arXiv:2601.03995v1 [physics.optics] 7 Jan 2026

级联偏振光学中帕斯卡三角形的出现：场变换的直观框架

Ata Ur Rahman Khalid[1*],Naeem Ullah[2],Nannan Li[3],Hui Li[3],
Muhammad Ali Babar Abbasi[4],Robert M Bowman[1*]

[1]贝尔法斯特女王大学量子材料与技术中心数学与物理学院，英国贝尔法斯特 University Road，BT7 1NN

[2]浙江大学光电科学与工程学院光电与电磁研究中心，中国杭州 310058。

[3] 集成电路与光电芯片学院，深圳技术大学，中国深圳 518118

[4] 贝尔法斯特女王大学电子、电气工程与计算机科学学院，英国贝尔法斯特 BT9 5BN

[*]通讯作者。ataurrahman.khalid@qub.ac.uk；r.m.bowman@qub.ac.uk

《自然》蕴含着数学之美，体现在令人惊叹的数列模式、对称性和结构之中。在此，我们揭示，在由扭曲双折射光学元件构成的多层结构中，帕斯卡三角形的递归数列模式自然地嵌入琼斯矩阵的结构中，并直观地为像素间场变换提供了一种通用解。由此得到的独立解适用于整个电磁波谱，将 N 层超表面与传统体波片统一在同一框架中——

该框架全面阐释了线偏振和圆偏振基底下的双向复振幅调制与波前工程，同时大幅降低了计算成本。从本质上说，在偏振光学/光子学中发现数列模式，将对量子光学、理论引导的人工智能模型训练、生物医学工程与成像、偏振信息加密以及先进传感应用产生广泛影响。

自然以多种面貌呈现数字之美，这一点体现在我们周围错综复杂的图案和对称性中。这些对称性和图案不仅赏心悦目，也深深植根于自然和物理学的基本定律之中。帕斯卡三角形是一种递归数字模式，作为一种数学模式，已知广泛存在于自然界，并在科学的各个领域都有详尽记载（*1*，*2*，*3*）。在电磁学领域，光学结构在某些物理条件下是否遵循可辨识的数字模式?

偏振调控是基础物理学和应用光学中的重要课题；然而，光在多层系统中的传播行为仍未得到充分探索。琼斯矩阵形式是一种用于分析光偏振态的数学框架（*4*，*5*）；它规定了如何通过 2×2 琼斯矩阵 $J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$ 将输入偏振态转换为所需的输出态。在体材料光学波片（WPs）中，均匀表面在 J 通道上取固定的复振幅值，限制了其实现动态波前调制的能力。相比之下，由空间分布的光散射超构元件（*6*）构成的人造亚波长界面（超表面），通过结构各向同性或各向异性以及单个像素处的面内旋转，对折射率进行局部调制，从而以前所未有的方式控制 J 光的输出通道，彻底改变了偏振调控（*7*，*8*，*9*，*10*）。尽管对输出通道的控制能力极强，单层超表面在根本上仍受限于只能通过传播相位和/或几何相位调制四个输出通道中的三个（*11*），且其光学响应具有方向对称性（补充文本）。

为突破通道容量限制并实现超表面的双向控制，近年来，人们开始采用一种替代方案：堆叠旋转的各向异性结构。

尽管多层框架已展现出实现非对称响应（12, 13）、圆二色性（14）、全息信息编码（15, 16, 17, 18, 19）、动态波束转向和焦点调谐（20, 21, 22, 23, 24, 25），以及涡旋光束生成（26, 27, 28, 29）的卓越能力，但其工作原理背后的理论基础仍不明晰。迄今为止，只有少数研究针对双层（30, 15）和少层超表面构型（31, 32, 18）试图解释复振幅变换；然而，这些方法只能提供部分解释，无法阐明多层构型中场变换的内在机制。值得注意的是，由于平行构型中各向异性超构元件之间存在相对旋转，与各向同性结构（33, 34, 35, 36）不同，面内旋转超构元件的相位调制不能仅通过简单叠加彼此相对的超构元件的相位来实现。为了通过超表面的级联排列提取输出通道的最优参数和复振幅，传统上采用库搜索或池搜索，并辅以逆向设计、深度学习等先进优化技术，以及由人工智能和机器学习工具驱动的方法（16, 37, 38, 39, 40, 41, 21）。尽管这些方法取得了显著成果，但它们往往如同“黑箱”，只能提供经验性解决方案，却未能充分阐明其内在原理。

研究表明，体材料波片与超表面波片之间存在内在的相似性（*42*，*43*，*44*），而它们的级联配置对于偏振调控不可或缺（*45*，*46*，*38*，*16*）。体光学波片级联配置的复振幅计算表面上较为简单，而超表面波片级联配置的计算则十分复杂且耗费资源。本研究统一了这两种情形，并揭示了调控双向场变换的底层动力学和隐藏对称性。通过严格分析，我们发现，自然界以内在方式将琼斯矩阵元中的旋转项按特定形式排列编码起来，这种排列遵循一种特定的递归数字模式，呈现为数三角形，即帕斯卡尔三角形／阿尔-萨马瓦尔三角形，这是偏振光学领域首次观察到这一现象。因此，借助无穷级数，这些数列模式有助于建立级联双折射元件的广义解，通过预测和识别实现所需复振幅调制所需的特定参数，有效降低计算成本；同时也揭示了此前被误解或尚未

观察到的诸多迷人现象。例如，与普遍认知不同（*47*），在扭转级联构型中，圆偏振（CP）的所有通道都存在旋转诱导的几何相位项，其取决于由二项式系数决定的相对角相互作用。解析解表明，光反向传播时，线偏振基底和圆偏振基底中的对角项与非对角项会以不同方式交换位置。解析解还表明，采用双层半波片超表面设计可以抑制圆偏振交叉通道。此外，对于通过超表面进行的高级波前工程，与依赖半波片相比，采用波片组合更为有效，因为这样能够更充分地利用所有输出通道（补充文本）。这并非本研究的全部内容；这一框架仍有更多值得探索之处。

为验证基于数列模式的解析解，我们首先在光频下开展了实验，搭建了一个由堆叠和扭转构型的体波片组成的通用平台。随后，我们将研究扩展到更宽光谱范围内的超表面，尤其探索其在光波和毫米波（mmWave）中的适用性。实验和数值结果与我们的理论分析高度一致，为线偏振和圆偏振（CP）情况下的解析解提供了有力验证。该广义解适用于级联各向同性和/或各向异性超表面以及体光学波片，确保了设计灵活性、通道操控能力、可重构性等诸多优势。在本研究中，我们针对的是基础层面的问题，研究范围仅限于上述讨论的领域，并不全面；解析解的适用范围还可以进一步拓展，以深入探索和发现偏振电磁学中的新现象。此外，通过多层结构对两种偏振基进行广义控制，意味着信息加密、高分辨率成像、数据存储、大容量显示和量子技术将迎来一种全新的范式。

