id} + T^{-1}(S - T)$ 可逆，进而 $S = T\big(\mathrm{id} + T^{-1}(S - T)\big)$ 在 $C(X) \rtimes_r \Gamma$中可逆。

由于 $S \in I$ 和 S 在 $\mathcal{A}$中可逆，我们有 $1 = S^{-1}S \in I$，因此 $I = \mathcal{A}$。这表明 $\mathcal{A}$是单的。□

除了单性之外，我们还可以问：何时一个中间代数必然是交叉积？这种现象称为反映 [2]。以下定理给出了相对情形下这种刚性的判据，即定理 D。

定理 5.6. 设 X 是一个 Γ-空间，$\mathcal{B}$ 是一个含幺的 Γ-C^*-代数。考虑$C(X) \otimes_{min} \mathcal{B}$，其带有对角作用。设 $N = \ker(\Gamma \curvearrowright \mathcal{B})$。假设 N 是X-丰足的，且 $N \curvearrowright X$ 是极小的。那么，对每个满足以下条件的中间 C^*-代数 $\mathcal{A}$

$$C(X) \rtimes_r \Gamma \subseteq \mathcal{A} \subseteq (C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$$

我们有 $E(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$。此外，若 Γ 具有逼近性质（AP），则 $\mathcal{A}$ 是如下形式的交叉积：$(C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$。这里，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$的一个 Γ-不变C^*-子代数。

证明。 设 $\mathcal{A}$ 是这样一个中间 C^*-代数，并固定 $a \in \mathcal{A}$。我们要证明 $\mathbb{E}(a) \in \mathcal{A}$。

由于 $C(X)\otimes_{\min}\mathcal{B}$ 是由初等张量的有限和构成的闭线性张成，因此我们可以用有限和逼近系数 $\mathbb{E}(a)\in C(X)\otimes_{\min}\mathcal{B}$：对任意 $\varepsilon>0$，存在 f_1、……、$f_\ell\in C(X)$以及 b_1、……、$b_\ell\in\mathcal{B}$，使得

$$\Big\|\mathbb{E}(a)-\sum_{j=1}^{\ell}\tilde{f}_j\otimes b_j\Big\|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

现在固定 $x\in X$。由于 N 是 X-丰足的，且 $N\curvearrowright X$ 是极小的，命题 3 的论证[8,（将其应用于 $C(X)\otimes_{\min}\mathcal{B}$ 上的对角作用，并利用 N 在 $\mathcal{B}$ 上作用平凡）表明，存在元素 $F_{x,1},\dots,F_{x,m_x}\in C(X)^+$ 和 $s_{x,1},\dots,s_{x,m_x}\in N$，使得

$$\sum_{k=1}^{m_x}F_{x,k}^2=1$$

使得

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m_x}F_{x,k}\,\lambda(s_{x,k})\,a\,\lambda(s_{x,k})^*F_{x,k}-(\delta_x\otimes\mathrm{id})(\mathbb{E}(a))\Big\|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

这里 $\delta_x\colon C(X)\to\mathbb{C}$ 表示在 x 处求值；我们将 $(\delta_x\otimes\mathrm{id})(\mathbb{E}(a))$ 视为 $C(X)\otimes_{\min}\mathcal{B}$ 中的元素（因而也是交叉积中的元素），通过 $1_X\otimes\mathcal{B}$ 来实现。此外，我们还有

$$\Big\|\delta_x\otimes\mathrm{id}(\mathbb{E}(a))-\sum_{j=1}^{\ell}\tilde{f}_j(x)\otimes b_j\Big\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{16}$$

对于这个固定的 x，由每个 f_j 的连续性，我们可以选取一个开邻域 $U_x\ni x$，使得对所有 $y\in U_x$ 以及所有 $j=1,\dots,\ell$，

$$\|\tilde{f}_j(y)-\tilde{f}_j(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 X 是紧致的，存在有限多个点 x_1，……，$x_p\in X$，使得 $X=\bigcup_{r=1}^{p}U_{x_r}$。令 $\{F_r\}_{r=1}^{p}\subset C(X)^+$ 为从属于该覆盖的单位分解，即 $0\le\tilde{F}_r\le1$，$\mathrm{supp}(\tilde{F}_r)\subset U_{x_r}$ 且 $\sum_{r=1}^{p}\tilde{F}_r^2=1$。

