arXiv:2601.04004v1 [math.GR] 7 Jan 2026

子群生成二部图的各种谱与能量

SHRABANI DAS、AHMAD ERFANIAN 和 RAJAT KANTI NATH*

ABSTRACT. 设 $L(G)$ 为群 G 的所有子群构成的集合。定义在 G 上的子群生成二部图 $\mathcal{B}(G)$ 是一个二部图，其顶点集划分为两个集合 $G \times G$ 和 $L(G)$；若顶点 $(a, b) \in G \times G$ 和 $H \in L(G)$ 生成 H，则它们相邻 a b。本文计算了 $\mathcal{B}(G)$ 的各种谱与能量，并确定当 G 为阶数为 $2p$ 的二面体群以及阶数为 $4p$ 的二循环群 $2p^2$ $4p^2$时，$\mathcal{B}(G)$ 是否为亚能量、超能量、CN-超能量、L-超能量或Q-超能量，其中 p 为任意素数。我们还证明，对于这些群，$\mathcal{B}(G)$ 满足 E-LE 猜想。

1. INTRODUCTION

设 $\mathcal{G}$ 是一个简单图，其顶点集为 $V(\mathcal{G}) = \{v_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$，边集为 m。分别用 $A(\mathcal{G})$ 和 $D(\mathcal{G})$ 表示 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵和度矩阵。$\mathcal{G}$ 的谱是 $A(\mathcal{G})$ 的特征值及其重数构成的集合。$\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵分别定义为 $L(\mathcal{G}) := D(\mathcal{G}) - A(\mathcal{G})$ 和 $Q(\mathcal{G}) := D(\mathcal{G}) + A(\mathcal{G})$。$L(\mathcal{G})$ 和 $D(\mathcal{G})$ 的特征值及其重数构成的集合，分别称为 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯谱（L-谱）和无符号拉普拉斯谱（Q-谱）。两个不同顶点 v_i 和 v_j 的公共邻域记作 $C(v_i, v_j)$，它是除 v_i 和 v_j 以外，同时与 v_i 和 v_j 相邻的所有顶点构成的集合。$\mathcal{G}$ 的公共邻域矩阵记作 $CN(\mathcal{G})$，定义为

$$(CN(\mathcal{G}))_{i,j} = \begin{cases} |C(v_i, v_j)|, & \text{if } i \neq j \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases}$$

$CN(\mathcal{G})$的所有特征值及其重数构成了 $\mathcal{G}$的公共邻域谱（CN-谱）。我们分别用 Spec($\mathcal{G}$)、L-谱($\mathcal{G}$)、Q-谱($\mathcal{G}$) 和 CN-谱($\mathcal{G}$)表示 $\mathcal{G}$的谱、L-谱、Q-谱和 CN-谱。这些多重集 Spec($\mathcal{G}$)/L-谱($\mathcal{G}$)/Q-谱($\mathcal{G}$)/CN-谱($\mathcal{G}$)可表示为 $\{(x_1)^{n_1}, (x_2)^{n_2}, \ldots\ldots, (x_k)^{n_k}\}$其中，$x_i$是 $A(\mathcal{G})$/$L(\mathcal{G})$/$Q(\mathcal{G})$/$CN(\mathcal{G})$的特征值，而n_i是其重数。若图 $\mathcal{G}$ 的 Spec($\mathcal{G}$)/L-谱($\mathcal{G}$)/Q-谱($\mathcal{G}$)/CN-谱($\mathcal{G}$)中仅含整数，则称该图为整图/L-整图/Q-整图/CN-整图。在图论中，确定整图、L-整图、Q-整图和 CN-整图是一个普遍问题（参见 [38, 8, 26, 43, 15, 51, 5]）。

2020 数学主题分类。 20D60、05C25、05C09。关键词和短语。 子群生成二部图、图能量、超能量图。

*通讯作者。

$\mathcal{G}$ 的能量 $E(\mathcal{G})$和公共邻域能量（CN-能量） $E_{CN}(\mathcal{G})$，分别是 $A(\mathcal{G})$和 $CN(\mathcal{G})$的特征值绝对值之和。因此

$$E(\mathcal{G}) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Spec}(\mathcal{G})} |\alpha| \quad \text{and} \quad E_{CN}(\mathcal{G}) = \sum_{\beta \in \text{CN-spec}(\mathcal{G})} |\beta|.$$

LE（$\mathcal{G}$）的拉普拉斯能量（L-能量）和 $\mathcal{G}$ 的无符号拉普拉斯能量（Q-能量），LE^{+}（$\mathcal{G}$），定义如下：

$$LE(\mathcal{G}) = \sum_{\lambda \in \text{L-spec}(\mathcal{G})} \left|\lambda - \frac{2m}{n}\right| \quad \text{and} \quad LE^{+}(\mathcal{G}) = \sum_{\mu \in \text{Q-spec}(\mathcal{G})} \left|\mu - \frac{2m}{n}\right|.$$

图的能量由 Gutman [31] 引入，而上述其他图能量由 Gutman等人 [34, 2, 5] 引入。众所周知，E（K_n）$= LE$（K_n）$= LE^{+}$（K_n）$= 2$（$n-1$）和 E_{CN}（K_n）$= 2$（$n-1$）（$n-2$）。若图$\mathcal{G}$ 具有 $|V$（$\mathcal{G}$）$| = n$，则称其为超能量图（见 [32, 53]），当且仅当 E（$\mathcal{G}$）$> E$（K_n）。若 E（$\mathcal{G}$）$< n$，则称其为亚能量图。类似地，若 LE（$\mathcal{G}$）$>LE$（K_n），则称 $\mathcal{G}$ 为 L-超能量图（见 [36]）；若 LE^{+}（$\mathcal{G}$）$> LE^{+}$（K_n），则称其为 Q-超能量图（见 [36]）；若 E_{CN}（$\mathcal{G}$）$> E_{CN}$（K_n），则称其为 CN-超能量图（见[5]）。寻找 CN-超能量图仍然是一个未解决的问题（见 [5, 未解决问题 1]）。

[4] 的公共邻域图，记作 con($\mathcal{G}$)，其邻接矩阵定义如下：

$$(A(\mathrm{con}(\mathcal{G})))_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } |C(v_i, v_j)| \geq 1 \text{ and } i \neq j \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

容易看出，当$\mathcal{G} = K_{1,n}$为顶点数为 $n+1$ 的星图时，$CN(\mathcal{G}) = A(\mathrm{con}(\mathcal{G}))$。例 2.1 [4], 表明，con($K_{1,n}$) $= K_1 \sqcup K_n$。因此，CN-谱($K_{1,n}$) =谱(K_1) ∪谱(K_n)。

过去几十年来，人们在有限群上定义了各种图，并对其进行研究，以刻画有限群或图。这类图中已有充分研究的例子包括交换图、非交换图、幂图、B superA 图等（见 [12, 13, 40, 6]）。注意，这些图都不是二部图。我们在 [17], 中引入了一种称为子群生成二部图（简称 SGB 图）的二部图，定义如下。设 G 是一个有限群，且$L(G) := \{H : H$ 是 $G\}$的一个子群。 G的 SGB 图记作 $\mathcal{B}(G)$，它是一个图，其顶点集 $V(\mathcal{B}(G))$分为两个集合 $G \times G$ 和 $L(G)$；若 H 由 a 和 b生成，则两个顶点$(a, b) \in G \times G$ 和 $H \in L(G)$相邻。在 [17], 中，我们得到了 $\mathcal{B}(G)$与有限群相关的各种概率（例如生成给定子群的概率、交换概率、循环度、幂零度和可解度）之间的关系。我们还建立了 $\mathcal{B}(G)$与 G的生成图之间的联系。此外，我们讨论了 $\mathcal{B}(G)$的各种图参数，例如独立数、支配数、围长和直径。在 [18], 中，我们计算了 $\mathcal{B}(G)$的各种拓扑指标，例如第一和第二 Zagreb 指标、Randić 连通指数、原子键连通指数、几何算术指数等，并验证了 Hansen-Vuki˘cevi´c 猜想 [37] 。Mahtabi 等人最近研究了定义在 G上的另一类二部图 [41]。

本文计算了 $\mathcal{B}(G)$ 的谱、L-谱、Q-谱、CN-谱及其相应的能量，其中 $G = D_{2p}$， D_{2p^2}， Q_{4p} 和 Q_{4p^2}，且 p 为任意素数，其中

D_{2m}是由 $\langle a,b:\ a^m=b^2=1,bab=a^{-1}\rangle$ 表示的二面体群，而 Q_{4m}是由 $\langle a,b:\ a^{2m}=1,b^2=a^m,bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 表示的二循环群。因此，我们证明，若 G是上述群之一，则 $\mathcal{B}(G)$不是积分的，但它是 L-整、Q-整和 CN-整的。此外，我们还证明，若 G 是上述群之一，则 $\mathcal{B}(G)$是亚能量的，但既不是超能量的，也不是 L-超能量、Q-超能量或 CN-超能量的。Gutman等人 [33] 猜想，$E(\mathcal{G})\le LE(\mathcal{G})$，这就是著名的 E-LE 猜想。Gutman [31] 还猜想："若 $\mathcal{G}\ncong K_{|v(\mathcal{G})|}$，则$\mathcal{G}$ 不是超能量的。"然而，这两个猜想都被推翻了。我们证明，若 $G=D_{2p},D_{2p^2},Q_{4p}$ 和 Q_{4p^2}，则 $\mathcal{B}(G)$满足上述两个猜想。最后，我们证明，若 G 是上述图之一，则 $\mathcal{B}(G)$满足 E-LE 猜想。本研究的动机源于对群的交换图/非交换图/交换共轭类图/幂图及超交换图的谱性质的研究。例如，文献 [3, 21, 22, 44, 52, 19, 24, 49, 28, 45]计算了交换图的各种谱和能量；文献 [25, 20, 50, 27, 1, 29, 30], 研究了非交换图，文献 [39, 11, 10], 研究了交换共轭类图，文献 [42, 35, 46, 47, 14, 48, 9]研究了幂图，而文献 [16, 7]研究了超交换图。

在第2节中，我们回顾了当 $G=D_{2p},D_{2p^2},Q_{4p}$ 和Q_{4p^2}时， $\mathcal{B}(G)$的图结构，以及星图的各种谱与能量。在第3节中，我们考察 $\mathcal{B}(D_{2p})$和 $\mathcal{B}(D_{2p^2})$的谱性质；在第4节中，我们考察 $\mathcal{B}(Q_{4p})$和 $\mathcal{B}(Q_{4p^2})$的谱性质。

2. Some useful results

我们用$mK_{1,r}$ 表示 m个星图$K_{1,r}$的副本。以下是在[17]中得到的结果对我们的计算很有用。

定理 2.1. [17, 定理 4.1– 4.2] 设 $D_{2n}=\langle a,b:\ a^n=b^2=1,bab=a^{-1}\rangle$ 为阶为 $2n$ $(n\ge3)$的二面体群，且 p 为素数。那么

$$\mathcal{B}(D_{2n})=\begin{cases}K_2\sqcup pK_{1,3}\sqcup K_{1,p^2-1}\sqcup K_{1,3p(p-1)}, & when\ n=p\\ K_2\sqcup p^2K_{1,3}\sqcup K_{1,p^2-1}\sqcup K_{1,p^4-p^2}\sqcup pK_{1,3p(p-1)}\sqcup K_{1,3p^2(p^2-p)}, & when\ n=p^2.\end{cases}$$

定理 2.2。 [17, 定理 4。3] 设 $Q_{4p}=\langle a,b:\ a^{2p}=1,b^2=a^p,bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 为阶为 $4p$ 的二循环群，其中 p 是一个素数。则

$$\mathcal{B}(Q_{4p})=\begin{cases}K_2\sqcup K_{1,3}\sqcup 3K_{1,12}\sqcup K_{1,24}, & when\ p=2\\ K_2\sqcup K_{1,3}\sqcup pK_{1,12}\sqcup K_{1,p^2-1}\sqcup K_{1,3p^2-3}\sqcup K_{1,12p^2-12p}, & when\ p\ge3.\end{cases}$$

