arXiv:2601.03953v1 [physics.plasm-ph] 7 Jan 2026

用于预测线性布莱特-惠勒过程电子-正电子对产生的量子蒙特卡罗模拟

LucasIvanI˜nigoGamiz[1*], ´Oscar Amaro[1], Efstratios Koukoutsis[2], Marija Vrani´c[1*]1*GoLP/核聚变等离子体研究所，里斯本大学高级技术学院，Av. Rovisco Pais 1，里斯本，1049-001，葡萄牙。[2]雅典国立技术大学电气与计算机工程学院，Zagrophou，15780，希腊。

*通讯作者。电子邮箱：lucas.inigo.gamiz@tecnico.ulisboa.pt；marija.vranic@tecnico.ulisboa.pt；贡献作者：oscar.amaro@tecnico.ulisboa.pt；stkoukoutsis@mail.ntua.gr；

摘要

量子计算（QC）有望彻底改变科学模拟的未来。为了充分发挥量子计算的能力，我们可以将其融入量子-经典混合模拟，借助相较经典对应方法可实现加速的量子模块，提升超级计算的能力。量子蒙特卡罗积分便是一例；理论上，它相较经典蒙特卡罗可实现二次加速，因此适用于高能物理、强场量子电动力学以及多种科学和工业应用。本文展示了量子蒙特卡罗可用于预测两束光子束迎头碰撞时产生的对数，这是一个与高能物理和强激光-物质相互作用相关的问题。量子模拟结果相较理论预测表现出较高的准确度。模拟的准确度仅受嵌入多项式和初始化量子态所需近似的限制。我们还展示了该算法可用于当前的量子硬件，相较理论预测可达到高达 90 %的准确度。此外，我们提出了与经典模拟代码集成的可行途径。

关键词： 量子蒙特卡洛、强场量子电动力学、线性布莱特-惠勒过程、量子模拟

1 引言

为克服传统射频加速器技术在尺寸和成本方面的限制，等离子体加速器已成为未来高能对撞机的一种替代方案，因为它们能够维持超过 1 GeV/cm 的加速梯度。这项新兴技术并非要取代传统加速器，而是作为一种互补工具；借助拍瓦级激光设施，可为非线性强场量子电动力学（SFQED）体制提供至关重要的试验平台。此类效应包括通过非线性布莱特-惠勒过程产生电子-正电子对 [1] 和贝特–海特勒[2] 过程，以及通过非线性康普顿散射产生辐射 [2]和韧致辐射 [3]。为模拟这些效应，粒子网格（PIC）代码已加入量子电动力学模块，用于对量子场论的事件率进行抽样 [4, 5]。例如，在电子-正电子对产生过程中，每个时间步，模拟循环中的量子电动力学模块都会进行蒙特卡罗（MC）计算，以再现量子电动力学事件的概率性质。当样本量较大时，即使对世界上最强大的超级计算机而言，这些蒙特卡洛模拟也可能需要大量计算资源。通过改进这一模块，我们能够实现规模更大或准确度更高的模拟，并为将我们的解决方案应用于其他任何使用蒙特卡罗技术的问题打开大门。

量子算法的最新进展展现了超越经典计算机计算能力的潜力。研究人员一直在开发算法，证明其相较于经典程序具有加速优势 [6, 7]。特别是，Brassard 等人证明，使用量子计算机，可以用比经典蒙特卡洛模拟少二次方倍的样本，达到相同的准确度 [7]。随后，这项工作经过改进，减少了所需门数，使其更适用于含噪中等规模量子（NISQ）时代 [8–10], ，应用领域包括金融衍生品定价 [11–13] 和高能物理 [14]。事实上，量子信息理论已被认定为高能物理的关键领域，能够为探索基础物理提供新方法 [15]。

本文提出一种面向含噪声中等规模量子硬件的量子蒙特卡洛（QMC）积分方法，该方法利用迭代量子振幅估计（IQAE） [10]。我们开发了首个可直接应用的模块，利用强场量子电动力学和极端等离子体领域的先进算法；相较之下，这些领域鲜少涉足量子计算。我们选择线性布莱特-惠勒过程中的电子-正电子对产生过程作为测试基础，因为该过程受到强场量子电动力学和高能物理（HEP）领域的广泛关注，并且已有众多实验计划对其进行测量。此外，截面／概率可用低阶多项式近似，因此便于应用于量子算法。由于蒙特卡罗积分是众多领域必不可少的常规方法，这项工作可应用于需要

随机抽样的领域，例如生物学、化学、物理学、工程学和金融[16–21]。

1.1 强场量子电动力学

量子电动力学（QED）是物理学中经受过最充分检验的领域之一。QED效应在宇宙空间以及黑洞、中子星和伽马射线暴等极端天体物理情景或天体中无处不在 [22–24], ，因此对于理解这些天体物理现象至关重要。值得注意的是，这里讨论的并非QED的微扰区间。强场量子电动力学指的是这样一种情形：电磁背景场强到所有可能的贡献都变得不可忽略，QED计算中使用的标准展开不再适用。我们尚未在这一范围内进行直接测量，而迄今已有的理论要么因所选几何构型过于理想化，要么在其他方面尚不完善。

下一代拍瓦级激光设施即将投入使用 [25, 26]。这些激光设施能够提供高达10拍瓦的功率，从而为研究强激光-物质相互作用创造条件。此类激光与等离子体相互作用时，强度可超过施温格极限，因而能够产生强场量子电动力学效应，例如电子-正电子对产生和真空双折射。因此，亟需研究强场量子电动力学，以便对实验室实验作出准确预期。为此，人们提出了许多实验方案，利用强场量子电动力学研究电子加速 [27–29], 、正电子产生与加速 [30–32], 、量子电动力学簇射和级联 [33–36]。

1.2 《Quantum》计算

近年来，人们对量子信息与计算研究的兴趣稳步增长。量子计算公司在硬件和软件方面不断取得显著进展，也让更多人能够使用其量子计算机。路线图预计，到2030年代初至中期将部署容错机器，以展示量子优势。值得注意的是，金融机构已报告采用量子计算的益处、风险及潜在经济收益 [37]。量子模拟是一个迅速发展的应用领域，它利用量子计算机和算法来模拟物理系统或事件，与相应的经典方法相比，可实现显著加速（指数级、多项式级和二次加速） [7, 38–40]。此外，量子计算机天然适用于模拟量子系统。经典计算机通常需要采用近似方法和一些“技巧”，来处理量子不确定性这一固有特性。这些方法表现为用于描述随机性的离散经典模型，往往需要大量粒子统计数据和强大的计算资源。

量子电路由一组离散组件构成，用于描述计算过程 [41]。量子计算机的基本信息单位是量子比特，它是经典比特的量子类比，由基态（$|0\rangle$）和激发态（$|1\rangle$）组成。与经典比特不同，量子比特允许

基态和激发态的叠加：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

其中， $|\psi\rangle$ 是量子态， α 和 β 是量子振幅，且 $|\alpha|^2+|\beta|^2$ =为1。经典比特一次只能处于一种状态。叠加使量子比特能够存储比经典比特更多的信息。例如，要编码一个包含40个量子比特的状态向量，需要 $2^{40} \approx 1$TB的经典内存，这就进入了高性能计算的领域。

要在量子电路中执行运算，需要使用量子门或算符。通用门的种类不多：泡利矩阵，它们可以执行比特翻转、相位翻转，或同时执行两者：

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \tag{2}$$

将 X 和 Z 矩阵相加，再除以 $\sqrt{2}$，即可得到哈达玛门，它能使量子比特处于 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态的叠加态。此外，还可以组合这些门，对它们执行受控操作，并构建量子算法。

在撰写本文时，已经存在多种可用于执行数字量子模拟的量子硬件技术。例如超导体、囚禁离子、中性原子和光量子计算机。尽管当前路线图表明，到2030年代中期将部署容错机器，但我们仍需考虑NISQ设备，以及能够执行特定任务的简单、低深度电路。

近期有人提出了用于执行强场量子电动力学和高能物理量子模拟的量子算法。Hidalgo和Draper推导出了一个强场量子电动力学哈密顿量，用于模拟实时非线性布赖特–惠勒对产生，并执行了零双缝实验的量子模拟 [42]。Amaro 等人利用变分量子虚时间演化，模拟了强磁场作用下电子束的随机冷却 [43]。Draper等人执行了与强波相互作用的光子偏振翻转数字量子模拟 [44]。本文介绍了首个用于强场量子电动力学中蒙特卡罗计算的量子算法，该算法利用了与当前含噪声中等规模量子硬件兼容的迭代量子振幅估计和状态制备技术。我们将该算法的性能与经典蒙特卡罗算法进行了比较，并展示了其在囚禁离子量子计算机上的性能。

算法。量子蒙特卡罗程序可概括为四个步骤：制备一个初始量子态，以表示能量分布不断变化的光子束；嵌入一个用于计算所选能量范围概率的函数；执行量子版的随机采样；以及对量子模拟所得的信息进行后处理。