线性基底中的广义琼斯矩阵与递归数列模式

我们首先深入探究用于复振幅调制的堆叠式各向异性级联光学系统，进而观察琼斯矩阵中的数字模式。引入旋转矩阵后，线性基下单层旋转双折射波片的琼斯矩阵可化简如下

（公式 S2）：

$$J_{Linear}^{n} = \begin{bmatrix} t_{pn} + t_{qn}\cos 2\theta_n & t_{qn}\sin 2\theta_n \\ t_{qn}\sin 2\theta_n & t_{pn} - t_{qn}\cos 2\theta_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $t_{pn} = (t_o^n + t_e^n)/2$ 和 $t_{qn} = (t_o^n - t_e^n)/2$，在输出通道中的能量路由和相位调制方面发挥着关键作用。旋转级联系统中的琼斯矩阵解析解逐渐变得复杂，迄今为止，尚无数学框架能够完全描述堆叠系统中的偏振变换。在这种情况下，如图 1A 所示，无源、无损、互易且无耦合系统在正向（F）方向上的变换矩阵，可以通过按照光遇到各个光学元件的相反顺序，将相应的琼斯矩阵相乘得到，其数学表达式如下：

$$J^{F-N-layerd} = J^{N} * J^{N-1} * J^{N-2} * \cdots * J^{3} * J^{2} * J^{1} = \prod_{n=1}^{N} J^{N-n+1} \tag{2}$$

其中 J^n 是电磁（EM）波在系统中遇到的第 n^{th} 个元件的琼斯矩阵。通过仔细解析线性基中的琼斯矩阵 $J_{Linear}^{F-N-layerd}$ 分量，可以观察到，大自然以一种称为“帕斯卡三角形”的特定模式编码了双折射结构的旋转角，这突出了系统中旋转角项所固有的有序性和对称性。角度项的系数同样遵循一种特定模式，可通过容斥方案加以说明；这进一步深化了其与自然递归序列之间的联系，并为 N 层双折射光学元件的偏振问题提供了精确解（补充文本 S1）。线性基中级联双折射波片系统的紧凑广义琼斯矩阵可通过嵌套求和表示如下：

$$J_{Linear}^{F_N_Layered} = \sum_{\substack{M=0 \\ M\le N}} \mathbb{A} \begin{bmatrix} \cos\mathbb{R} & 0 \\ 0 & (-1)^M \cos\mathbb{R} \end{bmatrix} + \sum_{\substack{M=1 \\ M\le N}} \mathbb{A} \begin{bmatrix} 0 & \sin\mathbb{R} \\ (-1)^{M+1}\sin\mathbb{R} & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中，“$\mathbb{A} = \sum_{1\le n_{\alpha_1}<\cdots<n_{\alpha_M}\le N} \left(\prod_{n\notin\{n_{\alpha_1},\ldots,n_{\alpha_M}\}} t_{pn}\right)\left(\prod_{j=1}^{M} t_{qn_{\alpha_j}}\right)$”决定了旋转项“$\mathbb{R} = \left(2\sum_{j=1}^{M}(-1)^{j+1}\theta_{n_{\alpha_j}}\right)$”的系数。广义琼斯矩阵表明，$N$ 层堆叠的双折射光学元件在所有琼斯矩阵元中的角度相互作用计数“M”都遵循一种数字模式，该模式可用二项式系数 $C(N,M) = \{N!\}\{M!(N-M)!\}$表示。Al-Samaw’al/左对齐截断帕斯卡三角形（$0 \le M \le N$）以及左对齐截断

Pascal/Al-Samaw'al 三角形（$1 \le M \le N$）、图1B 或表格S1和S2，有助于快速查出琼斯矩阵对角元和非对角元对应的"M"的精确值（补充文本 S1 和补充视频 S1）。

在反向（B）方向，电磁波会按照图中所示的相反顺序遇到各元件。1a，因此，"B"方向的琼斯矩阵解析解可通过按光遇到光学元件的相反顺序，将相应的琼斯矩阵相乘得到，如下所示：

$$J^{B-N-layerd} = J^1 * J^2 * J^3 * \cdots * J^{N-2} * J^{N-1} * J^N = \prod_{n=1}^{N} J^n \tag{4}$$

根据补充文本中 $N = 1-4$ S1 对波反向传播的详细分析可知，单层光学元件对应的琼斯矩阵在"B"方向具有对称性，因此"F"和"B"两种情况下的光学响应保持一致。然而，在堆叠超表面中，由于矩阵乘法不具备交换性，系统对称性遭到破坏，从而产生非对称响应。经过仔细分析，我们发现，"B"方向的琼斯矩阵遵循与"F"方向相同的数列模式，但琼斯矩阵乘法顺序的反转会导致非对角元互换。"B"方向遵循的模式证实了其内在的一致性与数学上的优雅性，确保即使传播方向反转，光学响应仍然可预测且可进行解析处理。"B"方向的琼斯矩阵可写为： $J^{B-N-layerd} = (J^{F-N-layerd})^T$，其中"T"表示转置。

圆偏振基中的广义琼斯矩阵与递归数列模式

我们进一步在圆偏振基中研究了旋转级联系统中的复振幅调制，并通过求解琼斯矩阵推导出解析解，观察到了特定的数字模式（补充文本 S2）。圆偏振基中级联双折射波片系统的紧凑广义琼斯矩阵可通过以下嵌套求和来描述：

$$J_{CP}^{F_N_Layered} = \sum_{\substack{Meven \\ M \le N}} \mathbb{A} \begin{bmatrix} e^{-i\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & e^{i\mathbb{R}} \end{bmatrix} + \sum_{\substack{Modd \\ M \le N}} \mathbb{A} \begin{bmatrix} 0 & e^{i\mathbb{R}} \\ e^{-i\mathbb{R}} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

在圆偏振基中， N层堆叠双折射光学元件的一般表达式中，琼斯元件的旋转参数在对角元与非对角元中呈现出不同的数字模式。从式（5）可以明显看出，偶数M 对应琼斯矩阵的对角元，奇数M 对应非对角元。这一模式可从 Al-Samaw'al/左对齐截断帕斯卡三角形（图 1b 或补充表 S1）中直接识别：对角元选取奇数列（偶数 M），非对角元选取偶数列（奇数 M），即可轻松获得 M 的精确值（补充影片 S2）；详细分析见补充文本 S2）。与线性基类似，圆偏振基中的旋转项可通过组合数学设定，其系数可通过容斥方案调整，从而提供完整而直观的解法。接下来，我们沿"B"方向扩展理论计算，经过仔细分析后发现，在圆偏振基中，琼斯矩阵元也呈现出与"F"方向相同的模式。然而，矩阵乘法的非交换性会固有地引入方向性并打破系统对称性，使固定圆偏振基中的对角元位置发生交换，从而产生非对称响应（补充文本 S2）。这种模式的一致性进一步印证了解析解的系统性，并为处理级联系统中的琼斯矩阵分量提供了连贯的框架。