定理 2.3。 [17, 定理 4。4] 设 $Q_{4p^2}=\langle a,b:a^{2p^2}=1,b^2=a^{p^2},bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ 为阶为 $4p^2$ 的二循环群，其中 p 是一个素数。则

$$\mathcal{B}(Q_{4p^2})=\begin{cases}K_2\sqcup K_{1,3}\sqcup 5K_{1,12}\sqcup 2K_{1,24}\sqcup K_{1,48}\sqcup K_{1,96}, & when\ p=2\\ K_2\sqcup K_{1,3}\sqcup p^2K_{1,12}\sqcup K_{1,p^2-1}\sqcup K_{1,3p^2-3}\sqcup K_{1,3p^4-3p^2}\\ \qquad\sqcup(p-1)K_{1,12p^2-12p}\sqcup K_{1,13p^4-12p^3+11p^2-12p}, & when\ p\ge3.\end{cases}$$

以下众所周知的引理给出了星图的各种谱与能量，也有助于计算 $\mathcal{B}(G)$ 的各种谱与能量。

引理 2.4. 若 $\mathcal{G} = K_{1,n}$ 是具有 $n+1$ 个顶点的星图，则 Spec($\mathcal{G}$) $= \left\{(0)^{n-1},(\sqrt{n})^1,(-\sqrt{n})^1\right\}$, L-谱($\mathcal{G}$) $= \{(0)^1,(1)^{n-1},(n+1)^1\}$ = Q-谱($\mathcal{G}$) 以及 CN-谱($\mathcal{G}$) $= \left\{(0)^1,(-1)^{n-1},(n-1)^1\right\}$。

引理 2.5. 若 $\mathcal{G} = K_{1,n}$ 是具有 $n+1$ 个顶点的星图，则 $E(\mathcal{G}) = 2\sqrt{n}$, $\overline{LE}(\mathcal{G}) = \frac{2n^2+2}{n+1} = LE^+(\mathcal{G})$ 且 $E_{CN}(\mathcal{G}) = 2n-2$。

3. 某些二面体群

本节中，我们计算阶为 $2p$ 和 $2p^2$ 的二面体群的 SGB 图的谱、拉普拉斯谱、无符号拉普拉斯谱、公共邻域谱及其相应的能量，其中 p 为任意素数。我们还判定 $\mathcal{B}(D_{2p})$ 和 $\mathcal{B}(D_{2p^2})$ 是否为亚能量、超能量、L-超能量、Q-超能量和 CN-超能量。最后，我们证明 $\mathcal{B}(D_{2p})$ 和 $\mathcal{B}(D_{2p^2})$ 满足 E-LE 猜想。

定理 3.1。若 $G = D_{2p}$ 则

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^{4p^2-p-3},(-1)^1,(1)^1,\left(\sqrt{3}\right)^p,\left(-\sqrt{3}\right)^p,\left(\sqrt{p^2-1}\right)^1,\left(-\sqrt{p^2-1}\right)^1,\left(\sqrt{3p^2-3p}\right)^1,\left(-\sqrt{3p^2-3p}\right)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^{p+3},(1)^{4p^2-p-3},(2)^1,(4)^p,(p^2)^1,(3p^2-3p+1)^1\right\} = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))$$

$$and\ \text{CN-spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^{p+4},(-1)^{4p^2-p-3},(2)^p,(p^2-2)^1,(3p^2-3p-1)^1\right\}.$$

证明。根据定理 2.1，有 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup pK_{1,3} \sqcup K_{1,p^2-1} \sqcup K_{1,3p(p-1)}$。再次根据引理 2.4，可得

$$\mathrm{Spec}(K_2) = \left\{(-1)^1,(1)^1\right\},\quad \mathrm{Spec}(pK_{1,3}) = \left\{(0)^{2p},\left(\sqrt{3}\right)^p,\left(-\sqrt{3}\right)^p\right\},$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^{p^2-2},\left(\sqrt{p^2-1}\right)^1,\left(-\sqrt{p^2-1}\right)^1\right\}\ \text{and}$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,3p(p-1)}) = \left\{(0)^{3p^2-3p-1},\left(\sqrt{3p^2-3p}\right)^1,\left(-\sqrt{3p^2-3p}\right)^1\right\}.$$

由于 Spec($\mathcal{B}(G)$) = Spec(K_2) ∪ Spec($pK_{1,3}$) ∪ Spec(K_{1,p^2-1}) ∪ Spec($K_{1,3p(p-1)}$)，我们得到 Spec($\mathcal{B}(G)$) 所需的表达式。根据引理 2.4，我们还可得到

$$\text{L-spec}(K_2) = \text{Q-spec}(K_2) = \left\{(0)^1,(2)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(pK_{1,3}) = \text{Q-spec}(pK_{1,3}) = \left\{(0)^p,(1)^{2p},(4)^p\right\},$$

$$\text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) = \text{Q-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1,(1)^{p^2-2},(p^2)^1\right\}\ \text{and}$$

$$\text{L-spec}(K_{1,3p(p-1)}) = \text{Q-spec}(K_{1,3p(p-1)}) = \left\{(0)^1,(1)^{3p^2-3p-1},(3p^2-3p+1)^1\right\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) &= \text{L-spec}(K_2) \cup \text{L-spec}(pK_{1,3}) \cup \text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) \cup \text{L-spec}(K_{1,3p(p-1)})\\ &= \text{Q-spec}(K_2) \cup \text{Q-spec}(pK_{1,3}) \cup \text{Q-spec}(K_{1,p^2-1}) \cup \text{Q-spec}(K_{1,3p(p-1)})\\ &= \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))\end{aligned}$$

我们得到 L-谱($\mathcal{B}(G)$) 和 Q-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。此外,

$$\text{CN-spec}(K_2) = \left\{(0)^2\right\}, \quad \text{CN-spec}(pK_{1,3}) = \left\{(0)^p, (-1)^{2p}, (2)^p\right\},$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2-2}, (p^2-2)^1\right\} \quad \text{and}$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,3p(p-1)}) = \left\{(0)^1, (-1)^{3p^2-3p-1}, (3p^2-3p-1)^1\right\}.$$

由于 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) = CN-谱(K_2) ∪CN-谱($pK_{1,\ 3}$) ∪CN-谱($K_{1,\ p^2-1}$), 我们得到 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。■

定理 3.2. 若 $G = D_{2p^2}$ 则

$$\begin{aligned}\text{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{&(0)^{4p^4-p^2-p-4}, (-1)^1, (1)^1, \left(\sqrt{3}\right)^{p^2}, \left(-\sqrt{3}\right)^{p^2}, \left(\sqrt{p^2-1}\right)^1,\\ &\left(-\sqrt{p^2-1}\right)^1, \left(\sqrt{p^4-p^2}\right)^1, \left(-\sqrt{p^4-p^2}\right)^1, \left(\sqrt{3p^2-3p}\right)^p,\\ &\left(-\sqrt{3p^2-3p}\right)^p, \left(\sqrt{3p^4-3p^3}\right)^1, \left(-\sqrt{3p^4-3p^3}\right)^1\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{&(0)^{p^2+p+4}, (1)^{4p^4-p^2-p-4}, (2)^1, (4)^{p^2}, (p^2)^1, (p^4-p^2+1)^1,\\ &(3p^2-3p+1)^p, (3p^4-3p^3+1)^1\Big\} = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\text{CN-spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{&(0)^{p^2+p+5}, (-1)^{4p^4-p^2-p-4}, (2)^{p^2}, (p^2-2)^1, (p^4-p^2-1)^1,\\ &(3p^2-3p-1)^p, (3p^4-3p^3-1)^1\Big\}.\end{aligned}$$

证明。 由定理 2.1, 我们有 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup p^2K_{1,\ 3} \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ p^4-p^2} \sqcup pK_{1,\ 3p(p-1)} \sqcup K_{1,\ 3p^2(p^2-p)}$。再次由引理 2.4, 得到

$$\text{Spec}(K_2) = \left\{(-1)^1, (1)^1\right\}, \text{Spec}(p^2K_{1,3}) = \left\{(0)^{2p^2}, \left(\sqrt{3}\right)^{p^2}, \left(-\sqrt{3}\right)^{p^2}\right\},$$

$$\text{Spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^{p^2-2}, \left(\sqrt{p^2-1}\right)^1, \left(-\sqrt{p^2-1}\right)^1\right\},$$

$$\text{Spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^{p^4-p^2-1}, \left(\sqrt{p^4-p^2}\right)^1, \left(-\sqrt{p^4-p^2}\right)^1\right\},$$

$$\text{Spec}(pK_{1,3p(p-1)}) = \left\{(0)^{p(3p^2-3p-1)}, \left(\sqrt{3p^2-3p}\right)^p, \left(-\sqrt{3p^2-3p}\right)^p\right\} \quad \text{and}$$

$$\text{Spec}(K_{1,3p^2(p^2-p)}) = \left\{(0)^{3p^4-3p^3-1}, \left(\sqrt{3p^4-3p^3}\right)^1, \left(-\sqrt{3p^4-3p^3}\right)^1\right\}.$$

由于
谱($\mathcal{B}(G)$) =谱(K_2)∪谱($p^2K_{1,\ 3}$)∪谱($K_{1,\ p^2-1}$)∪谱($K_{1,\ p^4-p^2}$)∪谱($pK_{1,\ 3p(p-1)}$) 我们得到所需的谱($\mathcal{B}(G)$)表达式。根据引理 2.4, 我们还得到

$$\text{L-spec}(K_2) = \text{Q-spec}(K_2) = \left\{(0)^1, (2)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(p^2K_{1,3}) = \text{Q-spec}(p^2K_{1,3}) = \left\{(0)^{p^2}, (1)^{2p^2}, (4)^{p^2}\right\},$$

$$\text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) = \text{Q-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2-2}, (p^2)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \text{Q-spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^4-p^2-1}, \left(p^4-p^2+1\right)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(pK_{1,3p(p-1)}) = \text{Q-spec}(pK_{1,3p(p-1)}) = \left\{(0)^p, (1)^{p(3p^2-3p-1)}, \left(3p^2-3p+1\right)^p\right\} \text{ and}$$

$$\text{L-spec}(K_{1,3p^2(p^2-p)}) = \text{Q-spec}(K_{1,3p^2(p^2-p)}) = \left\{(0)^1, (1)^{3p^4-3p^3-1}, \left(3p^4-3p^3+1\right)^1\right\}.$$

Since

$$\begin{aligned}\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) =& \text{L-spec}(K_2) \cup \text{L-spec}(p^2K_{1,3}) \cup \text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) \cup \text{L-spec}(K_{1,p^4-p^2})\\ &\cup \text{L-spec}(pK_{1,3p(p-1)}) \cup \text{L-spec}(K_{1,3p^2(p^2-p)})\\ =& \text{Q-spec}(K_2) \cup \text{Q-spec}(p^2K_{1,3}) \cup \text{Q-spec}(K_{1,p^2-1}) \cup \text{Q-spec}(K_{1,p^4-p^2})\\ &\cup \text{Q-spec}(pK_{1,3p(p-1)}) \cup \text{Q-spec}(K_{1,3p^2(p^2-p)})\\ =& \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))\end{aligned}$$