对于每个 r，我们都有如上所述的函数 $F_{x_r,\,k}\in C(X)^+$ 和元素 $s_{x_r,\,k}\in N$；令

$$G_{r,k}:=\tilde{F}_r\,F_{x_r,k},\qquad t_{r,k}:=s_{x_r,k}.$$

Then

$$\sum_{r,k}G_{r,k}^2=\sum_{r=1}^{p}\tilde{F}_r^2\sum_{k=1}^{m_{x_r}}F_{x_r,k}^2=\sum_{r=1}^{p}\tilde{F}_r^2=1.$$

定义

$$S:=\sum_{r,k}G_{r,k}\,\lambda(t_{r,k})\,a\,\lambda(t_{r,k})^*G_{r,k}.$$

由于 $a \in \mathcal{A}$ 以及每个 $G_{r,k}, \lambda(t_{r,k}) \in C(X) \rtimes_r \Gamma \subseteq \mathcal{A}$，我们有 $S \in \mathcal{A}$。根据 $F_{x_r,k}$ 和 $s_{x_r,k}$的选取，并结合 $t_{r,k} \in N$ 在 $\mathcal{B}$上平凡作用这一事实，利用方程（15），可以验证（如同 [8, 定理 1.2] 的证明中那样）

$$\left\| S - \sum_{r=1}^{p} \tilde{F}_r(\delta_{x_r} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{E}(a))\tilde{F}_r \right\| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{17}$$

此外，利用邻域 U_{x_r} 和沿着方程（16）的单位分解，我们得到

$$\left\| \sum_{r=1}^{p} \tilde{F}_r(\delta_{x_r} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{E}(a))\tilde{F}_r - \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{f}_j \otimes b_j \right\| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{18}$$

结合方程（14）、（17）和（18），可得

$$\begin{aligned} \|S - \mathbb{E}(a)\| \leq & \left\| S - \sum_{r=1}^{p} \tilde{F}_r(\delta_{x_r} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{E}(a))\, \tilde{F}_r \right\| \\ & + \left\| \sum_{r=1}^{p} \tilde{F}_r(\delta_{x_r} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{E}(a))\, \tilde{F}_r - \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{f}_j \otimes b_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{f}_j \otimes b_j - \mathbb{E}(a) \right\| \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，且 $\mathcal{A}$ 范数闭，因此 $\mathbb{E}(a) \in \mathcal{A}$。

因此 $\mathbb{E}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$。此外，若 Γ 具有近似性质，则根据 [34, 命题 3.4]，$C(X) \rtimes_r \Gamma$ 与 $(C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$ 之间任何在 $\mathbb{E}$ 下不变的中间 C^*- 子代数都必为交叉积。因此，$\mathcal{A}$ 是一个形如 $A \rtimes_r \Gamma$ 的交叉积，其中 $C(X) \subset \mathcal{A} \subset C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}$。由于 $N \curvearrowright X$ 极小，$C(X)$ 是 N-单的。此外，$N \curvearrowright \mathcal{B}$ 是平凡的。现在我们可以应用 [6, 命题 1.2]~，从而得到 $\mathcal{A} = C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}$。证明完毕。□

与 [1,36], 中给出的例子不同，那些例子通常要求环境群 Γ 是 C^*-单的，而我们的构造允许群不是 C^*-单的。因此，我们获得了适用于广泛群类的刚性结果，包括具有非平凡 amenable 根的群，并提供了一种统一的方法，涵盖标准积群以及更复杂的扩张，例如 wreath 积。

为准备介绍我们的例子，我们先简要回顾以下引理。事实上，该引理可由引理 3.2 结合 [11] 中定理 3.1 证明里的论证得到。不过，为方便读者，我们给出一个自包含的证明。

引理 5.7。设 X 和 Z 是 Γ-空间。假设 $\rho : Z \to X$ 是一个 Γ-因子映射，$\Gamma \curvearrowright Z$ 是极小的，且 $\Gamma \curvearrowright X$ 是拓扑自由的。那么 $\Gamma \curvearrowright Z$ 是拓扑自由的。

