按判别式排序时，存在类数很大的连续三次域

V´ıt˘ezslav Kala[1] 和 Om Prakash[2]

[1,2]查理大学，数学与物理学院，代数系，Sokolovsk´a83，186 75 布拉格8区，捷克共和国
[1]电子邮件：vitezslav.kala@matfyz.cuni.cz。ORCID：0000-0001-5515-6801[2]电子邮件：prakash@karlin.mff.cuni.cz。ORCID：0009-0007-2124-9736

arXiv:2601.03984v1 [math.NT] 7 Jan 2026

2026年1月8日

摘要

我们考察按判别式排序的三次数域，并证明存在任意长的序列，其中所有数域的类数都大于给定的界。

关键词：类数、三次数域、三次判别式、属数

2020年数学主题分类：11R29, 11R16, 11B05, 11B25, 11R45。

基金资助：两位作者均获得捷克科学基金会项目 26-20514S 的资助。O.P. 获得查理大学 PRIMUS/24/SCI/010 和 PRIMUS/25/SCI/017 项目、SVV-2023-260721 以及 GAUK 项目（编号 252931）的资助。

1 引言

理解数域 K 的类数 $h(K)$的行为与分布，是数论中的基本问题之一。这项研究历史悠久，可追溯至高斯对二次型类数的研究。1801年，高斯猜想 $h(\mathbb{Q}(\sqrt{d})) \to \infty$ as$d \to -\infty$，并提出了找出具有给定类数的所有虚二次域的问题。1934年，海尔布隆证明了 $h(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))$ 的增长规律；随后，1952年，黑格纳刻画了所有类数为一的虚二次域。如今，多亏 Watkins 的工作 [Wat04], ，我们已知所有类数不超过 100 的虚二次域。

实二次数域的类数比其虚二次对应域的类数更难理解。主要工具是类数公式

$$h(K) = \frac{w_K \cdot \sqrt{|\Delta_K|}}{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K} \cdot \left|\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K(s)\right|,$$

其中 r_1, r_2 表示实嵌入和复嵌入的数量， w_K 表示 K中的单位根数量，Reg$_K$ 是调节子， ζ_K 是 K的狄利克雷—戴德金ζ函数。应用类数公式时遇到的第一个困难是，调节子表现难以预测，因此难以理解 $h(K)$的大小。

特别是，高斯关于存在无穷多个类数为 1 的实二次域的另一个猜想，至今仍未解决。人们预期，调节子的大小常常在 $\sqrt{d}$ 左右；因此， $h(K)$ 应该常常很小。此外，似乎有悖直觉的是，可能存在任意长的连续实二次域序列，且其中每个域的类数都很大。然而，最近 Cherubini–Fazzari–Granville–Kala–Yatsyna [CFG+23] 证明，对于给定的正整数 k 和 $X \in \mathbb{R}_{>0}$，存在 $\geq X^{1/2-o(1)}$ 个整数 $d \leq X$ ，使得所有实二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{d+1})$ $\mathbb{Q}(\sqrt{d+2}) \ldots, \mathbb{Q}(\sqrt{d+k})$ 的类数都基本达到可能的最大值。

设 K 是一个一般三次域。 K的判别式 Δ_K 具有以下形式： df^2， $9df^2$， 或 $81df^2$，其中 d 是一个基本判别式（即， $d=1$ 或 d 是某个二次域的判别式），而 f 是一个与 3 [互素的无平方因子正整数。Has30，Satz 6]。三次域 K 是伽罗瓦域，当且仅当 $\Delta_K = f^2$。显然，并非每个整数 n 都能成为三次域的判别式。特别是，对于 $p>3$，不存在被 p^3 整除的三次判别式。下文中，当我们说 Δ 是一个 三次判别式 时，意指存在一个判别式等于 Δ的三次域。

关于特殊族中三次域类数的许多结果已为人所知，例如最简三次域或纯三次域。Duke [Duk04] 研究 Shanks族 [Sha74] 中的最简阿贝尔三次域，证明存在一个绝对常数 $c>0$，使得

$$h(K) > c\sqrt{\Delta_K}(\log\log\Delta_K/\log\Delta_K)^2$$

对于无穷多个阿贝尔三次域 K，上述结论成立。最近，Dousselin [Dou24], 利用 [GS03], 证明，Shanks族中至少存在 $X^{1/4-o(1)}$ 个阿贝尔三次域，其判别式 $\Delta_K \le X$满足

$$h(K) \ge \left(\frac{4}{91}e^{2\gamma}+o(1)\right)\sqrt{\Delta_K}(\log\log\Delta_K/\log\Delta_K)^2.$$

此外，在同一篇论文中，他证明存在任意长的阿贝尔三次域序列，其中各域的判别式彼此接近，且类数基本达到可能的最大值。最近，Yhee–Byeon [YB24] 研究了连续纯三次域的类数，并证明对于给定的 $k>0$，至少存在 $X^{1/3-o(1)}$ 个整数 $1<d<X$，使得 $h(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d+j}))$ 对所有足够大的 $1\le j\le k$ 均成立。随后，Das–Krishnamoorthy [DK25]将这项工作推广到了高次情形。