我们得到所需的拉普拉斯能量-谱($\mathcal{B}(G)$)和Q-谱($\mathcal{B}(G)$)表达式。此外,

$$\text{CN-spec}(K_2) = \left\{(0)^2\right\}, \quad \text{CN-spec}(p^2K_{1,3}) = \left\{(0)^{p^2}, (-1)^{2p^2}, (2)^{p^2}\right\},$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2-2}, (p^2-2)^1\right\},$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^4-p^2-1}, \left(p^4-p^2-1\right)^1\right\},$$

$$\text{CN-spec}(pK_{1,3p(p-1)}) = \left\{(0)^p, (-1)^{p(3p^2-3p-1)}, \left(3p^2-3p-1\right)^p\right\} \text{ and}$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,3p^2(p^2-p)}) = \left\{(0)^1, (-1)^{3p^4-3p^3-1}, \left(3p^4-3p^3-1\right)^1\right\}.$$

由于 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) = CN-谱(K_2) ∪ CN-谱($p^2K_{1,3}$) ∪ CN-谱(K_{1,p^2-1}) ∪CN-谱(K_{1,p^4-p^2}) ∪CN- 谱 ($pK_{1,3p(p-1)}$) ∪ CN- 谱 ($K_{1,3p^2(p^2-p)}$), 我们得到 CN- 谱 ($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。■

定理 3.3。 如果 $G = D_{2p}$ 那么 $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2p\sqrt{3} + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{3p(p-1)}$, $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{32p^4+2p^2+12p+18}{4p^2+p+3}$ 并且 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = 8p^2-2p-6$。

证明。 由引理 2.5 可得
$E(K_2) = 2, E(pK_1,3) = 2p\sqrt{3}, E(K_{1,p^2-1}) = 2\sqrt{p^2-1}$ 和 $E(K_{1,3p(p-1)}) = 2\sqrt{3p(p-1)}$。由于 $E(\mathcal{B}(G)) = E(K_2) + E(pK_1,3) + E(K_{1,p^2-1}) + E(K_{1,3p(p-1)})$, 我们得到 $E(\mathcal{B}(G))$ 所需的表达式。由定理 3.1 可得 L-谱($\mathcal{B}(G)$) = $\left\{(0)^{p+3}, (1)^{4p^2-p-3}, (2)^1, (4)^p, (p^2)^1, (3p^2-3p+1)^1\right\}$ = Q-谱($\mathcal{B}(G)$), $m = 4p^2$ 以及 $n = 4p^2+p+3$。现在, $\left|0 - \frac{2(4p^2)}{4p^2+p+3}\right| = \frac{8p^2}{4p^2+p+3}$、$\left|1 - \frac{2(4p^2)}{4p^2+p+3}\right| = \frac{4p^2-p-3}{4p^2+p+3}$、$\left|2 - \frac{2(4p^2)}{4p^2+p+3}\right| = \frac{2p+6}{4p^2+p+3}$、$\left|4 - \frac{2(4p^2)}{4p^2+p+3}\right| = \frac{8p^2+4p+12}{4p^2+p+3}$、$\left|p^2 - \frac{2(4p^2)}{4p^2+p+3}\right| = \frac{4p^4+p^3-5p^2}{4p^2+p+3}$以及 $\left|(3p^2-3p+1) - \frac{2}{(4p^2)}\right| = \frac{12p^4-9p^3+2p^2-8p+3}{4p^2+p+3}$。因此, 根据（无符号）拉普拉斯能量的定义, 我们有

$$\begin{aligned}LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(\mathcal{B}(G))\\ &= (p+3)\frac{8p^2}{4p^2+p+3} + (4p^2-p-3)\frac{4p^2-p-3}{4p^2+p+3} + \frac{2p+6}{4p^2+p+3}\end{aligned}$$

$$+p\frac{8p^2+4p+12}{4p^2+p+3}+\frac{4p^4+p^3-5p^2}{4p^2+p+3}+\frac{12p^4-9p^3+2p^2-8p+3}{4p^2+p+3}$$
$$=\frac{32p^4+2p^2+12p+18}{4p^2+p+3}.$$

最后，$E_{CN}(K_2)=0$、$E_{CN}(pK_{1,3})=4p$、$E_{CN}(K_{1,p^2-1})=2p^2-4$ 以及 $E_{CN}(K_{1,3p(p-1)})=6p^2-6p-2$. 由于 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))=E_{CN}(K_2)+E_{CN}(pK_{1,3})+E_{CN}(K_{1,p^2-1})+E_{CN}(K_{1,3p(p-1)})$，我们得到 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 所需的表达式。■

定理3.4。 如果 $G=D_{2p^2}$ 那么 $E(\mathcal{B}(G))=2+2p^2\sqrt{3}+(2p+2)\sqrt{p^2-1}+4p\sqrt{3p(p-1)}$, $LE(\mathcal{B}(G))=\frac{32p^8+2p^4+4p^3+18p^2+16p+32}{4p^4+p^2+p+4}=LE^+(\mathcal{B}(G))$ 并且 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))=8p^4-2p^2-2p-8$。

证明。 由引理 2.5 得到

$$E(K_2)=2,\ E(p^2K_{1,3})=2p^2\sqrt{3},\ E(K_{1,p^2-1})=2\sqrt{p^2-1},\ E(K_{1,p^4-p^2})=2p\sqrt{p^2-1},$$
$$E(pK_{1,3p(p-1)})=2p\sqrt{3p(p-1)}\text{ and }E(K_{1,3p^2(p^2-p)})=2p\sqrt{3p(p-1)}.$$

由于 $E(\mathcal{B}(G))=E(K_2)+E(p^2K_{1,3})+E(K_{1,p^2-1})+E(K_{1,p^4-p^2})+E(pK_{1,3p(p-1)})+E(K_{1,3p^2(p^2-p)})$，我们得到 $E(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。由定理 3.2，我们有 L-谱$(\mathcal{B}(G))$
$=\left\{(0)^{p^2+p+4},\ (1)^{4p^4-p^2-p-4},\ (2)^1,(4)^{p^2},\ (p^2)^1,(p^4-p^2+1)^1,(3p^2-3p+1)^p,\right.$
$\left.(3p^4-3p^3+1)^1\right\}=$ Q-谱$(\mathcal{B}(G))$，　$m=4p^4$ 和 $n=4p^4+p^2+p+4$。现在，
$\left|0-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{8p^4}{4p^4+p^2+p+4}$,　$\left|1-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{4p^4-p^2-p-4}{4p^4+p^2+p+4}$,　$\left|2-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{2p^2+2p+8}{4p^4+p^2+p+4}$,　$\left|4-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{8p^4+4p^2+4p+16}{4p^4+p^2+p+4}$,　$\left|p^2-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{4p^6-7p^4+p^3-4p^2}{4p^4+p^2+p+4}$,
$\left|(p^4-p^2+1)-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{4p^8-3p^6+p^5-p^4-p^3-3p^2+p+4}{4p^4+p^2+p+4}$, $\left|(3p^2-3p+1)-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{12p^6-12p^5-p^4+10p^2-11p+4}{4p^4+p^2+p+4}$ and $\left|(3p^4-3p^3+1)-\frac{2(4p^4)}{4p^4+p^2+p+4}\right|=\frac{12p^8-12p^7+3p^6+5p^4-12p^3+p^2+p+4}{4p^4+p^2+p+4}$.
Therefore by definition of (signless) Laplacian energy we have

$$LE(\mathcal{B}(G))=LE^+(\mathcal{B}(G))$$
$$=(p^2+p+4)\frac{8p^4}{4p^4+p^2+p+4}+(4p^4-p^2-p-4)\frac{4p^4-p^2-p-4}{4p^4+p^2+p+4}$$
$$+\frac{2p^2+2p+8}{4p^4+p^2+p+4}+p^2\times\frac{8p^4+4p^2+4p+16}{4p^4+p^2+p+4}+\frac{4p^6-7p^4+p^3-4p^2}{4p^4+p^2+p+4}$$
$$+\frac{4p^8-3p^6+p^5-p^4-p^3-3p^2+p+4}{4p^4+p^2+p+4}$$
$$+p\times\frac{12p^6-12p^5-p^4+10p^2-11p+4}{4p^4+p^2+p+4}$$
$$+\frac{12p^8-12p^7+3p^6+5p^4-12p^3+p^2+p+4}{4p^4+p^2+p+4}$$
$$=\frac{32p^8+2p^4+4p^3+18p^2+16p+32}{4p^4+p^2+p+4}.$$

最后，

$E_{CN}(K_2) = 0$, $E_{CN}(p^2K_{1,\ 3}) = 4p^2$, $E_{CN}(K_{1,\ p^2-1}) = 2p^2-4$, $E_{CN}(K_{1,\ p^4-p^2}) = 2p^4-2p^2-2$,

$$E_{CN}(pK_{1,3p(p-1)}) = 6p^3 - 6p^2 - 2p \text{ and } E_{CN}(K_{1,3p^2(p^2-p)}) = 6p^4 - 6p^3 - 2.$$

由于 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = E_{CN}(K_2) + E_{CN}(p^2K_{1,\ 3}) + E_{CN}(K_{1,\ p^2-1}) + E_{CN}(K_{1,\ p^4-p^2}) + E_{CN}(pK_{1,\ 3p(p-1)}) + E_{CN}(K_{1,\ 3p^2\ (p^2-p)})$，我们得到 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。■

定理 3.5。若 $G = D_{2p}$，则 $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量，但不是超能量、拉普拉斯能量、Q-超能量和 CN-超能量。

证明。根据定理 2.1 和定理 3.3，我们有

$$|V(\mathcal{B}(G))| = 4p^2 + p + 3 \quad \text{and} \quad E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2p\sqrt{3} + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{3p^2-3p}.$$

S由于 $4p > 2p\sqrt{3}$, $p^2 > 2\sqrt{p^2-1}$ 和 $3p^2 - 3p + 1 > 2\sqrt{3p^2-3p}$，我们有

$$4p + p^2 + 3p^2 - 3p + 1 + 2 > 2 + 2p\sqrt{3} + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{3p^2-3p}.$$

因此，

$$|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G)). \tag{1}$$

因此， $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{4p^2+p+3}) = 2(4p^2+p+3-1) = 8p^2+2p+4 > 4p^2+p+3 = |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$（利用 (1)）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外， $LE(K_{4p^2+p+3}) = LE^+(K_{4p^2+p+3}) = 8p^2 + 2p + 4$。由定理 3.3 可得$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{32p^4+2p^2+12p+18}{4p^2+p+3}$。现在，

$$\begin{aligned} LE(K_{4p^2+p+3}) - LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(K_{4p^2+p+3}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 8p^2 + 2p + 4 - \frac{32p^4 + 2p^2 + 12p + 18}{4p^2 + p + 3} \\ &= \frac{16p^3 + 40p^2 - 2p - 6}{4p^2 + p + 3} > 0. \end{aligned}$$

因此，

$$LE^+(K_{4p^2+p+3}) = LE(K_{4p^2+p+3}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)).$$

因此， $\mathcal{B}(G)$ 既非 L-超能量，也非 Q-超能量。

我们有 $E_{CN}(K_{4p^2+p+3}) = 2(4p^2+p+3-1)(4p^2+p+3-2) = (8p^2+2p+4)(4p^2+p+1) > 8p^2 - 2p - 6 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$（根据定理 3.3）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量的。这就完成了证明。■

定理 3.6。如果 $G = D_{2p^2}$，那么 $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的，但不是超能量、L-超能量、Q-超能量和CN-超能量的。

证明。由定理 2.1 和定理3.4，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = 4p^4 + p^2 + p + 4$ 并且

$$\begin{aligned} E(\mathcal{B}(G)) &= 2 + 2p^2\sqrt{3} + (2p+2)\sqrt{p^2-1} + 4p\sqrt{3p(p-1)} \\ &= 2 + 2p^2\sqrt{3} + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{p^4-p^2} + p^2\sqrt{3p(p-1)} + 2\sqrt{3p^4-3p^3}. \end{aligned}$$

由于 $4p^2 > 2p^2\sqrt{3}$, $p^2 > 2\sqrt{p^2-1}$, $p^4 - p^2 + 1 > 2\sqrt{p^4-p^2}$, $p(3p^2 - 3p + 1) > 2p\sqrt{3p^2-3p}$ 以及 $3p^4 - 3p^3 + 1 > 2\sqrt{3p^4-3p^3}$ 我们有