证明。 固定 $s \in \Gamma \setminus \{e\}$，并考虑不动点集

$$\mathrm{Fix}_Z(s) := \{z \in Z : sz = z\}.$$

反设 $\mathrm{Fix}_Z(s)$ 的内部非空。于是存在一个非空开集 $U \subset \mathrm{Fix}_Z(s)$。

由于 $\Gamma \curvearrowright Z$ 是极小的，由 [10, 定理 1。15] (另见 [11, 引理 3。2] 或 [22, 引理 2。8]) 可知 $\rho(U)$ 的内部非空。注意， $\rho(U) \subset \mathrm{Fix}_X(s)$，矛盾。因此， $\Gamma \curvearrowright Z$ 是拓扑自由的。 □

现在我们给出一种构造 X-丰满子群的方法，而无需假设环境群 Γ 是 C^*-单的。

例 5.8。 设 Γ 是一个离散群， $N \lhd \Gamma$ 是一个非平凡正规子群。假设 N 不可 amenable（因此 Furstenberg 边界 $\partial_F N$ 非平凡）。设 X 是一个 Γ-空间，使得

（i）限制作用 $N \curvearrowright X$ 是极小的； （ii） 作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 是拓扑自由的。

考虑乘积空间

$$Y := X \times \partial_F N$$

带有对角 N-作用

$$n \cdot (x, \xi) := (nx, n\xi), \qquad n \in N,\ x \in X,\ \xi \in \partial_F N.$$

由于作用 $N \curvearrowright \partial_F N$ 扩展为 Γ-作用 [11, 引理 5。2], 我们可以将Y 视为一个 Γ-空间，其作用为对角 Γ-作用。根据例 2.11，存在唯一的$\widetilde{\ }$闭 Γ-不变子集 $X \subset Y$ 使得

- $N \curvearrowright \widetilde{X}$ 是极小的，并且
- 第一坐标投影的限制

$$\pi : \widetilde{X} \to X$$

是满射，并且是对 (N, X) 的广义边界；特别地，‹$N \curvearrowright X$ 是 X 上的强近端扩张。

$\widetilde{\ }$由引理 5.7，作用 $\Gamma \curvearrowright X$ 是拓扑自由的。因此，我们得到$\widetilde{\ }\pi : X \to X$ 是 (N, X) 的广义边界，且满足

- $N \curvearrowright \widetilde{X}$ 是 X 上的强近端扩张，且是极小的；‹
- $\Gamma \curvearrowright X$ 是拓扑自由的。

因此，由定理 5.2，子群 N 是 X-丰足的。

结合定理 5.6 和例 5.8，我们得到如下结论。

推论 5.9。 设 Γ 是一个非 *amenable* 群（不一定是 C^*-单的），它在含幺 C^*-代数 $\mathcal{B}$ 上非忠实地作用，且 $N := \ker(\Gamma \curvearrowright \mathcal{B})$。设 X 是一个 Γ-空间，使得 X 是 N-极小的，且 $\Gamma \curvearrowright X$ 拓扑自由。考虑

Γ-C^*-代数 $C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}$，其带有对角作用。那么，对于任意中间 C^*-代数 $\mathcal{A}$，满足

$$C(X) \rtimes_r \Gamma \subseteq \mathcal{A} \subseteq (C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$$

我们有 $E(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$。此外，若 Γ 具有逼近性质 (AP)，则$\mathcal{A}$ 是形如 $(C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$的交叉积。

证明。 由例 5.8可知，子群 N 是 X-丰足的。由于 $N \curvearrowright X$ 根据假设是极小的，结论立即由定理 5.6得出。 □

以下结论由推论 5.3 和定理 5.6结合得出。

推论 5.10。 设 Γ 是一个可数群，非忠实地作用于含幺 C^*-代数 $\mathcal{B}$上，并令 $N := \ker(\Gamma \curvearrowright \mathcal{B})$。假设 $C_\Gamma(N) = \{e\}$。设 X 是一个连通的 Γ-空间，使得限制作用 $N \curvearrowright X$ 是极小的，并假设约化交叉积 $C(X) \rtimes_r N$ 是单的。考虑带有对角作用的 Γ-C^*-代数$C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}$ 。那么对于每个中间 C^*-代数 $\mathcal{A}$，满足

$$C(X) \rtimes_r \Gamma \subseteq \mathcal{A} \subseteq (C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}) \rtimes_r \Gamma$$