由式 3 和5可观察到，旋转相关项存在于四个通道中。此外，在超表面设计中，只有当 $N \geq 2$时，才可能实现用于波前工程的独立四通道调制。除此之外，广义解直观易懂（补充视频 S3 展示了一个关于 $N = 4$ 的示例），阐明了复杂关系，显著降低了总体计算复杂度，并确保对 N层堆叠式双折射光学元件进行无繁琐计算。作为演示，我们在 Matlab 中实现了解析方程，开发了"N= 2"图形用户界面（GUI），该界面在线性基底和圆偏振基底下，能够在个人计算机上于不到一秒内，为任意波片提供琼斯矩阵元的逐像素双向复振幅信息（数据 S1 和 S2）。

实验和数值模拟结果

为验证基于递归数列模式的解析解，我们首先针对不同的 $N = 1-4$ 光频级联配置开展了一系列实验：搭建具有堆叠和扭转构型的体波片通用平台，并观察偏振变换，从而获得基础性认识并证实理论（补充文本 S3）；这为将该概念拓展至更先进的基于超表面的设计铺平了道路。在主稿件中，我们以线偏振光通过一组体四分之一波片为例，如图 2A 所示。利用图形用户界面（GUI）（数据 S1），我们提取了在线性正交偏振下出射琼斯矩阵元的双向复振幅。在“F”方向，琼斯矩阵“$J_{Linear}^{F-2-Out}$ =。707 $\begin{bmatrix} e^{i\pi/4} & e^{-i3\pi/4} \\ e^{i3\pi/4} & e^{i3\pi/4} \end{bmatrix}$”中的复振幅表明，

光会转换为圆偏振光，其旋向可通过入射线性正交偏振光进行切换。正如解析模型所预测的，琼斯矩阵的非对角元在传播方向反转时交换位置，这与我们的图形用户界面（GUI）结果完全一致，如“$J_{Linear}^{B-2-Out}$ =。707 $\begin{bmatrix} e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & e^{i3\pi/4} \end{bmatrix}$”所示。图 2A 所示四分之一波片构型

的实验结果验证了双向偏振变换与解析解完全吻合，并证明琼斯矩阵元确实会随着传播方向反转而交换位置，如图 2B 所示。不同级联配置的体波片在线性“x_{in}”和“y_{in}”偏振下的偏振变换结果见补充文本 S1，其同样与解析结果完全吻合；由此证实了解析解的准确性和稳健性。

我们进一步开展研究，以探索并通过数值方法验证不同级联配置介电超表面在入射线偏振光和圆偏振光下的双向复振幅变换（ $N = 1-4$ 补充文本 S1）。在此，正文中我们展示了线偏振光入射于四层堆叠超构元件时的结果。这些超构元件按如下方式排列：顶层半波片（θ_1）与底层四分之一波片（θ_4）相对旋转，而中间两层分别固定为各向同性超构元（$\theta_2 = 0°$）和半波片（$\theta_3 = 135°$），如图 3A 所示。图 3B 和 C 分别给出了旋转偏移量（θ_1）和（θ_4）对应的双向复振幅解析结果与数值结果，并进行了比较。比较结果表明

解析结果与数值结果之间不存在明显差异，为解析模型对各向同性与各向异性几何结构均有效，并验证理论框架提供了有力且确凿的证据。

为展示解析框架在波前工程中的广泛适用性，我们进一步开展研究，验证了其解析预测，例如四路独立通道调制，以及“B”方向上的非对称响应。多年来，圆偏振基中的四路独立波前操控一直是一个研究难题，只有少数研究尝试在同偏振和交叉偏振通道上实现波前工程（*31*，*32*，*37*，*48*）。这些方法依赖池搜索方案，通过数值模拟在参数空间中构建庞大的电磁响应库。借助我们的解析框架，只需采用由半波片和四分之一波片构成的双层结构，即可便捷地实现圆偏振基中的四路独立波前操控。我们的解析框架能够预测并确定实现独立相位操控所需的具体参数。为此，我们采用双层级联介质超表面设计，在各个输出通道上成功编码了携带轨道角动量、且具有不同拓扑荷（l）的涡旋光束，并观察到圆偏振条件下“B”方向上的非对称响应。图 3D 和 E 展示了不同轨道角动量模式的相位分布，体现了四通道调制和非对称响应；其详细机制与分析见补充文本 S3，从而全面阐释了设计原理。总之，这一广义解能够对输出通道实现精确的多层复振幅控制，同时为两种偏振基下的双向光学响应提供直接的物理洞见和可预测性。

最后，我们在毫米波频段的线偏振和圆偏振条件下，通过级联各向异性金属超构元件的相位分布实验，验证了琼斯矩阵元的互换。与短波长下的介质结构不同，在毫米波频段，金属棒中线性正交偏振之间的 $\Delta\phi = \pi$ 相位差难以实现。此外，在这一频段，堆叠金属构型中存在不可避免且不希望出现的因素（反射/耦合），其影响甚至会增强；然而，当电磁波从背面入射时，线偏振基和圆偏振基下琼斯矩阵元相位分布的互换条件仍保持一致。为验证琼斯元件互换的解析预测，我们制作了两组各向异性矩形超构元件阵列，其旋转角分别为 0°、 45°、 90° 和 135° ，并

将成对的超构元件排列成非单体级联构型。图中展示了用于双向场变换的双层非单体级联构型示意图、制作完成的双层超表面以及制成样品的放大图，见图4A。随后，对所有可能的双层级联构型的双向电磁响应进行了测量和分析。图中展示了 13 GHz 下四种不同超表面构型的相位分布，见图4B 和 C，其中底层（θ_2）固定为 0°， 45°， 90°和 135°；而各设计中的顶层（θ_1）则从 0° 旋转至 135° ，步长为 45° 。

实验结果展示了线性基中非对角琼斯矩阵元素的交换，以及圆偏振基中对角元素的交换，验证了琼斯矩阵固有的方向性，这种方向性解释了元素交换现象。图中使用同色旗形标记突出显示了相应的琼斯元件交换。在补充文本S3中，我们还纳入了三层堆叠构型的实验结果：各向同性方形贴片夹在旋转棒之间。这些结果进一步验证了，对于各向同性与各向异性几何结构的组合，方向相关响应是一致的。器件制备和测量技术详见方法。（*49*）。

