arXiv:2601.03960v1 [math.OA] 7 Jan 2026

李群胚上 0 阶伪微分算子的正合序列

Mahsa Naraghi

摘要

与一个李群胚相关联的有两个 C^*-代数：全代数和约化代数。相应的 0 阶伪微分演算分别导出它们的乘子代数。我们证明，这两个相关的冠代数都等于自然的（交换）主符号代数。

2020年数学主题分类： 58J40,47L80,22A22**关键词：** 伪微分算子、李群胚、乘子代数、全 C^*-代数、约化 C^*-代数

引言

光滑紧流形上的伪微分算子正合序列 M 如下:

$$0 \to \mathcal{K} \to \Psi^0(M) \xrightarrow{\sigma} C(S^*M) \to 0$$

其中， $\mathcal{K}$ 是 $L^2(M)$上的紧算子代数， $\Psi^0(M)$ 是阶为 $\leqslant 0$ 的伪微分算子代数的闭包， σ 是主符号映射，其值取自 M的余切丛 T^*M的半直线上的连续函数代数。这个正合序列在指标理论中至关重要。

在更奇异的情形下，例如带边界或角点的流形、覆盖空间、叶状结构等，通常会引入一个李群胚来考虑这些奇异性。阿兰·孔涅（[2]）引入了叶状结构的整体群胚的伪微分演算 $(M,\ F)$ 并建立了一个正合序列

$$0 \to C^*(M,F) \to \Psi^0(M,F) \xrightarrow{\sigma} C(S^*F) \to 0.$$

这一构造被推广到任意李群胚（[6, 8]）。 [8], 文中概述了群胚上伪微分演算的相应正合序列 G ，其形式如下:

$$0 \to C^*(G) \to \Psi^0(G) \xrightarrow{\sigma} C(S^*A_G) \to 0.$$

事实上，对于一般的李群胚 G，至少存在两个自然的群胚 C^*-代数：完整群胚 C^*-代数 $C^*(G)$ 和约化群胚 $C_r^*(G)$-代数。Connes 在叶状结构中使用了约化代数，而 Nistor-Weinstein-Xu 在 [8]中对二者均作了表述。

本文旨在借鉴 [4] 中概述的方法，为约化和完整的 C^*-代数给出这一正合序列的完整证明。

该证明包括以下步骤。首先证明

i. 负阶伪微分算子定义了 $C^*(G)$ 的元素（命题 2.1）；ii. 0 阶伪微分算子定义了 $C^*(G)$ 的乘子（命题 2.2）；这给出了一个态射 $C(S^*A_G) \to \Psi^*(G)/C^*(G)$。iii. 将态射 $\lambda:\ C^*(G) \to C_r^*(G)$ 扩展到乘子，得到一个态射 $\Psi^*(G)/C^*(G) \to \Psi_r^*(G)/C_r^*(G)$。iv. 最后，对于每个元素 $(x,\ \xi) \in S^*A_G$ 我们构造 (ϕ_n)的一列 $L^2(G_x)$ 中的单位向量，使得 $\langle \phi_n,\ \lambda_x(P)(\phi_n)\rangle \to \sigma(P)(x,\ \xi)$ 若 P是一个 0 阶伪微分算子，并且 $\langle \phi_n,\ \lambda_x(P)(\phi_n)\rangle \to 0$ 若$P \in C^*(G)$。这给出了一个态射 $\Psi_r^*(G)/C_r^*(G) \to C(S^*A_G)$。

v. 考察这些态射在稠密集零阶伪微分算子上的作用，可知它们全都是同构。

1 预备知识

在第一节中，我们回顾关于李群胚及其 C^*-代数的一些事实，并列出后文将使用的关于伪微分演算的事实。

1.1 李群胚

我们在此回顾主要定义，并统一李群胚相关的记号。有几本书和综述论文详细介绍了这些内容——参见例如 [5]。

定义 1.1。 群胚 G 是一个带有逆元的小范畴。群胚的对象集记为 $G^{(0)}$，态射集记为 G。每个态射 $\gamma \in G$ 都有一个源对象 $s(\gamma) \in G^{(0)}$ 和一个目标对象 $r(\gamma) \in G^{(0)}$。对每个对象 $x \in G^{(0)}$，都指定一个单位态射 1_x，且映射 $u: x \mapsto 1_x$ 同时是 r 和 s 的截面（即 $r(1_x) = s(1_x) = x$）。可复合态射集为 $G^{(2)} = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in G \times G; s(\gamma_1) = r(\gamma_2)\}$。态射的复合是一个映射 $m: G^{(2)} \to G, (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1\gamma_2$，满足