在图1中，我们展示了执行量子蒙特卡洛的四个步骤。在初始化框中，算法 $\mathcal{A}$初始化量子态，该量子态表示一个

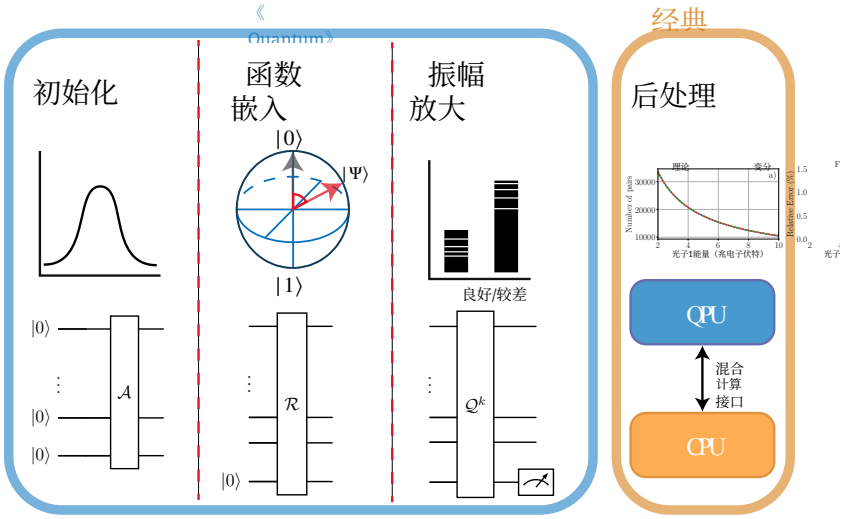

图1 展示由量子部分和经典部分组成的算法示意图。在量子部分中，我们首先对光束的概率分布进行初始化，其能量服从高斯能量分布；随后通过受控旋转将这些概率嵌入辅助函数中，并对辅助量子比特中的“良好”状态进行振幅放大。在经典部分中，我们进行后处理，读取并解释“良好”状态的概率振幅，从而得到通过线性布莱特-惠勒过程产生的粒子对数量。

粒子束对应的概率分布。随后，算法可通过一系列受控旋转，将这些概率嵌入辅助量子比特（也称为辅助量子比特）中 $\mathcal{R}$（更多详情请参阅补充材料）。接着，为了进行采样，我们执行迭代量子振幅放大（IQAE）[10], ，通过执行算法 $\mathcal{Q}$，k 次来放大辅助量子比特中“良好”状态的振幅。迭代次数通过迭代量子振幅估计计算得出。最后，根据测量结果，我们将模拟得到的预期振幅转换为产生的粒子对数量。在量子计算机上执行模拟的步骤相同。有关算法各步骤的更多详细信息，请参阅方法部分和补充材料。

实验装置。 我们测试了 γ 光子的正碰，并将几何结构简化为所有光子都能发生相互作用，且以非零概率衰变为电子-正电子对。在这种情况下，我们忽略进一步的辐射发射和成对产生机制。其中一束光子束为单能光子束，另一束具有类似高斯分布的能量分布。每束光子束包含 10^{12} 个光子，光子密度为 $6 \times 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$。

图 2 展示了我们提出的、用于通过线性布莱特-惠勒过程产生电子-正电子对的装置示意图。实验人员已经使用过类似的示意图 [45], 不过，他们采用的是成一定角度的碰撞，而非两束光子正碰。在这里，我们尽可能简化几何结构，以便将该问题用于现有的量子算法和硬件。

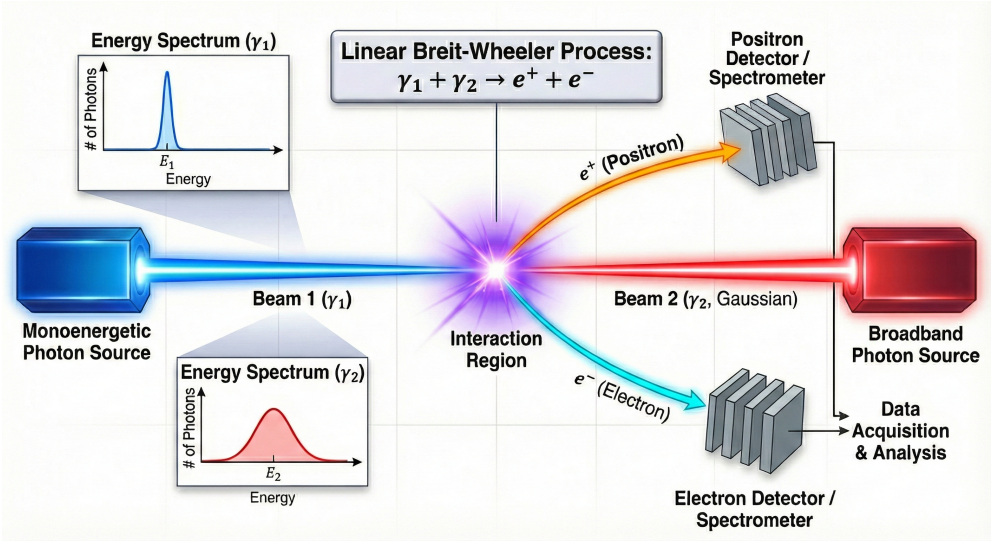

图 2 示意图展示了两束光相撞并通过线性布莱特-惠勒过程产生电子-正电子对的实验装置。

2 结果

本节将模拟两束光子彼此正碰时产生的电子-正电子对数量。我们首先初始化光子分布，将概率编码为由辅助量子比特控制的旋转门，执行迭代量子振幅估计，然后进行后处理，以获得产生的电子-正电子对数量的估计值。我们将考察该方法的稳健性及其相对于理论期望值的准确度，并通过改变单能光子束能量、高斯分布宽度、量子比特数和分布偏度来比较模拟结果。

与理想模拟器的比较。图3展示了理论预测的对数与采用不同状态制备算法的 QMCI 算法预测结果之间的比较。单能束的能量有所变化，而高斯束的参数保持不变，其均值能量为 6 兆电子伏特，展宽为 $\sigma = 1$。从 a) 图中可以看出，QMCI 算法的结果与理论结果无法区分。随着束流能量增加，对产生的概率降低。此外，我们可以看到，QMCI 算法总体上与理论预测高度吻合。b) 图展示了各方法的相对误差。相对误差始终低于 1.0%。Qiskit 初始化的平均误差为 0.156%，FSL 为 0.115%，变分方法为 0.167%。对于这些模拟，与解析结果相比，我们确认平均准确度达到 99.8%。所有状态制备方法都达到了显著的准确度；然而，只有变分方法和

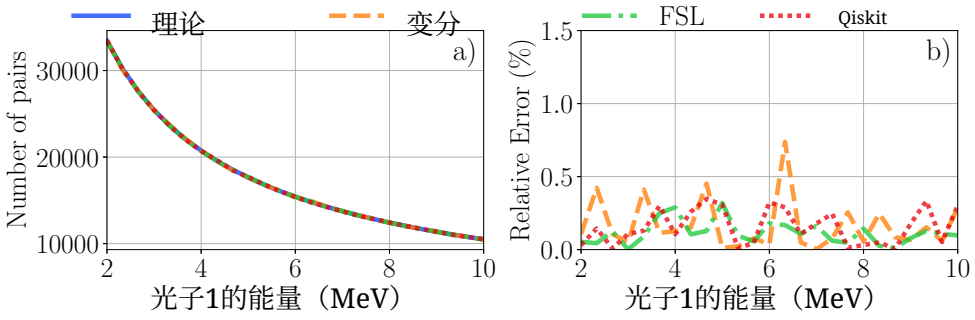

图3 图a）：理论预测的粒子对数（蓝色实线）与采用变分方法的不同状态初始化方法（橙色间隔虚线）、傅里叶级数加载器（FSL，绿色点划线）以及 Qiskit 的初始化方法（红色点线）的比较。图b）：不同初始化方法的相对误差比较。单能束流的能量范围为 2 至 10 兆电子伏特。

FSL 方法可用于量子硬件，因为 Qiskit 原生初始化方法使用了量子计算机不支持的操作。

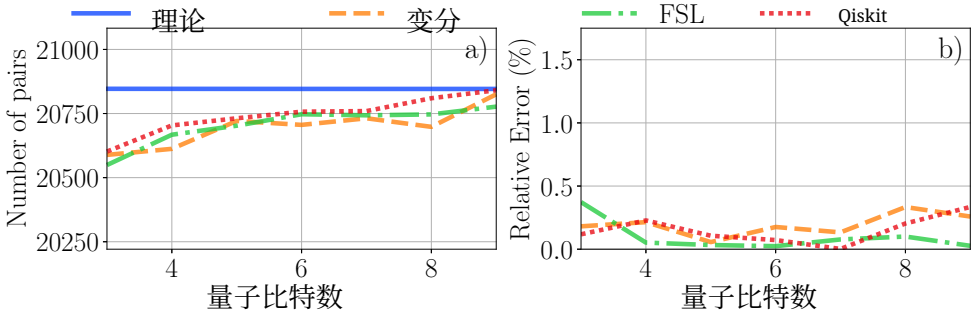

图4 图a）：理论预测的粒子对数（蓝色实线）与采用变分方法的不同状态初始化方法（橙色间隔虚线）、傅里叶级数加载器（FSL，绿色点划线）以及 Qiskit 的初始化方法（红色点线）的比较。图b）：不同初始化方法的相对误差比较。量子比特数有所变化。