结论与展望

帕斯卡三角形在偏振光学/光子学中的出现，提供了有意义的见解，揭示了隐藏的对称性，并阐明了级联双折射光学元件中的场变换机制。更具体地说，旋转角度中的数列模式及其系数相互作用，为双向逐像素场变换提供了统一且直观的广义解，并揭示了光如何在级联体波片与超表面波片中调控复振幅，从而解决偏振调控这一长期难题。在本研究中，我们通过广义解验证了双向复振幅调制、参数提取、通道调控以及琼斯矩阵元交换。需要强调的是，其基本原理具有普适性，可应用于不同电磁波段，因此我们的研究结果并不局限于特定波长，并可通过适当缩放转换至所需的频率域。此外，诸如全息信息

加密、涡旋光束操控和可重构莫尔透镜效应等复杂波前工程应用将由此方法催生，并可通过平移和/或旋转各层，利用已知的逐像素复振幅信息实现。我们设想，双向场变换与参数提取的广义方法将为新型光子器件的设计提供指导，并拓展偏振光学/光子学的应用范围；对紧凑、高效、可重构且多功能光学元件的需求正迅速增长。

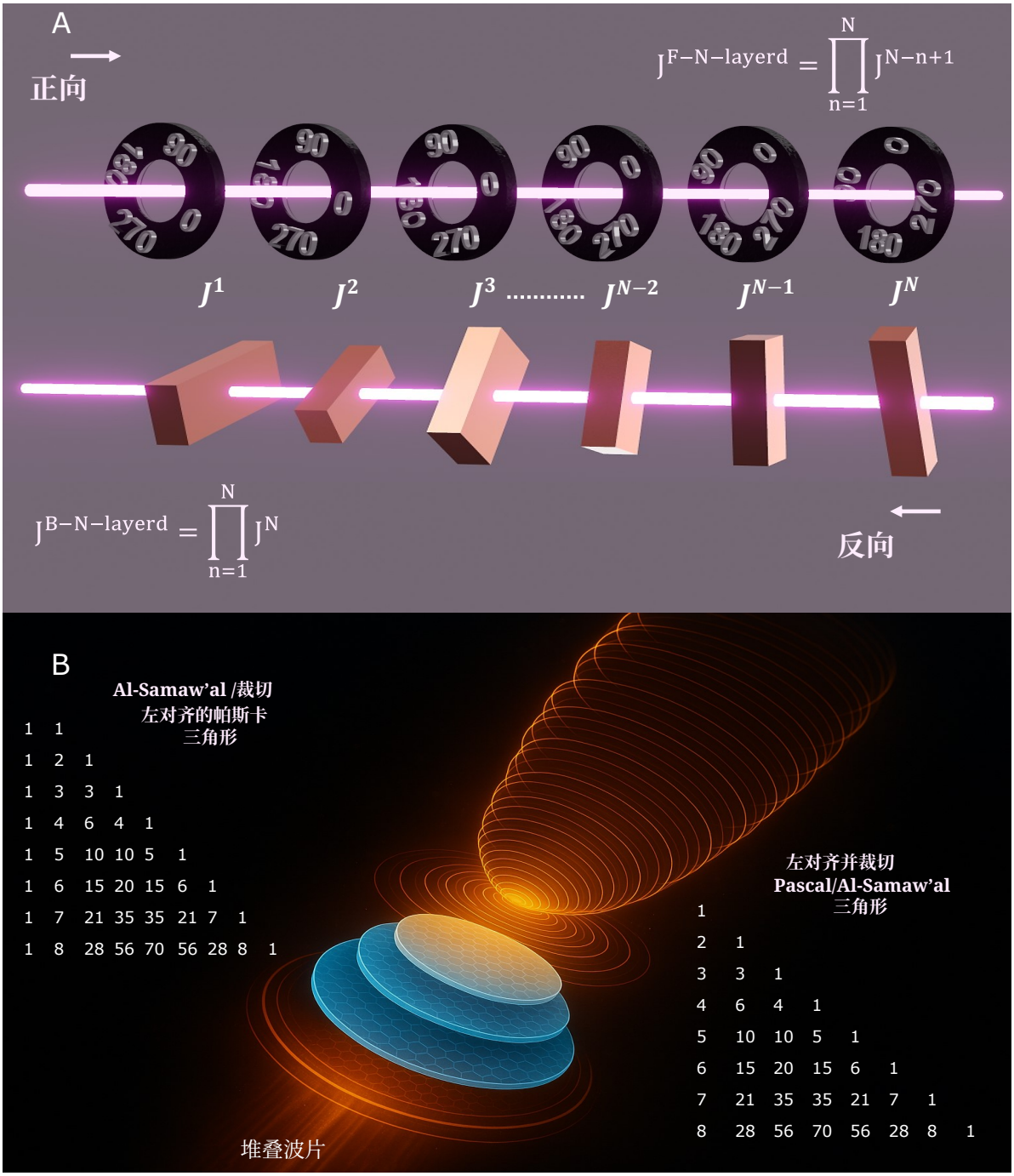

图 1：**扭曲双折射光学元件多层框架的广义双向琼斯矩阵解及数字模式。**（**A**）示意图展示了通过面内旋转体材料和超表面（旋转砖块）波片按级联配置排列实现双向复振幅调制的原理。（**B**）三角形中的数字是堆叠双折射波片的二项式系数（$N = 1 - 8$）。