- $1_{r(\gamma)}\gamma = \gamma 1_{s(\gamma)} = \gamma$ 对于每个 $\gamma \in G$;
- $s(\gamma_1\gamma_2) = s(\gamma_2)$ 对于所有 $(\gamma_1, \gamma_2) \in G^{(2)}$，以及 $r(\gamma_1\gamma_2) = r(\gamma_1)$；
- $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3) = (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ 对于满足 $s(\gamma_1) = r(\gamma_2)$ 且 $s(\gamma_2) = r(\gamma_3)$ 的所有 γ_1、γ_2、$\gamma_3 \in G$。
- 每个 $\gamma \in G$ 都有一个逆元 γ^{-1}，使得 $s(\gamma^{-1}) = r(\gamma)$、$r(\gamma^{-1}) = s(\gamma)$ 和 $\gamma^{-1}\gamma = 1_{s(\gamma)}$、$\gamma\gamma^{-1} = 1_{r(\gamma)}$。

我们通常通过单位映射$x \mapsto 1_x$将 $G^{(0)}$ 与 G 的一个子集等同起来。我们写作 $G \overset{r}{\rightrightarrows} G^{(0)}$，或简写为 $G \rightrightarrows G^{(0)}$，表示 G 是一个群胚，其对象集合为 s。

定义 1.2. 李群胚是一种群胚 $G \rightrightarrows M$，其 G 和 M 上带有光滑流形结构，并且 $s, r: G \to M$ 是光滑下沉，乘法是光滑映射，且单位映射是光滑的。

由于 s 和 r 是下沉，$G^{(2)} = (s \times r)^{-1}(\Delta(M)$ 是 $G \times G$ 的嵌入子流形——这使得“m 是光滑的”这一说法有了意义。

单位映射 u 是浸入，且 M 是G的嵌入子流形。

逆映射 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ 是微分同胚。

我们用 N 表示包含映射 $M \subset G$ 的法丛：对于 $x \in M$，有 $N_x = T_xG/T_xM$。这个丛有许多与此处无关的性质。特别是，这个丛的光滑截面空间就是 G 的李代数胚（见 [5]）。

1.2 C^*李群胚的 C°-代数。(参见 [2], [10]。)

卷积代数。设 G 是一个李群胚。在由 $C_c^\infty(G)$ 定义的紧支撑光滑函数空间上，有一种自然的卷积运算，其定义为 $f_1 \star f_2(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2)$。

为了进行这种卷积乘积，我们需要在集合 $m^{-1}(\{\gamma\}) = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in G^{(2)};$ $\gamma_1\gamma_2 = \gamma\}$ 上定义一个光滑的测度族。注意，映射$(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1$ (分别是 $(\gamma_1,$ $\gamma_2) \mapsto \gamma_1$)是 $m^{-1}(\{\gamma\})$与 $G^{r(\gamma)}$ （分别是 $G_{s(\gamma)}$）之间的微分同胚。光滑左 Haar 系统提供了这样的测度：它是定义在流形 $G^x(x \in M)$上的勒贝格测度光滑族，并且在微分同胚 L_γ：$\gamma_1 \mapsto \gamma\gamma_1$ （ $G^{s(\gamma)}$ 与 $G^{sr(\gamma)}$之间）作用下保持不变。

阿兰·孔涅 [2]为这种卷积给出了一个优美且规范的含义，方法是使用自然半密度丛的截面：我们用半密度丛 $\Omega^{1/2}(\ker ds \times \ker\ dr)$的光滑紧支集截面替代函数。有关这一构造的详细信息，请参见 [3, 7] 。

采用自然光滑的测度选择，或使用半密度，卷积都是结合的。

对合 $f^*(\gamma) = f(\gamma^{-1})$使 $\overline{C_c^\infty(G)}$成为一个 *-代数。

全 C*-代数

定义 1.3。李群胚 G 在复希尔伯特空间 H 上的一个表示，是一个 $*$-代数同态 Φ: $C_c(G) \to B(H)$，它相对于自然的归纳极限拓扑是有界的。

事实证明（参见 [10]），$\Phi(f)$ 的算子范数可以通过一个 L^1-型估计来控制，因此，对于每个 $f \in C_c(G)$，对所有可能的连续$*$-表示 Φ 取上确界都是有限的。

定义 1.4。$f \in C_c^\infty(G)$的最大范数记为 $\|\cdot\|_{\max}$，是对 G的所有连续表示Φ的算子范数 $\|\Phi(f)\|$ 取上确界所得。赋予 $C_c^\infty(G)$ 此范数后得到的完备化称为 G 的最大C^*-代数，记作 $C^*_{max}(G)$。下文中，我们将其记为 $C^*(G)$。