图 4 展示了不同状态制备方法的准确度如何随量子比特数而变化。为了精确测试准确度，我们还改变了理论结果中初始分布的离散化程度，因此得到的数值并非常数。在本次模拟中，单能束的能量为 4 兆电子伏特，高斯束的平均能量为 6 兆电子伏特，展宽为 $\sigma = 1$。随着量子比特数增加，分辨率提高，从而得到更准确的结果。使用 FSL 初始化方法时，误差可追溯至所用的截断阶数，而量子比特数限制了截断阶数。相比之下，变分方法有所不同。在这种情况下，量子比特数越多，拟设就越容易

出现过拟合，从而无法准确表示初始高斯态。如果使用更多量子比特，初始态就会过拟合。

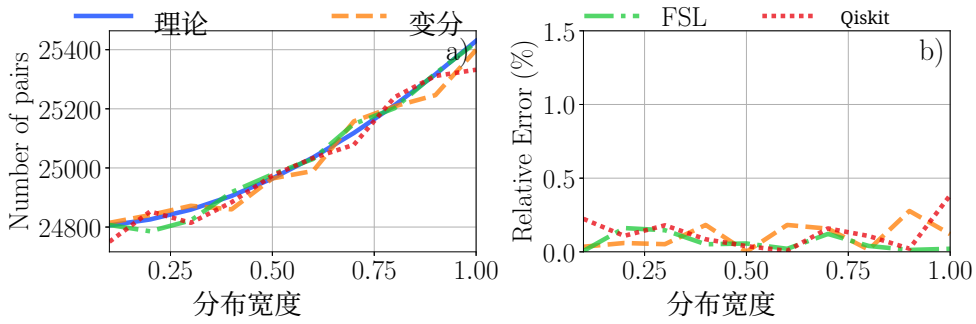

图 5 面板 a)：理论预测的粒子对数（实线蓝色）与使用变分方法（间隔虚线橙色）、傅里叶级数加载器（FSL，点划线绿色）以及 Qiskit 的初始化方法（点线红色）等不同状态初始化方法的比较。面板 b)：不同初始化方法下相对误差的比较。分布的展宽有所变化。

图 5 展示了分布的展宽如何影响使用 QMCI 预测的粒子对数。与理论预测相比，模拟在所有初始化方案下都始终表现出超过 99% 的准确度。所有方案的误差率相近；其中一个关键因素是离散化必须足够精细，以分辨分布的不同展宽。使用较少的量子比特会导致更大的偏差。

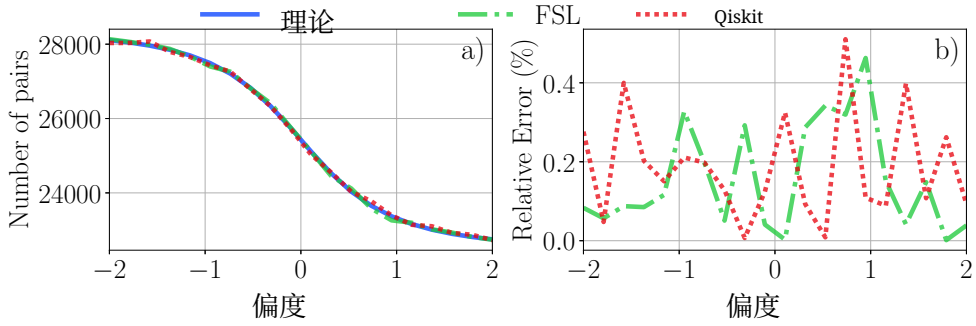

图 6 面板 a)：理论预测的粒子对数（实线蓝色）与使用傅里叶级数加载器（FSL，点划线绿色）以及 Qiskit 的初始化方法（点线红色）等不同状态初始化方法的比较。面板 b)：不同初始化方法下相对误差的比较。偏度发生了变化，以适应不同的分布。

图6 展示了 QMCI 算法在偏态高斯分布下的表现。在这种情况下，单能束中光子的能量为 4 兆电子伏特，

展宽为 $\sigma = 1$，偏度从正偏度变为负偏度 $[-2, 2]$。该分布的平均能量为 6 兆电子伏特，本次模拟使用了六个量子比特。值得注意的是，对于负偏态分布，FSL 的表现不如正偏态分布。不过，准确度始终高于 99%。我们采用的变分方法不支持偏态分布。更多详情请参阅补充材料。

2.1 经典与量子蒙特卡洛比较

我们还进行了经典蒙特卡洛模拟，以便与前文讨论的结果进行比较。同样，我们有单次相互作用的布赖特–惠勒对产生概率 $p(X) \in [0, 1]$。我们关注的值是对产生概率的期望值：

$$\mu = \mathbb{E}_X[p(X)], \tag{3}$$

其中，相互作用粒子数为 $N_{\text{pairs}} = N_{\text{int}}\mu$ 时，预期对数为。

我们可以使用量子蒙特卡洛中的相同预言机查询次数，以及经典蒙特卡洛模拟中使用的样本数来比较结果。预言机调用次数定义为格罗弗算子应用的次数（k）乘以每次模拟运行的测量次数。在迭代量子振幅估计中，`FindNextK` 算法（概述见 [10]）中的幂次 k 为$k_j = 4k_i + 2$。因此，在迭代振幅估计过程中，会先计算此 k，然后将其应用于格罗弗算子。我们比较了每次模拟中的平均误差与每次模拟使用相同查询次数时经典蒙特卡洛的平均误差。

模拟类型	相对于解析值的平均误差百分比
经典	0.191
Qiskit	0.156
变分	0.167
FSL	0.115

表1 比较经典蒙特卡洛与量子蒙特卡洛对线性布莱特-惠勒过程中产生的电子-正电子对数量的预测，其中每种模拟的查询/样本数均为6144。

如表 1所示，量子蒙特卡洛程序在准确度方面始终优于经典蒙特卡洛方法。我们还测试了不同 ϵ 值下经典蒙特卡洛与量子蒙特卡洛的准确度，所得结果与此处展示的结果相近，为简洁起见不再列出。

与囚禁离子量子处理器的比较。 我们调整了模拟结果，使其适用于量子计算机。对于这项模拟，我们比较了云服务提供商提供的理想化模拟与在 IonQ 的 Forte Enterprise 量子计算机上进行的模拟。我们改变单能束的能量，同时保持高斯束流能量分布不变。为尽量降低成本，我们减少了工作寄存器中的量子比特数。

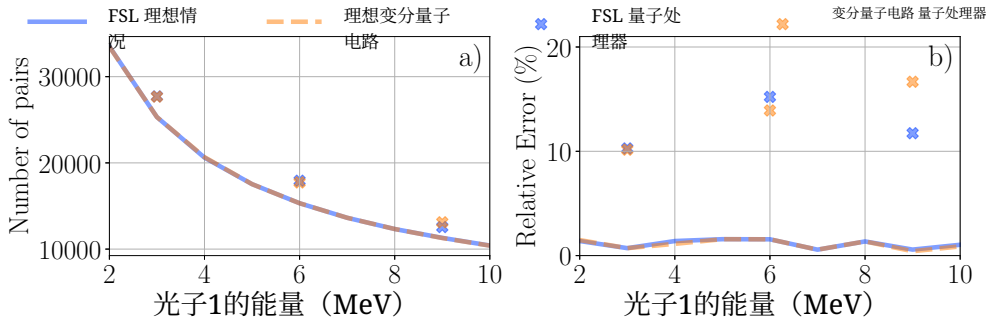

图 7 面板 a)：比较采用变分方法（橙色虚线）、傅里叶级数加载器（FSL，蓝色实线）的不同状态初始化方法，以及量子计算机使用相应初始化方法得到的模拟结果：FSL 用蓝色叉号表示，变分量子电路用橙色叉号表示。面板 b)：比较不同初始化方法和量子处理器模拟的相对误差。单能束流的能量范围为 2 至 10 兆电子伏特。

在图 7中，我们可以比较模拟的性能与量子处理器的结果。我们发现，即使量子比特数较少，该算法的表现依然良好；无需纠错，量子计算机的结果准确度也可超过 90%。量子计算机模拟的趋势与理想模拟中单能束能量变化所呈现的行为相似，表明该算法能够有效地放大辅助量子比特中的“良好”状态。通过采用纠错算法、使用更多量子比特并增加测量次数，我们有望提高准确度。

3 结论

我们构建了一种算法，用于执行量子蒙特卡罗模拟，以预测线性布赖特-惠勒道产生的电子-正电子对，并且该算法可直接应用于含噪声中等规模量子时代设备。本文展示了完整算法，该算法基于其他算法构建，可用于初始化分布函数、对辅助量子比特应用函数和旋转、执行振幅估计，并进行后处理，从而准确获得两个碰撞的高能光子产生的预期对数。我们通过比较理论预测的粒子对数与量子模拟结果，评估了该算法的稳健性；在固定光子束的高斯分布时，改变单能光子束的能量。我们还改变了高斯分布的宽度、量子比特数以及高斯分布的偏度。理想化结果展现出极高的准确度，优于经典蒙特卡罗。我们还在 IonQ 的 Forte-Enterprise 量子处理器上进行了模拟，证明了我们的算法在当前含噪声中等规模量子硬件上的可行性，并且相对于理论预测，平均准确度达到 87%。