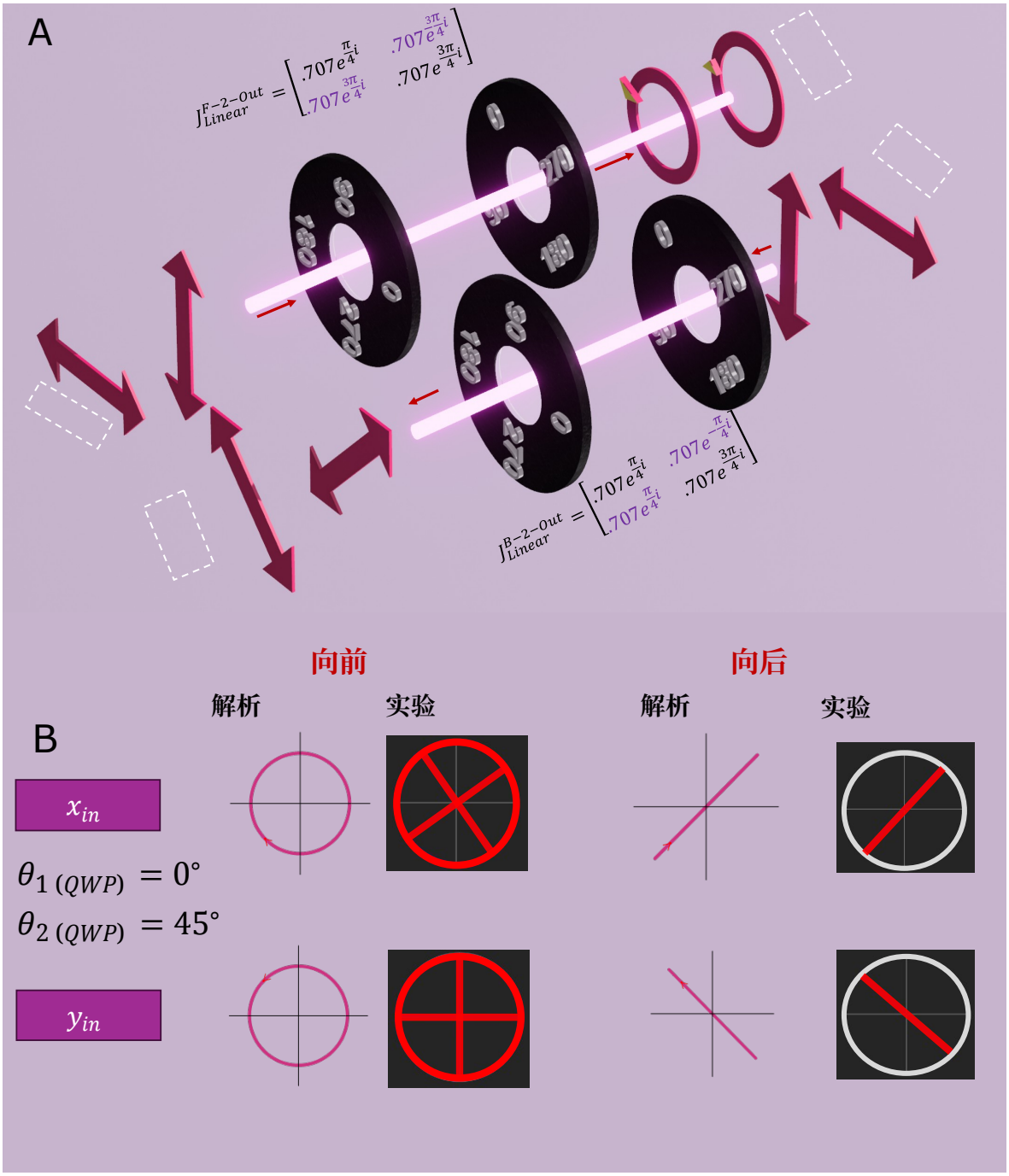

图2：验证解析解的实验结果。（**A**）示意图展示了当光通过方向为 $\theta_1 = 0°$&$\theta_2 = 45°$ 的一对体四分之一波片时，线性基中的琼斯矩阵元交换和双向偏振转换。（**B**）“F”和“B”方向的解析结果与实验结果。双向偏振变换的实验结果与解析解无缝吻合。

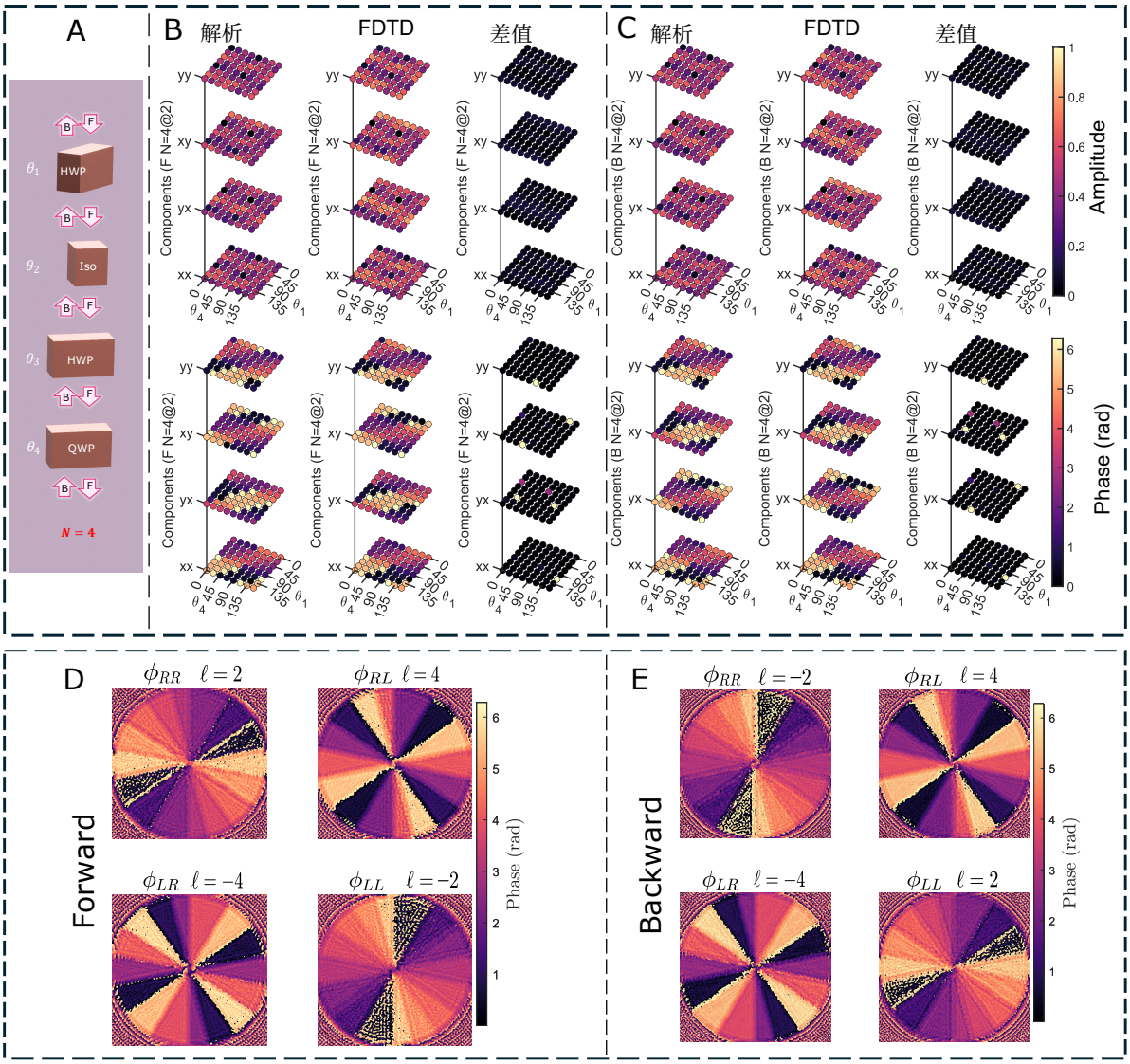

图3：基于预测解析参数对复振幅调制和双向四路圆偏振通道操控的验证。N=4级联超表面波片的单元结构。（**B 和 C**）当顶部和底部波片的相对旋转角度从 0° 到 157。5° 、步长为 22。5°时，线偏振分量的绝对振幅、相位及其差值的解析结果与数值结果（时域有限差分法）对比。符号“@”表示单元结构中的第二层由各向同性超构元构成。（**D**）“F”方向的近场轨道角动量相位分布，以及（**E**）“B”方向的近场轨道角动量相位分布。具有不同轨道角动量模式l = 2、l = −4、l = 4 &l = −2 的涡旋光束透射相位分布证实了四路轨道角动量生成的成功。反向圆偏振出射通道的相位分布验证了对角元上的拓扑荷值发生了交换。