约化 C^*-代数。对于每个 $x \in M$，我们都可以在希尔伯特空间 $L^2(G^x)$上表示 $*$-代数 $C_c^\infty(G)$。

对于 $f \in C_c(G)$ 和 $\xi \in C_c^\infty(G^x)$，我们可以构造由 $(f \star \xi)(\gamma) = \int_{m^{-1}(\{\gamma\})} f(\gamma_1)\xi(\gamma_2)$定义的 $f \star \xi \in C_c^\infty(G^x)$。

通过这种方式，我们得到一个 $*$-态射 $\lambda^x : C_c(G) \to \mathcal{L}(L^2(G^x))$。

定义 1.5。 $f \in C_c(G)$ 的约化范数定义为 $\|f\|_r$ =上确界 $\|\lambda^x(f)\|$。关于 $\| \ \|_r$ 对 $C_c(G)$ 进行完备化，得到 G 的约化C^*-代数，记作 $C_r^*(G)$。

注 1.6。• 对每个 $f \in C_c^\infty(G)$, $\|f\|_r \leqslant \|f\|_{\max}$。

- $C_c^\infty(G)$ 上的恒等映射诱导出一个从 $C^*(G)$ 到 $C_r^*(G)$的满射 $*$-同态。

1.3 李群胚上的伪微分算子

每个李群胚都关联着一种伪微分演算，它推广了流形上的伪微分演算。这种演算最初由 Connes 针对叶状结构引入（[2]），随后由多位作者加以推广（[6, 8].....）。

这里我们只回顾这种演算中的几个对我们有用的事实。关于这种演算的详细介绍可见 [7, 8, 12]。

设 $G \rightrightarrows M$ 是一个李群胚。回忆一下，我们用 $N = T_M G/TM$ 表示子流形 M 在 G 中的法丛， $p : T_M G \to N$ 表示商映射， N^* 表示其对偶丛。

- 用 $\Sigma_c^m(N^*)$ 表示齐次紧支撑符号空间：它是由 $N^* \backslash M$ 上光滑的正 m- 齐次函数组成的空间，这些函数在某个 $q^{-1}(K)$ 之外为零，其中 K 是 M 的紧子集，且 $q : n^* \to M$ 是结构映射，即光滑函数$f(x, \xi)$满足 $x \in M, \xi \in N_x^*, \ \xi \neq 0, f(x, \lambda\xi) = \lambda^m f(x, \xi)$对每个 $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$均成立，并且 $f(x, \xi) = 0$若 $x \notin K$。

- 在代数 $C_c^\infty(G)$ 的乘子代数中，对于每个$m \in \mathbb{Z}$，都有一个空间 $\mathcal{P}_c^m(G)$，称为“阶为 m的光滑紧支集伪微分算子”空间。该空间 $\mathcal{P}_c^m(G)$ 在 $P \mapsto P^*$下是闭的。

- 对于每个 $m \in \mathbb{Z}$，都有 $\mathcal{P}_c^{m-1}(G) \subset \mathcal{P}_c^m(G)$。此外，还存在一个（主）符号映射，它是一个线性映射 $\sigma_m : \mathcal{P}_c^m(G) \to \Sigma_c^m(N^*)$，且为满射，其核为 $\mathcal{P}_c^{m-1}(G)$。

- 对于 m, $n \in \mathbb{Z}$, $P \in \mathcal{P}_c^m(G)$ 和 $Q \in \mathcal{P}_c^n(G)$, 有 $PQ \in \mathcal{P}_c^{m+n}(G)$和 $\sigma_{m+n}(PQ) = \sigma_m(P)\sigma_n(Q)$, 并且 $\sigma_m(P^*) = \sigma_m(P)$。
- $\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_c^m(G) = C_c^\infty(G)$。

- 对于每个 $a \in C^\infty(M)$, 通过令$(M_a f)(\gamma) = a(r(\gamma))f(\gamma)$和 $(fM_a)(\gamma) = f(\gamma)a(s(\gamma))$来定义 $C_c^\infty(G)$ 的乘子 M_a。如果 $a \in C_c^\infty(M)$, 则 $M_a \in \mathcal{P}_c^0(G)$, 并且 $\sigma_0(M_a)(x, \xi) = a(x)$（对于每个 $x \in M$和$\xi \in N_x\backslash\{0\}$）。

为构造 $\mathcal{P}_c^m(G)$，按如下方式进行:

设 $\theta : U' \to U$ 是一个指数映射，它是从 N 的零截面的一个开邻域 $U' \subset N$ 到 G中 M 的一个开邻域的微分同胚，并满足