受这些结果的启发，我们研究具有连续判别式的三次域的类数，但不对三次域施加任何限制，例如要求其为伽罗瓦、全实，或属于特定族。作为主要结果，我们证明如下定理。在全文中，$\kappa \approx 0.3193\ldots$是 [CK25]中的常数。

定理 1.1。 固定符号选择 ±、 $\varepsilon>0$以及正整数 k、 H。存在一个正的常数c（取决于 ±、 ε、 k、 H），使得对于所有充分大的 X，至少存在 $cX^{1-\kappa-\varepsilon}$ 个正整数 $d\le X$ 满足以下条件：

1. F对于每个 $1\le i\le k$，如果存在一个三次域 K 满足 $\pm\Delta_K = d+i$，那么 h（K） $> H$.
2. 我们有
$$\#\{K \text{ cubic field } \mid \pm\Delta_K \in \{d+1, d+2, \ldots, d+k\}\} \ge \frac{k}{2}.$$

注意，在此处以及全文中，我们固定三次判别式的符号 ± 。因此，当我们说 $\pm\Delta_K = d+i$时，我们的意思是 $+\Delta_K = d+i$或 $-\Delta_K = d+i$，具体取决于所选择的符号。

我们将在定理 4.3 中证明这一结果。我们的证明是构造性的；事实上，我们首先构造整数 $0\le a<m$，使得只要存在一个满足 $\pm\Delta_K = d+i$ 的三次域 K，其中 $d\equiv a$（模 m），那么 h（K） $> H$。我们通过控制属数来得到这一结果，它为 K 的类群中 2-挠子群的大小给出了一个下界。采用这种方法的原因在于，它避开了估计调节子的难题（因此我们不必将研究范围限制在某个合适的三次域族中）。与此同时，这也使我们无法得到类数公式所允许的那么大的类数——我们只能证明类数大于某个预先给定的界。随后我们证明，确实存在许多满足 $\pm\Delta_K \in \{d+1, d+2, \ldots, d+k\}$ 的三次域，这也确保了我们的第一个断言并非空泛。

本文中，我们始终按同构类计数三次域。注意，如果将三次域视为 $\mathbb{C}$ 的子域，那么给定的三次域 K 在 $\mathbb{C}$ 中有 1 个或 3 个同构副本，具体取决于 K 是否为伽罗瓦扩张（但无论哪种情况，我们都只将这些副本计为一个三次域）。

Davenport–Heilbronn [DH71] 研究了计数函数

$$N_3^{\pm}(X) = \#\{K \text{ cubic field } \mid 0<\pm\Delta_K<X\},$$

并利用德洛内–法捷耶夫对应 [DF40], 证明了

$$N_3^+(X) \sim \frac{1}{12\zeta(3)}X, \quad N_3^-(X) \sim \frac{1}{4\zeta(3)}X \quad \text{as } X \to \infty.$$

第一个具有幂次级节省的误差项由 Belabas–Bhargava–Pomerance [BBP10]确立。随后， [TT13、BST13、BTT24] 通过纳入 Roberts [Rob01],所猜想的次级项，并改进误差项，进一步强化了渐近公式。

为了在我们的定理 1.1 中计数 $d \le X$ ，我们需要在按三次域计数和按三次判别式计数之间转换。与二次域不同，非同构的三次域可能具有相同的判别式。例如，Taussky–Scholz [TS34] 证明，判别式为 -3299的非同构三次域有四个。因此，按三次域计数时，我们会对判别式按重数计数。

根据 Hermite 定理，对于任意固定整数 $\Delta > 1$，只有有限多个 K 次数为 n 且满足 $|\Delta_K| = \Delta$ 的数域（参见 [Ser97，第 4.1]节）。Duke [Duk98，第 3] 节以及 Ellenberg–Venkatesh[EV05，猜想 1.3] 提出了以下关于判别式等于 Δ的数域个数的猜想：对于每个 $n \ge 2$，对任意 $\varepsilon > 0$，以及任意整数 $\Delta \ge 1$ ，都有 $\ll_{n,\,\varepsilon} \Delta^{\varepsilon}$个 K 次数为 n 且满足 $|\Delta_K| = \Delta$的数域。

对于 $n = 2$，这个猜想显然成立，因为给定一个判别式，至多只有一个二次域。然而，对于更大的 n，我们目前只有部分结果（更多阐述请参阅 Pierce–Turnage-Butterbaugh–Wood 的文章 [PTBW21]）。对于三次域，利用 [Has30, Satz7]以及二次域类群 3-挠部分的上界，Ellenberg–Venkatesh[EV07, Corollary 3.7] 证明了存在 $\ll_\varepsilon |\Delta_K|^{1/3+\varepsilon}$ 个判别式为 Δ_K 的三次域 K。若采用 Chan–Koymans [CK25] 关于二次域 3-挠部分的最新上界 $\#\,\mathrm{Cl}_3(\mathbb{Q}(\sqrt{d})) \ll_\varepsilon d^{\kappa+\varepsilon}$，则可推出存在 $\ll_\varepsilon |\Delta_K|^{\kappa+\varepsilon}$ 个判别式为 Δ_K 的三次域。