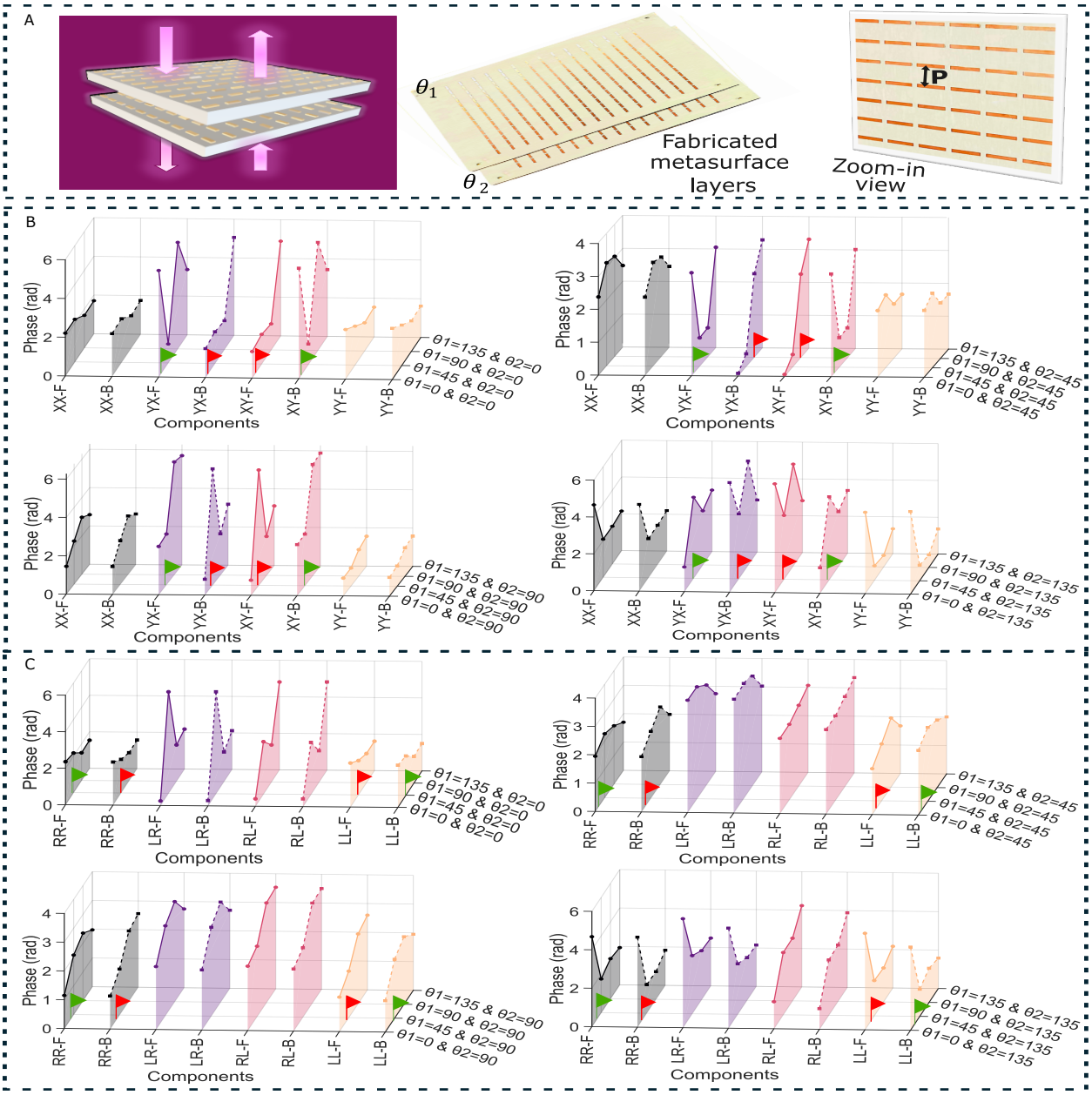

图4：使用为毫米波设计的双层级联超表面，在直线基和固定圆偏振基底中对方向性进行实验验证。（**A**）非单片式双层超表面设计实现双向场变换的示意图，以及制备样品的照片和所提设计的放大图。“P”表示周期性。（**B 和 C**）用于验证琼斯元件在直线基和圆偏振基底中互换的双向相位分布。（**B**）直线基中互换的非对角元；（**C**）圆偏振基底中互换的对角元。互换的元件用相同颜色的标记表示。 θ_1 和 θ_2 的单位为度。

参考文献和注释

1. F. L. Sendker，等，《代谢酶进化过程中分形几何的涌现》。《自然》**628** (8009)，894–900（2024）。2. G. J. Mitchison，叶序与斐波那契数列：对许多植物中典型的螺旋叶序提出了一种解释。《科学》**196** (4287)，270–275（1977）。3. V. Pletser，生物学、物理学、天体物理学、化学和技术中的斐波那契数与黄金比例：一篇非穷尽性综述。*arXiv* 预印本 *arXiv:1801.01369*（2017）。4. B. Xiong，等，利用设计噪声突破光学超表面偏振复用的局限。《科学》**379** (6629)，294–299（2023）。

5. Y. Bao、L. Wen、Q. Chen、C.-W. Qiu、B. Li，借助单层超表面实现二维平面琼斯矩阵的容量极限。《科学进展》**7** (25)，eabh0365（2021）。

6. N. Yu, 等，《光传播中的相位不连续：广义反射和折射定律》。《科学》**334**(6054), 333–337 (2011). 7. N. A. Rubin, A. Zaidi, A. H. Dorrah, Z. Shi, F. Capasso, 基于超表面的琼斯矩阵全息术。《科学进展》**7** (33), eabg7488 (2021). 8. Y. Yang, 等, 用于重新构想近未来颠覆性光学平台的集成超表面。《光：科学与应用》**12** (1), 152 (2023). 9. A. H. Dorrah, F.Capasso，利用平面光学实现可调结构光。《科学》**376** (6591),eabi6860 (2022). 10. R. C. Devlin, A. Ambrosio, N. A. Rubin, J. B. Mueller, F. Capasso，光的任意自旋到轨道角动量转换。《科学》**358** (6365), 896–901 (2017).