本研究发表之际，量子计算机正变得越来越容易获得，多个国家和国际倡议也正朝着混合经典-量子代码迈进。所展示的结果表明，确实实现了加速，

但其效果受到初始化函数近似和嵌入多项式近似的限制。此外，研究表明，这些研究可以在当前的NISQ设备上开展，尽管量子比特数量有限，因此降低了该算法的准确度。

尽管该工作仅限于单变量问题，但我们已经确定了一种引入多变量问题的可能途径，例如改变两种粒子种类之间的能量分布、自旋、偏振等。由此，我们可以扩展量子相较于经典蒙特卡洛具有优势的可能场景。因此，下一步将是把算法扩展到多个变量。后续研究将重点放在如何在经典框架内将量子蒙特卡洛应用于强场量子电动力学模块，从而实现高性能计算与量子处理器之间有意义的集成，并为未来的对撞机实验做好准备。

4 方法

使用量子模拟器进行量子模拟。 我们使用二次多项式近似相关能量区间内的Breit-Wheeler概率/截面（$\sigma_{\gamma\gamma}(s)\ \tilde{p}(x)\ = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$。为确保 $\tilde{p}(x) \in [0,1]$，我们使用方程对系数进行重新缩放和平移 **参见补充材料** 20。随后，通过受辅助比特旋转 $R_y(2\arcsin(\sqrt{\tilde{p}(x)}))$ 将多项式嵌入，并由工作寄存器进行条件控制。我们使用Qiskit的`PolynomialPauliRotations`实现这一过程，该工具将多项式分解为一系列多重受控旋转。原始多项式与该技术之间的均值误差为0.69%。经典蒙特卡罗模拟的样本数量设置为与量子查询数量相同（测量次数 × 格罗弗算子），并在迭代量子振幅估计循环中计算。为简便起见，经典蒙特卡洛方法通过添加任意数量的高斯分布样本来实现。相关计算使用`random` 模块和`NumPy` Python框架完成。第二组结果：单能束中的光子能量为4兆电子伏特，高斯束流能散从0.1变化至1.0，其均值为6兆电子伏特。

使用量子计算机进行量子模拟。我们使用了 IonQ 量子云上提供的 IonQ Forte 企业级量子计算机。该量子处理器具有 36 个物理量子比特，采用全连接拓扑；单量子比特的门错误率中位数为 0.02%，双量子比特错误率中位数为 0.450%。量子电路使用 Qiskit 和我们开发的量子蒙特卡洛积分模块构建。量子电路针对该量子计算机的后端进行了专门转译。量子电路的工作寄存器包含三个量子比特，使用参数化线路和傅里叶级数进行初始化，具体方法如补充材料所述。多项式的嵌入采用此前所述以及补充材料部分中介绍的相同方法完成。结果以 JSON格式下载，然后在本地进行后处理。我们使用 6144 次测量进行了六次模拟。模拟过程中将单能束的能量设置为 3、6 和 9 兆电子伏特，同时保持另一束流具有相同的能量分布。

补充信息。

线性布赖特–惠勒对产生。两个高能光子相互作用时，可以衰变成一个电子-正电子对 [46]。线性布赖特–惠勒（LBW）过程是一种一阶微扰量子电动力学过程，用于描述两个相互作用的光子衰变产生电子-正电子对的过程 $\gamma' + \gamma \to e^+ + e^-$。随后还会发生多光子过程 [45]。在实验室环境中很难探测到布赖特–惠勒对，因为还可能发生其他对产生机制，例如贝特–海特勒 [2]和三叉戟对产生机制 [47], ，它们可能掩盖布赖特–惠勒过程。

这一过程已通过实验观测到。在 SLAC实验中，强激光与 46.6 GeV 电子束碰撞，产生伽马光子，随后这些光子与激光场相互作用，生成电子-正电子对 [48], ，由此获得了利用激光产生反物质的首个实验性证据（尽管产额极低，在整个实验期间仅产生了约数百个正电子）。假设电子和正电子在质心参考系中静止，我们可以写出阈值条件

$$E_{\gamma_1} E_{\gamma_2} = 2m_e^2 c^4 / (1 - \cos(\phi)) \tag{4}$$

其中 $E_{\gamma 1}$， $E_{\gamma 2}$ 对应光子能量， m_e 是电子质量， c 是光速， ϕ 是光子之间的碰撞角。对于理想的碰撞几何构型，应采用 $\phi = \pi$ 正碰，以最大化对产生概率。

要计算产生的电子-正电子对数量，可以使用以下截面 [45]:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(s) = \frac{\pi}{2} r_e^2 (1 - \beta^2) \left[-2\beta \left(2 - \beta^2\right) + \left(3 - \beta^4\right) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] \tag{5}$$

其中 $s = E_{\gamma_1} E_{\gamma 2}(1 - \cos(\phi))/(2m_e^2 c^4)$， $\beta = \sqrt{1 - 1/s}$和 r_e 是电子半径。LBW 对产生的阈值能量应高于 0。5 兆电子伏特。对产生概率可计算如下:

$$p(E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}) = 1 - e^{\sigma_{\gamma_1 \gamma_2} N_{\gamma_2} / A} \tag{6}$$

其中， N_{γ_2} 是光子束 2 中光子的数量， A 是相互作用面积。

图8 展示了 LBW 截面对两束迎头碰撞的光子束能量的依赖关系。图中表明，当 s较高时，截面会减小，从而降低产生电子-正电子对的概率。因此，需要平衡两束光子束的能量，以产生最多的粒子对。

量子振幅估计。 21世纪初，Brassard 等人 [7] 提出了一种超越Grover算法的算法，可对目标态进行放大和估计。他们指出，通过使用一个尚未初始化的 N–量子比特

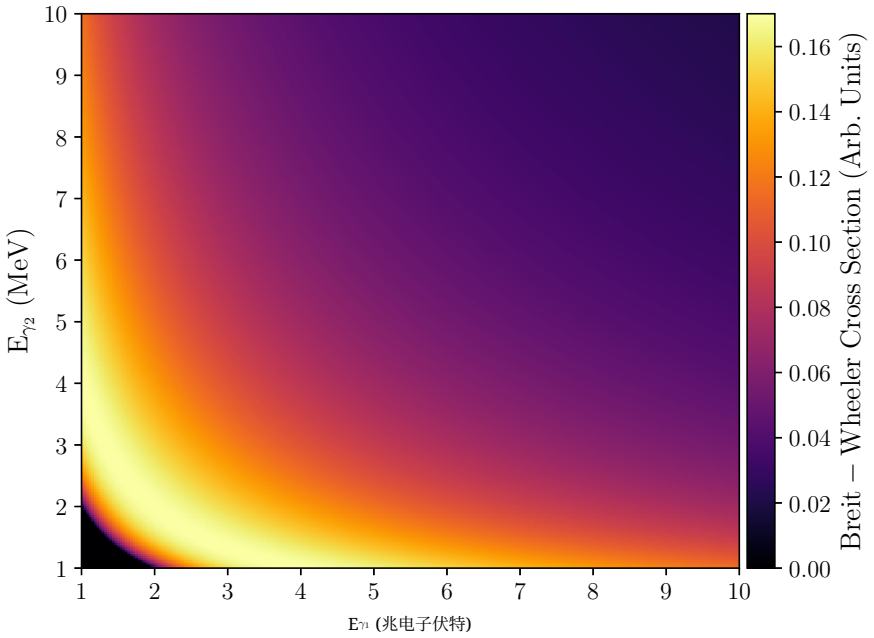

图 8 显示线性布莱特-惠勒过程的对产生截面随质心能量 s 和正碰变化的彩色图。彩色图表示归一化的布赖特–惠勒截面 $\sigma_{\gamma\gamma}$

量子电路 $|0^{\otimes N}\rangle$，我们可以通过算法 $\mathcal{A}$ 将其初始化为

$$\mathcal{A}|0^{\otimes N}\rangle \rightarrow \sum_{i=0}^{2^N-1} \sqrt{a_i}|i\rangle \tag{7}$$

其中， a_i 是与基态 i对应的振幅。我们还可以选择一个基底，使我们的态看起来像

$$\sum_{i=0}^{2^N-1} \sqrt{a_i}|i\rangle = \sqrt{1-p}|\Psi_0\rangle + \sqrt{p}|\Psi_1\rangle, \tag{8}$$

其中， $|\Psi_0\rangle$ 和 $|\Psi_1\rangle$ 对应于一种新的基底表示，前者是一个坏 态，后者是一个好 态，而我们想要做的是放大好态的振幅，然后对其进行测量。这可以通过格罗弗算子实现：

$$\mathcal{Q} = \mathcal{A}\mathcal{G}_0\mathcal{A}^\dagger\mathcal{G}_1, \tag{9}$$