还要指出的是，若假设一些标准猜想，我们可以对定理 1.1 中 $d \le X$ 的数量得到更好的界。具体而言，假设 Hasse–Weil 猜想、精细 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想，以及二次域上椭圆曲线的 L- 函数满足广义黎曼猜想，Shankar–Tsimerman [ST23, 定理 1] 证明了 $\#\,\mathrm{Cl}_3(\mathbb{Q}(\sqrt{d})) \ll_\varepsilon d^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$。因此，由 [Has30, 命题 7],可知，存在 $\ll_\varepsilon \Delta_K^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$个判别式为 $\pm\Delta_K$的三次域。在这种情况下，我们的证明表明，至少有 $cX^{\frac{3}{4}-\varepsilon}$个整数 $d \le X$满足定理 1.1 的断言 1 和 2。

记号。全文中，我们采用标准记号：对于非负函数 $f(x)$ $g(x)$，若存在常数 C，使得对所有充分大的 x，均有 $f(x) \le Cg(x)$，则记作 $f(x) = O(g(x))$ 或 $f(x) \ll g(x)$。此外，我们用 $f(x) = O_\ell(g(x))$ 或 $f(x) \ll_\ell g(x)$ 表示隐含常数 C 依赖于参数 ℓ。若 $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$，则记作 $f(x) = o(g(x))$。

致谢

我们非常感谢 Frank Thorne 耐心解答我们的问题，也感谢 Subham Roy、Pavlo Yatsyna 以及 UFOCLAN 团队的其他成员与我们进行了有趣且富有助益的讨论。

2 三次域及其类数

设 K 为一个三次域， $\mathcal{O}_K$ 为其代数整数环， $h(K)$ 为其类数。 K的判别式Δ_K具有以下形式： df^2, $9df^2$, 或 $81df^2$，其中 d为基本判别式， f为与 3 互素的无平方因子正整数。更确切地说，根据 [Has30，命题 6], ，若 Δ_K 是一个三次域的判别式，则 $\Delta_K = df^2$，其中 $f = p_1 \cdots p_n \cdot 3^w$，而 $n \ge 0$、 $w \in \{0,1,2\}$和 p_i是互异素数 $\ne 3$，满足

$$\left(\frac{d}{p_i}\right) \equiv p_i \pmod 3.$$

还要记住， $K/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦的，当且仅当 $d = 1$，也就是说， Δ_K 是一个平方数。

可以刻画所有在 K 中完全分歧的素数 p ，即，对于 $\mathcal{O}_K$ 中的素理想 $\mathfrak{p}$ $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^3$： $p \ne 3$ 在 K 中完全分歧，当且仅当 p 整除 f；而 $p = 3$ 在 K 中完全分歧，当且仅当 $\Delta_K = 9df^2$ 或 $81df^2$，参见 [Has30, Satz 5]，或 [Coh93，第 6.4.5] 节。

引理 2.1（Hasse）。设 K 是判别式为 $\Delta_K = df^2$ 的三次域，且 $p \neq 2, 3$ 在 K 中完全分歧。则，当且仅当 $p \equiv -1$（模 3）时，$\left(\frac{d}{p}\right) = 1$。

Proof. 请参阅 [Has30，第 $576, 577$] 页，或参阅 [Ish76，第 6 章，例 10]) . □

K 的亏格域定义为 K_{gen} 的最大扩张 K，它在所有有限素处均不分歧，并且是 KF的复合域，其中 F 是 $\mathbb{Q}$的阿贝尔扩张。g_K 的属数定义为次数 $[K_{\text{gen}} : K]$。Fr¨ohlich 的一个定理给出了 g_K 的完整描述（见 [Fr¨o59]，或 [Ish76，第 6 章，例 10]）。

定理 2.2 (Fr¨ohlich)。设 K 为一个三次域，e 为满足以下条件的不同奇素数的个数：p在 K和 $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$中完全分歧。则 -

$$g_K = \begin{cases} 3^{e-1} \text{ if } K/\mathbb{Q} \text{ is Galois} \\ 3^{e} \quad \text{if } K/\mathbb{Q} \text{ is not Galois.} \end{cases}$$

我们还需要一个将属数与类数联系起来的著名结果。

定理 2.3。设 K 为一个三次域。则 g_K 整除 $h(K)$。

证明。众所周知（例如，见 [Fr¨o59，段落 1]），g_K 整除窄类数 $h^+(K)$。由于类数与窄类数相差一个 2 的幂，且 g_K 是 3 的幂，因此 g_K 整除 $h(K)$。

□

为了构造我们的连续三次域族，我们将在以下设定中进行研究，并固定该设定以避免重复。注意，ε与主定理 1.1 中的设定不同。

设定 (S)。固定一个符号选择 $\pm$, $\varepsilon > 0$，以及正整数 k, H。令 $n = \left\lceil \frac{\log H}{\log 3} \right\rceil + 2$。

对于所有 $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$，选取两两不同的素数 $p_{ij} \geq k$ 和 $q_i >$ 最大值$(k, \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1)$，使得 $q_i \equiv 1$ (模 4) 且 $p_{ij} \equiv 1$ (模 12)。令 $m = \prod_i q_i \prod_{i,\ j} p_{ij}^3$。

存在唯一的整数 $0 \leq a < m$ 使得

$$a \equiv q_i \prod_{j=1}^{n} p_{ij}^2 - i \pmod{q_i \prod_{j=1}^{n} p_{ij}^3} \tag{2.1}$$