11. B. M. J. R.N. Devlin,RC Groever B. Capasso F.，“超表面偏振光学：对任意正交偏振态进行独立相位控制”，。《物理评论快报》**118**, 113901 (2017).

12. J. Liu，等，利用少层各向异性超表面对圆偏振波进行高效率互易双频非对称传输。*Advanced Optical Materials* **4**(12), 2028–2034 (2016). 13. H. Kim, J. Jung, J. Shin，利用双层超表面实现双向矢量全息及其在光学加密中的应用。*AdvancedMaterials* **36** (44), 2406717 (2024). 14. X. Zhao，等，利用双层多原子超表面实现最大光学本征手性。*Optics Letters* **47** (18), 4814–4817 (2022). 15. T. Chang，等，用于对相干光透射进行全面线性调控的通用超表面。*AdvancedMaterials* **34** (44), 2204085 (2022). 16. Q. Wei，等，基于级联超表面全息的旋转复用方法。*Advanced Optical Materials* **10** (8), 2102166 (2022). 17. Y. Bao，等，在双层超表面中观测到完整参数琼斯矩阵。*NatureCommunications***13** (1), 7550 (2022). 18. Z. Shi, N. A. Rubin, J.-S. Park, F. Capasso，不可分离偏振波前变换。*Physical Review Letters* **129** (16), 167403 (2022). 19. L. Deng，等，用于全空间光调控的双层超表面设计、制造与功能化。*Advanced Optical Materials***10**(7), 2102179 (2022). 20. J. Jung, H. Kim, J. Shin，利用带有内置全息图、可机械调节的金属透镜双联体实现激光的三维可重构聚焦与对准。*Nanophotonics* **12** (8), 1373– 1385 (2023). 21. X. Li，等，利用自旋复用衍射超表面同时对任意矢量结构光束进行分选。*Advanced Photonics Nexus***3** (3), 036010–036010 (2024). 22. M. Mansouree，等，通过伴随优化实现的多功能2.5维超结构。*Optica* **7** (1), 77–84 (2020). 23. J. C. Zhang，等，用于三维变焦的6G超器件。《科学进展》**9**(4), eadf8478 (2023).

24. X. Cai, 等，利用级联超表面动态调控太赫兹波前。《先进光子学》 **3**(3), 036003–036003 (2021). 25. Y. Luo，等，用于光学切片荧光显微术的变焦金属透镜。*Nano Letters***21** (12), 5133–5142 (2021). 26. F. Mei，等，用于高纯度涡旋生成的级联超表面。*Nature Communications***14** (1), 6410 (2023). 27. X. Zhang，等，基于任意琼斯矩阵的超表面光场变换。*Laser & Photonics Reviews* **18** (12), 2400539 (2024). 28. W. Liu，等，用于多维复用与解复用的全介质太赫兹超表面。*Laser & Photonics Reviews***18**(8), 2301061 (2024). 29. Z. Ma，等，利用N个级联偏振相关超表面，实现具备特定功能的2 N通道波前控制，并可进行电切换。*NatureCommunications* **15** (1), 8370 (2024). 30. L. Deng，等，通过取向辅助双层超表面实现完整复振幅调控。*Advanced Optical Materials* **11** (9), 2203095 (2023). 31. Y. Yuan，等，手性辅助几何相位超表面实现四路偏振通道的独立相位调制。*Naturecommunications* **11** (1), 4186 (2020). 32. Y. Yuan, K. Zhang, Q. Wu, S. N. Burokur, P. Genevet，通过非正交超表面实现任意偏振变换的效率极限。*Nature Communications***15** (1), 6682 (2024). 33. Y. Zhou，等，用于多波长超光学的多层非相互作用介质超表面。*Nano letters* **18** (12), 7529–7537 (2018). 34. Y. Wei，等，紧凑型偏振不敏感变焦金属透镜双片组。*AdvancedOptical Materials* **8** (13), 2000142 (2020).

35. C. Ogawa, S. Nakamura, T. Aso, S. Ikezawa, K. Iwami，由单晶硅超构原子构成、用于可见波长的旋转变焦莫尔金属透镜。*Nanophotonics* **11** (9), 1941–1948 (2022). 36. L. Zhang，等，用于连续二维光束偏转的高可调级联超表面。《先进科学》**10** (24), 2300542 (2023). 37. Y. Huang，等，基于超表面双联体实现方向性非对称传输的全光受控非逻辑门。《光电进展》**6** (7), 220073–1 (2023). 38. P. Georgi，等，利用级联超表面全息实现光学秘密共享。*Science Ad-vances* **7** (16), eabf9718 (2021). 39. S. Zhang，等，基于抗失调级联超表面的矢量波前操控。*Laser & Photonics Reviews*p. 2500309 (2025). 40. C. Sun，等，非经典自旋复用超表面实现的多功能超显微镜。《*Small*》**20**(49), 2404003 (2024). 41. R. Zhang，等，双层超表面提升偏振复用容量。*Laser & Photonics Reviews* **18** (9), 2400126 (2024). 42. C. Chen，等，具有高效率的波前工程超表面四分之一波片。《先进光子学研究》**2** (3), 2000154 (2021). 43. Z. Liu，等，具有波长无关偏振转换角的单层等离激元超表面半波片。《*ACS*光子学》**4** (8), 2061–2069 (2017). 44. Y. Deng, Z. Cai, Y. Ding, S. I. Bozhevolnyi, F. Ding，超表面光学波片的最新进展。*Nanophotonics***11** (10), 2219–2244 (2022). 45. J. L. Vilas, J. M. Herrera-Fernandez，基于波片的定制延迟器。《应用光学》**61** (26), 7726–7730 (2022). 46. J. M. Herrera-Fernandez, J. L. Vilas, L. M. Sanchez-Brea, E. Bernabeu，在宽光谱范围内设计超消色差四分之一波延迟器。《应用光学》**54** (33), 9758–9762 (2015).

47. Y. Huang, Z. Zhang, C. He, X. Wang, W. Zhu，利用简单几何旋转实现的手性辅助自旋解耦超表面。*AdvancedMaterialsTechnologies***10** (4), 2401145 (2025)。

48. Y. Yuan，等，手性辅助超表面赋能的全偏振综合全息显示。《小科学》**4**(8), 2400138 (2024)。

49. 材料与方法见补充材料。

致谢

所有作者均充分认可，本文的数学框架由 A.U.R.K. 构建。我们感谢贝尔法斯特女王大学 EEECS 的 Kieran Rainey 在毫米波实验中提供的技术支持。同时，感谢 Yessenia Jauregui-Sanchez 在稿件撰写过程中提供技术支持。Dall-E 用于生成图1b 的背景图像，该图仅用于示意，不反映任何结果或发现。补充视频动画由 Manim动画引擎制作。

资助： 本研究获得英国研究与创新署（UKRI）优势地区基金（SIPF）SmartNanoNI项目的资助。M.A.B.A的工作部分获得科学、创新与技术部（DSIT）HASC中心项目以及数字、文化、媒体与体育部（DCMS）REASON项目的资助。N.L和H.L的工作部分获得国家自然科学基金委员会（62405203）、广东省重点学科建设项目（2022ZDJS110）以及广东省重点高校项目（2023ZDZX1019）的资助。