- $\theta(x, 0) = x$对于所有 $x \in M$和 $r(\theta(x, X)) = x$对于 $(x, X) \in U'$。

- $p_x(\mathrm{d}\theta_{(x,\,0)}(X)) = X$ 对所有 $x \in M$ 和 $X \in N_x$ 均成立，其中 p: $T_M G \to N$ 是商映射。

定义 1.7。元素 $P \in \mathcal{P}_c^m(G)$ 是$*$-代数 $C_c^\infty(G)$ 的一个乘子 $P = P_0 + \kappa$，其中 $\kappa \in C_c^\infty(G)$，且乘以 P_0 由以下形式的表达式给出:

$$(P_0 \star f)(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{N^*_{r(\gamma)}} \left(\int_{G_{s(\gamma)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \theta^{-1}(\gamma\eta^{-1}),\xi\rangle}\, a\big(r(\gamma),\xi\big)\, \chi(\gamma\eta^{-1})\, f(\eta)\, \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi,$$

其中 χ 是一个截断函数，对于 $\eta \notin U$ 满足 $\chi(\eta) = 0$，并且在 U 中 M 的一个邻域内，对于 η 满足 $\chi(\eta) = 1$； N^* 表示 N 的对偶丛， $x = r(\gamma)$、n = 维数 N_x，而 $a \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_{m-k}$ 是一个 m 阶的经典符号（其中$a_j(x, \xi)$ 关于 ξ 是 j 阶正齐次的；关于符号类的更多细节，参见例如 *[11]*）。

有 $\sigma_m(P) = a_m$。

2 0 阶伪微分算子的正合序列

现在我们来介绍本文的主要构造。

2.1 负阶伪微分算子

命题 2.1. 对于 $m<0$，我们有 $\mathcal{P}_c^m(G)\subset C^*(G)$。更确切地说，存在一个代数同态 $j:\ \mathcal{P}_c^m(G)\to C^*(G)$，其在$C_c^\infty(G)$ 上的限制是将 $C_c(G)$ 包含映射到 G的 C^*-代数中的映射。

证明。记 n 为丛 N的秩。设 $P=P_0+\kappa\in\mathcal{P}_c^m(G)$，其中 P_0 与一个阶为 m 且满足 $m<-n$的经典符号 a 相关联。根据经典符号的定义，映射 $\xi\to\|\xi\|^{-m}a(x,\ \xi)$ 在 N_x上有界，因此下面的映射 g作为可积函数的“傅里叶变换”是连续的。 $g(\eta)=\frac{\chi(\eta)}{(2\pi)^n}\int_{N^*_{r(\eta)}G}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\theta^{-1}(\eta),\ \xi\rangle}a\big(r(\eta),\ \xi\big)\,)\,\mathrm{d}\xi$。

因此我们有 $g\in C_c(G)$ 和 $(P_0\star f)=g\star f$，$f\star P_0=f\star g$。于是可以令 $j(P_0)=j(g)$。

特别地，对于 $f\in C_c^\infty(G)$，我们有 $\|P\star f\|_{C^*(G)}\leqslant\|g\|_{C^*(G)}\|f\|_{C^*(G)}$。

现在，若 $m<-n/2,$，由于 $j(P^*P)\in C^*(G)$，可得对每个 $f\in C_c^\infty(G)$，

$$\|P\star f\|^2_{C^*(G)}=\|f^*\star P^*\star P\star f\|_{C^*(G)}\leqslant\|f^*\|_{C^*(G)}\|P^*P\|_{C^*(G)}\|f\|_{C^*(G)},$$

因此 P可扩张为 $C^*(G)$的左乘子（同理也可扩张为右乘子）$j(P)$。但由于 $j(P)^*j(P)=j(P^*P)\in C^*(G)$，我们有 $j(P)\in C^*(G)$。

通过归纳法可得，若 $2^km<-n$，则 $j(P)\in C^*(G)$。 □

2.2 阶0伪微分算子是乘子

注意，代数 $\Sigma_c^0(N^*)$与代数 $C_c^\infty(S^*N)$同构，后者是定义在 N^*中半直线空间 S^*N 上的紧支集光滑函数代数。

命题 2.2。设 $G\rightrightarrows M$ 是一个李群胚，且 $P\in\mathcal{P}_{0,c}(G)$。令$\sigma_0(P)\in C_0(S^*N)$表示 P的主符号，

i. P 是 $C^*(G)$的乘子；

ii. $\|P\|_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)}\leqslant\|\sigma_0(P)\|_\infty$。