对所有 $1 \leq i \leq k$均成立。此外，对所有 i, j均有 $p_{ij}^3 \nmid a + i$；对所有 i均有 $\frac{q_i - 1}{q_i} > 1 - \varepsilon$。

证明。根据中国剩余定理，方程 (2.1) 存在唯一解 a (模 m)；我们有

$$a + i = q_i \prod_{j=1}^{n} p_{ij}^2 + tm, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

由于 $p_{ij}^3 \mid m$，我们看到 $p_{ij}^3 \nmid a + i$。最后，由于对所有 i, $q_i > \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1 > \varepsilon^{-1}$ 均成立；我们有 $1 - \frac{1}{q_i} > 1 - \varepsilon$。

□

我们已经可以确立我们的设定在估计类数方面的相关性。

命题 2.4。假设设定 *(S)*。对于 $1 \leq i \leq k$，如果存在一个判别式为Δ_K 且满足 $\Delta_K \equiv a + i \pmod{m}$ 的三次域 K，那么 $h(K) > H$。

证明。假设存在一个判别式为 Δ_K、满足 $\Delta_K \equiv a + i$ (模 m) 的三次域 K。那么 $\Delta_K = \pm q_i' f_i^2$，其中 $f_i^2 = \prod_{j=1}^{n} p_{ij}^2$ 和 $\pm q_i' = \pm q_i \ (1 + t \prod_{i' \neq i} q_{i'} \cdot \prod_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot \prod_{i' \neq i,\ j} p_{i'j}^3)$ 是基本判别式。显然，所有素数 $p_{i1}, \ \ldots, \ p_{in}$ 都整除 f_i。因此，对于所有 $1 \leq j \leq n$，素数 p_{ij} 在 K 中完全分歧。由引理 2.1 以及 $p_{ij} \equiv 1$ (模 12) 的选择可知，基本判别式 $\pm q_i'$ 对每个 $1 \leq j \leq n$ 也满足 $\left(\frac{\pm q_i'}{p_{ij}}\right) = \left(\frac{\pm q_i}{p_{ij}}\right) = 1$。因此，我们可以应用定理 2.2，得出属数 $g_K > 3^{n-1} > H$，因为 $n >$ 对数 H 对数 3 $+ 1$。最后，由于根据定理 2.3，g_K 整除 $h(K)$，我们有 $h(K) > H$。

□

3 在等差数列中计数三次域

我们看到，如果在连续整数 $a+tm+1,\ \ldots,\ a+tm+k$ 中存在一个判别式为 $\pm\Delta_K$ 的三次域 K，那么它的类数为 $h(K) > H$。然而，这一陈述很容易变得空泛，因为可能根本不存在或只有极少数这样的域 K。

为确保这些域的存在，我们将使用 Taniguchi–Thorne [TT13 定理 6.2]关于等差数列中三次域数量的结果。本节将汇集 [TT13] 中的一些必要细节及其有用推论。

固定一个符号选择 $\pm$。对于 $a,\ m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $X \in \mathbb{R}_{>0}$，定义计数函数

$$N_3^{\pm}(X; m, a) := \#\left\{K \text{ cubic field } \mid 0 < \pm\Delta_K < X,\ \Delta_K \equiv a \pmod{m}\right\}.$$

H此处及下文中，我们按同构类计数三次域。总是有 1 个或 3 个
is同构的三次域（它们是 $\mathbb{C}$的不同子域），具体取决于 K 是否为伽罗瓦扩张。Taniguchi–Thorne [TT13 在公式 6.40] 中给出了以下渐近公式：

$$N_3^{\pm}(X; m, a) = C(m,a)\frac{C^{\pm}}{12\zeta(3)}X + K_1(m,a)\frac{4K^{\pm}}{5\Gamma(2/3)^3}X^{5/6} + O(X^{7/9+\varepsilon}m^{8/9}), \tag{3.1}$$

其中 $C^- = 3$、$C^+ = 1$、$K^- = \sqrt[-]{3}$ 和 $K^+ = 1$。次级项中的常数 $K_1(m,\ a)$ 很难清楚表述；因此，读者可参阅 [TT13]，了解 $K_1(m,\ a)$ 的精确定义（事实上，误差项还可以进一步改进）。

主项中的常数 $C(m,\ a)$ 是根据 [TT13，注，第 2498] 页，在等差数列 a (模 m) 中三次域判别式的密度（注意，[TT13] 将该常数记为 $C_1(m,\ a)$）。在本文中，我们只关心 $C(m,\ a) > 0$ 这一问题，因为由 (3.1) 可知，当且仅当存在 $\delta > 0$，使得对于所有充分大的 X，$N_3^{\pm}(X;\ m,\ a) > \delta X$ 成立时，$C(m,\ a) > 0$。

特别是当 gcd$(a,\ m) = 1$ 且 $m \not\equiv 0$ (模 4) 时，我们有 [TT13，公式 6.4 1]

$$C(m,a) = \frac{1}{m}\prod_{p\mid m}\frac{1}{1-p^{-3}} > 0. \tag{3.2}$$

一般而言，$C(m,\ a)$ 的值要复杂一些：对于一般的等差数列 ar模 mr，其中 gcd$(m,\ a) = 1$，并且 $m,\ r$ 不一定互素，我们可以根据 mr [TT13，第 2501 页，第 1] 段，将密度 $C(m,\ a)$ 表示为所有整除 mr [的素数处局部密度的乘积。这些局部密度可利用 [TT13，命题 6.4] 计算得到。

