arXiv:2601.04008v1 [math.RT] 7 Jan 2026

不含 q 平方根的 A 型仿射 Hecke 代数与舒尔代数

Rose Berry

马克斯·普朗克数学研究所，波恩

摘要

我们为扩张仿射 Hecke 代数和 A 型仿射 q-Schur 代数提供了一种仿射胞腔结构，该结构定义在 $\mathbb{Z}\left[q^{\pm 1}\right]$ 上，也就是说，不需要添加 $q^{\frac{1}{2}}$。此项工作的目标是应用于系数环上的 $\mathrm{GL}_n(F)$ 表示论，其中系数环是 F 上的 p-进域，p 可逆但没有平方根；这一方向近期颇受关注。我们通过对每个左胞腔和右胞腔上已知的、定义在 $\mathbb{Z}\left[q^{\pm\frac{1}{2}}\right]$ 上的仿射胞腔结构进行重整化来实现这一点；重整化方式经过精心选择，以确保对角交仍为子代数，且左右胞腔仍然同构。此外，我们证明了舒尔代数上的仿射胞腔结构具有幂等性，由此推出其具有有限整体维数；这是将其应用于 p-进群表示论的一项重要要素。

1 引言

˜A 型 A_{n-1} 的扩展仿射 Hecke 代数贯穿于表示论的各个领域。最值得一提的是，其复模等价于 p-进域 F([BK99]) 上 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的光滑复表示范畴的主块；其反球面模则同构于特征为 p 的代数闭域 k 上 $\mathrm{GL}_n(k)$ 的有理表示主块的格洛腾迪克群，也同构于单位根 p 次幂处的仿射量子群 $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$ 表示的主块的格洛腾迪克群（[AJS94]）。

为拓展这些应用，自然会引入仿射 q-舒尔代数。它既是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的群代数的一个商（[Vig03]），也是 $\hat{U}(\mathfrak{gl}_n)$ 的一个商（[Gre99]）；在这两种情形下，都是通过与 Hecke 代数的双中心化子关系得到的。在前一种情形中，它描述了特征为 $l \neq p$ 的代数闭域上光滑表示主块的一个子范畴，并可通过 dg 增强来描述整个主块的导出范畴（[Ber25]）；在后一种情形中，它可用于为修正量子群赋予胞结构（[McG03]）。

Hecke 代数和舒尔代数均定义在整数环添加单个抽象参数 q 后的环上。然而，传统上还会添加其逆元 q^{-1} 以及一个

平方根 $q^{\frac{1}{2}}$。-这是因为许多理论内容，例如 Lusztig 的 a-函数（[Lus85]）和渐近代数（[Lus87]）的构造，都需要在这个扩张环上进行。然而，近期关于 p-adic 群的研究（[Dat09; Hel+24; DL25]）已考虑不含 q 平方根的系数环。因此，探讨 Hecke 代数和舒尔代数的理论能否在这一更广泛的环类上建立，便很有意义。

具体而言，我们旨在按照 [KX12]的意义，在 $\mathbb{Z}\left[q^{\pm 1}\right]$ 上定义 Hecke 代数和舒尔代数的仿射胞腔结构，并进一步证明后者满足额外的幂等性，从而推出其具有有限整体维数。这一性质是作者在 [Ber25] 中证明导出主块等价于 dg 增强 Schur 代数时所用的一个要素，因此也是将这一结果推广到这些更一般系数环上的一步。我们沿用此前为这两个代数构造仿射胞腔结构的方法（[KX12；Cui15；Cui16]），并在遇到障碍时逐一处理。对于有限型 A，众所周知，Schur 代数已经是拟遗传的，因而也是胞腔的，无须 $q^{\frac{1}{2}}$ （[DPS98]）。这一点是通过将双侧胞腔中左胞腔之间通常的同构规范化，使其能在整数环上定义而证明的；类似的论证也是我们推理中的关键步骤。

仿射情形带来的额外难点，是为渐近代数找到合适的整系数规范化。典型的规范化是利用规范化的 Kazhdan-Lusztig 基定义的，而这种基只有在添入 $q^{\frac{1}{2}}$ 后才有定义。由未经规范化的 Kazhdan-Lusztig 基张成的模虽可在整系数范围内定义，却不能先验地保证在乘法下封闭。不过，结果表明，一个密切相关的规范化是封闭的，因此可作为仿射胞腔结构中渐近代数的候选。验证这一点，需要理解每个双侧胞腔中元素的长度，以及它们在乘法下如何变化。

上述两项规范化结果都依赖于添入逆元 q^{-1}。因此，至少按照现有方法，似乎不太可能将其去除。不过，这并无大碍，因为相关的 p-进群应用只在 q^{-1} 存在的情形下才有意义。尽管如此，由于胞腔本身无需 q^{-1}即可定义，若能了解在完全一般的情形下可以赋予它们何种结构，将会很有意思。

全文始终注意区分针对仿射赫克代数证明的结果与针对扩展仿射 Hecke 代数证明的结果，并确保我们的构造在所述的一般性范围内是正确的。我们还力求全面概述这一构造；此前，相关内容散见于大量论文之中，而这些论文对其中各种对象采用了不同的约定。特别值得一提的是，我们使用的 Kazhdan-Lusztig 基是标准基的非负线性组合，并且我们以 Coxeter 群组合而非无限矩阵和箕舌层来构造舒尔代数及其 Kazhdan-Lusztig 基。

第二节回顾扩展仿射Weyl群、Hecke 代数和舒尔代数的定义及基本结构。第3节回顾规范化与非规范化 Kazhdan-Lusztig基，以及左胞腔、右胞腔和双侧胞腔的定义，同时回顾关于其偏序和数量的已有结果。在

第4节中，我们回顾双侧胞腔中左胞腔之间通常同构的构造，并说明如何对其进行规范化，使其能够在整数上定义。第5节中，我们回顾渐近代数的构造及其已知形式，然后给出另一种规范化形式，并证明其是一个整数子代数。第6节中，我们将这两个结果与一个最终结果结合起来，证明左胞腔在我们新近规范化的渐近代数的右作用下构成一个双模，从而为 Hecke 代数和舒尔代数赋予仿射胞腔结构。我们还证明，舒尔代数上的该结构具有幂等性，这意味着它具有有限整体维数。

2 Weyl 群、Hecke 代数与舒尔代数

本节回顾类型 $\tilde{A}_{n-1}$ 的扩展仿射Weyl群、Hecke 代数和舒尔代数的定义。扩展仿射Weyl群可以用多种方式定义。我们将给出其中与本文论证相关的两种定义。

定义 2.1。令 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。类型 $\tilde{A}_{n-1}$ 的扩展仿射Weyl群是由 W 个双射 x：$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 组成的群，满足

- $x(i) + n = x(i) + n$ for all $i \in \mathbb{Z}$, and
- $\sum_{i=1}^{n} (x(i) - i) \equiv 0 \pmod{n}$

对于 $0 \le i \le n$，令 $s_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 为映射

$$s_i(j) = \begin{cases} j+1 & \text{if } j \equiv i \pmod{n} \\ j-1 & \text{if } j \equiv i+1 \pmod{n} \\ j & \text{if } j \not\equiv i, i+1 \pmod{n} \end{cases}$$

注意到，当且仅当 $n > 1$ 时有 $s_i \in W$，并且 $s_0 = s_n$。

令 $\omega \in W$ 为映射

$$\omega(j) = j + 1.$$

令 W^{aff} 为由 $S^{\mathrm{aff}} = \{s_i | 0 \le i \le n-1\} \cap W$ 生成的 W 的子群，并令 Ω 为由 ω 生成的 W 的子群。

命题 2.2。W 还有另一种描述：

1. W^{aff} 是 $\tilde{A}_{n-1}$型的仿射*Weyl*群。对于 $n > 2$，这是一个以 S^{aff} 为生成元、具有以下关系的*Coxeter*群

$$\begin{aligned} s_i s_{i+1} s_i &= s_j s_{i+1} s_j \quad \textit{for } 0 \le i \le n-1 \\ s_i s_j &= s_j s_i \quad \textit{for } 0 \le i < j \le n-1,\ j-i \notin \{1, n-1\} \\ s_i^2 &= 1 \quad \textit{for } 0 \le i \le n-1. \end{aligned}$$

对于 $n = 2$，则这是一个具有相同生成元、但仅满足以下关系的*Coxeter*群

$$s_i^2 = 1 \quad \textit{for } 0 \le i \le 1.$$

对于 $n = 1$，这是平凡考克斯特群。

2. $\Omega \cong \mathbb{Z}$。*3.* $\omega s_i = s_{i+1}\omega$ 对于 $0 \le i \le n-1$。*4.* $W = W^{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega$。*5.* ω^n 是中心的。