其中：

$$\mathcal{G}_0 = 2|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| - \mathrm{I}, \tag{10}$$

$$\mathcal{G}_1 = \mathrm{I} - 2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|, \tag{11}$$

其中，I 是单位矩阵，$\mathcal{G}_0$ 是对坏态的旋转，$\mathcal{G}_1$ 是对好态的旋转。算符 $\mathcal{Q}$ 通常称为格罗弗迭代。测得的整数会映射为角度 $\theta_a = y\pi/M$，其中 $y = \{0, \ldots, M-1\}$，$M = 2^m$，其中M 是样本数，m 是辅助（辅助用）量子比特数，估计值定义为 $\tilde{a} = \sin^2(\tilde{\theta}_a)$。因此，$a$ 的估计值为 [10]

$$|a - \tilde{a}| \leq \frac{2\pi\sqrt{a(1-a)}}{M} + \frac{\pi^2}{M^2}. \tag{12}$$

量子振幅估计已被用于为金融工具（如衍生品）定价、开展信用风险分析、优化投资组合 [11–13], 以及预测高能物理中的散射截面 [14]。此外，还有一些量子振幅估计的变体，能够以更快、更准确的方式完成常规任务 [10, 49]。

迭代量子振幅估计。尽管经典量子振幅估计十分有效，但其计算成本可能很高，而且根据问题的不同，它可能无法在当前的NISQ设备上实现。此外，它依赖于量子相位估计，使用 m 个辅助量子比特来表示最终结果，并应用由辅助量子比特控制的 $\mathcal{Q}$ 的几何递增次幂。因此，经典量子振幅估计对量子相位估计的依赖并不适合当前的NISQ设备。近期，Grinko提出了一种更快且更准确的振幅估计方法等 [10]，其依据是

$$\mathcal{Q}^k\mathcal{A}|0^{\otimes n}\rangle|0\rangle = \cos((2k+1)\theta_a)|\Psi_0\rangle|0\rangle + \sin((2k+1)\theta_a)|\Psi_1\rangle|1\rangle, \tag{13}$$

并且在辅助寄存器中测量到 $|1\rangle$ 的概率为

$$\mathbb{P}[|1\rangle] = \sin^2\left((2k+1)\theta_a\right), \tag{14}$$

这意味着我们在 $\mathcal{Q}^k\mathcal{A}|0^{\otimes N}\rangle|0\rangle$ 中针对k的不同次幂测量最后一个量子比特。因此，我们需要将角度 θ_a 重新定义为 $a = \sin^2(\theta_a)$。其中，a 由置信区间 $1-a$作为输入获得。在迭代量子振幅估计算法中，格罗弗算子的最大应用次数可计算为格罗弗算子的应用次数，作为一个宽松的上界。该算法使用切尔诺夫-霍夫丁界，根据初始条件估计足够窄的置信区间。基于置信区间和准确度 ϵ，测量次数的最大值计算如下:

$$N_{\max}(\epsilon, a) = \frac{32}{(1 - 2\sin(\pi/14))^2} \log\left(\frac{2}{a}\log_2\left(\frac{\pi}{4\epsilon}\right)\right). \tag{15}$$

然而，由于该算法会迭代检查我们是否已达到预先设定的准确度，因此可能不需要那么多测量次数。

变分方法初始化。 变分算法已被证明在NISQ时代大有裨益，因为它们对电路的要求极低，且易于在现有机器上使用。事实证明，它们在许多科学领域都很有用，涵盖量子化学 [50] 和金融 [51, 52] ，以及近期在强场量子电动力学中的应用 [43]。在此，我们采用Amaro等人提出的拟设，该拟设由环形结构中的受控非门 $-R_y$ 组成。它通过受控非门来强制实现对称性，在保留表达能力的同时进一步降低了计算需求。

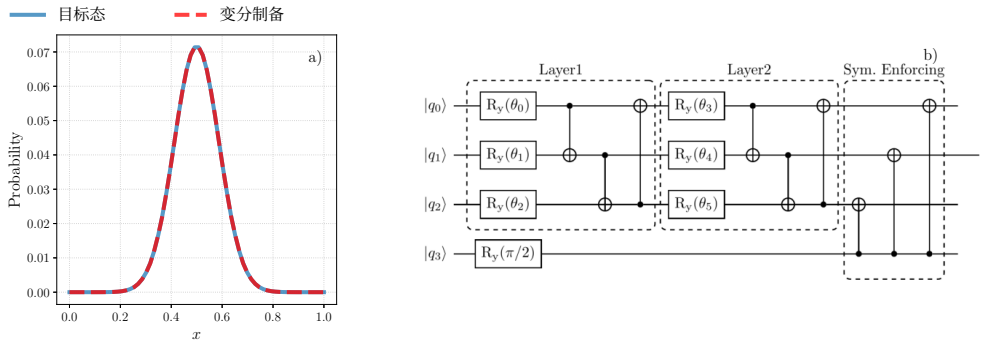

图 9 a) 高斯目标态与使用变分算法得到的结果的比较。b) 用于生成 a) 面板结果的量子电路示意图。

图 9 a) 面板中可以看到，对于包含五个量子比特的电路，高斯分布得到了良好的表示。初始化该高斯分布的成本为 $O(nL)R_z$ 个门，其中 n 为量子比特数， L 为层数，而 $O(nL)$ 为受控非门。虽然这是一种成本低且简单的高斯分布嵌入方法，但无法直接用于偏态分布，只能用于具有对称性的分布。此外，当工作寄存器超过六个量子比特时，该拟设的表现也不理想。

通过傅里叶级数加载进行初始化。虽然其他方案在计算成本上可能更低 [53, 54],，我们选择了无辅助量子比特方法，即首先初始化一个采用截断傅里叶级数的电路 [55]。傅里叶系数通过经典方法计算，然后截断至 m 阶。此外，使用傅里叶级数加载（FSL）初始化状态有两种可行方法：使用一组级联受控旋转门，或使用施密特分解获得一个幺正门 U_c。随后，将截断傅里叶级数嵌入大小为 $m+1$ 的寄存器中。接着，对整个电路应用逆傅里叶变换，从而高效地将任意状态初始化到量子电路中 [55]。

从图 10中可以看出，FSL 能有效地将任意函数加载到量子态中，随后我们可以利用该量子态进行振幅估计。使用这种方法的代价是 $DN + 2^{D(m+1)+1} - 1$ 次单门操作，以及

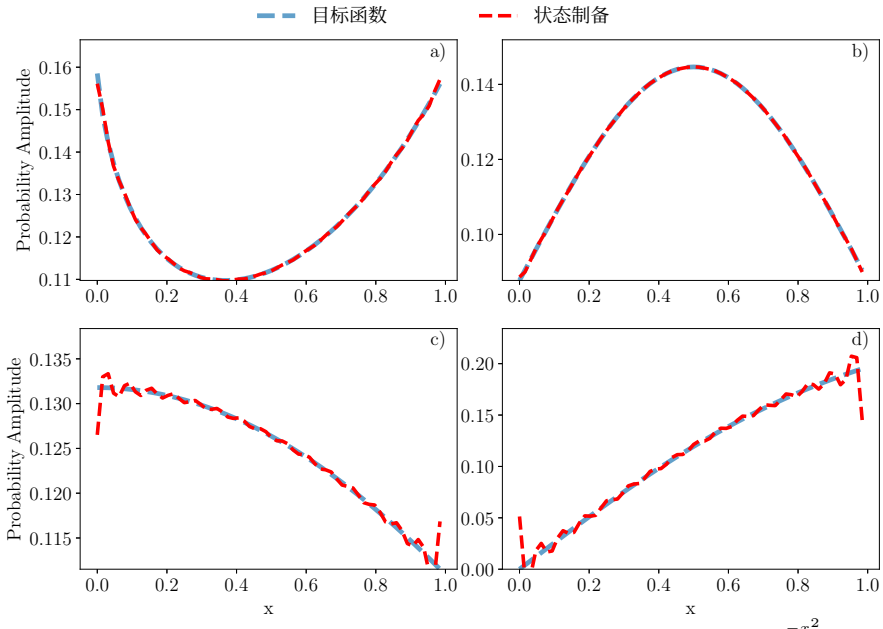

图10 分别在 a)、b)、c) 和 d) 中，使用傅里叶级数加载器方法对 $f(x)$、 $= \{x^x,\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}, \text{sinc}(x)$、$\tanh(x)\}$ 进行量子态初始化。我们使用六个量子比特，并采用截断数 $m = 4$ 来拟合每个函数。

$DN(N+1)/2 + 2^{D(m+1)+1} - 3D(m-1) - 1$ 次双量子比特门操作，其中 D 为维数， m 为与截断阶数相关的自由参数。

量子蒙特卡罗程序。介绍了量子振幅估计的核心组件后，现在可以揭示蒙特卡罗积分的工作流程。本节将在介绍量子振幅估计的基础上，进一步介绍用于制备量子态、嵌入多项式函数以及执行振幅放大和振幅估计算法。实验装置由两束对向粒子束组成。其中一束为单能粒子束，另一束具有初始能量分布。两束粒子迎头碰撞，以最大限度地延长相互作用时间，从而提高对产生概率。