$4p^2 + p^2 + p^4 - p^2 + 1 + p(3p^2 - 3p + 1) + 3p^4 - 3p^3 + 1 + 2$

$$> 2 + 2p^2\sqrt{3} + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{p^4-p^2} + p^2\sqrt{3p(p-1)} + 2\sqrt{3p^4-3p^3}.$$

因此， $|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$. 所以， $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的。

我们有 $E(K_{4p^4+p^2+p+4}) = 2(4p^4+p^2+p+4-1) = 8p^4+2p^2+2p+6 > 4p^4+p^2+p+4 = |V(\mathcal{B}(G))|$ > $E(\mathcal{B}(G))$（如上所示）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外， $LE(K_{4p^4+p^2+p+4}) = LE^+(K_{4p^4+p^2+p+4}) = 8p^4 + 2p^2 + 2p + 6$。由定理3.4可得 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{32p^8+2p^4+4p^3+18p^2+16p+32}{4p^4+p^2+p+4}$。现在，

$$\begin{aligned} &LE(K_{4p^4+p^2+p+4}) - LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(K_{4p^4+p^2+p+4}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 8p^4 + 2p^2 + 2p + 6 - \frac{32p^8 + 2p^4 + 4p^3 + 18p^2 + 16p + 32}{4p^4 + p^2 + p + 4} \\ &= \frac{16p^6 + 16p^5 + 56p^4 - 2p^2 - 2p - 8}{4p^4 + p^2 + p + 4} > 0. \end{aligned}$$

因此， $LE^+(\mathcal{B}(G)) = LE(\mathcal{B}(G)) < LE(K_{4p^4+p^2+p+4}) = LE^+(K_{4p^4+p^2+p+4})$。所以， $\mathcal{B}(G)$ 不是L-超能量的，而是Q-超能量的。

我们有 $E_{CN}(K_{4p^4+p^2+p+4}) = 2(4p^4 + p^2 + p + 4 - 1)(4p^4 + p^2 + p + 4 - 2) = (8p^4 + 2p^2 + 2p + 6)$ $(4p^4 + p^2 + p + 2) > 8p^4 - 2p^2 - 2p - 8 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$（由定理3.4得出）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是CN-超能量图。这就完成了证明。■

我们用下面的比较来结束本节。

定理3.7。 如果 $G = D_{2p}$ 或 D_{2p^2} 那么 $E(\mathcal{B}(G)) < LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。

证明。 **情况 1.** $G = D_{2p}$。

由定理 3.3，我们得到

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2p\sqrt{3} + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{3p(p-1)} \quad \text{and}$$

$$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{32p^4 + 2p^2 + 12p + 18}{4p^2 + p + 3}.$$

Als因此，由定理 3.5，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = 4p^2 + p + 3 > E(\mathcal{B}(G))$。现在，

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| &= LE^+(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| \\ &= \frac{32p^4 + 2p^2 + 12p + 18}{4p^2 + p + 3} - 4p^2 + p + 3 \\ &= \frac{16p^4 - 8p^3 - 23p^2 + 6p + 9}{4p^2 + p + 3} \\ &= \frac{p^2(16p^2 - 8p - 23) + 6p + 9}{4p^2 + p + 3} := \frac{f(p)}{g(p)}. \end{aligned}$$

由于对于所有素数 p, $8p(2p-1) > 23$ 和 $4p^2 + p + 3 > 0$ ，我们有 $\frac{f}{(p)}\, g(p) > 0$。因此， $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。

情形 2。 $G = D_{2p^2}$。

由定理3.4，我们得到

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2p^2\sqrt{3} + (2p+2)\sqrt{p^2-1} + 4p\sqrt{3p(p-1)} \quad \text{and}$$

$$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{32p^8 + 2p^4 + 4p^3 + 18p^2 + 16p + 32}{4p^4 + p^2 + p + 4}.$$

此外，从 由定理 3.6，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = 4p^4 + p^2 + p + 4 > E(\mathcal{B}(G))$。现在，

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| &= LE^+(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| \\ &= \frac{32p^8 + 2p^4 + 4p^3 + 18p^2 + 16p + 32}{4p^4 + p^2 + p + 4} - 4p^4 + p^2 + p + 4 \\ &= \frac{16p^8 - 8p^6 - 8p^5 - 31p^4 + 2p^3 + 9p^2 + 8p + 16}{4p^4 + p^2 + p + 4} \\ &= \frac{p^4(16p^4 - 8p^2 - 8p - 31) + 2p^3 + 9p^2 + 8p + 16}{4p^4 + p^2 + p + 4} := \frac{f(p)}{g(p)}. \end{aligned}$$

由于对于所有素数 p, $8p(2p^3 - p - 1) > 31$ 和 $4p^4 + p^2 + p + 4 > 0$，我们有 $\frac{f}{(p)}\, g(p) > 0$。因此，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。■

4. Certain dicyclic groups

本节中，我们计算阶为 $4p$ 和 $4p^2$ 的二面体群（其中 p为任意素数）的 SGB 图的谱、拉普拉斯谱、无符号拉普拉斯谱、公共邻域谱及其对应的能量。我们还判定 $\mathcal{B}(Q_{4p})$ 和 $\mathcal{B}(Q_{4p^2})$ 是否为亚能量、超能量、L-超能量、Q-超能量和CN-超能量。

定理 4.1。令 $G = Q_{4p}$ 和 p 为任意素数。

(a) 若 $p = 2$，则

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^{58}, (-1)^1, (1)^1, (-\sqrt{3})^1, (\sqrt{3})^1, (-\sqrt{12})^3, (\sqrt{12})^3, (-\sqrt{24})^1, (\sqrt{24})^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^6, (1)^{58}, (2)^1, (4)^1, (13)^3, (25)^1\right\} = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G)) \ \textit{and}$$

$$\text{CN-spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(-1)^{58}, (0)^7, (2)^1, (11)^3, (23)^1\right\}.$$

(b) 若 $p \geq 3$，则

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(-1)^1, (0)^{16p^2-p-5}, (1)^1, (-\sqrt{3})^1, (\sqrt{3})^1, (-\sqrt{12})^p, (\sqrt{12})^p, (-\sqrt{p^2-1})^1, (\sqrt{p^2-1})^1, (-\sqrt{3p^2-3})^1, (\sqrt{3p^2-3})^1, (-\sqrt{12p^2-12p})^1, (\sqrt{12p^2-12p})^1\right\},$$

$$\begin{aligned} \text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) &= \left\{(0)^{p+5}, (1)^{16p^2-p-5}, (2)^1, (4)^1, (13)^p, (p^2)^1, (3p^2-2)^1, (12p^2-12p+1)^1\right\} \\ &= \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G)) \end{aligned}$$

$$\textit{and } \text{CN-spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(-1)^{16p^2-p-5}, (0)^{p+6}, (2)^1, (11)^p, (p^2-2)^1, (3p^2-4)^1, (12p^2-12p-1)^1\right\}.$$

证明。(a) 若 $p = 2$，由定理 2.2，得 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,3} \sqcup 3K_{1,12} \sqcup K_{1,24}$。再次由引理 2.4，可得

$$\mathrm{Spec}(K_2) = \{(-1)^1, (1)^1\}, \quad \mathrm{Spec}(K_{1,3}) = \{(0)^2, (-\sqrt{3})^1, (\sqrt{3})^1\},$$

$\mathrm{Spec}(3K_{1,\ 12}) = \{(0)^{33}, (-\sqrt{12})^3, (\sqrt{12})^3\}$ 以及 $\mathrm{Spec}(K_{1,\ 24}) = \{(0)^{23}, (-\sqrt{24})^1, (\sqrt{24})^1\}$.

由于 Spec($\mathcal{B}(G)$) = Spec(K_2) ∪ Spec($K_{1,\ 3}$) ∪ Spec($3K_{1,\ 12}$) ∪ Spec($K_{1,\ 24}$)，我们得到 Spec($\mathcal{B}(G)$) 所需的表达式。根据引理 2.4，我们还得到

$$\text{L-spec}(K_2) = \text{Q-spec}(K_2) = \{(0)^1, (2)^1\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,3}) = \text{Q-spec}(K_{1,3}) = \{(0)^1, (1)^2, (4)^1\},$$
$$\text{L-spec}(3K_{1,12}) = \text{Q-spec}(3K_{1,12}) = \{(0)^3, (1)^{33}, (13)^3\} \quad \text{and}$$
$$\text{L-spec}(K_{1,24}) = \text{Q-spec}(K_{1,24}) = \{(0)^1, (1)^{23}, (25)^1\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) &= \text{L-spec}(K_2) \cup \text{L-spec}(K_{1,3}) \cup \text{L-spec}(3K_{1,12}) \cup \text{L-spec}(K_{1,24}) \\ &= \text{Q-spec}(K_2) \cup \text{Q-spec}(K_{1,3}) \cup \text{Q-spec}(3K_{1,12}) \cup \text{Q-spec}(K_{1,24}) \\ &= \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))\end{aligned}$$

我们得到 L-谱($\mathcal{B}(G)$) 和 Q-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。此外，

$$\text{CN-spec}(K_2) = \{(0)^2\}, \qquad \text{CN-spec}(K_{1,3}) = \{(0)^1, (-1)^2, (2)^1\},$$

CN-谱($3K_{1,\ 12}$) = $\{(0)^3, (-1)^{33}, (11)^3\}$ 以及 CN-谱($K_{1,\ 24}$) = $\{(0)^1, (-1)^{23}, (23)^1\}$.

由于 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) = CN-谱(K_2) ∪ CN-谱($K_{1,\ 3}$) ∪ CN-谱($3K_{1,\ 12}$)∪CN-谱($K_{1,\ 24}$)，我们得到 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。

(b) 若 $p \geq 3$，则由定理 2.2 可得 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ 3} \sqcup pK_{1,\ 12} \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ 3p^2-3} \sqcup K_{1,\ 12p^2-12p}$。同样，由引理 2.4 可得

$$\text{Spec}(K_2) = \{(-1)^1, (1)^1\}, \quad \text{Spec}(K_{1,3}) = \{(0)^2, (-\sqrt{3})^1, (\sqrt{3})^1\},$$
$$\text{Spec}(pK_{1,12}) = \left\{(0)^{11p}, (-\sqrt{12})^p, (\sqrt{12})^p\right\},$$
$$\text{Spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^{p^2-2}, (-\sqrt{p^2-1})^1, (\sqrt{p^2-1})^1\right\},$$
$$\text{Spec}(K_{1,3p^2-3}) = \left\{(0)^{3p^2-4}, (-\sqrt{3p^2-3})^1, (\sqrt{3p^2-3})^1\right\} \quad \text{and}$$
$$\text{Spec}(K_{1,12p^2-12p}) = \left\{(0)^{12p^2-12p-1}, (-\sqrt{12p^2-12p})^1, (\sqrt{12p^2-12p})^1\right\}.$$

由于 Spec($\mathcal{B}(G)$) = Spec(K_2) ∪Spec($K_{1,\ 3}$) ∪ Spec($pK_{1,\ 12}$) ∪ Spec($K_{1,\ p^2-1}$) ∪Spec($K_{1,\ 3p^2-3}$) ∪ Spec($K_{1,\ 12p^2-12p}$)，我们得到 Spec($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。由引理 2.4，我们还可得

$$\text{L-spec}(K_2) = \text{Q-spec}(K_2) = \{(0)^1, (2)^1\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,3}) = \text{Q-spec}(K_{1,3}) = \{(0)^1, (1)^2, (4)^1\},$$
$$\text{L-spec}(pK_{1,12}) = \text{Q-spec}(pK_{1,12}) = \{(0)^p, (1)^{11p}, (13)^p\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) = \text{Q-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2-2}, (p^2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,3p^2-3}) = \text{Q-spec}(K_{1,3p^2-3}) = \left\{(0)^1, (1)^{3p^2-4}, (3p^2-2)^1\right\} \quad \text{and}$$
$$\text{L-spec}(K_{1,12p^2-12p}) = \text{Q-spec}(K_{1,12p^2-12p}) = \left\{(0)^1, (1)^{12p^2-12p-1}, (12p^2-12p+1)^1\right\}.$$