命题 3.1 ([TT13，命题 6.4])。设 $p > 3$ 为素数，且 a 与 p互素。那么我们有

$$C(p^2, ap) = \frac{1}{p^2(1-p^{-3})},\quad C(p^3, ap^2) = \frac{1+\phi_p(-3a)}{p^3(1-p^{-3})}, \tag{3.3}$$

其中 $\phi_p(-3a) = \left(\frac{-3a}{p}\right)$ 是勒让德符号。

由于对于 $p > 3$，不存在被 p^3整除的三次判别式，因此上述局部密度足以用于计算 $C(m,\ a)$。注意，$C(p^2,\ ap)$ 永远不等于零，但当且仅当 $-3a$ 是模 p的二次非剩余时，$C(p^3,\ ap^2) = 0$，例如，$C(7_3,\ 3\cdot 7^2) = 0$（见 [TT13，第 2503]页）。

为方便起见，我们现在根据 [TT13]，给出几个关于密度的显式估计，这些估计可由其直接推出。

引理 3.2。固定符号选择 $\pm$、a、$k \in \mathbb{Z}_{>0}$和 $\varepsilon > 0$。令 $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$，其中 p_1、p_2、.....、p_k是互异素数，且 $p_i >$最大 $\left(3,\ \left\lfloor \varepsilon^{-1}\right\rfloor + 1\right)$ 和 $r_i \in \{1,2,3\}$。对于每个 $1 \le i \le k$，假设 $C(p_i^{r_i},\ a) > 0$。那么，我们有

$$C(m,a) > \frac{1}{m}(1-\varepsilon)^t,$$

其中 $t = \#\{i \mid r_i = 1\}$。

证明。 根据 [TT13，第 2501 页第 1] 段，以及假设 $C(p_i^{r_i}, a) > 0$，可得密度

$$C(m, a) = \prod_{i=1}^{k} C(p_i^{r_i}, a) > 0. \tag{3.4}$$

由 (3.2) 和 (3.3)，可知当 $r_i \in \{2, 3\}$ 时，或当 ~~$r_i = 1$~~ 且 $\gcd(a, p_i) = 1$ 时，$C(p_i^{r_i}, a) \geq \frac{1}{p_i^{r_i}(1-p_i^{-3})}$ 成立。

为了控制 $C(p_i, 0)$，我们首先注意到

$$C(p_i, 0) \geq \sum_{j=1}^{p_i-1} C(p_i^2, jp_i) = \frac{p_i - 1}{p_i^2(1 - p_i^{-3})}. \tag{3.5}$$

因此，我们有

$$C(p_i^{r_i}, a) \geq \begin{cases} \frac{1}{p_i^{r_i}(1-p_i^{-3})} \text{ if } r_i \in \{2, 3\} \\ \frac{p_i-1}{p_i^2(1-p_i^{-3})} \text{ if } r_i = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Let

$$\psi(p_i^{r_i}) = \begin{cases} 1 \text{ if } r_i \in \{2, 3\} \\ \frac{p_i-1}{p_i} \text{ if } r_i = 1. \end{cases}$$

现在，利用 (3.4) 中局部密度的界 (3.6)，可得

$$C(m, a) \geq \prod_{i=1}^{k} \frac{\psi(p_i^{r_i})}{p_i^{r_i}(1 - p_i^{-3})} \geq \frac{1}{m} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - p_i^{-3}} \prod_{i=1}^{k} \psi(p_i^{r_i}).$$

由于每个 $p_i > \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$，我们得到

$$C(m, a) > \frac{1}{m} \prod_{i=1}^{k} \psi(p_i^{r_i}) \geq \frac{1}{m} (1 - \varepsilon)^t,$$

其中 $t = \#\{i \mid r_i = 1\}$。 □

现在我们证明，对于每个 i，判别式属于我们的等差数列 $\Delta_K \equiv a+i \pmod m$ 的三次域具有相当高的正密度。

命题 3.3. 假设设定 *(S)*。那么，对所有 $1 \leq i \leq k$，$C(m, a + i) > \frac{1-\varepsilon}{m}$ 成立。

证明。 任取整数 $1 \leq i \leq k$。我们希望对因式分解 $m = \prod_h q_h \prod_{h,j} p_{hj}^3$ 使用引理 3.2，因此首先需要证明，对于所有 h, j，$C(q_h, a + i) > 0, C(p_{hj}^3, a + i) > 0$。

首先，令 $h \neq i$。我们断言 $\gcd(q_h, a + i) = 1 = \gcd(p_{hj}^3, a + i)$。若不然，假设 $q_h \mid a + i$。由于 $q_h \mid a + h$，我们得到 $q_h \mid h - i$，这不可能，因为 $q_h > k$；p_{hj} 的情形类似。现在，由 (3.2) 可知，在这些互素等差数列中，密度为

$$C(q_h, a + i) = \frac{1}{q_h(1 - q_h^{-3})} > 0, \text{ and } \quad C(p_{hj}^3, a + i) = \frac{1}{p_{hj}^3(1 - p_{hj}^{-3})} > 0$$