我们采用 Rebentrost 提出的方法等人 [11], 以及 Woerner 和 Egger 的方法[12]，但不再用于衍生品定价，而是将其改造为计算产生的预期对数。我们首先初始化一个量子态 $|0^{\otimes N}\rangle$ ，使其具有与粒子能量相对应的初始概率分布。该初始化过程如方程 7所示：

$$\mathcal{A}|0^{\otimes N}\rangle = \sum_{x=0}^{2^N-1} \sqrt{p_x}|x\rangle, \tag{16}$$

N 是量子比特的数量， p_i 是概率， x_i 是离散化的能量网格。在本文后文中，我们介绍两种初始化算法。

对于取值范围介于 $[0,1]$, 之间的函数，我们可以通过执行如下旋转，将该函数映射到一个辅助量子比特上：

$$\mathcal{R}|i\rangle|0\rangle = |i\rangle\left[\sqrt{1-p(i)}|0\rangle - \sqrt{p(i)}|1\rangle\right] = |\chi\rangle, \tag{17}$$

我们还可以将其改写为 $|\chi\rangle$ 即 $\mathcal{F}|0^{N+1}\rangle = \mathcal{R}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{I}_2)|0^{N+1}\rangle = |\chi\rangle$，其中 $\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{R}$。此外，我们可以计算状态 $|i\rangle|1\rangle$ 的期望值：

$$\mathbb{E}[p] = \langle\chi|\left(\mathcal{I}_{N\times N}\otimes|1\rangle\langle 1|\right)|\chi\rangle \tag{18}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}|\alpha_i|^2 p_i, \tag{19}$$

为了计算预期产生的粒子对，我们需要通过函数 $f(x)$ 将截面嵌入量子电路。然而，迄今为止，还没有一种简单的方法可以嵌入像方程 5 这样复杂的函数；最精确的解决方案需要使用量子算术，这将使电路对于当前的 NISQ设备而言过于庞大。不过，我们可以将所述函数的多项式近似嵌入量子电路。鉴于对于给定的 $\zeta(x)$ $= \sum_{k=0}^{l}\zeta_k x^k$， $\sqrt{1-f(x)}|0\rangle + \sqrt{f(x)}|1\rangle = \overline{\cos(\zeta(x))}|0\rangle + \overline{\sin(\zeta(x)}\,)|1\rangle$，其次数为 l。随后，我们可以找到一个近似方程 5 的多项式，并使用受控 Y-旋转门 $R_Y(\theta_i)$ 将其嵌入，其中角度 $\theta_i = 2\sin^{-1}(\sqrt{p_i})$。在将其嵌入量子电路之前，必须计算能量范围内的理论概率。然后，必须将该函数近似为多项式，并在量子电路中实现。接着，必须对函数进行缩放 $f(x) \in [0,1]$，如下所示：

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}. \tag{20}$$

在这种情况下，我们使用 `SciPy.optimize.curve_fit` [56] 将函数拟合为低阶多项式函数。之后，我们可以使用`PolynomialPauliRotations` 方法，该方法来自 Qiskit Algorithms [57], ，可将 ζ 的多项式嵌入为 Y-旋转门的角度。嵌入多项式后，电路便可用于放大辅助量子比特中“良好”状态的振幅。为此，我们使用 Qiskit Algorithms 的 `IterativeAmplitudeEstimation`，它利用本节前文介绍的 Grinko 等人 [10]提出的算法，高效地进行振幅估计。

要将期望值转换为对数，我们需要求解方程 $f(x)$ 中的 20，然后乘以相互作用粒子的数量。

图 1展示了算法的示意图，标出了所采取的主要步骤：使用提出的三种方法初始化概率分布，通过受控旋转将截面的多项式近似嵌入辅助量子比特中 [12],使用迭代量子振幅估计（IQAE）获得预期概率，并进行后处理以得到预期对数。

理论上，迭代量子振幅估计可以带来二次加速。然而，在我们的工作中，这种设置并未实现这一点。这是因为将线性布莱特-惠勒过程的截面近似为多项式时引入了误差。如果使用量子算术，我们就能获得二次加速，但这会导致电路过深，不适用于NISQ时代。此外，我们最终得到的误差将为$\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_{\text{IQAE}} + \epsilon_{\text{approx}}$

致谢。 L.I.I.G. 谨向 Bernardo Malaca 博士、Lucas Ansia Fernandez 和 Julien Zylberman 博士分别在使用 Deucalion 超级计算机、蒙特卡罗方法和量子态初始化方面进行的富有见地的讨论表示感谢。我们还要感谢 Vadim Karpusenko 博士和 IonQ 为在 IonQ 云平台上开展模拟提供研究积分。本研究得到葡萄牙科学基金会（FCT）2023.16184.ICDT 号资助。本研究在 EUROfusion 联盟框架内开展，该联盟由欧盟通过欧原子能研究与培训计划资助（资助协议编号：101052200 – EUROfusion）。然而，本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧盟委员会的立场。欧盟和欧盟委员会均不对这些观点和意见承担责任。谨以此项工作献给 Nuno Loureiro 教授，以纪念他，并感谢他给予身边每一个人的支持与鼓舞。

参考文献

[1] Breit, G.：《两个光量子的碰撞》。《物理评论》**46**(12), 1087–1091（1934）https://doi.org/10.1103/PhysRev.46.1087[2] MOTZ, J.W., OLSEN, H.A., KOCH, H.W.：《光子产生电子对》。《现代物理评论》**41**(4), 581–639（1969）https://doi.org/10.1103/RevModPhys.41.581。出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08-26[3]KOCH, H.W., MOTZ, J.W.：《韧致辐射截面公式及相关数据》。《现代物理评论》**31**(4), 920–955（1959）https://doi.org/10.1103/RevModPhys.31.920 。出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08-26[4] Fonseca, R.A., Silva, L.O., Tsung, F.S., Decyk, V.K., Lu, W., Ren, C., Mori, W.B., Deng, S., Lee, S., Katsouleas, T., Adam, J.C.：《OSIRIS：用于等离子体加速器建模的三维、全相对论性粒子网格代码》。载于：Sloot,P.M.A., Hoekstra, A.G., Tan, C.J.K., Dongarra, J.J.（编），《计算科学——ICCS 2002》，第342–351页。施普林格，柏林、海德堡（2002）。https://doi.org/10.1007/3-540-47789-6 36[5] Fedeli,L.,Za¨ım,N.,Sainte-Marie, A., Th´evenet, M., Huebl, A., Myers, A., Vay, J.-L., Vincenti, H.：《PICSAR-QED：用于百亿亿次级架构粒子网格代码的蒙特卡罗模块，可模拟强场量子电动力学》。《新物理学杂志》**24**(2), 025009（2022）https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac4ef1 。出版商：IOP 出版社。访问日期：2025-06-02

[6] Shor, P.W.: 《量子计算机上的多项式时间质因数分解与离散对数算法》。《SIAM计算杂志》26(5), 1484–1509（1997）https://doi.org/10.1137/S0097539795293172 。arXiv:quant- ph/9508027。访问日期：2025-08-25[7] Brassard, G., Hoyer, P., Mosca, M., Tapp, A.: 《量子振幅放大与估计》。第305卷，第53–74页（2002）。https://doi.org/10.1090/conm/305/05215 。arXiv:quant-ph/0005055。http://arxiv.org/abs/quant-ph/0005055 访问日期：2025-08-25[8] Nakaji, K.: 《更快速的振幅估计》。《量子信息与计算》20(13&14), 1109–1123（2020）https://doi.org/10.26421/QIC20.13-14-2 。arXiv:2003.02417 [quant-ph]。访问日期：2025-08-25[9]Suzuki, Y., Uno, S., Raymond, R., Tanaka, T., Onodera, T., Yamamoto, N.: 《无相位估计的振幅估计》。《量子信息处理》19(2), 75（2020）https://doi.org/10.1007/s11128-019-2565-2 。arXiv:1904.10246 [quant-ph]。访问日期：2025-08-25[10]Grinko, D., Gacon, J., Zoufal, C., Woerner, S.: 《迭代量子振幅估计》。《npj量子信息》7(1), 1–6（2021）https://doi.org/10.1038/ s41534-021-00379-1 。出版商：自然出版集团。访问日期：2024-04-01[11] Rebentrost, P., Gupt, B., Bromley, T.R.: 《量子计算金融：金融衍生品的蒙特卡洛定价》。《物理评论A》98(2), 022321（2018）https: //doi.org/10.1103/PhysRevA.98.022321 。出版商：美国物理学会。访问日期：2024-03-12[12] Woerner, S., Egger, D.J.: 《量子风险分析》。《npj量子信息》5(1), 1–8（2019）https://doi.org/10.1038/s41534-019-0130-6 。编号：1。出版商：自然出版集团。访问日期：2024-03-01[13] Stamatopoulos, N., Egger, D.J., Sun, Y., Zoufal, C., Iten, R., Shen, N., Woerner, S.: 《使用量子计算机进行期权定价》。《Quantum》4, 291（2020）https: //doi.org/10.22331/q-2020-07-06-291。出版商：VereinzurF¨orderungdesOpen Access Publizierens in den Quantenwissenschaften。访问日期：2024-03-01[14] Agliardi, G., Grossi, M., Pellen, M., Prati, E.: 《基本粒子过程的量子积分》。《物理快报B》832, 137228（2022）https://doi.org/10.1016/ j.physletb.2022.137228 。访问日期：2025-01-06[15] Afik, Y., Fabbri, F., Low, M., Marzola, L., Aguilar-Saavedra, J. A., Altakach, M.M., Asbah, N.A., Bai, Y., Banks, H., Barr, A.J., Bernal, A., Browder, T.E., Caban, P., Casas, J.A., Cheng, K., D´eliot, F., Demina, R., Domenico, A.D., Eck- stein, M., Fabbrichesi, M., Fuks, B., Gabrielli, E., Gon。calves, D., Grabarczyk, R., Grossi, M., Han, T., Hobbs, T.J., Horodecki, P., Howarth, J., Hsu, S.-C., Jiggins, S., Jones, E., Jung, A.W., Knue, A.H., Korn, S., Lagouri, T., Lamba, P., Landi,