由于 L-谱($\mathcal{B}(G)$) =Q-谱($\mathcal{B}(G)$) 是上述集合的并集，我们得到所需的 L-谱($\mathcal{B}(G)$) 和 Q-谱($\mathcal{B}(G)$) 表达式。进一步，

$$\text{CN-spec}(K_2) = \{(0)^2\}, \qquad \text{CN-spec}(K_{1,3}) = \{(0)^1, (-1)^2, (2)^1\},$$

$$\text{CN-spec}(pK_{1,12}) = \{(0)^p, (-1)^{11p}, (11)^p\},\ \text{CN-spec}(K_{1,p^2-1}) = \{(0)^1, (-1)^{p^2-2}, (p^2-2)^1\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,3p^2-3}) = \left\{(0)^1, (-1)^{3p^2-4}, (3p^2-4)^1\right\} \qquad \text{and}$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,12p^2-12p}) = \left\{(0)^1, (-1)^{12p^2-12p-1}, (12p^2-12p-1)^1\right\}.$$

因此，上述集合的并集给出了 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。

■

定理 4.2. 设 $G = Q_{4p^2}$ 和 p 是任意素数。

(a) 若 $p = 2$，则

$$\text{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{(0)^{245}, (-1)^1, (1)^1, (-\sqrt{3})^1, (\sqrt{3})^1, (-\sqrt{12})^5, (\sqrt{12})^5, (-\sqrt{24})^2, (\sqrt{24})^2$$
$$(-\sqrt{48})^1, (\sqrt{48})^1, (-\sqrt{96})^1, (\sqrt{96})^1\Big\},$$
$$\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \{(0)^{11}, (1)^{245}, (2)^1, (4)^1, (13)^5, (25)^2, (49)^1, (97)^1\} = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G)) \ \textit{and}$$
$$\text{CN-spec}(\mathcal{B}(G)) = \{(-1)^{245}, (0)^{12}, (2)^1, (11)^5, (23)^2, (47)^1, (95)^1\}.$$

(b) 若 $p \geq 3$，则

$$\text{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{(-1)^1, (0)^{16p^4-p^2-p-5}, (1)^1, (-\sqrt{3})^1, (\sqrt{3})^1, (-\sqrt{12})^p, (\sqrt{12})^p,$$
$$(-\sqrt{p^2-1})^1, (\sqrt{p^2-1})^1, (-\sqrt{3p^2-3})^1, (\sqrt{3p^2-3})^1, (-\sqrt{3p^4-3p^2})^1,$$
$$(\sqrt{3p^4-3p^2})^1, (-\sqrt{12p^2-12p})^{p-1}, (\sqrt{12p^2-12p})^{p-1},$$
$$(-\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p})^1, (\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p})^1\Big\},$$

$$\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{(0)^{p^2+p+5}, (1)^{16p^4-p^2-p-5}, (2)^1, (4)^1, (13)^{p^2}, (p^2)^1, (3p^2-2)^1,$$
$$(3p^4-3p^2+1)^1, (12p^2-12p+1)^{p-1}, (13p^4-12p^3+11p^2-12p+1)^1\Big\}$$
$$= \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))$$

以及 CN-spec($\mathcal{B}(G)$) $= \Big\{(-1)^{16p^4-p^2-p-5}, (0)^{p^2+p+6}, (2)^1, (11)^{p^2}, (p^2-2)^1, (3p^2-4)^1$

$$(3p^4-3p^2-1)^1, (12p^2-12p-1)^{p-1}, (13p^4-12p^3+11p^2-12p-1)^1\Big\}.$$

证明。(a) 若 $p = 2$，则由定理 2.3 可得 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ 3} \sqcup 5K_{1,\ 12} \sqcup 2K_{1,\ 24} \sqcup K_{1,\ 48} \sqcup K_{1,\ 96}$。再次由引理 2.4 可得

$$\text{Spec}(K_2) = \left\{(-1)^1, (1)^1\right\}, \text{Spec}(K_{1,3}) = \left\{(0)^2, (\sqrt{3})^1, (-\sqrt{3})^1\right\},$$
$$\text{谱}(5K_1,12) = \left\{(0)^{55}, (\underline{\sqrt{}}12)^5, (\underline{-\sqrt{}}12)^5\right\},\ \text{谱}(2K_1,24) = \left\{(0)^{46}, (\underline{\sqrt{}}24)^2, (\underline{-\sqrt{}}24)^2\right\},$$
$$\text{谱}(K_1,48) = \left\{(0)^{47}, (\sqrt{48})^1, (-\sqrt{48})^1\right\} \text{以及谱}(K_1,96) = \left\{(0)^{95}, (\sqrt{96})^1, (-\sqrt{96})^1\right\}。\ \text{由}$$

于谱($\mathcal{B}(G)$)是上述集合的并集，因此可得谱($\mathcal{B}(G)$)所需的表达式。根据引理 2.4，我们还可得

$$\text{L-spec}(K_2) = \text{Q-spec}(K_2) = \left\{(0)^1, (2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,3}) = \text{Q-spec}(K_{1,3}) = \left\{(0)^1, (1)^2, (4)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(5K_{1,12}) = \text{Q-spec}(5K_{1,12}) = \left\{(0)^5, (1)^{55}, (13)^5\right\},$$
$$\text{L-spec}(2K_{1,24}) = \text{Q-spec}(2K_{1,24}) = \left\{(0)^2, (1)^{46}, (25)^2\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,48}) = \text{Q-spec}(K_{1,48}) = \left\{(0)^1, (1)^{47}, (49)^1\right\} \text{ and}$$
$$\text{L-spec}(K_{1,96}) = \text{Q-spec}(K_{1,96}) = \left\{(0)^1, (1)^{95}, (97)^1\right\}.$$

由于 L-谱($\mathcal{B}(G)$) =Q-谱($\mathcal{B}(G)$)是上述集合的并集，因此可得 L-谱($\mathcal{B}(G)$)和 Q-谱($\mathcal{B}(G)$)所需的表达式。此外,

$$\text{CN-spec}(K_2) = \left\{(0)^2\right\}, \quad \text{CN-spec}(K_{1,3}) = \left\{(0)^1, (-1)^2, (2)^1\right\},$$

CN-谱($5K_{1,\ 12}$) $= \left\{(0)^5, (-1)^{55}, (11)^5\right\}$，CN-谱($2K_{1,\ 24}$) $= \left\{(0)^2, (-1)^{46}, (23)^2\right\}$，
CN-谱($K_{1,\ 48}$) $= \left\{(0)^1, (-1)^{47}, (47)^1\right\}$ 和 CN-谱($K_{1,\ 96}$) $= \left\{(0)^1, (-1)^{95}, (95)^1\right\}$.

由于 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) 是上述集合的并集，我们得到 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。

(b) 根据定理 2.3，我们有 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ 3} \sqcup p^2 K_{1,\ 12} \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ 3p^2-3} \sqcup K_{1,\ 3p^4-3p^2} \sqcup (p-1)K_{1,\ 12p^2-12p} \sqcup K_{1,\ 13p^4-12p^3+11p^2-12p}$。再次根据引理 2.4，我们得到

$$\text{Spec}(K_2) = \left\{(-1)^1, (1)^1\right\}, \text{Spec}(K_{1,3}) = \left\{(0)^2, \left(\sqrt{3}\right)^1, \left(-\sqrt{3}\right)^1\right\},$$
$$\text{Spec}(p^2K_{1,12}) = \left\{(0)^{11p^2}, \left(\sqrt{12}\right)^{p^2}, \left(-\sqrt{12}\right)^{p^2}\right\},$$
$$\text{Spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^{p^2-2}, \left(\sqrt{p^2-1}\right)^1, \left(-\sqrt{p^2-1}\right)^1\right\},$$
$$\text{Spec}(K_{1,3p^2-3}) = \left\{(0)^{3p^2-4}, \left(\sqrt{3p^2-3}\right)^1, \left(-\sqrt{3p^2-3}\right)^1\right\},$$
$$\text{Spec}(K_{1,3p^4-3p^2}) = \left\{(0)^{3p^4-3p^2-1}, \left(\sqrt{3p^4-3p^2}\right)^1, \left(-\sqrt{3p^4-3p^2}\right)^1\right\},$$
$$\text{Spec}((p-1)K_{1,12p^2-12p}) = \left\{(0)^{(p-1)(12p^2-12p-1)}, \left(\sqrt{12p^2-12p}\right)^{p-1}, \left(-\sqrt{12p^2-12p}\right)^{p-1}\right\}$$

and

$$\text{Spec}(K_{1,13p^4-12p^3+11p^2-12p}) = \left\{(0)^{13p^4-12p^3+11p^2-12p-1}, \left(\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p}\right)^1, \left(-\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p}\right)^1\right\}.$$

由于 Spec($\mathcal{B}(G)$) 是上述集合的并集，我们得到 Spec($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。根据引理 2.4，我们还得到

$$\text{L-spec}(K_2) = \text{Q-spec}(K_2) = \left\{(0)^1, (2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,3}) = \text{Q-spec}(K_{1,3}) = \left\{(0)^1, (1)^2, (4)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(p^2K_{1,12}) = \text{Q-spec}(p^2K_{1,12}) = \left\{(0)^{p^2}, (1)^{11p^2}, (13)^{p^2}\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) = \text{Q-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2-2}, (p^2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,3p^2-3}) = \text{Q-spec}(K_{1,3p^2-3}) = \left\{(0)^1, (1)^{3p^2-4}, (3p^2-2)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(K_{1,3p^4-3p^2}) = \text{Q-spec}(K_{1,3p^4-3p^2}) = \left\{(0)^1, (1)^{3p^4-3p^2-1}, \left(3p^4-3p^2+1\right)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}((p-1)K_{1,12p^2-12p}) = \text{Q-spec}(K_{1,12p^2-12p}) = \left\{(0)^{p-1}, (1)^{(p-1)(12p^2-12p-1)}, \left(12p^2-12p+1\right)^{p-1}\right\} \text{ and}$$

$$\text{L-谱}(K_{1,\ 13p^4-12p^3+11p^2-12p}) = \text{Q-谱}(K_{1,\ 13p^4-12p^3+11p^2-12p}) = \left\{(0)^1, (1)^{13p^4-12p^3+11p^2-12p-1}, \left(13p^4-12p^3+11p^2-12p+1\right)^1\right\}.$$

由于 L-谱($\mathcal{B}(G)$) =Q-谱($\mathcal{B}(G)$) 是上述集合的并集，我们便得到 L-谱($\mathcal{B}(G)$) 和 Q-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。此外，

$$\text{CN-spec}(K_2) = \{(0)^2\}, \qquad \text{CN-spec}(K_{1,3}) = \{(0)^1, (-1)^2, (2)^1\},$$

CN-谱($p^2K_{1,\ 12}$) =$\{(0)^{p^2},\ (-1)^{11p^2},\ (11)^p\}$, CN-谱($K_{1,\ p^2-1}$) =$\{(0)^1, (-1)^{p^2-2},\ (p^2-2)^1\}$,

$$\text{CN-spec}(K_{1,3p^2-3}) = \left\{(0)^1, (-1)^{3p^2-4}, (3p^2-4)^1\right\},$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,3p^4-3p^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{3p^4-3p^2-1}, (3p^4-3p^2-1)^1\right\},$$