正如我们所希望的。

由于 $a + i \equiv 0 \pmod{q_i}$，(3.5) 意味着 $C(q_i, a + i) = C(q_i, 0) > 0$。

最后，我们来证明对每个 $1 \leq j \leq n$，密度 $C(p_{ij}^3, a + i) > 0$。根据命题 3.1，我们有

$$C(p_{ij}^3, a + i) = C\left(p_{ij}^3, q_i \prod_{j=1}^{n} p_{ij}^2\right) = \frac{1 + \phi_{p_{ij}}(-3q_i p_{i1}^2 \dots p_{ij-1}^2 p_{ij+1}^2 \dots p_{in}^2)}{p_{ij}^2(1 - p_{ij}^{-3})}.$$

为了证明 $C(p_{ij}^3,\ a+i) > 0$，我们因此需要证明勒让德符号满足

$$\begin{aligned} 1 &= \phi_{p_{ij}}(-3q_i p_{i1}^2 \dots p_{ij-1}^2 p_{ij+1}^2 \dots p_{in}^2) \\ &= \left(\frac{-3q_i p_{i1}^2 \dots p_{ij-1}^2 p_{ij+1}^2 \dots p_{in}^2}{p_{ij}}\right) = \left(\frac{-3q_i}{p_{ij}}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{p_{ij}}\right)\left(\frac{3}{p_{ij}}\right)\left(\frac{q_i}{p_{ij}}\right). \end{aligned}$$

素数 p_{ij} 在判别式为 Δ_K 且满足 $\Delta_K \equiv q_i \prod_{j=1}^n p_{ij}^2$（模 p_{ij}^3）的三次域中完全分歧。由于 $p_{ij} \neq 2,\ 3$，由引理 2.1 可知，q_i 是模 p_{ij} 的二次剩余。因此，我们有 $\left(\frac{q_i}{p_{ij}}\right) = 1$。由于 $p_{ij} \equiv 1$（模 12），我们有 $\left(\frac{-1}{p_{ij}}\right) = 1$，并由二次互反律可得 $\left(\frac{3}{p_{ij}}\right) = \left(\frac{p_{ij}}{3}\right) = 1$。

现在，为了估计密度，我们对 $m = \prod_h q_h \prod_{h,\ j} p_{hj}^3$ 应用引理 3.2，得到 $C(m,\ a+i) > \frac{1}{m}(1-\varepsilon)$ 由于只有 $q_i \| a+i$，我们有 $C(m,\ a+i) > \frac{1-\varepsilon}{m}$。 □

4 密度估计

本节将证明我们的主定理。为此，我们需要在对域计数和对判别式计数之间进行转换。

定理 4.1。对于每个 $\varepsilon > 0$，以及每个正整数 $\Delta > 1$，存在 $\ll_\varepsilon \Delta^{\kappa+\varepsilon}$ 个三次域K 满足 $\Delta_K = \Delta$。

证明。这由 Hasse [Has30, Satz 7] 的工作得出，利用 Chan–Koymans [CK25] 对所有二次域的 $\#\mathrm{Cl}_3(K) \ll_\varepsilon |\Delta_K|^{\kappa+\varepsilon}$ 界。回顾一下，在全文中，$\kappa \approx 0.3193\dots$ 是 [CK25]中的常数。 □

定理 4.2。固定符号选择 $\pm$、$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $\varepsilon > 0$。假设对于整数 $0 \le a < m$，存在一个 $\delta > 0$，使得 $N_3^{\pm}(X;\ m, a+i) > 2\delta X$ 对于所有 $1 \le i \le k$ 以及所有充分大的 X 都成立。那么，存在一个正的常数 c（取决于 $\pm$、ε、a、m、k），使得对于所有充分大的 X，至少存在 $c\delta X^{1-\kappa-\varepsilon}$ 个 t 整数满足 $0 \le t \le X$，使得

$$\#\{K \text{ cubic field } \mid \pm\Delta_K \in \{a+tm+1, a+tm+2, \dots, a+tm+k\}\} > \delta k m.$$

注。请注意，当 δ 较小时，$a+tm+1, a+tm+2, \dots, a+tm+k$ 中的三次域数量可能很少。然而，在我们的主定理中，我们使用命题 3.3 中得到的特定 δ，以确保存在许多域。

证明。我们使用 Maier矩阵方法的一种变体 [Mai85]（另见 [Shi00]或综述文章[Tho09, Gra95]）。对于一个正整数 X，考虑如下整数矩阵

$$\begin{bmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \cdots & a+k \\ a+m+1 & a+m+2 & a+m+3 & \cdots & a+m+k \\ a+2m+1 & a+2m+2 & a+2m+3 & \cdots & a+2m+k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+Xm+1 & a+Xm+2 & a+Xm+3 & \cdots & a+Xm+k \end{bmatrix}$$

。作为一种记号简写，我们称矩阵中由整数构成的子集 S 包含$> B$ 三次域，如果 $\#\{K$ 三次域 $\mid \pm\Delta_K \in S\} > B$。矩阵中的一项称为好项，当且仅当它是一个三次判别式。