证明。 第一、第二和第四个断言是 [Xi02，定理 2.1.3(c)]，，而第三和最后一个断言分别是 [Xi02，定理 2.1.3(b)] 以及 [Xi02，定理 2.1.3(a)] 。 □

我们需要 W 上的长度函数和布鲁哈特序来构造我们的胞腔结构。

定义 2.3。 $w' \in W^{\mathrm{aff}}$ 的一个约化表达式是 S^{aff} 的元素序列，其乘积为 w'，并且在所有此类序列中包含的 $s \in S^{\mathrm{aff}}$ 数量最少。

$w = w'\omega^i$ 的长度 $l(w)$ 是某个（因而也是任意一个）约化表达式中出现的 $s \in S^{\mathrm{aff}}$ 的数量，即 w'。

若 $v = v'\omega^j$ 对 $v' \in W_{\mathrm{aff}}$，我们记 $v \le w$，当且仅当 $i = j$，且 w' 的任意约化表达式都包含一个子序列，该子序列是 v' 的约化表达式。这在 W 上定义了一个偏序。

由于我们处于 A_{n-1} 型，长度函数有一个显式公式，后面也会用到。

命题 2.4。 $l(w) = \sum_{1 \le i < j \le n} \left\lfloor \frac{w(j) - w(i)}{n} \right\rfloor$。

证明。 这是 [Xi02，定理 2.1.3(e)]。 □

利用长度函数，我们可以通过 Iwahori-Matsumoto 表示定义 Hecke 代数。

定义 2.5。 设 $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}[q]$，设 $\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}} = \mathbb{Z}\left[q^{\pm 1}\right]$，并设 $\mathbb{Z}_{q^{\pm \frac{1}{2}}} = \mathbb{Z}\left[q^{\pm \frac{1}{2}}\right]$，将每个代数视为前一个代数上的代数，并通过参数 q 进行等同。若要同时在这三个环上进行运算，我们将记作 $\mathbb{Z}_\bullet$。

型别的提升仿射 **Hecke 代数**，其生成元为 $\{\tilde{T}_w | w \in W\}$，满足以下关系：

$$\begin{aligned} T_v T_w &= T_{vw} \quad \text{if } l(v) + l(w) = l(vw) \\ T_s^2 &= (q-1)T_s + q \quad \text{for } s \in S^{\mathrm{aff}} \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

令 $\mathcal{H}_\bullet^{\mathrm{aff}}$ 为由 $\left\{T_w \middle| w \in W_{\text{仿射}}\right\}$ 生成的 $\mathcal{H}_\bullet$ 子代数。

与 Weyl 群一样，Hecke 代数也可以分解为仿射部分和循环部分。

命题 2.6. 我们可以用 $\mathcal{H}_\bullet^{\mathrm{aff}}$和 Ω来描述 $\mathcal{H}_\bullet$：

1. Ω 通过包含映射 $\omega \mapsto T_\omega$是 $\mathcal{H}_\bullet$ 的乘法子幺半群。 *2.* $T_{w\omega} = T_w\omega$ 和 $T_{\omega w} = \omega T_w$ 对于 $w \in W$。 *3.* $\mathcal{H}_\bullet = \mathcal{H}_\bullet^{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega$。 *4.* ω^n 是中心的。 *5.* $\mathcal{H}_\bullet^{\mathrm{aff}}$ 是一个 $\mathbb{Z}_\bullet$-代数，其生成元为 $\left\{T_w \middle| w \in W_{\mathrm{aff}}\right\}$，并满足等式 *(2.5.1)* 中的关系。 *6.* $\mathcal{H}_\bullet$和 $\mathcal{H}_\bullet^{\mathrm{aff}}$是自由的 $\mathbb{Z}_\bullet$-模，其基分别为 $\{T_w | w \in W\}$和 $\left\{T_w \middle| w \in W^{\mathrm{aff}}\right\}$。

证明。 第一个和第二个断言由等式 (2.5.1) 立即得出，因为 $l($ ω $=$ 0 $2\,2$ 4 5 $)$。结合定义 . ( ) 和 ( )，即可分别得到第三个和第四个断言。第二个断言和定义 2.2 (4) 还允许我们将第一个关系简化为 $T_v T_{\omega^i w \omega^{-i}} = T_{v\omega^i w\omega^{-i}}$ 对于 v v w $=$ l vw l w $= l$ $\omega w\omega^{-1}$ $2\,2$ 3 $, w \in W^{\mathrm{aff}}$，其中 l ( ) $+ l($ $)$ ( )。但根据定义 . ( )，( ) ( )，因此我们可以进一步将其化简为 $T_v T_w = T_{vw}$对于 $v, w \in W$ $_{\mathrm{aff}}$，其中 $l(v) + l(w) = l(vw)$。由此得到第五个断言。对于 $\mathcal{H}_\bullet^{\mathrm{aff}}$，第六个断言由 Lus03，命题 3. 3]，得出；而对于 $\mathcal{H}_\bullet$，第六个断言则由第三个断言和定义 2.2 (4) 得出。 □

接下来，我们将利用 Hecke 代数中与 W 的抛物子群相关的某些元素来定义舒尔代数。首先回顾抛物子群所需的定义和性质。

定义 2.7。设 $S^{\mathrm{fin}} = S^{\mathrm{aff}} \setminus \{s_0\}$.

对于 $P \subseteq S^{\mathrm{fin}}$，令 W_P 为由 P 生成的 W 的子群 .

命题 2.8。 W_P 是有限的。

证明。这可由 [Lus03，第 1.20] 节推出。事实上，很容易直接看出， W_P 是有限对称群的乘积。 □

现在我们可以定义舒尔代数了。

定义 2.9. 令 $x_P = \sum_{p \in W_P} T_p$.

仿射 q-舒尔代数是 $\mathbb{Z}_\bullet$-代数

$$\mathcal{S}_\bullet = \mathrm{End}_{\mathcal{H}_\bullet}\left(\bigoplus_{P \subseteq S^{\mathrm{fin}}} x_P \mathcal{H}_\bullet\right) = \bigoplus_{P,Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet}\left(x_P \mathcal{H}_\bullet, x_Q \mathcal{H}_\bullet\right).$$

我们通过用最长双陪集代表元表示舒尔代数的标准基来结束本节。

命题 2.10。 对于 P、$Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}$ 和 $W_Q w W_P \in W_Q \backslash W / W_P$，存在唯一一个长度为极大的 $d \in W_Q w W_P$。特别地， W_P 有唯一一个长度为极大的元素 w_P。

证明。 这是 [Lus03，命题 9.15(e)]。 □

定义 2.11。 对于 $P, Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}$，令 ${}^Q W^P$表示双陪集 $W_Q \backslash W / W_P$的最大长度代表集合。

对于 $w \in {}^Q W^P$，定义 $T^w_{QP} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet}(x_P \mathcal{H}_\bullet, x_Q \mathcal{H}_\bullet) \subseteq \mathcal{S}_\bullet$如下：

$$x_P h \mapsto \left(\sum_{w' \in W_Q w W_P} T_{w'} \right) h.$$

命题 2.12。 $\mathcal{S}_\bullet$ 有一个优良的基，它扩展了 $\mathcal{H}_\bullet$的基：

1. $\mathcal{S}_\bullet$是一个以 $\left\{ T^w_{QP} \middle| P, Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}, w \in {}^Q W^P \right\}$为基的自由 $\mathbb{Z}_\bullet$-模。
2. $W_\varnothing = \{1\}$。因此， $\mathcal{H}_\bullet$ 通过 $T_w \mapsto T^w_{\varnothing\varnothing}$是 $\mathcal{S}_\bullet$ 的一个子代数。

证明。 第一个断言是 [Gre99, 定理 2.2。4]第二个断言是显然的。 □

3 Kazhdan-Lusztig 基与胞腔

在本节中，我们定义 Hecke 代数和舒尔代数的胞腔，它们构成仿射胞腔结构的第一部分。我们将这些胞腔定义为 Kazhdan-Lusztig 基的某些子集的张成空间；因此，我们必须先定义这个基。关键要素是横线对合，下面给出其定义。

命题 3.1。设 $q^{-1} \in \mathbb{Z}_\bullet$。则

1. T_w 是可逆的。2. 由 $q^i \mapsto q^{-i}$ 和 $T_w \mapsto T^{-1}_{w^{-1}}$ 给出的 $\mathbb{Z}$-线性映射 $\mathcal{H}_\bullet \to \mathcal{H}_\bullet$ 是一个反对合。