CN-谱($(p-1)K_{1,\ 12p^2-12p}$) =$\left\{(0)^{p-1},\ (-1)^{(p-1)(12p^2-12p-1)},\ (12p^2-12p-1)^{p-1}\right\}$ 且

$$\text{CN-spec}(K_{1,13p^4-12p^3+11p^2-12p}) = \left\{(0)^1, (-1)^{13p^4-12p^3+11p^2-12p-1}, (13p^4-12p^3+11p^2-12p-1)^1\right\},$$

由于 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) 是上述集合的并集，我们便得到 CN-谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。■

定理 4.3。令 $G = Q_{4p}$ 和 p 为任意素数。

(a) 若 $p = 2$，则 $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{4132}{35}$，以及 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = 116$。(b) 若 $p \geq 3$，则 $E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{3}+2p\sqrt{12}+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{3p^2-3}+2\sqrt{12p^2-12p}$，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{512p^4+2p^2+20p+50}{16p^2+p+5}$，以及 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = 32p^2-2p-10$。

证明。(a) 若 $p = 2$，则根据定理 2.2，有 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ 3} \sqcup 3K_{1,\ 12} \sqcup K_{1,\ 24}$。现在根据引理 2.5，我们得到

$$E(K_2) = 2,\ E(K_{1,3}) = 2\sqrt{3},\ E(3K_{1,12}) = 2\sqrt{12} \text{ and } E(K_{1,24}) = 2\sqrt{24}.$$

由于 $E(\mathcal{B}(G)) = E(K_2) + E(K_1,3) + E(3K_1,12) + E(K_1,24)$，我们得到 $E(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。根据定理 4.1，我们有 L-谱($\mathcal{B}(G)$) = $\{(0)^6, (1)^{58}, (2)^1, (4)^1, (13)^3, (25)^1\}$ =Q-谱($\mathcal{B}(G)$)，$m = 64$ 且 $n = 70$。现在，$\left|0-\frac{64}{70}\right| = \frac{64}{35}$，$\left|1-\frac{64}{70}\right| = \frac{29}{35}$，$\left|2-\frac{64}{70}\right| = \frac{6}{35}$，$\left|4-\frac{64}{70}\right| = \frac{76}{35}$。$\left|13-\frac{64}{70}\right| = \frac{391}{35}$) 和 $\left|25-\frac{64}{70}\right| = 811\ 35$。因此，根据 LE 和 LE^+ 的定义，我们有

$$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = 6 \times \frac{64}{35} + 58 \times \frac{29}{35} + \frac{6}{35} + \frac{76}{35} + 3 \times \frac{391}{35} + \frac{811}{35} = \frac{4132}{35}.$$

最后,

$$E_{CN}(K_2) = 0,\ E_{CN}(K_{1,3}) = 4,\ E_{CN}(3K_{1,12}) = 66 \text{ and } E_{CN}(K_{1,24}) = 46.$$

由于 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = E_{CN}(K_2) + E_{CN}(K_{1,3}) + E_{CN}(3K_{1,12}) + E_{CN}(K_{1,24})$，我们得到 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。

(b) 如果 $p \geq 3$，那么根据引理 2.5，我们得到

$$E(K_2) = 2,\ E(K_{1,3}) = 2\sqrt{3},\ E(pK_{1,12}) = 2p\sqrt{12},\ E(K_{1,p^2-1}) = 2\sqrt{p^2-1},$$

$$E(K_{1,3p^2-3}) = 2\sqrt{3p^2-3} \text{ and } E(K_{1,12p^2-12p}) = 2\sqrt{12p^2-12p}.$$

由于 $E(\mathcal{B}(G)) = E(K_2) + E(K_{1,3}) + E(pK_{1,12}) + E(K_{1,p^2-1}) + E(K_{1,3p^2-3}) + E(K_{1,12p^2-12p})$，我们得到 $E(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。根据定理 4.1，我们有 L-谱$(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^{p+5}, (1)^{16p^2-p-5}, (2)^1, (4)^1, (13)^p, (p^2)^1, (3p^2-2)^1, (12p^2-12p+1)^1\right\}$ = Q-谱$(\mathcal{B}(G))$,$m = 16p^2$ 以及 $n = 16p^2+p+5$。现在，$\left|0 - \frac{32p^2}{16p^2+p+5}\right| = \frac{32p^2}{16p^2+p+5}$，$\left|1 - \frac{16p^2-p-5}{16p^2+p+5}\right| = \frac{16p^2-p-5}{16p^2+p+5}$，$\left|2 - \frac{2p+10}{16p^2+p+5}\right| = \frac{2p+10}{16p^2+p+5}$，$\left|4 - \frac{32p^2+4p+20}{16p^2+p+5}\right| = \frac{32p^2+4p+20}{16p^2+p+5}$，$\left|13 - \frac{176p^2+13p+65}{16p^2+p+5}\right| = \frac{176p^2+13p+65}{16p^2+p+5}$，$\left|p^2 - \frac{16p^4+p^3-27p^2}{16p^2+p+5}\right| = \frac{16p^4+p^3-27p^2}{16p^2+p+5}$，$\left|(3p^2-2) - \frac{48p^4+3p^3-49p^2-2p-10}{16p^2+p+5}\right| = \frac{48p^4+3p^3-49p^2-2p-10}{16p^2+p+5}$ 且 $\left|(12p^2-12p+1) - \frac{192p^4-180p^3+32p^2-59p+5}{16p^2+p+5}\right| = \frac{192p^4-180p^3+32p^2-59p+5}{16p^2+p+5}$。因此，根据（无符号）拉普拉斯能量的定义，我们有

$$\begin{aligned}
LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(\mathcal{B}(G)) \\
&= (p+5)\frac{32p^2}{16p^2+p+5} + (16p^2-p-5)\frac{16p^2-p-5}{16p^2+p+5} + \frac{2p+10}{16p^2+p+5} \\
&\quad + \frac{32p^2+4p+20}{16p^2+p+5} + p\frac{176p^2+13p+65}{16p^2+p+5} + \frac{16p^4+p^3-27p^2}{16p^2+p+5} \\
&\quad + \frac{48p^4+3p^3-49p^2-2p-10}{16p^2+p+5} + \frac{192p^4-180p^3+32p^2-59p+5}{16p^2+p+5} \\
&= \frac{512p^4+2p^2+20p+50}{16p^2+p+5}.
\end{aligned}$$

最后,

$$E_{CN}(K_2) = 0,\ E_{CN}(K_{1,3}) = 4,\ E_{CN}(pK_{1,12}) = 22p,\ E_{CN}(K_{1,p^2-1}) = 2p^2-4,$$

$$E_{CN}(K_{1,3p^2-3}) = 6p^2-8 \text{ and } E_{CN}(K_{1,12p^2-12p}) = 24p^2-24p-2.$$

由于 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = E_{CN}(K_2) + E_{CN}(K_{1,3}) + E_{CN}(pK_{1,12}) + E_{CN}(K_{1,p^2-1}) + E_{CN}(K_{1,3p^2-3}) + E_{CN}(K_{1,12p^2-12p})$，我们得到 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 所需的表达式。■

定理 4.4。设 $G = Q_{4p^2}$ 和 p 是任意素数。

(a) *If* $p = 2$ *then* $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 30\sqrt{3} + 16\sqrt{6}$, $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{131314}{267}$ *and* $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = 490$.

(b) *If* $p \geq 3$ *then* $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2\sqrt{3} + 2p^2\sqrt{12} + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{3p^2-3} + 2\sqrt{3p^4-3p^2} + 2(p-1)\sqrt{12p^2-12p} + 2\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p}$, $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{512p^8+16p^5-24p^4-44p^3+118p^2-32p+54}{16p^4+p^2+p+5}$ *and* $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = 32p^4-2p^2-2p-10$.

证明。 (a) 若 $p = 2$，则由定理 2.3 可得 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ 3} \sqcup 5K_{1,\ 12} \sqcup 2K_{1,\ 24} \sqcup K_{1,\ 48} \sqcup K_{1,\ 96}$。现在由引理 2.5 可得

$$E(K_2) = 2,\ E(K_{1,3}) = 2\sqrt{3},\ E(5K_{1,12}) = 10\sqrt{12},\ E(2K_{1,24}) = 4\sqrt{24},\ E(K_{1,48}) = 2\sqrt{48}$$
$$\text{and } E(K_{1,96}) = 2\sqrt{96}.$$

由于 $E(\mathcal{B}(G)) = E(K_2) + E(K_{1,3}) + E(5K_{1,12}) + E(2K_{1,24}) + E(K_{1,48}) + E(K_{1,96})$，我们得到 $E(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。根据定理 4.2，我们有 L-谱$(\mathcal{B}(G)) = \{(0)^{11}, (1)^{245}, (2)^1, (4)^1, (13)^5, (25)^2, (49)^1, (97)^1\}$ = Q-谱$(\mathcal{B}(G))$，$m = 256$ 以及 $n = 267$。现在，$\left|0 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{512}{267}$、$\left|1 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{245}{267}$、$\left|2 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{22}{267}$、$\left|4 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{556}{267}$、$\left|13 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{2959}{267}$、$\left|25 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{6163}{267}$、$\left|49 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{12571}{267}$ 和 $\left|97 - \frac{2(256)}{267}\right| = \frac{25387}{267}$。因此，根据 LE 和 LE^+ 的定义，我们有

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) &= 11 \times \frac{512}{267} + 245 \times \frac{245}{267} + \frac{22}{267} + \frac{556}{267} + 5 \times \frac{2959}{267} \\ &\quad + 2 \times \frac{6163}{267} + \frac{12571}{267} + \frac{25387}{267} \\ &= \frac{131314}{267}. \end{aligned}$$

最后，

$$E_{CN}(K_2) = 0,\ E_{CN}(K_{1,3}) = 4,\ E_{CN}(5K_{1,12}) = 110,\ E_{CN}(2K_{1,24}) = 92,$$
$$E_{CN}(K_{1,48}) = 94 \text{ and } E_{CN}(K_{1,96}) = 190.$$

由于 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = E_{CN}(K_2) + E_{CN}(K_{1,\ 3}) + E_{CN}(5K_{1,\ 12}) + E_{CN}(2K_{1,\ 24}) + E_{CN}(K_{1,\ 48}) + E_{CN}(K_{1,\ 96})$，我们得到 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。

(b) 如果 $p \geq 3$，那么根据引理 2.5，我们得到

$$E(K_2) = 2,\ E(K_{1,3}) = 2\sqrt{3},\ E(p^2K_{1,12}) = 2p^2\sqrt{12},\ E(K_{1,p^2-1}) = 2\sqrt{p^2-1},$$
$$E(K_{1,3p^2-3}) = 2\sqrt{3p^2-3},\ E(K_{1,3p^4-3^2}) = 2\sqrt{3p^4-3p^2},$$
$$E((p-1)K_{1,12p^2-12p}) = 2(p-1)\sqrt{12p^2-12p} \text{ and}$$
$$E(K_{1,13p^4-12p^3+11p^2-12p}) = 2\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p}.$$

Since $E(\mathcal{B}(G))$ is the sum of the above energies, we get the required expression for $E(\mathcal{B}(G))$. By Theorem 4.2, we have L-spec$(\mathcal{B}(G)) = \Big\{(0)^{p^2+p+5}, (1)^{16p^4-p^2-p-5}, (2)^1, (4)^1, (13)^{p^2}, (p^2)^1, (3p^2-2)^1, (3p^4-3p^2+1)^1, (12p^2-12p+1)^{p-1}, (13p^4-12p^3+11p^2-12p+1)^1\Big\}$ = Q-spec$(\mathcal{B}(G))$, $m = 16p^4$ and $n = 16p^4+p^2+p+5$. Now, $\left|0 - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{32p^4}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|1 - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{16p^4-p^2-p-5}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|2 - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{2p^2+2p+10}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|4 - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{32p^4+4p^2+4p+20}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|13 - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{176p^4+13p^2+13p+65}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|p^2 - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{16p^6-31p^4+p^3+5p^2}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|(3p^2-2) - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{48p^6-61p^4+3p^3+13p^2-2p-10}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|(3p^4-3p^2+1) - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{48p^8-45p^6+3p^5-4p^4-3p^3-14p^2+p+5}{16p^4+p^2+p+5}$, $\left|(12p^2-12p+1) - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right| = \frac{192p^6-192p^5-4p^4+p^2-11p+1}{16p^4+p^2+p+5}$ and