证明。映射 $\sigma_0(P)$ 是有界的，因此将 P 除以一个常数后，我们可以假设 $\|\sigma_0(P)\|_\infty\leqslant 1$。

设 $t\in[0,1)$。设 $a\in C_c^\infty(M)$为一个非负函数，使得$\|a\|_\infty=1$，并且当 $\sigma_0(P)(x,\xi)\neq 0$时 $a(x)=1$。

于是，映射 $b\colon (x,\xi)\mapsto a(x)\sqrt{1-|t\sigma(P)(x,\xi)|^2}$是定义在 S^*N上的一个紧支集光滑函数，因此是一个 0 阶伪微分算子 Q的主符号。

于是， $\sigma_0(t^2P^*P+Q^*Q)=a^2$使得 $M_a^2-(t^2P^*P+Q^*Q)\in\mathcal{P}_c^{-1}(G)\subset C^*(G)$。因此， $(t^2P^*P+Q^*Q)$ 是一个乘子。

对于 $f\in C_c^\infty(G)$, 我们有（在 $C^*(G)$中） $\|tPf\|^2=t^2\|f^*P^*Pf\|\leqslant\|f^*(t^2P^*P+Q^*Q)f\|\leqslant\|(t^2P^*P+Q^*Q)\|\|f\|^2$。

同理， P是一个右乘子（或者 P^* 是一个左乘子）。因此$P\in\mathcal{M}(C^*(G))$。

这也给出了如下的范数等式

$$\|t^2P^*P+Q^*Q\|_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)}=\|M_a^2\|_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)}=\|a\|_\infty^2=1.$$

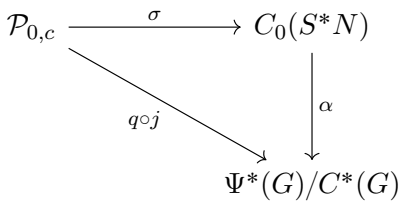
因此，由正性可知，

$$\begin{aligned}\|tP\|^2_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)}&=\|t^2P^*P\|_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)}\\&\leqslant\|t^2P^*P+Q^*Q\|_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)}\\&\leqslant 1.\end{aligned}$$

这对每个 $t\in[0,\ 1)$都成立，因此我们得到 $\|P\|_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)}\leqslant 1$。 □

由此得到以下命题。

命题 2.3。令 $\Psi^*(G)$ 表示 $\mathcal{P}_{0,c}$ 在 $\mathcal{M}(C^*(G))$中的闭包。存在唯一的 C^*-态射 $\alpha:\ C_0(S^*N)\to\Psi^*(G)/C^*(G)$ ，使得图表



交换，其中 j 表示 $\mathcal{P}_{0,c}$ 在 $\mathcal{M}(C^*(G))$ 中的典范嵌入，而$q:\ \Psi^*(G)\to\Psi^*(G)/C^*(G)$ 表示商映射。

证明。我们知道，映射 $\sigma\colon\mathcal{P}_{0,c}\to\Sigma_c^0(N^*)\simeq C_c^\infty(S^*N)$是满射，且其核为 $\mathcal{P}_{-1,c}$，因此若 $\sigma(P_1)=\sigma(P_2)$, 则 $j(P_1-P_2)\in C^*(G)$ 所以$q\circ j(P_1)=q\circ j(P_2)$。利用前一个命题以及 $C_c^\infty(S^*N)$ 在 $C_0(S^*N)$中的稠密性即可得出结论。 □

2.3 乘子的扩张

以下结果是经典结论（参见例如 [1, 9]）。

命题 2.4。设 f： $A \to B$ 是 C^*-代数的满射态射。~则 f 唯一地延拓为一个 $*$-同态 f： $\mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$, 从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} B & \longrightarrow & \mathcal{M}(B) & \xrightarrow{q_B} & \mathcal{M}(B)/B \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{f}} \\ A & \longrightarrow & \mathcal{M}(A) & \xrightarrow{q_A} & \mathcal{M}(A)/A \end{array}$$

记 j_r： $\mathcal{P}_{0,\ c} \to \mathcal{M}(C_r^*(G))$ 为 j 与典范态射 λ： $C^*(G) \to C_r^*(G)$在乘子上的延拓的复合。它是 $\mathcal{P}_{0,\ c}$ 上 $C_c^\infty(G) \subset C_r^*(G)$这一包含映射的唯一延拓。

~若 $P \in \mathcal{P}_{0,\ c}$则 $\lambda j(P) = j_r(P)$。下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{0,c} & \xrightarrow{\ j\ } & \mathcal{M}(C^*(G)) \\ & {\scriptstyle j_r}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\lambda}} \\ & & \mathcal{M}(C_r^*(G)) \end{array}$$