作者贡献：A.U.R.K 开展了该项目，R.M.B 负责指导。A.U.R.K 进行了数值建模和实验，并撰写了稿件。N.U 参与了部分仿真工作和稿件撰写。N.U、N.L 和 H.L 参与了数据分析与讨论。M.A.B.A 为毫米波实验提供了支持。A.U.R.K、N.U.、M.A.B.A 和 R.M.B 修改了稿件。所有作者均讨论了研究结果和稿件最终版本。

利益冲突：作者声明不存在任何利益冲突。

数据和材料可用性：模拟结果可通过方法和补充信息中所述的数值方法生成。本研究使用的补充代码（数据S1 和S2）将在同行评审后通过 Zenodo 平台上的存储库公开，并附有 DOI。评估论文结论所需的其他数据见论文和/或补充材料。**支持正文及本研究其他发现的补充信息（第S5-66页）可向作者索取**。

补充材料

材料与方法 补充文
本 图 S1 至 S28表
S1 和 S2参考文献
*(49-49)*数据S1 和 S2
影片S1 至 S3

补充材料：

级联偏振光学中帕斯卡三角形的涌现：

场变换的直观框架

Ata Ur Rahman Khalid*、Naeem Ullah、Nannan Li、Hui Li,

Muhammad Ali Babar Abbasi、Robert M. Bowman*

*C通讯作者。电子邮件：ataurrahman.khalid@qub.ac.uk;r.m.bowman@qub.ac.uk

此 PDF 文件包含：

材料和方法 补充文本 图
S1 至 S28 表 S1 和 S2 数
据 S1 至 S2 的说明 影片
S1 至 S3 的说明

材料与方法

光学装置与偏振测量

本研究所用的体光学波片购自 Thorlabs。用于测量双向偏振变换的级联块体波片实验装置如图 S2 所示。实验装置经过仔细校准，以确保测量准确。激光光源（Thorlabs ITC4001-Benchtop Laser Diode/TEC Controller，1A/96W）产生波长为 $630\ nm$ 的光束，并由光纤将其引导至线偏振片，产生线偏振光。随后，线偏振光通过不同的堆叠波片（Thorlabs），这些波片以不同角度旋转，以调制偏振态。所得光束经偏振仪（Thorlab PAX1000IR1/M）收集，并通过 Thorlab 偏振仪软件记录获得的偏振态。不同旋转堆叠构型对应的图形数据均予以保存并绘制，以供进一步分析。

毫米波制造与测量

两组样品均采用标准印刷电路板（PCB）工艺制备：一组为旋转角度为 15×15、45°、135° 的各向异性金属元件杆阵列（共 8 个样品），另一组为倾斜角度为 67。5° 的各向同性方形阵列。设计采用厚度为 0。813 mm、介电常数为 3。38 的介电基板，并在厚度为 0。035 mm 的铜覆层（ RO4003C ）上蚀刻形成超构元件图案。单个制备样品的总厚度约为 0。85mm。对于非整体式级联设计，我们在印刷电路板层的角部打孔，以便按照设计要求，使用装入自制样品支架中的尼龙螺栓堆叠各层。各层之间通过尼龙螺母设置 $5\ mm$ 的固定空气间隙，以实现所需的电磁响应。为尽量减少外部干扰，制备样品的测量在消声室中进行。采用工作于宽带线性极化“7 至 $14\ GHz$”范围的喇叭天线作为馈源，发射和接收电磁波，以测量样品在微波频段的响应。发射天线与接收天线之间的距离固定为 $d > 20\lambda_o$；其中 $\lambda_o = 13\ GHz$。发射和接收天线均连接至安捷伦科技 8381C 矢量网络分析仪（VNA），用于测量样品在正向和

反向的偏振响应。测量时，我们采用非整体式设计方法，将旋转层取出并放置在固定层上方。制备样品及测量过程的照片见图 S2。

数值模拟

在光学波段，使用商用 Ansys Lumerical FDTD Solution 软件进行数值模拟，以模拟该设计在光学域中的行为。通过硅（Si）纳米柱/砖块实现数值模拟，从而引入复振幅变换。单元的亚波长晶格常数设为400 nm ，以确保准确模拟光学响应。在单元模拟中，采用周期性边界条件和完美匹配层（PML）边界条件，以最大程度地减少反射。对于轨道角动量（OAM）生成设计，将优化后的硅纳米柱/砖块空间排布在 SiO_2衬底上。此外，所有方向均采用 PML 边界条件。对于单元模拟，在（X&y）方向采用网格尺寸 5 nm ，在 z 方向采用网格尺寸 20 nm 。对于用于生成 OAM 的阵列设计，在（X，Y&Z）方向将网格尺寸调整为 25 nm。工作波长设为 700 nm。

在毫米波波段，使用 CST Studio Suite 作为电磁响应分析和参数优化的仿真工具。横向采用周期性边界条件，并使用 Floquet端口进行激励。优化后的单元在横向和纵向的周期性“P”为 10 mm，各向异性铜棒优化后的长度和宽度为8×1。2 mm，各向同性方形贴片优化后的边长为 $6\ mm \times 6\ mm$。采用 Rogger（RO4003C）作为衬底材料。

数据处理

解析解以及数值模拟和实验的原始数据均在 Matlab2022a 中进行了后处理。

可见光和毫米波波段的实验与测量装置详情

使用通用级联波片方案测量偏振变换的光学装置如图 S1A 所示，适用于 $N = 3$ 层。对于其他配置，则根据设计要求放置或移除光学波片。光学测量装置由激光光源、线偏振片（LP）、待测通用波片配置、偏振仪以及用于分析偏振态的计算机组成。与偏振仪相连的计算机装置如图 S1B所示。

图中展示了用于测量毫米波超表面电磁响应的已制备超表面原型，以及毫米波测量装置。S2图中展示了已制备的各向同性和各向异性超表面样品的不同视图与配置。S2A，并附有说明。对于非单体级联设计，我们在印刷电路板层的角部打孔，以便用尼龙螺栓将各层叠放，如图S2A（最右侧一列）所示，其中双层和三层非单体级联设计由螺母隔开，从而形成固定的空气间隙 $5mm$。图S2B 展示了微波暗室内测量环境的不同阶段及整套装置。测量时，根据设计要求将超表面样品叠放在自制样品支架中，并借助螺栓固定，然后将其置于发射（Tx）和接收（Rx）喇叭天线之间的中央位置。通过矢量网络分析仪测量所需频率下的电磁响应。

支持正文及本研究其他发现的补充信息（第 S5–S66 页）可向作者索取。

补充文本

图 S1 至 S28

表 S1 和 S2

数据 S1 至 S2 的说明

影片 S1 至 S3 的说明