证明。 对于 $w \in W_{\text{仿射}}$，第一个断言是 [Lus03, 第 3 节，5] 第二个断言是 [Lus03, 引理 4。2]一般 $w \in W$的情形则由定义 2.6 (1) 和 (2) 得出。 □

利用这一对合，我们可以定义 Kazhdan–Lusztig 多项式，而这些多项式进而定义了 Hecke 代数的 Kazhdan-Lusztig 基。

命题 3.2。 存在一组唯一的元素

$$\{ P_{y,w} \in \mathbb{Z}_q | y, w \in W, y \leq w \}$$

使得

- $P_{w,\ w}=1$ 对所有 $w\in W$,
- 度q（$P_{y,\ w}$） $\leq\frac{1}{2}$（l（w） $-l$（y） -1） 当 $y\neq w$
- 由下式定义的元素 $\{C_w|w\in W\}$

$$C_w=q^{-\frac{l(w)}{2}}\sum_{y\leq w}P_{y,w}T_y$$

在定义 *3.1* 的反对合下均保持不变。

此外，

1. $P_{y'\omega^j,w'\omega^i}=P_{y',w'}\delta_{j,i}$ *for* $y'w'\in W^{\mathrm{aff}}$. *In particular,* $C_{w'}\in\mathcal{H}^{\mathrm{aff}}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$.
2. $C_{w'\omega^i}=C_{w'}\omega^i$ *and* $C_{\omega^i w'}=\omega^i C_{w'}$
3. $\{C_w|w\in W\}$ *is a basis of* $\mathcal{H}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$.

证明。 若 $w'\in W_{\text{仿射}}$ 且 $P_{y,\ w'}\neq 0$则 $y'\in W_{\text{仿射}}$。因此，根据 KL79 定理 1.1], 存在唯一的 $P_{y,\ w'}$，使其满足所列性质，并且 $\left\{C_{w'}\middle|w'\in W_{\text{仿射}}\right\}$构成 $\mathcal{H}^{\mathrm{aff}}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 的一组基。根据定义 2.6（2），令 $P_{y,\ w'\omega^i}=P_{y\omega^{-i},\ w'}$，可得 $C_{w'\omega^i}=C_{w'}\omega^i$, 从而 $P_{y,\ w}$满足所列性质。第一个断言由定义可得，第三个断言则由定义 2.6（3）得出。

为证明 $P_{y,w}$的唯一性，注意到对于任意满足所列性质的选择 $P'_{y,w}$，对于 $w'\in W^{\mathrm{aff}}$, 由定义 2.6 (2) 可知$C'_{w'\omega^i}\omega^{-i}=\sum_{y'\leq w'}P'_{y'\omega^i,w'\omega^i}T_{y'}$。根据假设，这在定义 3.1 中的反对合下保持不变。令 $P''_{y',w'}=P'_{y'\omega^i,w'\omega^i}$，则有$\left\{P''_{y',w'}\in\mathbb{Z}_q\middle|w'\in W^{\mathrm{aff}}y'\leq w'\right\}$满足所列性质，因此由 $w'\in W_{\mathrm{aff}}$对应的 $P_{y,}$

w' w' =的唯一 $P_{y'\omega^i,w'\omega^i}$性可知，必有 $P'_{y'\omega^i,w'\omega^i}=P''_{y',w'}=P_{y',,}$。

为证明 $C_{\omega^i w'}=\omega^i C_{w'}$，注意到 $P_{\omega^i y,\ \omega^i w'}=P_{\omega^i y\omega^{-i},\ \omega^i w'\omega^{-i}}$，因此根据定义 2.6 (2)，只需证明 $P_{\omega y'\omega^{-1},\ \omega w'\omega^{-1}}=P_{y',\ w'}$。但根据定义 2.6 (3)， ω 的共轭作用是 $\mathcal{H}^{\mathrm{aff}}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 的一个自同构。此外，根据定义 2.2 (3)，它保持长度不变；根据定义 2.6 (2)，它与定义 3.1 中的反对合可交换。因此，$P_{\omega y'\omega^{-1},\ \omega w'\omega^{-1}}$ 满足上述全部三个条件，从而根据 $P_{y',\ w'}$ 的唯一性，我们有 $P_{\omega y'\omega^{-1},\ \omega w'\omega^{-1}}=P_{y',\ w'}$。 □

我们还利用 Kazhdan–Lusztig 多项式来定义舒尔代数的 Kazhdan-Lusztig 基，以及该基的一个定义在 $\mathbb{Z}_q$ 上的重新归一化变体。后一个基将用于定义 $\mathbb{Z}_q$ 上的胞结构。

定义 3.3. </style}对于，令 ($_{w)^2}$ $C_w=\sum_{y\leq w}P_{y,w}T_y$。

对于 $P,Q\subseteq S^{\mathrm{fin}}$和 $w\in {}^QW^P$，令 $\tilde{C}^w_{QP}=\sum_{y\leq w}P_{y,w}T^y_{QP}$并令 $C^w_{QP}=q^{\frac{l(w_P)-l(w)}{2}}\tilde{C}^w_{QP}$。

引理 3.4. 它们构成基：

1. $\left\{\tilde{C}_w \middle| w \in W\right\}$ 是 $\mathcal{H}_\bullet$的一组基。*2.* $\left\{\tilde{C}^w_{QP} \middle| P、\ Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}、\ w \in {}^QW^P\right\}$和$\left\{C^w_{QP} \middle| P, Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}, w \in {}^QW^P\right\}$分别是 $\mathcal{S}_\bullet$和$\mathcal{S}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$的基。

3. 包含映射 $\mathcal{H}_\bullet \to \mathcal{S}_\bullet$ 将 $\tilde{C}_w \mapsto \tilde{C}^w_{\varnothing\varnothing}$映至*4.* 包含映射$\mathcal{H}_{q^{\pm\frac{1}{2}}} \to \mathcal{S}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 将 $C_w \mapsto C^w_{\varnothing\varnothing}$映至。

证明。 由定义 2.6 (6) 和定义 3.2，集合 $\left\{\tilde{C}_w \middle| w \in W\right\}$ 与基 $\{T_w | w \in W\}$ 之间由 $\mathbb{Z}_q$ 中的一个矩阵联系，该矩阵关于 $\leq$ 是三角形的，且对角线上元素为 1。因此，第一项结论成立。根据同样的逻辑，$\left\{\tilde{C}^w_{QP} \middle| P,\ Q \subseteq S^{\mathrm{fin}},\ w \in {}^QW^P\right\}$ 是一组基；同样由定义 2.12 (1) 和定义 3.2 可知，它与基 $\left\{T^w_{QP} \middle| P, Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}, w \in {}^QW^P\right\}$ 由 $\mathbb{Z}_q$ 中的一个矩阵给出，该矩阵相对于 $\leq$ 是三角形的，且对角线上元素均为 1。于是，由于 $C^w_{QP} = q^{l_{(wP)-l(w)}} \tilde{C}^w_{QP}$，我们立即得到第二个断言的其余部分。最后两个断言可由定义 2.12 (2) 直接得出。 □

我们还对 Hecke 代数的 Kazhdan-Lusztig 基的结构系数作了一些观察，稍后将会用到。

定义 3.5. 我们用 $h^w_{u,v}$ 表示 C_w 在乘积 C_uC_v 中的系数。同样，用 $\tilde{h}^w_{u,v}$ 表示 $\tilde{C}_w$ 在乘积 $\tilde{C}_u\tilde{C}_v$ 中的系数。

因此，$\tilde{h}^w_{u,v} = q^{l_{(u)+l(v)-l(w)}} h^w_{u,v}$。注意，$\tilde{h}^w_{u,v} \in \mathbb{Z}_q$，但一般而言，我们只有 $h^w_{u,v} \in \mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$。

引理 3.6。 设 $u', v' \in W_{\mathrm{aff}}$。则 $h^w_{u'\omega^i, v'\omega^j} = 0$，除非 $w = w'\omega^{i+j}$ 对于 $w' \in W_{\mathrm{aff}}$，此时 $h^w_{u'\omega^i, v'\omega^j} = h^{w'}_{u', \omega^i v'\omega^{-i}}$。

此外，$h^{\omega^i w''\omega^{-i}}_{\omega^i u'\omega^{-i}, \omega^i v'\omega^{-i}} = h^{w'}_{u', v'}$。