G.T., Li, H., Li, Q., Low, I., Maltoni, F., McFayden, J., McGinnis, N., Morales, R.A., Moreno, J.M., Nova, J.R.M.d., Negro, G., Pagani, D., Pelliccioli, G., Pina- monti, M., Pintucci, L., Ravina, B., Ruzi, A., Sakurai, K., Simpson, E., Sioli, M., Su, S., Trifinopoulos, S., Vahsen, S.E., Vallecorsa, S., Vicini, A., Vos, M., Vry- onidou, E., White, C.D., White, M.J.,Wildridge, A.J., Wu, T.A., Zani, L.,Zhang, Y., Zoch, K.：《Quantum》信息与高能物理学相遇：欧洲粒子物理战略更新的输入。Eur. Phys. J. Pl us **140**(9),855(2025) https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-025-06752-9 。arXiv:2504.00086[hep-ph]。访问日期：2025-11-20

[16] Sakata, D., Belov, O., Bordage, M.-C., Emfietzoglou, D., Guatelli, S., Inaniwa, T., Ivanchenko,V., Karamitros, M., Kyriakou, I., Lampe, N., Petrovic, I., Ristic- Fira, A., Shin, W.-G., Incerti, S.：利用 Geant4-DNA 进行全面集成的蒙特卡罗模拟，以评估辐射诱导的 DNA 损伤及其后续修复。《科学报告》**10**(1),20788 (2020) https://doi.org/10.1038/s41598-020-75982-x。出版商：自然出版集团。访问日期：2025-12-30

[17] Allison,J., Amako,K., Apostolakis, J., Arce, P., Asai, M., Aso, T., Bagli, E.,Bagulya, A.,Banerjee, S., Barrand, G., Beck, B.R., Bogdanov, A.G., Brandt, D.,Brown, J.M.C.,Burkhardt, H., Canal, P., Cano-Ott, D., Chauvie,S., Cho,K.,Cirrone, G.A.P., Cooperman, G., Cort´es-Giraldo, M.A., Cosmo, G.,Cuttone, G.,Depaola, G., Desorgher, L., Dong, X., Dotti, A., Elvira, V.D.,Folger, G., Francis,Z.,Galoyan, A., Garnier,L., Gayer, M., Genser,K.L., Grichine, V.M., Guatelli,S., Gu`eye, P., Gumplinger, P., Howard, A.S., H˘rivn´a˘cov´a,I., Hwang, S., Incerti,S.,Ivanchenko,A.,Ivanchenko, V.N., Jones, F.W., Jun, S.Y., Kaitaniemi, P.,Karakatsanis, N.,Karamitros, M., Kelsey, M., Kimura, A., Koi, T., Kurashige,H.,Lechner,A., Lee,S.B., Longo, F., Maire, M., Mancusi, D., Mantero, A.,Mendoza,E., Morgan, B., Murakami, K., Nikitina, T., Pandola, L., Paprocki, P.,Perl, J., Petrovi´c, I., Pia, M.G., Pokorski,W.,Quesada, J.M., Raine, M., Reis,M.A., Ribon, A., Risti´c Fira, A., Romano, F., Russo, G., Santin, G.,Sasaki,T.,Sawkey, D.,Shin, J.I.,Strakovsky, I.I., Taborda, A., Tanaka,S.,Tom´e, B., Toshito, T., Tran, H.N., Truscott, P.R., Urban, L., Uzhinsky, V., Verbeke, J.M., Verderi, M.,Wendt,B.L.,Wenzel, H., Wright, D.H., Wright, D.M., Yamashita, T., Yarba, J., Yoshida, H.：Geant4 的最新进展。《核仪器与方法物理研究A辑：加速器、谱仪、探测器及相关设备》**835**, 186–225 (2016) https://doi.org/10.1016/j.nima.2016.06.125。访问日期：2025-12-30

[18] Nikjoo S. Uehara W. E. Wilson M. Hoshi D. T. Goodhead, H.：《辐射生物学中的径迹结构：理论与应用》。国际辐射生物学杂志 **73(4)**, 355–364（1998）https://doi.org/10.1080/095530098142176 。出版商：泰勒与弗朗西斯出版集团。访问日期：2025-12-30

[19] Hartin, A.：《强场量子电动力学中的蒙特卡罗挑战》。arXiv。arXiv:2509。05119 [hep-ph]（2025）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.05119。http://arxiv.org/abs/2509.05119 访问日期：2025-09-22

[20]Stevens，A.：《蒙特卡罗模拟：工程师和科学家入门》（2023）。
https://www.routledge.com/Monte-Carlo-Simulation-An-Introduction-for-Engineers-and-Scientists/Stevens/p/book/9781032280806 访问日期：2025-09-22

[21] Jackel, P.：《金融中的蒙特卡罗方法》 |Wiley（2002）。
https://www.wiley.com/en-us/Monte+Carlo+Methods+in+Finance-p-9780471497417 访问日期：2025-09-22

[22] Piran, T.：伽马射线暴的物理学。《现代物理评论》**76(4)**, 1143–1210（2005）
https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.1143

[23] Timokhin, A.N.：中子星磁层中随时间变化的对产生级联——I. 无中子星表面粒子供给时的极冠级联动力学。《皇家天文学会月刊》**408(4)**, 2092–2114（2010）
https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17286.x 。访问日期：2025-09-22

[24] Ruffini, R., Vereshchagin,G., Xue, S.-S.：物理学与天体物理学中的正负电子对：从重原子核到黑洞。《物理报告》**487**(1), 1–140(2010)https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.10.004 。访问日期：2025-09-22

[25] Papadopoulos, D.N., Zou, J.P., Le Blanc, C., Ranc, L., Druon, F., Martin, L., Fr´eneaux, A., Beluze, A., Lebas, N., Chabanis, M., Bonnin, C., Accary, J.B., Garrec, B.L., Mathieu, F., Audebert, P.：Apollon 激光器 1 PW 光束线的首次调试结果。载于：2019 年激光与电子光学会议（CLEO），第 1–2 页（2019）。
https://doi.org/10.1364/CLEO SI.2019.STu3E.4。ISSN：2160-8989。
https://ieeexplore.ieee.org/document/8750066 访问日期：2025-08-26

[26] Bromage, J.,Bahk, S.-W., Begishev, I.A., Dorrer, C., Guardalben, M.J., Hoffman, B.N., Oliver, J.B., Roides, R.G., Schiesser, E.M., Iii, M.J.S., Spilatro, M., Webb, B., Weiner, D., Zuegel, J.D.：超强全光参量啁啾脉冲放大系统的技术开发。《高功率激光科学与工程》**7**，4 (2019)https://doi.org/10.1017/hpl.2018.64 。访问日期：2025-08-26

[27] Shaw, J.L., Romo-Gonzalez, M.A., Lemos, N., King, P.M., Bruhaug, G., Miller, K.G., Dorrer, C., Kruschwitz, B., Waxer, L., Williams, G.J., Ambat, M.V., McKie, M.M., Sinclair, M.D., Mori, W.B., Joshi, C., Chen, H., Palastro, J.P., Albert, F., Froula, D.H.：微库仑（0.7 ± $$\frac{0.4}{0.2}$$ 微库仑）OMEGA EP上的激光等离子体加速器。《科学报告》**11**(1),7498 (2021)https://doi.org/10.1038/s41598-021-86523-5 。出版方：自然出版集团。访问日期：2024-09-27

[28] Babjak, R., Willingale, L., Arefiev, A., Vranic, M.：《欠密等离子体中多拍瓦激光器驱动的直接激光加速：实现高电荷吉电子伏级电子束团的途径。《物理评论快报》**132**(12), 125001 (2024)
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.132.125001 。出版商：美国物理学会。访问日期