根据定义， $\Psi^*(G)$ （分别 $\Psi_r^*(G)$）是 $j(\mathcal{P}_{0,\ c})$ 在 $\mathcal{M}(C^*(G))$（分别 $\mathcal{M}(C_r^*(G))$）中的闭包。因此，上述图表蕴含了一个态射的存在

$$\overline{\lambda} : \Psi^*(G)/C^*(G) \longrightarrow \Psi_r^*(G)/C_r^*(G),$$

使得 $\lambda \circ \overline{q} \circ j = q_r \circ j_r$。

2.4 主符号的逼近

以下命题给出了我们主要结果证明的最后一步。

命题 2.5。设 $G \rightrightarrows M$ 为李群胚。设 $x \in M$ 和 $\xi \in T_x^*M \backslash \{0\}$。记 ℓ 为半直线 $\mathbb{R}_+^*\xi$。存在一个单位向量序列 $\phi_n \in L^2(G_x)$，使得对于每个 $P \in \mathcal{P}_{0,\ c}$，我们都有

$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi_n | \lambda_x(P) \phi_n \rangle = \sigma(P)(x, \ell).$$

我们将选取 ϕ_n ，使其集中在 x附近，且其微分集中在 ℓ附近。

首先需要满足 $\lim_{n\to\infty}\langle\phi_n|\lambda_x(f)\phi_n\rangle = 0$ if $f \in C_c^\infty G)$。这将由下面的引理得到，该引理表明，当$f \in C_r^* G)$时这一结论仍然成立。

引理 2.6. 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(G_x)$ 中的一个单位向量序列，其紧支集为 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，且其测度趋于0。若 $P \in C_r^*(G)$ ，则$\lim_{n\to\infty}\langle f_n|\lambda_x(P)f_n\rangle = 0$，其中 λ_x : $C_r^*(G) \to B(L^2(G_x))$。

证明。 设 $K \in C_c^\infty(G)$。假设 $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$的示性函数序列，则，

$$\langle f_n \,|\, \lambda_x(K) f_n\rangle = \int_{G_x\times G_x} \overline{f_n(\gamma_1)} K(\gamma_1\gamma_2^{-1}) f_n(\gamma_2)\chi_n(\gamma_1)\chi_n(\gamma_2)\mathrm{d}\gamma_1\mathrm{d}\gamma_2.$$

令 $K'(\gamma_1,\ \gamma_2) = K(\gamma_1\gamma_2^{-1})\chi_0(\gamma_1)\chi_0(\gamma_2)$ ，我们有

$$|\langle f_n \,|\, \lambda_x(K) f_n\rangle| \leqslant \|f_n \otimes \overline{f_n}\|_2 \cdot \|(\chi_n\otimes\chi_n)\ K'\|_2 = \|(\chi_n\otimes\chi_n)\ K'\|_2.$$

$(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 趋于 0几乎处处 因此最后一个范数趋于 0。

由于 $|\langle f_n \,|\, \lambda_x(K) f_n\rangle| \leqslant \|K\|$集合 $\{K \in C_r^*(G);\ \ \langle f_n \,|\, \lambda_x(K) f_n\rangle \to 0\}$是闭的，因此对每个 $K \in C_r^*(G)$，都有 $\langle f_n \,|\, \lambda_x(K) f_n\rangle \to 0$ 。 □

多亏了引理 2.6，我们可以假设 P 由定义 1.7 中所述的局部公式给出。因此，给定一个包含 M 的开子集$U \subset G$、一个包含 $\{(y$ 的开子集 $U' \subset N,\ 0);\ \ y \in M\}$以及一个微分同胚 θ : $U' \to U$ ，使得

- $\theta(y,0) = y$ for all $y \in M$ and $r(\theta(y,X)) = y$ for $(y,X) \in U'$;
- $p_y(\mathrm{d}\theta_{(y,0)}(X)) = X$ for all $y \in M$ and $X \in N_y$.

并且 P 的作用由如下表达式给出

$$\lambda_x(P)(\phi)(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{N_y^*}\left(\int_{G_x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\theta^{-1}(\gamma\eta^{-1}),\xi\rangle}\, a(y,\xi)\,\chi(\gamma\eta^{-1})\,\phi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi,$$

其中 χ 是一个截断函数， $y = r(\gamma)$， $n =$ 维 N_y ，且 $a \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_{-k}$ 是一个0 阶经典符号 ，其首项为 $a_0 = \sigma(P)$.