根据我们的假设，存在一个 $\delta > 0$，使得对所有$1 \le i \le k$ 以及所有充分大的 X，$N_3^{\pm}(X;\ m, a+i) > 2\delta X$ 成立。因此

$$N_3^{\pm}(a+Xm+i+1; m, a+i) > 2\delta(a+Xm+i+1) > 2\delta m X$$

对所有 $1 \le i \le k$ 以及所有充分大的 X均成立。也就是说，对所有充分大的 X，每一列都包含 $> 2\delta mX$ 个三次域。因此，矩阵中总共有 $> 2\delta kmX$ 个三次域。

现在我们断言，对于所有充分大的 X，存在一行包含 $> 2\delta km$ 个三次域。反设每一行都包含 $\le 2\delta km$ 个三次域。于是矩阵中的三次域总数为 $\le 2\delta kmX$，这与矩阵中有 $> 2\delta kmX$ 个三次域这一事实矛盾。

我们把包含 $> \delta km$ 个三次域的一行称为好行，并用 G 表示好行的总数。根据上述论证，对于所有充分大的 X，矩阵中至少存在一行好行，即 $G \ge 1$。

现在，对于充分大的 X，我们的目标是计算好行的数量。也就是说，我们要计算满足 $0 \le t \le X$ 的整数 t，使得行 $a+tm+1, a+tm+2, \dots, a+tm+k$ 是一行好行。对于给定的 $\varepsilon > 0$，根据定理 4.1，存在一个正常数 c_1（依赖于 $\pm, \varepsilon$），使得对于每个好项 $\pm(a+tm+i)$，都有 $< c_1(a+tm+i)^{\kappa+\varepsilon}$ 个判别式为 $\pm(a+tm+i)$ 的三次域。由于一行中好项的数量为 $\le k$，我们看到一行好行包含 $< c_1 k(a+Xm+k)^{\kappa+\varepsilon}$ 个三次域。矩阵中共有 $> 2\delta kmX$ 个三次域，因此我们有

$$2\delta kmX < c_1 Gk(a+Xm+k)^{\kappa+\varepsilon} + (X-G)\delta km.$$

于是可得

$$\delta kmX < Gk(c_1(a+Xm+k)^{\kappa+\varepsilon} - \delta m) < Gk(c_1(a+Xm+k)^{\kappa+\varepsilon}) < Gkc_2 mX^{\kappa+\varepsilon},$$

其中 c_2（取决于 $\pm$，ε，a，m，k）是一个正常数。因此，我们有 $G > c\delta X^{1-\kappa-\varepsilon}$，其中$c = 1/c_2$。证明完毕。 □

定理 4.3. 假设设定 *(S)*。存在一个正常数 c（取决于 $\pm$、ε、k、H），使得对于所有充分大的 X，至少存在 $cX^{1-\kappa-\varepsilon}$ 个正整数 $t \le X$ 满足以下条件：

(1) 对每个 $1 \le i \le k$，若存在一个三次域 K 满足 $\pm\Delta_K = a+tm+i$，则 $h(K) > H$。

(2) 我们有

$$\#\{K \text{ cubic field} \mid \pm\Delta_K \in \{a+tm+1, a+tm+2, \dots, a+tm+k\}\} \ge \frac{k}{2}.$$

证明。*(1)* 由命题 2.4 可知，对于 $1 \le i \le k$，若存在一个三次域 K 满足$\pm\Delta_K = a+tm+i$，则其类数为 $> H$。

由命题 3.3 可知，对于所有 $\varepsilon' > 0$、所有 $1 \le i \le k$ 以及所有充分大的 X，$N_3^{\pm}(X; m, a+i) > \binom{1-\varepsilon'}{m} X$成立。现在，根据定理 4.2，对于所有充分大的 X，至少有 $cX^{1-\kappa-\varepsilon}$ 个整数 t 满足 $0 \le t \le X$，使得

$$\#\{K \text{ cubic field} \mid \pm\Delta_K \in \{a+tm+1, a+tm+2, \dots, a+tm+k\}\} > \left(\frac{1-\varepsilon'}{2m}\right) km = \left(\frac{1-\varepsilon'}{2}\right) k,$$

其中 $c = c' \cdot \binom{1-\varepsilon'}{m}$，且 c' 是定理 4.2 中的常数。相对于 $1/k$，取充分小的 ε'，可得 (2)。

□

这就证明了定理 1.1。注意，优化设定 (S) 中 ε, q_i, p_{ij} 的取值并不困难，从而可以得到定理 4.3 中 a 和 m 的显式上界。然而，由于常数 c（来自定理 4.1 和 [CK25]）没有显式上界，这样做并不能给出定理 1.1 中可容许整数 d 的显式陈述。