$\left|(13p^4-12p^3+11p^2-12p+1) - \frac{2(16p^4)}{16p^4+p^2+p+5}\right|$

$$= \frac{208p^8-192p^7+189p^6-175p^5+48p^4-61p^3+44p^2-59p+5}{16p^4+p^2+p+5}.$$

因此，根据（无符号）拉普拉斯能量的定义，我们有　　h

$$\begin{aligned}
&LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))\\
&= (p^2+p+5)\frac{32p^4}{16p^4+p^2+p+5} + \frac{(16p^4-p^2-p-5)^2}{16p^4+p^2+p+5} + \frac{2p^2+2p+10}{16p^4+p^2+p+5}\\
&\quad + \frac{32p^4+4p^2+4p+20}{16p^4+p^2+p+5} + p^2\frac{176p^4+13p^2+13p+65}{16p^4+p^2+p+5} + \frac{16p^6-31p^4+p^3+5p^2}{16p^4+p^2+p+5}\\
&+ \frac{48p^6-61p^4+3p^3+13p^2-2p-10}{16p^4+p^2+p+5} + \frac{192p^6-192p^5-4p^4+p^2-11p+1}{16p^4+p^2+p+5}\\
&+ \frac{48p^8-45p^6+3p^5-4p^4-3p^3-14p^2+p+5}{16p^4+p^2+p+5}\\
&+ \frac{208p^8-192p^7+189p^6-175p^5+48p^4-61p^3+44p^2-59p+5}{16p^4+p^2+p+5}\\
&= \frac{512p^8+16p^5-24p^4-44p^3+118p^2-32p+54}{16p^4+p^2+p+5}.
\end{aligned}$$

最后，

$$E_{CN}(K_2) = 0,\ E_{CN}(K_{1,3}) = 4,\ E_{CN}(p^2K_{1,12}) = 22p^2,\ E_{CN}(K_{1,p^2-1}) = 2p^2-4,$$

$$E_{CN}(K_{1,3p^2-3}) = 6p^2-8,\ E_{CN}(K_{1,3p^4-3p^2}) = 6p^4-6p^2-2,$$

$$E_{CN}((p-1)K_{1,12p^2-12p}) = 24p^3-48p^2+22p+2 \text{ and}$$

$$E_{CN}(K_{1,13p^4-12p^3+11p^2-12p}) = 26p^4-24p^3+22p^2-24p-2.$$

由于 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = E_{CN}(K_2)+E_{CN}(K_{1,3})+E_{CN}(p^2K_{1,12})+E_{CN}(K_{1,p^2-1})+E_{CN}(K_{1,3p^2-3})+E_{CN}(K_{1,3p^4-3p^2}) + E_{CN}(K_{1,12p^2-12p}) + E_{CN}(K_{1,13p^4-12p^3+11p^2-12p})$，我们得到 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。证明至此完成。■

定理 4.5. 若 $G = Q_{4p}$，则 $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的，但不是超能量的、*L*-超能量的、*Q*-超能量的，也不是 *CN*-超能量的。

证明。**情况 1**。 $p = 2$

由定理 2.2 和定理 4.3 可得 $|V(\mathcal{B}(G))| = 70$ and $E(\mathcal{B}(G)) \approx 36.0466$。显然， $|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。因此， $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{70}) = 2(70-1) = 138 > 36.0466 \approx E(\mathcal{B}(G))$。因此，$\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外， $LE(K_{70}) = LE^+(K_{70}) = 138$。由定理 4.3 可得 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) \approx 118.0571$。因此， $LE^+(K_{70}) = LE(K_{70}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。故， $\mathcal{B}(G)$ 既非 L-超能量，也非 Q-超能量。

根据定理 4.3，我们有 $E_{CN}(K_{70}) = 2(70-1)(70-2) = 9384 > 116 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是 CN- 超能量图。

情形 2。 $p \geq 3$

由定理 2.2 和定理 4.3，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = 16p^2+p+5$ 以及

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{3}+2p\sqrt{12}+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{3p^2-3}+2\sqrt{12p^2-12p}.$$

Since $4 > 2\sqrt{3}$, $13p > 2p\sqrt{12}$, $p^2 > 2\sqrt{p^2-1}$, $3p^2-2 > 2\sqrt{3p^2-3}$ and $12p^2-12p+1 > 2\sqrt{12p^2-12p}$ we have

$$4+13p+p^2+3p^2-2+12p^2-12p+1+2 > 2+2\sqrt{3}+2p\sqrt{12}+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{3p^2-3} + 2\sqrt{12p^2-12p}.$$

因此,

$$|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G)). \tag{2}$$

因此， $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{16p^2+p+5}) = 2(16p^2+p+5-1) = 32p^2+2p+8 > 16p^2+p+5 = |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$（由 (2) 得）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外， $LE(K_{16p^2+p+5}) = LE^+(K_{16p^2+p+5}) = 32p^2+2p+8$。由定理 4.3，得 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{512p^4+2p^2+20p+50}{16p^2+p+5}$。现在,

$$\begin{aligned} LE(K_{16p^2+p+5}) - LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(K_{16p^2+p+5}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 32p^2+2p+8-\frac{512p^4+2p^2+20p+50}{16p^2+p+5} \\ &= \frac{64p^3+288p^2-2p-10}{16p^2+p+5} > 0. \end{aligned}$$

因此,

$$LE^+(K_{16p^2+p+5}) = LE(K_{16p^2+p+5}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)).$$

因此， $\mathcal{B}(G)$ 既不是 L-超能量的，也不是 Q-超能量的。

我们有 $E_{CN}(K_{16p^2+p+5}) = 2(16p^2+p+5-1)(16p^2+p+5-2) = (32p^2+2p+8)(16p^2+p+3) > 32p^2-2p-10 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$（根据定理 4.3）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量。

证明至此完成。 ■

定理 4.6。若 $G = Q_{4p^2}$，则 $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量，但不是超能量、*L*- 超能量、*Q*-超能量和 *CN*-超能量。

证明。 **情况 1.** $p = 2$

由定理 2.3 和定理 4.3，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = 267$ 和 $E(\mathcal{B}(G)) \approx 93.1533$。显然， $|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。因此， $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{267}) = 2(267-1) = 532 > 93.1533 \approx E(\mathcal{B}(G))$。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是超能量。

此外， $LE(K_{267}) = LE^+(K_{267}) = 532$。根据定理 4.4，我们有 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) \approx 491.8127$。因此， $LE^+(K_{267}) = LE(K_{267}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。所以， $\mathcal{B}(G)$ 既不是 L-超能量，也不是 Q-超能量。

我们有 $E_{CN}(K_{267}) = 2(267-1)(267-2) = 140980 > 490 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$（使用定理 4.4）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量。

情形 2。 $p \geq 3$

由定理 2.3 和定理 4.4，得到 $|V(\mathcal{B}(G))| = 16p^4+p^2+p+5$ 和

$$\begin{aligned} E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{3}+2p^2\sqrt{12}+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{3p^2-3}+2\sqrt{3p^4-3p^2} \\ +2(p-1)\sqrt{12p^2-12p}+2\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p}. \end{aligned}$$

由于 $4 > 2\sqrt{3}$, $13p^2 > 2p^2\sqrt{12}$, $p^2 > 2\sqrt{p^2-1}$, $3p^2-2 > 2\sqrt{3p^2-3}$, $3p^4-3p^2+1 > 2\sqrt{3p^4-3p^2}$, $(p-1)(12p^2-12p+1) > 2(p-1)\sqrt{12p^2-12p}$ 和 $13p^4-12p^3+11p^2-12p+1 > 2\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p}$, 两边相加可得

$$|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G)). \tag{3}$$

因此, $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{16p^4+p^2+p+5}) = 2(16p^4+p^2+p+5-1) = 32p^4+2p^2+2p+8 > 16p^4+p^2+p+5 = |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$（使用 (3)）。因此, $\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外, $LE(K_{16p^4+p^2+p+5}) = LE^+(K_{16p^4+p^2+p+5}) = 32p^4+2p^2+2p+8$。由定理 4.4, 我们有 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{512p^8+16p^5-24p^4-44p^3+118p^2-32p+54}{16p^4+p^2+p+5}$。现在,

$$\begin{aligned} LE(K_{16p^4+p^2+p+5}) - LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(K_{16p^4+p^2+p+5}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 32p^4+2p^2+2p+8 - \frac{512p^8+16p^5-24p^4-44p^3+118p^2-32p+54}{16p^4+p^2+p+5} \\ &= \frac{64p^6+48p^5+314p^4+48p^3-98p^2+50p-14}{16p^4+p^2+p+5} > 0. \end{aligned}$$

因此,

$$LE^+(K_{16p^4+p^2+p+5}) = LE(K_{16p^4+p^2+p+5}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)).$$

因此, $\mathcal{B}(G)$ 既不是 L-超能量, 也不是 Q-超能量。

根据定理 4.4, 我们有 $E_{CN}(K_{16p^4+p^2+p+5}) = 2(16p^4+p^2+p+5-1)(16p^4+p^2+p+5-2) = (32p^4+2p^2+2p+8)(16p^4+p^2+p+3) > 32p^4-2p^2-2p-10 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$。因此, $\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量。

证明至此完成。 ■

定理 4.7。 若 $G = Q_{4p}$, 则 $E(\mathcal{B}(G)) < LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。

证明。 **情况 1**。 $p = 2$。

由定理 4.3 (a), 我们得到 $E(\mathcal{B}(G)) \approx 36.0466$和 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) \approx$118。0571。显然, $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) > E(\mathcal{B}(G))$。

情形 2. $p \geq 3$。

由定理 4.3 (b), 我们得到

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{3}+2p\sqrt{12}+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{3p^2-3}+2\sqrt{12p^2-12p} \quad \text{and}$$

$$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{512p^4+2p^2+20p+50}{16p^2+p+5}.$$

此外, 由定理 4.5 可得 $|V(\mathcal{B}(G))| = 16p^2+p+5 > E(\mathcal{B}(G))$。现在,

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| &= LE^+(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| \\ &= \frac{512p^4+2p^2+20p+50}{16p^2+p+5} - 16p^2+p+5 \\ &= \frac{256p^4-32p^3-159p^2+10p+25}{16p^2+p+5} \\ &= \frac{p^2(256p^2-32p-159)+10p+25}{16p^2+p+5} := \frac{f(p)}{g(p)}. \end{aligned}$$

由于对于所有素数 p、$256p^2-32p>159$ 和 $16p^2+p+5>0$，我们有 $f_{(p)}\,g(p)>0$。因此，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。■

定理 4.8。若 $G=Q_{4p^2}$，则 $E(\mathcal{B}(G)) < LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。

证明。**情况 1.** $p=2$。

由定理 4.4 (a)，得 $E(\mathcal{B}(G)) \approx 93.1533$和 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) \approx$491。8127。显然，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) > E(\mathcal{B}(G))$。

情形 2. $p\geq 3$。

由定理 4.4 (b)，得

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{3}+2p^2\sqrt{12}+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{3p^2-3}+2\sqrt{3p^4-3p^2} + 2(p-1)\sqrt{12p^2-12p}+2\sqrt{13p^4-12p^3+11p^2-12p} \quad \text{and}$$

$$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{512p^8+16p^5-24p^4-44p^3+118p^2-32p+54}{16p^4+p^2+p+5}.$$

此外，根据定理 4.6，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = 16p^4+p^2+p+5 > E(\mathcal{B}(G))$。现在，