最后，将 h 替换为 $\tilde{h}$ 后，这些等式也成立。

证明。 第一部分由定义 3.2 (1) 和 (2) 以及定义 2.6 (3) 得出。第二部分由定义 3.2 (2) 得出。最后一个结论同理可得，也可注意到 $\tilde{h}^w_{u,v} = q^{l_{(u)+l(v)-l(w)}} h^w_{u,v}$，且乘以 ω 不会改变 W 中元素的长度。 □

我们还想对舒尔代数的 Kazhdan-Lusztig 基的结构系数作出类似的观察。为此，我们需要 W 的一个抛物子群的 Poincaré 多项式。

定义 3.7. 令 $P \subseteq S^{\mathrm{fin}}$。$P$ 的庞加莱多项式为 $p_P = \sum_{w \in W_P} q^{l(w)}$。

我们还需要以下命题，它解释了我们为何选择使用极大陪集代表。

命题 3.8. w 是 $W_Q w W_P$ 的最大长度代表，当且仅当$T_s \tilde{C}_w = q\tilde{C}_w$ 且对所有 $s \in Q$ 和 $t \in P$，都有 $\tilde{C}_w T_t = q\tilde{C}_w$。

基元素 $\tilde{C}^w_{QP}$ 恰好是映射 $x_P h \mapsto \tilde{C}_w h.$

证明. 根据 [Lus03，引理 9.8]，，元素 w 在 $W_Q w W_P$ 中是最大长度，当且仅当对所有 $s \in Q$，都有 $sw < w$，且对所有 $s \in P$，都有 $ws < w$。根据 [Lus03，定理 6.6]，我们有 $sw < w$ 当且仅当 $T_s C_w = qC_w$，且 $ws < w$ 当且仅当$C_w T_s = qC_w$。

由于对所有 $s \in Q$，都有 $sw < w$，根据 [Lus03，定理 6.6]，同样可得，若 $y < sy \leq w$，则$P_{y,w} = P_{sy,w}$。类似地，若 $t \in P$且 $y < yt \leq w$，则$P_{y,w} = P_{yt,w}$。因此，若 $y \leq w$且 $x \in W_Q y W_P$，则$P_{y,w} = P_{x,w}$。所以$\tilde{C}^w_{QP}(x_P) = \sum_{y \leq w} P_{y,w} T^y_{QP}(x_P)$ $= \sum_{x \leq w} P_{x,w} T_x = \tilde{C}_w$。

□

现在我们可以给出定义 3.6 的舒尔代数类比。

引理 3.9. $\tilde{C}^w_{QP}$ 在乘积 $\tilde{C}^u_{QR}\tilde{C}^v_{RP}$ 中的系数 $\tilde{h}^{QwP}_{uRv}$ 为 $p_R^{-1}\tilde{h}^w_{u,v}$，而 C^w_{QP} 在乘积 $C^u_{QR}C^v_{RP}$ 中的系数 h^{QwP}_{uRv} 为 $p_R^{-1} q^{\frac{l(w_R)}{2}} h^w_{u,v}$。

证明. 根据定义 3.8，映射 $\tilde{C}^u_{QR} x_R \tilde{C}^v_{RP}$将 $x_P h$映射到$\tilde{C}_u\tilde{C}_v h = \tilde{h}^w_{u,v}\tilde{C}_w h$，因此 $\tilde{C}^u_{QR} x_R \tilde{C}^v_{RP} = \sum_{w \in W} \tilde{h}^w_{u,v}\tilde{C}^w_{QP}$。但再次根据定义 3.8，我们有映射 $x_R\tilde{C}^v_{RP}$将 $x_P h$ 映射到 $x_R\tilde{C}_v h = p_R\tilde{C}_v h$，因此 $x_R\tilde{C}^v_{RP} = p_R\tilde{C}^v_{RP}$。

第二个断言由第一个断言推出，因为$\tilde{h}^w_{u,v} = q^{\frac{l(u)+l(v)-l(w)}{2}} h^w_{u,v}$和 $C^w_{QP} = q^{\frac{l(w_P)-l(w)}{2}} \tilde{C}^w_{QP}$。 □

在进一步讨论之前，我们回顾 Hecke 代数和舒尔代数的胞腔对合。这对于仿射胞腔结构是必要的，也将简化下面的论述。

命题 3.10。 $\mathbb{Z}$-线性映射 $\iota : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 由 $\tilde{C}^w_{QP} \mapsto \tilde{C}^{w^{-1}}_{PQ}$ 给出，是 $\mathcal{S}$的反对合。它限制为 $\mathcal{H}$的反对合 $\tilde{C}_w \mapsto \tilde{C}_{w^{-1}}$。

证明。这就是 [99, 17] $\mathcal{H}$ $w \in W^{\text{aff}}$ Lus 方程。[03, 5 6], (a)。或者，关于 和 的断言是 Lus 节。以及其向所有 的延拓由定义 3.2 (2) 得出。关于 $\mathcal{S}$ 的断言则由定义 3.9 得出。 □

我们将胞腔定义为 Kazhdan-Lusztig 基的子集。胞腔是等价类，而等价类又是根据各种预序定义的。下面给出这些预序的定义。

定义 3.11. $\mathcal{H}$ 中的一个理想（左理想、右理想或双边理想）若为自由模，且其一组基由形如 $\tilde{C}_w$ 的元素组成，则称其为基理想。类似地，$\mathcal{S}$ 中的一个理想（左理想、右理想或双边理想）若有一组由形如 $\tilde{C}^w_{QP}$ 的元素组成的基，则称其为基理想。

若 C_u 包含于 $\mathcal{H}_\bullet$ 中由 $\tilde{C}_w$生成的基左理想（分别为基右理想、基双边理想）中，我们在 v，$w \in W^{\sim}$上记作 $v \leq_L w$ （分别记作 $v \leq_R w$、 $v \leq_{LR} w$）。

类似地，我们记作 $\tilde{C}^v_{Q'P'} \leq_L \tilde{C}^w_{QP}$（分别 $\tilde{C}^v_{Q'P'} \leq_{LR} \tilde{C}^w_{QP}$）如果$\tilde{C}^v_{Q'P'}$包含在由$\tilde{C}^w_{QP}$生成的 $\mathcal{S}_\bullet$的基左（分别为右、双边）理想中。

注意，这些都是预序，它们不依赖于 $\mathbb{Z}_\bullet$的选择；并且对于 $\mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$，用 C 代替 $\tilde{C}$ 会得到相同的序。此外， $\leq_{LR}$是 $\leq_L$和 $\leq_R$的并；应用对合 ι，我们得到 $v \leq_L w$当且仅当 $v^{-1} \leq_R w^{-1}$，且$\tilde{C}^v_{Q'P'} \leq_L \tilde{C}^w_{QP}$当且仅当$\tilde{C}^{v^{-1}}_{P'Q'} \leq_R \tilde{C}^{w^{-1}}_{PQ}$。我们还对这些关系在仿射子代数上的表现作如下观察。

引理 3.12 v' $w' \in W^{\mathrm{aff}}$ $\omega^i v' \leq_L \omega^j w'$ $v'\omega^i \leq_R$。 。 $w'\omega^j$ $\omega^i v'\omega^{i'} \leq_{LR} \omega^j w'\omega^{j'}$ $v' \leq_L w'$ 我们有，对于，当且仅当（分别为，分别为）时（分别为 $v' \leq_R w'$，分别为 $v' \leq_{LR} w'$）。

定义 $\leq'_L$、 $\leq'_R$和 $\leq'_{LR}$在 $W_{\text{仿射}}$上的预序：使用 $\mathcal{H}^{\mathrm{aff}}_\bullet$中的基于理想，而不是 $\mathcal{H}_\bullet$。那么，这些分别是 W^{aff}上 $\leq_L$、 $\leq_R$和 $\leq_{LR}$的限制。

证明。 第一个断言直接由定义 2.6 (2) 得出。根据定义 2.6 (2) 和 (3)，第二个断言对于 $\leq_L$ 和 $\leq_R$ 立即成立。然而，对于 $\leq_{LR}$ 还需要更多工作：我们必须证明，对于 $i = \pm 1$，有 $\omega^i w \omega^{-i} \leq'_{LR} w$。这可由 Shi86 中胞腔的显式描述、定理 17.4]看出。□

现在我们可以定义将产生胞腔的等价关系。

定义 3.13。 我们用 $\sim_L$ （分别用 $\sim_R$、 $\sim_{LR}$）表示由 $\leq_L$ 与 $\geq_L$ （分别由 $\leq_R$ 与 $\geq_R$、 $\leq_{LR}$ 与 $\geq_{LR}$）的交所给出的等价关系。