设 W 是 G_x 中 x 的一个足够小的邻域，使得对于每个 $(\gamma_1,$ $\gamma_2) \in W\times W$， $W \subset U$、$\gamma_1\gamma_2^{-1} \in U$。注意， $\theta^{-1}(\gamma_1\gamma_2^{-1}) \in N_{r(\gamma)} \simeq T_\gamma G_x = T_\gamma W$。我们进一步假设映射 $(\gamma_1,\ \gamma_2) \mapsto \left(\gamma_1,\ \theta^{-1}(\gamma_1\gamma_2^{-1})\right)$

是从 $W \times W$ 到 TW 中 W 的一个邻域的微分同胚。因此，对于 $\chi' \in C_c^\infty(W \times W)$，由下式给出的算子 Q

$$Q(\phi)(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{N_y^*} \left(\int_{G_x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \theta^{-1}(\gamma\eta^{-1}),\xi\rangle}\, a(y,\xi)\, \chi(\gamma\eta^{-1})\chi'(\gamma,\eta)\, \phi(\eta)\, \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi,$$

$(y = r(\gamma))$ 是 W 上的伪微分算子。

于是取一个在 W 中具有紧支集的 ϕ，并且在 $\mathrm{supp}(\phi) \times \mathrm{supp}(\phi)$ 上有 $\chi' = 1$。我们得到 $\langle \phi,\ \lambda_x(P)(\phi)\rangle = \langle \phi_n,\ Q(\phi_n)\rangle$。还要注意，$\sigma(P)(x,\ \ell) = \sigma(Q)(x,\ \ell)$。

映射 $\gamma \mapsto \theta^{-1}(\gamma^{-1})$ 将 W 与欧几里得空间 N_x 的一个开子集相识别。

因此，下面的引理完成了命题 2.5 的证明。

引理 2.7。设 B 是 $\mathbb{R}^k$ 中的一个开球，并设 ϕ 是一个支集紧包含于 B 中的光滑非负函数，且其 L^2-范数等于1。令 $\xi_0 \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$，并置 $\phi_n(y) = n^{\frac{k}{2}} \phi(ny)\, \mathrm{e}^{in^2\langle y,\ \xi_0\rangle}$.

对于任意一个支集紧包含于 $B \times B$ 中的伪微分算子 Q，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi_n, Q(\phi_n)\rangle = \sigma(Q)(0,\xi_0).$$

证明。我们可以写成

$$Q(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}\, b(x,\xi)\, \chi(x)\chi(y)\, \phi(y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi,$$

其中，b 是一个 0 阶经典符号，而 χ是在 B 中具有紧支集并且在所有 ϕ_n的支集上均等于 1 的光滑函数。

Write $b(x,\xi) = b(0,\xi) + \sum_{j=1}^k x_j b_j(x,\xi)$ and set

$$Q_0(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}\, b(0,\xi)\, \chi(x)\chi(y)\, \phi(y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi.$$

现在 $\|x_j\phi_n\|_2 \to 0$，因此 $\langle \phi_n,\ (Q - Q_0)(\phi_n)\rangle \to 0$。

此外，根据 $\chi\phi_n = \phi_n$，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n, Q_0(\phi_n)\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_B \overline{\phi_n(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}\, b(0,\xi)\ \phi_n(y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{B\times\mathbb{R}^k} \overline{\phi_n(x)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} b(0,\xi) \widehat{\phi_n}(\xi)\, dx\, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{R}^k} \overline{\widehat{\phi_n}(\xi)} b(0,\xi) \widehat{\phi_n}(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

使用变量代换 $y \to ny$，我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\phi_n}(\xi) &= n^{k/2}\int_B \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,\xi\rangle}\,\phi(ny)e^{in^2\langle y,\xi_0\rangle}\,dy \\ &= n^{-k/2}\hat{\phi}(\xi/n - n\xi_0),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle \phi_n, Q_0(\phi_n)\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^k}\int_{\mathbb{R}^k} n^{-k}|\hat{\phi}(\xi/n - n\xi_0)|^2 b(0,\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k}\int_{\mathbb{R}^k} |\hat{\phi}^2(\xi)|b(0, n\xi + n^2\xi_0)\,d\xi\end{aligned}$$

现在，$\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{\mathbb{R}^k}|\phi^2(\xi)|\,d\xi = 1$ 和 b 有界。由于 $b(0,\ n\xi+n^2\xi_0) \to b_0(0,\ \xi_0)$，其中 b_0 是符号的主部，故由勒贝格控制收敛定理可得该引理。

□

2.5 正合序列

由命题 2.5 可知，对于$P \in \mathcal{P}_{0,\ c}$和 $(x,\ \xi) \in S^*N$，有$|\sigma(x,\ \xi)| \leqslant \|q_r(j_r(P))\|$，因此 $\|\sigma(P)\|_\infty \leqslant \|q_r(j_r(P))\|$。