参考文献

[BBP10] K. Belabas、M. Bhargava 和 C. Pomerance，《达文波特-海尔布рон定理的误差估计》，《杜克数学杂志》153 (2010)，第 1 期，173–210。MR 2641942[BST13] M. Bhargava、A. Shankar 和 J. Tsimerman，《关于达文波特-海尔布рон定理及其二阶项》，《数学发明》193 (2013)，第 2 期，439–499。MR 3090184[BTT24] M. Bhargava、T. Taniguchi 和 F. Thorne，《改进的达文波特-海尔布рон定理误差估计》，《数学年刊》389 (2024)，第 4 期，3471–3512。MR 4768704[CFG+23] G. Cherubini、A. Fazzari、A. Granville、V. Kala 和 P. Yatsyna，《按判别式排序时类数较大的连续实二次域》，《国际数学研究通知》(2023)，第 14 期，12052–12063。MR 4615224[CK25] S. Chan 和 P. Koymans，《类群 3-挠子的一个新的逐点界》，预印本，https://arxiv.org/pdf/2505.00611，2025。[Coh93] H. Cohen，《计算代数数论教程》，《研究生数学教材》第 138 卷，施普林格出版社，柏林，1993。MR 1228206[DF40] B. N. Delone 和 D. K. Faddeev，《三次无理数理论》，苏联科学院，斯捷克洛夫数学研究所论文集，11 (1940)，340。MR 4269[DH71] H. Davenport 和 H. Heilbronn，《关于三次域判别式的密度。II》，《伦敦皇家学会会刊A辑》322 (1971)，第 1551 期，405–420。MR 491593[DK25] J. Das 和 S. Krishnamoorthy，《类数较大的形如 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{a})$ 的连续纯域》，预印本，https://arxiv.org/pdf/2504.03904，2025。[Dou24] J. Dousselin，《类数较大的阿贝尔三次域》，《美国数学会会刊》152 (2024)，第 8 期，3255–3264。MR 4767260[Duk98] W. Duke，《算术重数的界》，《国际数学家大会论文集》第 II 卷（柏林，1998），1998，页 163–172。MR 1648066[Duk04] ，《类群较大的数域》，《数论》，CRM会议论文讲义，第 36 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2004，页 117–126。MR 2076589[EV05] J. S. Ellenberg 和 A. Venkatesh，《计数判别式有界且伽罗瓦群指定的函数域扩张》，《代数与数论中的几何方法》，《数学进展》第 235 卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2005，页 151–168。MR 2159381[EV07] ，《反射原理与类群挠子的界》，《国际数学研究通知》(2007)，第 1 期，文章编号 rnm002，18。MR 2331900[Fr¨o59] A. Fr¨ohlich，《有限数域中的属域与属群。I、II》，《Mathematika》6 (1959)，40–46，142–146。MR 113868[Gra95] A. Granville，《素数分布中的意外不规则性》，《国际数学家大会论文集》第 1、2 卷（苏黎世，1994），Birkh¨auser，巴塞尔，1995，页 388–399。MR 1403939[GS03] A. Granville 和 K. Soundararajan，《 $L(1,\chi_d)$ 的取值分布》，《几何与泛函分析》13 (2003)，第 5 期，992–1028。MR 2024414[Has30] H. Hasse，《以类域论为基础的三次数域算术理论》，《数学杂志》31 (1930)，第 1 期，565–582。MR 1545136[Ish76] M. Ishida，《代数数域的属域》，《数学讲义》第 555 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1976。MR 435028

[Mai85] H. Maier, 《短区间中的素数》, 《密歇根数学杂志》32（1985）, 第2期, 221–225。MR 783576[PTBW21] L. B. Pierce、C. L. Turnage-Butterbaugh 和 M. M. Wood, 《关于数域类群中 ℓ扭结的一个猜想：从矩的角度出发》, 《数学研究通讯》28（2021）, 第2期, 575–621。MR 4258981[Rob01] D. P. Roberts, 《三次域判别式的密度》, 《数学计算》70（2001）, 第236期, 1699–1705。MR 1836927[Ser97] J-P Serre, 《Mordell-Weil定理讲义》, 第三版, 《数学论题》, Friedr. Vieweg & Sohn, 布伦瑞克, 1997年, 附有 Brown 和 Serre 撰写的序言。MR 1757192[Sha74] D. Shanks, 《最简三次域》, 《数学计算》28（1974）, 1137–1152。MR 352049[Shi00] D. K. L. Shiu, 《同余素数串》, 《伦敦数学会杂志》（第2辑）61（2000）, 第2期, 359–373。MR 1760689[ST23] A. Shankar 和 J. Tsimerman, 《关于数域类群中2、3、4和5-扭结的非平凡界, 条件是标准 L-函数猜想成立》, 预印本, https://arxiv.org/pdf/2112.12949, 2023年。[Tho09] F. Thorne, 《超越 $\mathbb{Z}$的Maier矩阵》, 《组合数论》, Walter de Gruyter, 柏林, 2009年, 第185–192页。MR 2521961[TS34] O. Taussky 和 A. Scholz, 《虚二次数域的三次类数域的主理想：其计算确定及其对类数域塔的影响》, 《纯粹与应用数学杂志》171（1934年）, 19–41。MR 1581417 ¨or ¨ar- quadratischer Zahlk ¨orper: ihre rechnerische Bestimmung und ihr Einfluß auf den Klassenk ¨orperturm, J. Reine Angew. Math. 171（1934）, 19–41。MR 1581417[TT13] T. Taniguchi 和 F. Thorne, 《三次域计数函数中的次项》, 《Duke数学杂志》162（2013）, 第13期, 2451–2508。MR 3127806[Wat04] M. Watkins, 《虚二次域的类数》, 《数学计算》73（2004）, 第246期, 907–938。MR 2031415[YB24] D. Yhee 和 D. Byeon, 《具有大类数的连续纯三次域》, 《Ramanujan杂志》65（2024）, 第2期, 717–724。MR 4947694