下面这个简单的引理将在后文中具有技术上的重要性。

引理 3.14。 $\tilde{C}_w \sim_L \omega^n \tilde{C}_w \sim_R \tilde{C}_w$ 对于任意 $\tilde{C}_w$。

证明。 这由定义 2.6 (4) 立即得出。 □

我们还可以将舒尔代数上的等价关系与 Hecke 代数上的等价关系联系起来。

命题 3.15。 $\mathcal{H}_\bullet$ 和 $\mathcal{S}_\bullet$ 上的等价关系有如下联系：

1. $\tilde{C}^w_{QP} \sim_L \tilde{C}^v_{Q'P'}$ 当且仅当 $P = P'$ 且 $w \sim_L v$。 2. $\tilde{C}^w_{QP} \sim_R \tilde{C}^v_{Q'P'}$ 当且仅当 $Q = Q'$ 且 $w \sim_R v$。 3. $\tilde{C}^w_{QP} \sim_{LR} \tilde{C}^v_{Q'P'}$ 当且仅当 $w \sim_{LR} v$。

因此，我们得到了 $\mathcal{S}_\bullet$ 中的左胞腔与序对 （Γ， P）之间的对应关系，其中 Γ 是 $\mathcal{H}_\bullet$ 中的一个左胞腔，而 $P \subseteq S^{\mathrm{fin}}$则类似地对应右胞腔和双侧胞腔。

证明。这是 [McG03，命题 3.8]。 □

现在，我们终于具备了定义胞腔所需的一切。

定义 3.16。固定 C 在 W 中的某个 $\sim_L$-等价类（分别为 $\sim_R$-等价类、 $\sim_{LR}$-等价类）。 $\mathcal{H}_\bullet$ 中的左胞腔（分别为右胞腔、双侧胞腔）是由所有 $w \in C$ 对应的 $\tilde{C}_w$ 的 $\mathbb{Z}_\bullet$- 线性张成。

类似地，固定 $\tilde{C}^w_{QP}$ 的某个 $\sim_L$-等价类（分别为 $\sim_R$-等价类、 $\sim_{LR}$-等价类）。 $\mathcal{S}_\bullet$ 中的左胞腔（分别为右胞腔、双侧胞腔）是由所有 $\tilde{C}^w_{QP} \in D$ 对应的 $\tilde{C}^w_{QP}$ 的 $\mathbb{Z}_\bullet$- 线性张成。

左胞腔（分别为右胞腔、双侧胞腔）继承自 $\leq_L$ （分别为 $\leq_R$、 $\leq_{LR}$）的偏序。

注意，反对合 ι 将左胞腔映射为右胞腔，反之亦然。根据定义可以立即看出， $\mathcal{H}_\bullet$ 和 $\mathcal{S}_\bullet$ 都是其双侧胞腔的直和。此外，双侧胞腔可由组合数据精确编排指标，下面给出这种编排。

定义 3.17。 n 的一个分拆是一个由正整数组成的非递增序列 λ，其和为 n。记作 $\lambda \vdash n$，并将 Λ 记作所有 n的分拆的集合。

给定 λ， $\mu \vdash n$，如果对所有 i都有 $\sum_{i'=1}^{i} \lambda_{i'} \leq \sum_{i'=1}^{i} \mu_{i'}$，则称 $\lambda \leq \mu$。我们将此序称为支配序。

命题 3.18。在 $(\Lambda, \geq)$、 $\mathcal{H}_\bullet$ 的双侧胞腔集合与 $\mathcal{S}_\bullet$的双侧胞腔集合之间存在偏序集同构，其中后两者均按 $\leq_{LR}$ 排序（注意序的反转）。特别地，双侧胞腔的数量是有限的。

证明。对于 $\mathcal{H}^{\mathrm{aff}}_\bullet$，这是 Shi96 第 2.9]节中的结果。因此，根据定义 3.12，对 $\mathcal{H}_\bullet$ 成立；根据定义 3.15，对 $\mathcal{S}_\bullet$ 成立。 □

定义 3.19。我们分别将与分拆 λ 对应的 $\mathcal{H}_\bullet$ 和 $\mathcal{S}_\bullet$ 的双侧胞腔记为 $\mathcal{H}^\lambda_\bullet$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_\bullet$，其中这种对应由同构定义 3.18 给出。

类似地，我们记 $\mathcal{H}^{\geq\lambda}_\bullet = \bigoplus_{\mu\geq\lambda} \mathcal{H}^\mu_\bullet$ 和 $\mathcal{S}^{\geq\lambda}_\bullet = \bigoplus_{\mu\geq\lambda} \mathcal{S}^\mu_\bullet$，此外还记 $\mathcal{H}^{>\lambda}_\bullet = \bigoplus_{\mu>\lambda} \mathcal{H}^\mu_\bullet$ 和 $\mathcal{S}^{>\lambda}_\bullet = \bigoplus_{\mu>\lambda} \mathcal{S}^\mu_\bullet$。

我们将需要胞腔的一些初等性质。首先，我们考察它们在对合下的表现。

命题 3.20。 $\iota\left(\mathcal{H}^\lambda_\bullet\right) = \mathcal{H}^\lambda_\bullet$ 和 $\iota\left(\mathcal{S}^\lambda_\bullet\right) = \mathcal{S}^\lambda_\bullet$。特别地， ι 分别将 $\mathcal{H}^\lambda_\bullet$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_\bullet$ 中的左胞腔映射到 $\mathcal{H}^\lambda_\bullet$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_\bullet$ 中的右胞腔，反之亦然。

证明。这是 [Lus87，定理 1.10]。 □

接下来我们注意到，根据构造，这些胞腔的各种并集都是适当商中的理想。

引理 3.21. $\mathcal{H}_\bullet^{\geq\lambda}$和 $\mathcal{H}_\bullet^{>\lambda}$是 $\mathcal{H}_\bullet$的双边理想，ι 在其上限制为良定义的反对合。类似地，$\mathcal{S}_\bullet^{\geq\lambda}$和 $\mathcal{S}_\bullet^{>\lambda}$) 是 $\mathcal{S}_\bullet$的双边理想，ι 在其上限制为良定义的反对合。因此，$\mathcal{H}_\bullet^\lambda = \mathcal{H}_\bullet^{\geq\lambda}/\mathcal{H}_\bullet^{>\lambda}$和$\mathcal{S}_\bullet^\lambda = \mathcal{S}_\bullet^{\geq\lambda}/\mathcal{S}_\bullet^{>\lambda}$分别继承了作为 $\mathcal{H}_\bullet$ 和 $\mathcal{S}_\bullet$ 的子商的代数结构，且 ι 在其上同样限制为良定义的反对合。

证明。这些子模是理想，这一点从其定义可立即得出。对合限制在这些理想上，这一点可由定义3.20得出。 □

引理 3.22。 $\mathcal{H}_\bullet^\lambda$ 中的任意左（分别地，右）胞腔都是 $\mathcal{H}_\bullet/\mathcal{H}_\bullet^{>\lambda}$中的左（分别地，右）理想。同样，$\mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 中的任意左（分别地，右）胞腔都是 $\mathcal{S}_\bullet/\mathcal{S}_\bullet^{>\lambda}$中的左（分别地，右）理想。

证明。 根据定义，这一点同样显而易见。 □

最后，我们回顾一下：每个双侧胞腔中的左（因而也包括右）胞腔数量有限，而且其确切数量已知。

命题 3.23。 $\mathcal{H}_\bullet^\lambda$ 中的左（等价地，右）胞腔数量为

$$n_\lambda = \frac{n!}{\mu_1! \ldots \mu_{r'}!}$$

其中$(\mu_1, \ldots, \mu_{r'})$ 是 λ的对偶分拆，即 $\mu_i = |\{j|\lambda_j \geq i\}|$。 $\mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 中的左（等价地，右）胞腔数量为 $m_\lambda = \prod_{i=1}^{n-1} \binom{n}{n-i}$，其中 $n_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$。

证明。 根据 [Shi86，定理 14.4.5]， $\mathcal{H}_\bullet^{\mathrm{aff}^\lambda}$ 恰有 n_λ 个左胞腔。因此，根据定义 3.12， $\mathcal{H}_\bullet^\lambda$也如此。 $\mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 有 m_λ 个左胞腔，这一结论见 [McG03，命题 4.10]。 □

4 左胞腔之间的整同构

本节给出同一双胞腔中的每一对左胞腔之间的一个同构。我们利用 W上的 Kazhdan-Lusztig 星运算构造这个同构。首先回顾其定义。

定义 4.1。 对于 $w \in W$，记 $L(w) = \{s \in S^{\mathrm{aff}} | sw < w\}$ 和 $R(w) = \{s \in S^{\mathrm{aff}} | sw < w\}$。