[29] Babjak, R., Martinez, B., Krus, M., Vranic, M.: 不同等离子体密度分布中的直接激光加速。《新物理学杂志》26(9), 093002 (2024) https://doi.org/10.1088/1367-2630/ad7280 . 出版商：IOP 出版社。访问日期：2025-08-27[30] Maslarova, D., Martinez, B., Vranic, M.: 将非线性 Breit–Wheeler 过程产生的正电子辐射主导注入等离子体通道。《等离子体物理》30(9), 093107 (2023) https://doi.org/10.1063/5.0160121 . 访问日期：2025-08-27[31] Martinez, B., Barbosa, B., Vranic, M.: 单级正电子产生与直接激光加速。《物理评论：加速器与束流》26(1), 011301 (2023) https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.26.011301 . 出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08-27[32] Martinez, B., Babjak, R., Vranic, M.: 激光-通道相互作用中 Bethe-Heitler 正电子的直接激光加速。《物理评论 E》111(3), 035203 (2025) https: //doi.org/10.1103/PhysRevE.111.035203 . 出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08-27[33] Mercuri-Baron, A., Grech, M., Niel, F., Grassi, A., Lobet, M., Di Piazza, A., Riconda, C.: 激光时空形状对 Breit–Wheeler 对产生的影响。《新物理学杂志》23(8), 085006 (2021) https://doi.org/10.1088/1367-2630/ ac1975 . 出版商：IOP 出版社。访问日期：2025-08-27[34] Pouyez, M., Mironov, A.A., Grismayer, T., Mercuri-Baron, A., Perez, F., Vranic, M., Riconda, C., Grech, M.: 多拍瓦激光设施中电子种子和光子种子电磁簇射的多重性。《物理评论 E》110(6), 065208 (2024) https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.065208 . 出版商：美国物理学会。访问日期：2025-12-30[35] Pouyez, M., Nicotera, G., Galbiati, M., Grismayer, T., Lancia, L., Riconda, C., Grech, M.: 物质中电磁簇射产生的正负电子对等离子体的性质。《Communications Physics》(2025) https://doi.org/10.1038/s42005-025-02449-8 . 出版商：自然出版集团。访问日期：2025-12-30[36] Grismayer, T., Vranic, M., Martins, J.L., Fonseca, R.A., Silva, L.O.: 对向传播激光脉冲中的种子量子电动力学级联。《物理评论 E》95(2), 023210 (2017) https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.023210 . 出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08-27[37] Auer, R., Dupont, A., Gambacorta, L., Park, J.S., Takahashi, K., Valko, A.: 量子计算与金融体系：机遇与风险 (2024)。https://www.bis.org/publ/bppdf/bispap149.htm 访问日期：2025-10-22[38] Harrow, A.W., Hassidim, A., Lloyd, S.: 求解线性

方程组的量子算法。《物理评论快报》103(15), 150502 (2009) https://doi.org/ 10.1103/PhysRevLett.103.150502 . arXiv:0811.3171 [quant-ph]。访问日期：2025- 10-22[39]Coppersmith, D.: 一种适用于量子因数分解的近似傅里叶变换。arXiv。arXiv:quant-ph/0201067 (2002)。https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0201067 . http://arxiv.org/abs/quant-ph/0201067 访问日期：2025-10-22[40] Childs, A.M., Maslov, D., Nam, Y., Ross, N.J., Su, Y.: 向首次实现具有量子加速的量子模拟迈进。《美国国家科学院院刊》115(38), 9456–9461 (2018) https://doi.org/10.1073/pnas.1801723115 . 出版商：《美国国家科学院院刊》。访问日期：2025-12-29[41]Nielsen, M.A., Chuang, I.L.:《量子计算与量子信息：十周年纪念版》。ISBN：9780511976667 出版商：剑桥大学出版社 (2010)。https://doi. org/10.1017/CBO9780511976667 . https://www.cambridge.org/highereducation/books/quantum-computation-and-quantum-information/01E10196D0A682A6AEFFEA52D53BE9AE 访问日期：2025-09-29[42]Hidalgo, L., Draper, P.: 强场量子电动力学的量子模拟。《物理评论D》109(7), 076004 (2024) https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.076004 . 出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08-21[43] Amaro, O., Gamiz, L.I.I., Vranic, M.: 变分量子模拟福克-普朗克方程并将其应用于量子辐射反作用。《等离子体物理学杂志》91(4), 122 (2025) https://doi.org/10.1017/S0022377825100652 . 访问日期：2025-08-25[44] Draper, P., Hidalgo, L., Ilderton, A.: 树级之外强场量子电动力学的哈密顿量截断与量子模拟。arXiv。arXiv:2509.15495 [hep-ph](2025)。https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.15495 . http://arxiv.org/abs/2509. 15495 访问日期：2025-10-22[45] Ribeyre, X.: 高强度激光产生的 γ射线束碰撞中的对产生。《物理评论 E》93(1) (2016) https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.013201[46] Ritus, V.I.: 基本粒子与强电磁场相互作用的量子效应。《俄罗斯激光研究杂志》6(5), 497–617 (1985) https://doi. org/10.1007/BF01120220 . 访问日期：2025-09-22[47] Vodopiyanov, I.B., Dwyer, J.R., Cramer, E.S., Lucia, R.J., Rassoul, H.K.: 直接电子-正电子对产生对相对论反馈率的影响。《地球物理研究杂志：空间物理学》120(1), 800–806 (2015) https: //doi.org/10.1002/2014JA020415 . 访问日期：2025-11-05

[48] Burke, D.L., Field, R.C., Horton-Smith, G., Spencer, J.E., Walz, D., Berridge, S.C., Bugg, W.M., Shmakov, K., Weidemann, A.W., Bula, C., McDonald, K.T., Prebys, E.J., Bamber, C., Boege, S.J., Koffas, T., Kotseroglou, T., Melissinos, A.C., Meyerhofer, D.D., Reis, D.A., Ragg, W.：多光子光—光散射中的正电子产生。《物理评论快报》79(9)，1626–1629（1997）https: // doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.1626 . 出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08-26[49]Lejarza, J.J.M.d., Grossi, M., Cieri, L., Rodrigo, G.：量子傅里叶迭代振幅估计。载于：2023年IEEE量子计算与工程国际会议（QCE），第571–579页（2023）。https://doi.org/10.1109/QCE57702.2023.00071 . arXiv:2305.01686 [quant-ph]. http://arxiv.org/abs/2305.01686 访问日期：2025-01-06[50] Peruzzo, A., McClean, J., Shadbolt, P., Yung, M.-H., Zhou, X.-Q., Love, P.J., Aspuru-Guzik, A., O'Brien, J.L.：光子量子处理器上的变分本征值求解器。Nat Commun 5(1), 4213（2014）https://doi.org/10.1038/ ncomms5213 . 出版商：自然出版集团。访问日期：2025-08-27[51] Wang, S., Wang, P., Li, G., Zhao, S., Zhao, D., Wang, J., Fang, Y., Dou, M., Gu, Y., Wu, Y.-C., Guo, G.-P.：用于求解金融投资组合优化问题的线性深度问题启发式拟设变分量子本征求解器。《中国科学：信息科学》68(8), 180504（2025）https://doi.org/10.1007/s11432-024-4185-1 . 访问日期：2025-08-27[52] Rebentrost, P., Lloyd, S.：《量子计算金融：投资组合优化的量子算法》。K¨unstl Intell 38(4)，327–338（2024）https://doi.org/ 10.1007/s13218-024-00870-9 . 访问日期：2025-08-27[53] Zylberman, J., Debbasch, F.：利用沃尔什级数高效制备量子态。《物理评论A》109(4)，042401（2024）https://doi.org/10.1103/ PhysRevA.109.042401 . 出版商：美国物理学会。访问日期：2025-08- 26[54] Feniou, C., Adjoua, O., Claudon, B., Zylberman, J., Giner, E., Piquemal, J.-P.：强关联系统的稀疏量子态制备。《物理化学快报》15(11)，3197–3205（2024）https://doi.org/10.1021/ acs.jpclett.3c03159 . 出版商：美国化学会。访问日期：2025-08-26[55] Moosa, M., Watts, T.W., Chen, Y., Sarma, A., McMahon, P.L.：用于加载任意函数傅里叶近似的线性深度量子电路。《量子科学与技术》9(1)，015002（2024）https://doi.org/10.1088/ 2058-9565/acfc62 . arXiv:2302.03888 [quant-ph]. 访问日期：2025-08-25[56] Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T.E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., Walt, S.J., Brett, M., Wilson, J., Millman, K.J., Mayorov, N., Nelson, A.R.J., Jones, E., Kern, R.,

Larson, E., Carey, C.J., Polat, I., Feng, Y., Moore, E.W., VanderPlas, J., Lax- alde, D., Perktold, J., Cimrman, R., Henriksen, I., Quintero, E.A., Harris, C.R., Archibald, A.M., Ribeiro, A.H., Pedregosa, F., Mulbregt, P.：SciPy 1.0：用于Python科学计算的基础算法。《自然·方法》**17**(3)，261–272（2020）https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2 。出版商：自然出版集团。访问日期：2025-08-25

[57] Javadi-Abhari, A., Treinish, M., Krsulich, K., Wood, C.J., Lishman, J., Gacon, J., Martiel, S., Nation, P.D., Bishop, L.S., Cross, A.W., Johnson, B.R., Gam- betta, J.M.：《使用Qiskit进行量子计算》。arXiv. arXiv:2405.08810 [quant-ph](2024)。https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.08810 。http://arxiv.org/abs/2405.08810 访问日期：2025-08-25