因此，映射 σ 可通过连续性延拓，从而得到一个态射

$$\beta : \Psi_r^*(G)/C_r^*(G) \to C_0(S^*N)$$

使得 $\sigma(P) = \beta \circ q_r \circ j_r(P)$。

利用引理 2.5 和 2.2，我们得到

$$\|P\|_{\mathcal{M}(C^*(G))/C^*(G)} \leqslant \|P\|_{\mathcal{M}(C_r^*(G))/C_r^*(G)}.$$

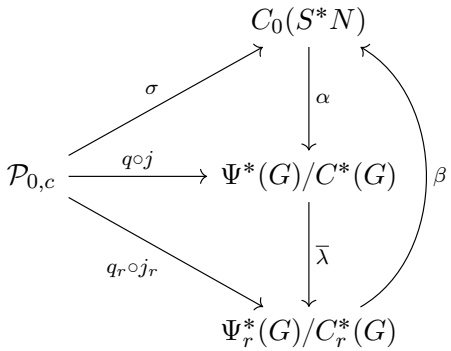
定理 2.8. 映射 $\phi\colon\ \Psi^*(G)/C^*(G) \to \Psi_r^*(G)/C_r^*(G)$ 是一个双射，此外，我们还有以下关于 C^*-代数的短正合序列：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^*(G) & \longrightarrow & \Psi^*(G) & \xrightarrow{\sigma} & C_0(S^*N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\lambda}} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & C_r^*(G) & \longrightarrow & \Psi_r^*(G) & \xrightarrow{\sigma} & C_0(S^*N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

证明. 我们构造了以下态射：

$$\begin{aligned}\alpha : C_0(S^*N) &\longrightarrow \Psi^*(G)/C^*(G), \\ \overline{\lambda} : \Psi^*(G)/C^*(G) &\longrightarrow \Psi_r^*(G)/C_r^*(G), \\ \beta : \Psi_r^*(G)/C_r^*(G) &\longrightarrow C_0(S^*N),\end{aligned}$$

使得下列图表可交换：



由于映射 σ、 $q \circ j$ 和 $q_r \circ j_r$ 的值域稠密，因此可得

$$\alpha \circ \beta \circ \overline{\lambda} = id_{\Psi^*(G)/C^*(G)},$$
$$\beta \circ \overline{\lambda} \circ \alpha = id_{C_0(S^*N)},$$
$$\overline{\lambda} \circ \alpha \circ \beta = id_{\Psi_r^*(G)/C^*(G)}.$$

特别地， α、 β 和 λ 是同构。 □

致谢

作者谨此诚挚感谢她的博士导师 Georges Skan- dalis 和 St´ephane Vassout，感谢他们在整个研究过程中给予的支持、指导以及诸多宝贵见解。

参考文献

[1] Akemann C.、Pedersen G.、Tomiyama J. C^*-代数的乘子。*Journal Of Functional Analysis*。**13**，277-301（1973）[2] Connes A. 关于积分的非交换理论。*LectureNotes In Mathematics*。**725**卷，第19-143页（1979）[3]Crainic M.、Mestre J. 李群胚的横截密度丛与模类。（2025），https://ssrn.com/abstract=5390609，预印本，于2025年8月13日发布至SSRN[4] Debord C.、Skandalis G. 李群胚、伪微分演算与指标理论。*Advances In Noncommutative Geometry: On The Occa-sion Of Alain Connes' 70th Birthday*。第245-289页（2019）[5] Mackenzie K. 李群胚与李代数胚的一般理论。（剑桥大学出版社，2005）[6]Monthubert B.、Pierrot F. 解析指标与李群胚。*Comptes Rendus De L'Acad´emie Des Sciences-SeriesI-Mathematics*。**325**，193-198（1997）[7] Naraghi M.、Skandalis G.、Vassout S. 伪微分算子演算：一种几何方法。准备中。[8] Nistor V.、Weinstein A.、Xu P. 微分群胚上的伪微分算子。*Pacific Journal Of Mathematics*。**189**，117-152（1999）[9] Pedersen G. C*-代数及其自同构群。（学术出版社，1979），https://books.google.fr/books?id=yBCoAAAAIAAJ[10] Renault J. 一种关于 C^*-代数的群胚方法。*Lecture Notes In Math-ematics*。**793** 第1-160页（1980）[11] Taylor, M. 伪微分算子。*Princeton University Press,1981*。[12] Vassout S. 李群胚上的无界伪微分演算。*Journal Of Functional Analysis*。**236**，161-200（2006）