假设 $n \geq 3$。对于 $s_i \in S^{\mathrm{aff}}$，令 $D_L(s_i) = \{w \in W | \, |L(w) \cap \{s_i, s_{i+1}\}| = 1\}$和 $D_R(s_i) = \{w \in W | \, |R(w) \cap \{s_i, s_{i+1}\}| = 1\}$。

命题 4.2。 如果 $w \in D_L(s_i)$，那么 $|\{s_i w, s_{i+1} w\} \cap D_L(s_i)| = 1$。类似地，如果 $w \in D_R(s_i)$，那么 $|\{w s_i, w s_{i+1}\} \cap D_R(s_i)| = 1$。

证明。 这是 [Shi86，第 1 节6]。 □

定义 4.3。 对于 $w \in D_L(s_i)$，令 ${}^*w \in \{s_i w, s_{i+1} w\} \cap D_L(s_i)$。由 $w \mapsto {}^*w$ 给出的映射 $D_L(s_i) \to D_L(s_i)$ 是 $D_L(s_i)$ 上的左星运算。

类似地，对于 $w \in D_R(D_R\ s_i$ $w \mapsto w^*$ $D_R\ s_i$ $s_i \to$ ），令 $w^* \in \{w s_i, w s_{i+1}\} \cap D_R(\,)$。由 给出的映射 $D_R(\,)(\,)$ 是 $(\,)$ 上的右星运算。

确保我们所构造的同构可以定义在 $\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}$ 上的关键因素是，星运算会改变长度的奇偶性。事实上，我们可以给出更精确的描述。

命题 4.4。 $q^{\frac{l(w)-l(w^*)+1}{2}}$ 和 $q^{\frac{l(w)-l(^*w)+1}{2}}$ 或者是 1，或者是 q。特别地，它们属于 $\mathbb{Z}_q$。

证明。 这等价于说 $l(w^*) = l(w) \pm 1$ 以及 $l(^*w) = l(w) \pm 1$，而这两者都由 $w \in W^{\mathrm{aff}}$ 根据 [Lus03，引理 1.2]得出。一般情形下的 w 则由定义 2.2 (3) 得出。 □

星运算的关键性质在于它保持胞结构。这使我们能够利用它构造胞腔之间的同构。

命题 4.5。 设 v，$w \in D_L(s)$，并设 x，$y \in D_R(s)$。

1. 当且仅当 $^*v \sim_R {}^*w$ 时，$v \sim_R w$。2. 当且仅当 $x^* \sim_L y^*$ 时，$x \sim_L y$。3. $w \sim_L {}^*w$。4. $x \sim_R x^*$。

证明。 这是 [Shi86，定理 1.6.2-3]。 □

命题 4.6。 设 $w \in D_L(s) \cap D_R(t)$。则 $^*w \in D_R(t)$、$w^* \in D_L(s)$，以及 $(^*w)^* = {}^*(w^*)$。

证明。 这是 [Xi02，引理 1.4.3]。 □

现在我们构造胞腔之间的同构。为确保这些同构彼此相容，我们在每个双侧胞腔中固定一个特定的左胞腔，并定义任意左胞腔与这一固定选择之间的同构。事实上，这一选择具有我们在后续各节中所需的特定性质。

定义 4.7。 设 $\lambda \vdash n$。对所有 $j\Big\}$，记 $P_\lambda = \left\{ s_i \in S^{\mathrm{fin}} \middle| i \neq \sum_{j'=1}^{j} \lambda_j \right.$。设 $w_\lambda = w_{P_\lambda}$。

命题 4.8。 $\tilde{C}_{w_\lambda} \in \mathcal{H}_\bullet^\lambda$。

证明。 这是 [Shi96 引理 2.5]。 □

定义 4.9。 令 Γ^λ 表示包含 $\tilde{C}_{w_\lambda}$ 的 $\mathcal{H}_\bullet$ 左胞腔。同样，令 Ψ^λ 表示包含 $\tilde{C}^{w_\lambda}_{\varnothing\varnothing}$ 的 $\mathcal{S}_\bullet$ 左胞腔。

注意，由于 $l(w_\lambda^{-1}) = l(w_\lambda)$ 且 w_λ 是 W_{P_λ} 中长度极大的唯一元素，因此有 $w_\lambda^{-1} = w_\lambda$。$\iota(\Gamma^\lambda)$ 是包含 $\tilde{C}_{w_\lambda}$ 的右胞腔，且 $\Gamma^\lambda \iota(\Gamma^\lambda) \subseteq \mathcal{H}_\bullet^\lambda$。同样，$\iota(\Psi^\lambda)$ 是包含 $\tilde{C}^{w_\lambda}_{\varnothing\varnothing}$ 的右胞腔，且 $\Psi^\lambda \iota(\Psi^\lambda) \subseteq \mathcal{S}_\bullet^\lambda$。

为了定义我们的同构，我们首先回顾左胞腔的 Kazhdan-Lusztig 基之间的一个双射。

命题 4.10。 设 $\Gamma \subseteq \mathcal{H}_\bullet^\lambda$ 是一个左胞腔。那么存在一个 $i_\Gamma \in \mathbb{Z}$ 和一列右星运算，从而得到一个双射

$$\left\{w \middle| \tilde{C}_w \in \Gamma\right\} \to \left\{w^{**} \middle| \tilde{C}_w \in \Gamma^\lambda \omega^{i_\Gamma}\right\}.$$

证明。 这就是 [Xi02，推论 2.2。2]。 □

现在我们可以定义这个同构了。

定义 4.11。 设 Γ 是 $\mathcal{H}_\bullet^\lambda$ 中的一个左胞腔。我们固定一个 i_Γ 以及定义 4.10 中的右星运算序列 $w \mapsto w^{**}$。特别地，对于 $\Gamma = \Gamma^\lambda$，我们固定 $i_\Gamma = 0$ 和空序列 $w \mapsto w$。

假设该序列包含 j_Γ 个右星运算。令 ϕ_Γ 表示由下式给出的 $\mathbb{Z}_\bullet$-模同态 $\Gamma \to \Gamma^\lambda$

$$\tilde{C}_w \mapsto q^{\frac{l(w)-l(w^{**})+j_\Gamma}{2}} \tilde{C}_{w^{**}\omega^{-i_\Gamma}}.$$

由定义 4.4 可知，这一定义是良定的。

现在设 Ψ 是 $\mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 中的一个左胞腔。根据定义 3.15，它由一个 $P \subseteq S^{\mathrm{fin}}$ 和 $\mathcal{H}_\bullet^\lambda$ 中的一个左胞腔 Γ 构成。令 ϕ_Ψ 表示由下式给出的 $\mathbb{Z}_\bullet$- 模同态 $\Psi \to \Psi^\lambda$

$$\tilde{C}_{QP}^w \mapsto q^{\frac{l(w)-l(w^{**})+j_\Gamma}{2}} \tilde{C}_{Q\varnothing}^{w^{**}\omega^{-i_\Gamma}}.$$

同样，根据定义 4.4，这一定义良好。

设 $\phi_{\iota(\Gamma)} = \iota\phi_\Gamma\iota$。这是一个 $\mathbb{Z}_\bullet$-模同态 $\iota(\Gamma) \to \iota\left(\Gamma^\lambda\right)$。

设 $\phi_{\Gamma\cap\iota(\Delta)} = \phi_\Gamma\phi_{\iota(\Delta)}$。根据定义 4.5，这是一个 $\mathbb{Z}_\bullet$-模同态 $\Gamma \cap \iota(\Delta) \to \Gamma^\lambda \cap \iota\left(\Gamma^\lambda\right)$。

类似地，设 $\phi_{\iota(\Psi)} = \iota\phi_\Psi\iota$，并设 $\phi_{\Psi\cap\iota(\Phi)} = \phi_\Psi\phi_{\iota(\Phi)}$。再次根据定义 4.5，这些分别是 $\mathbb{Z}_\bullet$-模同态 $\iota(\Psi) \to \iota\left(\Psi^\lambda\right)$ 和 $\Psi \cap \iota(\Phi) \to \Psi^\lambda \cap \iota\left(\Psi^\lambda\right)$。