我们有 $E(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$。此外，如果 Γ 具有近似性质（*AP*），那么 $\mathcal{A}$ 是一个（$C(X) \otimes_{\min} \mathcal{B}$）$\rtimes_r \Gamma$形式的交叉积。

证明。由于 N 是对 $\mathcal{B}$的作用的核，因此它是 Γ的正规子群，所以 N 在 Γ中可公度（即 $N \leq_c \Gamma$）。根据推论5.3，假设 X 连通、$N \curvearrowright X$ 极小、$C(X) \rtimes_r N$ 为单，且 $C_\Gamma(N) = \{e\}$，可推出 N 是 X-丰足的。结论由定理5.6直接得出。

□

References

[1] Tattwamasi Amrutam，《关于 C*-单群作用的中间子代数》，《国际数学研究通知》2021（2021），第21期，16193–16204页。 ↑3，4，34，38[2] Tattwamasi Amrutam、Eli Glasner 和 Yair Glasner，《动力系统的交叉积；刚性与强近端性》，arXiv 预印本 arXiv:2404.09803（2024）。 ↑4，36[3] ,《Z 的作用及其他非 C*-单群作用的非阿贝尔因子》，《泛函分析杂志》287（2024），第2期，110456。 ↑4[4] Tattwamasi Amrutam、Ilan Hirshberg 和 Apurva Seth，《中间交叉积 C*代数》，arXiv 预印本 arXiv:2311.01524（2023）。 ↑4[5] ,《C(X)-代数作用的 Powers 平均》，arXiv 预印本 arXiv:2312.07702（2023）。 ↑34[6] Tattwamasi Amrutam 和 Yongle Jiang，《张量积分解与中间因子定理：连续版本》，《伦敦数学会杂志》111（2025），第6期，e70205。 ↑38[7] Tattwamasi Amrutam 和 Mehrdad Kalantar，《关于中间 C*-代数的单性》，《遍历理论与动力系统》40（2020），第12期，3181–3187页。 ↑34[8] Tattwamasi Amrutam 和 Dan Ursu，《交换交叉积的广义 Powers 平均性质》，《美国数学会会刊》375（2022），第3期，2237–2254页。 ↑3，32，33，34，35，37，38