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| &= LE^+(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| \\ &= \frac{512p^8+16p^5-24p^4-44p^3+118p^2-32p+54}{16p^4+p^2+p+5} - 16p^4+p^2+p+5 \\ &= \frac{256p^8-32p^6-16p^5-185p^4-46p^3+107p^2-42p+29}{16p^4+p^2+p+5} \\ &= \frac{p^3(256p^5-32p^3-16p^2-185p-46)+107p^2-42p+29}{16p^4+p^2+p+5} := \frac{f(p)}{g(p)}. \end{aligned}$$

由于对于所有素数 p、$256p^5-32p^3-16p^2-185p>46$ 和 $16p^4+p^2+p+5>0$，我们有 $f(p)\,g(p)>0$。因此，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。■

Concluding remark

我们以如下说明作为本文的结尾。

注 4.1。若 $G=D_{2p}$、D_{2p^2}、Q_{4p} 和 Q_{4p^2}，其中 p 是任意素数，则

(a) $\mathcal{B}(G)$ 不是整的，但它是 *L*-整、*Q*-整和 *CN*-整。(b) $\mathcal{B}(G)$ 是亚能量的，但不是超能量的、*L*-超能量的、*Q*-超能量的，也不是 *CN*-超能量的。(c) $\mathcal{B}(G)$ 满足 *E-LE* 猜想。

考虑以下问题或许会很有意思。

问题 4.9. 是否存在有限非阿贝尔群 G，使得 $\mathcal{B}(G)$ 不满足注 *4.1* 的结论？

致谢。第一作者感谢科学与工业研究理事会提供的研究员奖学金（文件编号 09/0796(16521)/2023-EMR-I）。

Declarations

- 资助：作者未获得任何资助。
- 利益冲突：作者声明不存在任何利益冲突。
- 数据和材料的可用性：本文撰写过程中未使用任何数据。

References

[1] Abdussakir, –, Elvierayani, R. R. 和 Nafisah, M. 关于二面体群上交换图与非交换图的谱，Cauchy-Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi，4(4)，176–182，2017年。[2] Abreu, N., Cardoso, D. M., Gutman, I., Martins, E. A. 和 Robbiano, M. 无符号拉普拉斯能量的界。Linear Algebra and its Applications，435(10)，2365–2374，2011年。[3] Ali, F. 和 Li, Y. 某些群上交换图的连通度与谱半径，Linear and Multilinear Algebra，69(16)，2945–2958，2021年。[4] Al wardi, A., Arsic, B., Gutman, I., Sonera, N.D. 公共邻域图及其能量，Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics，7(2)，1–8，2012年。[5] Alwardi, A., Soner, N. D. 和 Gutman, I. 关于图的公共邻域能量，Bulletin (Acad´emie Serbe Des Sciences Et Des Arts. Classe Des Sciences Math´ematiques Et Naturelles. Sciences Math´ematiques)，36，49–59，2011年。[6] Arunkumar, G., Cameron, P. J., Nath, R. K. 和 Selvaganesh, L. 群上的超图 I，《图与组合》，38，文章编号100，2022年。[7] Arunkumar, G., Cameron, P. J., Ganeshbabu, R. 和 Nath, R. K. 超图的主函数与谱，预印本，https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.00390[8] Bali´ńska, K., Cvetkovi´ć, D., Radosavljevi´ć, Z., Simi´ć, S. 和 Stevanovi´ć, D. 整图综述，Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 13，42–65，2002年。[9] Banerjee, S. 和 Adhikari, A. 有限循环群和二面体群幂图的谱，《落基山数学杂志》，53(2)，341–356，2023年。[10] Bhowal, P. 和 Nath, R. K. 有限群交换共轭类图的谱性质，Algebraic Structures and Their Applications，8(2)，67–118，2021年。[11] Bhowal, P. 和 Nath, R. K. 有限群交换共轭类图的谱与能量，Algebraic Structures and Their Applications，12(1)，33–49，2025年。[12] Cameron, P. J. 定义在群上的图，International Journal of Group Theory，11(2)，53–107，2022年。[13] Cameron, P. J., Jannat, F. E., Nath, R. K. 和 Sharafdini, R. 群的共轭类图综述，Expositiones Mathematicae，42(4)，文章编号125585，2024年。[14] Chattopadhyay, S., Panigrahi, P. 和 Atik, F. 某些有限群幂图的谱半径，Indagationes Mathematicae，29(2)，730–737，2018年。[15] Cvetkovi´ć, D., Rowlinson, P. 和 Simi´ć, S. K. 有限图的无符号拉普拉斯矩阵，《线性代数及其应用》，423，155–171，2007年。[16] Dalal, S., Mukherjee, S. 和 Patra, K. L. 某些有限群的超交换图的谱，Computational and Applied Mathematics，43，文章编号348，2024年。[17] Das, S., Erfanian, A. 和 Nath, R. K. 关于定义在群上的二部图，Journal of Algebra and Its Application，https://doi.org/10.1142/S0219498826501926。[18] Das, S., Erfanian, A. 和 Nath, R. K. 子群生成二部图的 Zagreb 指标，《离散数学、算法与应用》，https://doi.org/10.1142/S1793830925501411。[19] Dutta, P., Bagchi, B. 和 Nath, R. K. 有限非阿贝尔群交换图的各种能量，Khayyam Journal of Mathematics，6(1)，27–45，2020年。[20] Dutta, P., Dutta, J. 和 Nath, R. K. 有限群非交换图的拉普拉斯谱，Indian Journal of Pure and Applied Mathematics，49(2)，205–216，2018年。[21] Dutta, J. 和 Nath, R. K. 某些有限群类的交换图谱，Matem- atika，33(1)，87–95，2017年。[22] Dutta, J. 和 Nath, R. K. 交换图为整图的有限群，Matemati˘cki Vesnik，69(3)，226–230，2017年。

[23] Dutta, J. 和 Nath, R. K. 有限群交换图的拉普拉斯谱与无符号拉普拉斯谱，Khayyam Journal of Mathematics，4(1)，77–87，2018年。[24] Dutta, J. 和 Nath, R. K. 某些超整群交换图的各种能量，Indian Journal of Pure and Applied Mathematics，52(1)，1–10，2021年。[25] Dutta, P. 和 Nath, R. K. 关于有限群非交换图的拉普拉斯能量，Journal of Linear and Topological Algebra，7(2)，121–132，2018年。[26] Fallat, S., Kirkland, S., Molitierno, J. 和 Neumann, M. 关于拉普拉斯矩阵具有互不相同整数特征值的图，《图论杂志》50，162–174，2005年。[27] Fasfous, W. N. T. 和 Nath, R. K. 涉及有限群非交换图的能量与拉普拉斯能量的不等式，Indian Journal of Pure and Applied Mathematics，56(2)，791–812，2025年。[28] Fasfous, W. N. T., Sharafdini, R. 和 Nath, R. K. 有限群交换图的公共邻域谱，《代数与离散数学》，32(1)，33–48，2021年。[29] Ghorbani, M. 和 Gharavi-Alkhansari, Z. 关于非交换图的能量，Journal of Linear and Topological Algebra，6(2)，135–146，2017年。[30] Ghorbani, M., Gharavi-Alkhansari, Z. 和 Bashi, A. Z. 关于非交换图的特征值，《代数结构及其应用杂志》，4(2)，27–38，2017年。[31] Gutman, I. 图的能量，格拉茨数学与统计研究中心报告，103，1–22，1978年。[32] Gutman, I. 超能分子图，《塞尔维亚化学学会杂志》，64，199–205，1999年。[33] Gutman, I., Abreu, N. M. M., Vinagre, C. T. M., Bonifacioa, A. S. 和 Radenkovic, S. 能量与拉普拉斯能量的关系，《数学与计算机化学通讯》，59，343–354，2008年。[34] Gutman, I. 和 Zhou, B. 图的拉普拉斯能量。《线性代数及其应用》，414(1)，29–37，2006年。[35] Hamzeh A. 和 Ashrafi, A. R. 某些有限群的幂图及其主超图的谱与 L-谱，Filomat，31(16)，5323–5334，2017年。[36] Fasfous, W. N. T., Nath, R. K. 和 Sharafdini, R. 有限环交换图的各种谱与能量，《哈杰特佩数学与统计杂志》，49(6)，1915–1925，2020年。[37] Hansen, P. 和 Vuki˘cevi´c, D. Zagreb 指标的比较，《克罗地亚化学学报》，80(2)，165–168，2007年。[38] Harary, F. 和 Schwenk, A. J. 哪些图具有整数谱? 《图与组合》（R. Bari 和 F. Harary 编），Springer-Verlag，柏林，45，1974年。[39] Jannat, F. E. 和 Nath, R. K. 交换共轭类图的公共邻域谱与能量，《代数系统杂志》，12(2)，301–326，2025年。[40] Kumar, A., Selvaganesh, L., Cameron, P. J. 和 Chelvam, T. T.（2021）。有限群幂图的最新进展——综述，《AKCE国际图与组合杂志》，18(2)，65–94，2021年。[41] Mahtabi, M., Erfanian, A. 和 Mahtabi, R. 与有限群相关联的二部图，Asian-European Journal of Mathematics，16(10)，文章编号2350185，2023年。[42] Mehranian, Z., Gholami, A. 和 Ashrafi, A. R. 某些有限群幂图的谱，《线性与多重线性代数》，65(5)，1003–1010，2017年。[43] Merris, R. 度数极大图是拉普拉斯整数谱图，《线性代数及其应用》，199，381–389，1994年。[44] Nath, R. K. 有限群 n-中心化子的各种谱，International Journal of Engineering, Science and Technology，10(2S)，170–172，2018年。[45] Nath, R. K., Fasfous, W. N. T., Das, K. C. 和 Shang, Y. 有限群交换图的公共邻域能量，《Symmetry》，13(9)，文章编号1651，2021年。[46] Panda, R. P. 某些有限群幂图的拉普拉斯谱，《图与组合》35，1209–1223，2019年。[47] Rather, B. A., Pirzada, S., Chishti, T. A. 和 Alghamdi, A. M. 关于有限循环群相关幂图的归一化拉普拉斯特征值，《离散数学、算法与应用》，15(2)，文章编号2250070，2023年。

[48] Singh, S. N. 某些素幂阿贝尔群的幂图的拉普拉斯谱，《亚洲-欧洲数学杂志》，**15**(2)，文章编号2250026，2022年。[49] Sharafdini, R.、Nath, R. K. 和 Darbandi, R. 有限AC群的交换图的能量，《*Proyecciones*数学杂志》，**41**(1)，263-273，2022年。[50] Sharma, M. 和 Nath, R. K. 有限群的非交换图的无符号拉普拉斯能量及相关结果，《离散数学、算法与应用》，**17**(4)，文章编号2450060，2025年。[51] Stani´c, Z. 关于Q-整图的一些结果，《组合学汇刊》**90**，321–335，2009年。[52] Torktaz, M. 和 Ashrafi, A.R. 某些群的交换图的谱性质，《*AKCE*国际图与组合杂志》，**16**(3)，300–309，2019年。[53] Walikar, H. B.、Ramane, H. S. 和 Hampiholi, P. R. 关于图的能量，《图连接》，*Allied Publishers*，新德里，120–123，1999年。

S. Das, Department of Mathematical Sciences, Tezpur University, Napaam-784028,Sonitpur, Assam, India.
Department of Mathematics, Sibsagar University, Joysagar-785665, Sibsagar, Assam,India.

电子邮箱地址: shrabanidas904@gmail.com

A. Erfanian, Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, P.O.Box 1159-91775, Mashhad, Iran电子邮箱地址: erfanian@um.ac.ir

R. K. Nath, Department of Mathematical Sciences, Tezpur University, Napaam-784028,Sonitpur, Assam, India.电子邮箱地址: rajatkantinath@yahoo.com