目前，我们只知道这是一个 $\mathbb{Z}_\bullet$-模同态，而不是左理想的同构。

引理 4.12。 我们将需要以下性质：

1. 若 $q^{-1} \in \mathbb{Z}_\bullet$，则定义 *4.11* 中的映射是同构。*2.* 若 Ψ 和 Φ 分别通过定义 *3.15* 对应于 $(\Gamma, \varnothing)$ 和 $(\Delta, \varnothing)$，则 $\Psi \cap \iota(\Phi) = \Gamma \cap \iota(\Delta)$ 且 $\phi_{\Psi\cap\iota(\Phi)} = \phi_{\Gamma\cap\iota(\Delta)}$。*3.* $\iota\phi_{\Psi\cap\iota(\Phi)} = \phi_{\Phi\cap\iota(\Psi)}\iota$。*4.* 若 $q^{-1} \in \mathbb{Z}_\bullet$，则 $\phi^{-1}_{\Psi_\lambda\cap\iota(\Phi)}\phi_{\Psi\cap\iota(\Phi)} = \phi_\Psi$。

证明。 第一个断言由定义 4.4 和定义 4.10 得出。第二个断言根据各种映射的定义成立。

根据定义 4.6，我们有 $\phi_{\Psi\cap\iota(\Phi)}=\phi_{\iota(\Phi)}\phi_{\Psi}$。因此

$$\begin{aligned}\iota\phi_{\Psi\cap\iota(\Phi)}&=\iota\phi_{\Psi}\phi_{\iota(\Phi)}\\&=\iota\phi_{\Psi}\iota\phi_{\Phi}\iota\\&=\phi_{\iota(\Psi)}\phi_{\Phi}\iota\\&=\phi_{\Phi\cap\iota(\Psi)}\iota\end{aligned}$$

这给出了第三个断言，并且

$$\begin{aligned}\phi^{-1}_{\Gamma_\lambda\cap\iota(\Phi)}\phi_{\Psi\cap\iota(\Phi)}&=\left(\phi_{\Gamma\lambda}\phi_{\Phi}^{-1}\right)^{-1}\phi_{\iota(\Phi)}\phi_{\Psi}\\&=\phi_{\Psi}\end{aligned}$$

给出了第四个断言。 □

因此，我们的映射是同构。为说明它们是左理想同态，我们使用以下关于 $\mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 的众所周知的结果。

引理 4.13。设 $v,w\in D_R(s_i)$ 满足 $v\sim_L w$。则 $h^{w}_{u,\ v}=h^{w^*}_{u\ ,\ v^*}$。

证明。我们沿用 [Xi02, 命题 1.4.4(b)], 的证明，该命题证明了一个密切相关的结果。设 $s\in\{s_i,s_{i+1}\}$ 满足 $v^*s<v^*$，并设 $t\in\{s_i,s_{i+1}\}\setminus\{s\}$。于是根据 [Xi02, 引理 1.4.2(b)]，存在元素 $h_x\in\mathbb{Z}$，使得

$$C_vC_s=C_{v^*}+\sum_{\substack{xs<x\\xt<x}}h_xC_x.$$

在左侧乘以 C_u 得

$$C_uC_vC_s=\sum_{y\in W}\left(h^y_{u,v^*}+\sum_{\substack{xs<x\\xt<x}}h_xh^y_{u,x}\right)C_y.$$

然而，我们还有

$$\begin{aligned}C_uC_vC_s&=\sum_{z\in W}h^z_{u,v}C_zC_s\\&=\sum_{y,z\in W}h^z_{u,v}h^y_{z,s}C_y\end{aligned}$$

因此令系数相等可得

$$h^y_{u,v^*}+\sum_{\substack{xs<x\\xt<x}}h_xh^y_{u,x}=\sum_{z\in W}h^z_{u,v}h^y_{z,s}.$$

令 $y=w^*$。由于根据假设 $v\sim_L w$，由定义 4.5 可得 $v^*\sim_L w^*$。同样由定义 4.5 可得 $v\sim_R v^*$。现在，如果 $h_x\neq 0$，那么 $x\leq_R v$,

这与前一个关系结合起来，得到 $x \leq_R v^*$。此外，如果 $h_{u,x}^{w^*} \neq 0$，那么 $w^* \leq_L x$，这与第一个关系结合起来，得到 $v^* \leq_L x$。综合可得 $v^* \sim_{LR} x$，再由 [Lus87, 推论 1.9(c)]，这最后两个关系给出 $v^* \sim_L x$。因此，由 [KL79，命题 2.4]，$R(v^*) = R(x)$。但根据假设 $s \notin R(v^*)$，且若 $h_x \neq 0$，则 $s \in R(x)$，矛盾。因此

$$\sum_{\substack{xs<x \\ xt<x}} h_x h_{u,x}^{w^*} = 0.$$

现在固定 $z \in W$。再次由定义 4.5 可知 $w \sim_R w^*$。因此，若 $h_{u,v}^z \neq 0$ 则 $z \leq_L v$，从而 $z \leq_L w$；若 $h_{z^*,s}^{w*} \neq 0$ 则 $w* \leq_R z$，从而 $w \leq_R z \sim_L v$。与前一种情形相同的推理可得 $R(w) = R(v)$ $t \in R(z)$ z z^* $z^*s < z^*$，因此 $R(\ )(\ )(\ )$。于是 $(\ )$ 且 $s \notin R(\ )$，故其存在，此外还有 。因此再次由 [Xi02，引理 1.4.2(b)]，存在元素 $h'_x \in \mathbb{Z}$，使得

$$C_z C_s = C_{z^*} + \sum_{\substack{xs<x \\ xt<x}} h'_x C_x.$$

特别地，由于 $s \in R(w^*)$，我们必有 $h'_{w^*} = 0$。因此，若 $C_{z^*,s}^{w^*} \neq 0$ 则必有 $w^* = z^*$；此外，在这种情况下，$\tilde{C}_{z^*,s}^{w*} = 1$。但若 $w^* = z^*$，则 $w = z$。因此

$$\sum_{z \in W} h_{u,v}^z h_{z,s}^y = h_{u,v}^w.$$

□

现在我们将这一结果转化为 $\mathbb{Z}_\bullet$，从而得到所需结论。

定理 4.14。设 Ψ 和 Γ 分别是 $\mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 和 $\mathcal{H}_\bullet^\lambda$ 中的左胞腔。那么，ϕ_Ψ和 ϕ_Γ）分别是左 $\mathcal{S}_\bullet/\mathcal{S}_\bullet^{>\lambda}$-模和 $\mathcal{H}_\bullet/\mathcal{H}_\bullet^{>\lambda}$-模的同态。

证明。根据 ϕ_Ψ 和 ϕ_Γ的构造，以及定义 3.9，只需证明对于所有 $v \sim_L w$，若 $v, w \in D_R(s)$，则 $q^{\frac{l(w)-l(w*)+1}{2}} \tilde{h}_{u,v}^w = q^{\frac{l(v)-l(v*)+1}{2}} \tilde{h}_{u,v*}^{w*}$；并且若 $i \in z$，则 $\tilde{h}_{u,v}^w = \tilde{h}_{u,v\omega^i}^{w\omega^i}$。后者由定义 3.6 立即可得，因此我们着重讨论前者；这只是利用定义 4.13 进行的简单计算：

$$\begin{aligned} q^{\frac{l(w)-l(w*)+1}{2}} \tilde{h}_{u,v}^w &= q^{\frac{l(u)+l(v)-l(w*)+1}{2}} h_{u,v}^w \\ &= q^{\frac{l(u)+l(v)-l(w*)+1}{2}} h_{u,v*}^{w*} \\ &= q^{\frac{l(v)-l(v*)+1}{2}} \tilde{h}_{u,v*}^{w*}. \end{aligned}$$

□

5 渐近代数中的一个重新归一化整格

仿射胞腔结构的这一部分是一个交换的 $\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}$-代数。在 $\mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 上，这由渐近代数给出。本节将在 $\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}$ 上给出一个合适的候选对象。我们首先回顾渐近代数的构造。为此，我们还必须先回顾 Lusztig 的 a-函数的构造。

定义 5.1。令 $n_{u,\ v}^{w}$ 为 $h_{u,\ v}^{w}$ 中出现的 $q^{\frac{1}{2}}$ 的最大幂。同样，令 n_{uRv}^{QwP} 为 h_{uRv}^{QwP} 中出现的 $q^{\frac{1}{2}}$ 的最大幂。

令 $a(w)=$为 $\left\{n_{u,v}^{w}|u,v\in W\right\}$的最大值；若不存在这样的最大值，则为无穷大。

我们回顾一下所需的 a 的性质。

命题 5.2。这是整数值的：

1. $a(w)$ 对所有 $w\in W$ 都是有限的，并且还被 $l(w_{S^{\mathrm{fin}}})$所界定。
2. $$\max\left\{n_{uRv}^{QwP}+l(w_R)-l(w_P)\middle|R\subseteq S^{\mathrm{fin}},u\in {}^{Q}W^{R},v\in {}^{R}W^{P}\right\} = a(w)-l(w_P).$$
3. 若 $v\leq_{LR} w$，则 $a(v)\geq a(w)$。特别地，$a(\omega^i w\omega^j)=a(w)$。