[9] Alexander Arhangel′ skii, 《极不连通拓扑空间研究》, 《数学科学通报》1（2011）, 第1期, 3–12页。MR2823785 ↑10[10] Joseph Auslander, 《极小流及其扩张》, 北荷兰数学研究丛书, 第153卷, 北荷兰出版公司, 阿姆斯特丹, 1988年。《Notas de Matem´atica [Mathemat- ical Notes], 122》。MR956049 ↑39[11]Emmanuel Breuillard、Mehrdad Kalantar、Matthew Kennedy 和 Narutaka Ozawa, 《离散群的 C*简单性与唯一迹性质》, 《IH´ES 数学出版物》126（2017）, 第1期, 35–71页。 ↑1, 2, 22, 25, 38, 39[12] Nathanial P. Brown 和 Narutaka Ozawa, 《C*代数与有限维逼近》, 数学研究生教材丛书, 第88卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2008年。 ↑16[13] Xiongping Dai 和 Eli Glasner, 《拓扑群的泛极小近端流》, 美国数学会会刊147（2019）, 第3期, 1149–1164页。 ↑2[14] Z. Frol´ík, 《极不连通空间的映射、类型论及其应用》, 《一般拓扑学及其与现代分析和代数的关系》第三卷（1968年坎普尔会议论文集）, 1971年, 第131–142页。 ↑24[15] Alex Furman, 《局部紧群的极小强近端作用》, 《以色列数学杂志》136（2003）, 第1期, 173–187页。 ↑10[16] H. Furstenberg, 《遍历理论与组合数论中的复现》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1981年。M. B. Porter讲座。MR603625 ↑25[17] Shmuel Glasner, 《拓扑动力学中的可压缩性》, 《美国数学杂志》97（1975）, 148–171页。MR365537 ↑2, 5, 7
[18] , 《近端流》, 数学讲义, 第517卷, 施普林格出版社, 柏林—纽约, 1976年。 ↑8, 10, 14, 17, 22[19] Uffe Haagerup, 《重新审视群的 C*简单性与唯一迹性质》, 《算子代数与应用——阿贝尔研讨会2015》, 2017年, 第167–176页。MR3837596 ↑3[20] Edwin Hewitt 和 Kenneth A. Ross, 《抽象调和分析。第一卷》, 第二版, 数学科学基础丛书, 第115卷, 施普林格出版社, 柏林—纽约, 1979年。拓扑群的结构、积分理论、群表示。 ↑13, 15[21]Mehrdad Kalantar 和 Matthew Kennedy, 《离散群约化 C*代数的边界》, 《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal）2017（2017）, 第727期, 247–267页。 ↑1[22] Mehrdad Kalantar 和 Eduardo Scarparo, 《边界映射、芽与拟正则表示》, 《数学进展》394（2022）, 论文编号108130, 共31页。MR4348698 ↑39[23] Takuya Kawabe, 《一致复现子群与约化交叉积的理想结构》, 2017年。 ↑2, 10, 24[24] Matthew Kennedy, 《C*简单性的内在刻画》, 《高等师范学校科学年鉴》（第4辑）53（2020）, 第5期, 1105–1119页。MR4174855 ↑3[25] Bartosz Kosma Kwa´sniewski 和 Ralf Meyer, 《非周期性：几乎延拓性质与伪期望的唯一性》, 《国际数学研究通知》2022（2022）, 第18期, 14384–14426页。 ↑34[26] Adrien Le Boudec, 《具有近乎任意指定局部作用的作用于树上的群》, 《瑞士数学杂志》91（2016）, 第2期, 253–293页。MR3493371 ↑30, 31[27] , C^*简单性与 amenable 根, 《数学发明》209（2017）, 第1期, 159–174页。MR3660307 ↑30, 31[28] Kang Li 和 Eduardo Scarparo, 《可公度子群的 C*不可约性》, 《太平洋数学杂志》322（2023）, 第2期, 369–380页。 ↑2, 22[29] Chunlin Liu、Leiye Xu 和 Shuhao Zhang, 《群作用下极小系统中的独立性与平均敏感性》, 2025年。 ↑25

[30] Zahra Naghavi，极小作用的 Furstenberg 边界，《积分方程与算子理论》92（2020），第 2 期，14。 ↑2，7[31]Narutaka Ozawa，群 C*- 代数的近端性与无自性，arXiv 预印本 arXiv:2508.07938（2025）。 ↑2[32] Davide Penazzi、Anand Pillay 和 Ningyuan Yao， p-进代数群的一些模型论与拓扑动力学，《Fund. Math.》247（2019），第 2 期，191–216。MR 4011228 ↑20[33] Mikael Rørdam，简单 C*-代数的不可约包含，《L'Enseignement Math´ematique》69（2023），第 3 期，275–314。 ↑34[34] Yuhei Suzuki，群 C*-代数作为核 C*-代数的递减交集，《American Journal of Mathematics》139（2017），第 3 期，681–705。 ↑38 [35] ,通过动力系统的中间扩张对中间算子代数的完整描述，《Communications in Mathematical Physics》375（2020），第 2 期，1273–1297。↑4[36] Dan Ursu，正规子群的相对 C*-简单性及其刻画，《Journal of Operator Theory》87（2022），第 2 期，471–486。 ↑21，38[37] Peter Walters，《遍历理论导论》，数学研究生教材，第 79 卷，施普林格出版社，纽约-柏林，1982。MR648108 ↑18

Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, ul. Sniadeckich 8, 00-656, Warszawa, Poland电子邮箱地址: tattwamasiamrutam@gmail.com

School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, P.R. China, and Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sci-ences, ul. Sniadeckich 8, 00-656, Warszawa, Poland电子邮箱地址: chunlinliu@mail.ustc.edu.cn