证明。第一个断言见 [Lus85，推论 7.3]，适用于 $w\in W_{\text{仿射}}$。由定义 3.6 可得 $a(w)=a(w\omega^i)$，从而一般情形下的第一个断言也成立。第二个断言见 [McG03，命题 3.8(d)]；请注意，其中的定义 3.1 缺少因子 $_{12}$，正确公式即为本文所给出的公式。第三个断言见 [Lus85，定理 5.4]，适用于仿射情形；一般情形则由 $a(w)=a(w\omega^i)$ 和定义 3.12 推出。 □

我们还引入对象 γ，它们将成为渐近代数的结构系数，并汇集它们的一些基本性质。

定义 5.3。将 $\gamma_{u,v}^{w}$ 记作 $h_{u,v}^{w}$ 中 $a(w)$ 次幂项的系数。同样，将 γ_{uRv}^{QwP} 记作 h_{uRv}^{QwP} 中 $a(w)-l(w_R)$ 次幂项的系数。

引理 5.4。$\gamma_{uRv}^{QwP}=\gamma_{u,v}^{w}$。

证明。这由定义 3.9 以及定义 5.2 (2) 得出。 □

引理 5.5。设 $u',v'\in W_{\mathrm{aff}}$。则 $\gamma_{u'\omega^i,v'\omega^j}^{w}$ 除非对于某个 $w'\in W_{\mathrm{aff}}$ 有 $w=w'\omega^{i+j}$，否则为零；在此情况下，$\gamma_{u'\omega^i,v'\omega^j}^{w}=\gamma_{u',\omega^i v'\omega^{-i}}^{w'}$。此外，$\gamma_{\omega^i u'\omega^{-i},\omega^i v'\omega^{-i}}^{\omega^i w'\omega^{-i}}=\gamma_{u',v'}^{w'}$。

证明。第一部分是定义 3.6 与定义 5.2 (3)。第二部分同样是定义 3.6 与定义 5.2 (3)。 □

利用 a，我们现在将双侧胞腔的渐近代数定义为该胞腔的某个 $\mathbb{Z}$-子商。

定义 5.6。对于 $w \in W$，记作 $\hat{C}_w = q^{-\frac{a(w)}{2}} C_w$。类似地，对于 $P,\ Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}$ 和 $w \in {}^{Q}W^{P}$，记作 $\hat{C}^w_{QP} = q^{\frac{l(w_P)-a(w)}{2}} C^w_{QP}$。

记 $\mathbb{Z}_{q^{-\frac{1}{2}}} = \mathbb{Z}\left[q^{-\frac{1}{2}}\right]$ 为由 $q^{-\frac{1}{2}}$ 生成的 $\mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 的含幺子代数。

令 $\mathcal{H}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}$ 表示以下对象的 $\mathbb{Z}_{q^{-\frac{1}{2}}}$-张成空间 $\hat{C}_w$ 和该对象的 $\hat{C}^w_{QP}$ 分别。

引理 5.7。$\mathcal{H}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}$ 分别是 $\mathcal{H}^\lambda_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 的自由 $\mathbb{Z}_{q^{-\frac{1}{2}}}$-子代数。

证明。令 $a = a(w)$ 对任意 $\tilde{C}_w \in \mathcal{H}^\lambda_\bullet$ 成立，并注意到根据定义 5.2 (3)，它与 w 的选取无关。于是，对于 $\tilde{C}_u, \tilde{C}_v, \tilde{C}_w \in \mathcal{H}^\lambda_\bullet$，乘积 $\hat{C}_u \hat{C}_v$ 中 $\hat{C}_w$ 的系数为 $q^{-\frac{a}{2}} h^w_{u,v}$；根据 a 的定义，它必属于 $\mathbb{Z}_{q^{-\frac{1}{2}}}$。同理，乘积 $\hat{C}^u_{QR}\hat{C}^v_{RP}$ 中 $\hat{C}^w_{QP}$ 的系数为 $q^{l(w_R)-\frac{a}{2}} h^{QwP}_{uRv}$；根据定义 5.2 (2)，它必属于 $\mathbb{Z}_{q^{-\frac{1}{2}}}$。□

定义 5.8。令 $\mathcal{H}^\lambda_\infty = \mathcal{H}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}/q^{-\frac{1}{2}}\mathcal{H}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_\infty = \mathcal{S}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}/q^{-\frac{1}{2}}\mathcal{S}^\lambda_{q^{-\frac{1}{2}}}$ 分别为 $\mathcal{H}_\bullet$ 和 $\mathcal{S}_\bullet$ 的渐近代数。

引理 5.9。$\mathcal{H}^\lambda_\infty$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_\infty$) 是自由的 $\mathbb{Z}$-代数，其基分别为 $\left\{t_w \middle| \tilde{C}_w \in \mathcal{H}^\lambda_\bullet\right\}$ 和 $\left\{t^w_{QP} \middle| \tilde{C}^w_{QP} \in \mathcal{S}^\lambda_\bullet\right\}$，其中 t_w 是 $\hat{C}_w$ 的像，而 t^w_{QP} 是 $\hat{C}^w_{QP}$ 的像。乘积为 $t_u t_v = \sum_{w\in W} \gamma^w_{u,\ v} t_w$ 和 $t^u_{QR} t^v_{RP} = \sum_{w\in W} \gamma^{QwP}_{uRv} t^w_{QP}$。映射 $t_w \mapsto t^w_{\varnothing\varnothing}$ 是 $\mathbb{Z}$-代数 $\mathcal{H}_\infty \to \mathcal{S}_\infty$ 的包含映射。

证明。根据构造，它们是具有所给基的自由 $\mathbb{Z}$-代数，这是显然的。对任意 $\tilde{C}_w \in \mathcal{H}^\lambda_\bullet$，记 $a = a(w)$。于是根据定义 5.2 (2)，我们有

$$q^{-\frac{a}{2}} h^w_{u,v} \cong \gamma^w_{u,v} \ \left(\mathrm{mod}\ q^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Z}_{q^{-\frac{1}{2}}}\right)$$
$$q^{l(w_R)-\frac{a}{2}} h^{QwP}_{uRv} \cong \gamma^{QwP}_{uRv} \ \left(\mathrm{mod}\ q^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Z}_{q^{-\frac{1}{2}}}\right)$$

由此得到所述的乘积公式。映射 $t_w \mapsto t^w_{\varnothing\varnothing}$ 是包含映射，这一点由定义 5.4 可知。□

我们将需要以下关键性质。

命题 5.10. 若 $\gamma^w_{u,v} \neq 0$ 则 $v \sim_L w \sim_R u \sim_L v^{-1}$。

证明。 [Lus87 的定理 1.9(a)]给出了 $u, v, w \in W$仿射的情形。对于一般情形，若 $\gamma^w_{u'\omega^i, v'\omega^j} \neq 0$则根据定义 5.5，我们有 $\gamma^{w'}_{u', \omega^i v'\omega^{-i}} \neq 0$对于 $w = u'\omega^{i+j}v'\omega^j \sim_L w'\omega^{i+j} \sim_R$，因此根据仿射情形和定义 ., 我们有 $u'\omega^i \sim_L \omega^{-j}v'^{-1}$。

□

我们还记录以下显而易见的推论。

推论 5.11. $\mathcal{H}_\infty = \bigoplus_{\lambda\vdash n} \mathcal{H}_\infty^\lambda$ 是一个以 $\{t_w | w \in W\}$ 为基、乘积为$t_u t_v = \sum_{w\in W} \gamma_{u,\ v}^w t_w$的自由 $\mathbb{Z}$-代数，而 $\mathcal{S}_\infty = \bigoplus_{\lambda\vdash n} \mathcal{S}_\infty^\lambda$ 是一个以 $\left\{t_{QP}^w \middle| P, Q \subseteq S^{\mathrm{fin}}, w \in {}^QW^P\right\}$ 为基、乘积为 $t_{QR}^u t_{RP}^v = \sum_{w\in W} \gamma_{uRv}^{QwP} t_{QP}^w$的自由 $\mathbb{Z}$-代数。

证明。 根据定义 5.10，如果 $\tilde{C}_u, \tilde{C}_v, \tilde{C}_w$ 并非都属于同一个双侧胞腔，则 $\gamma_{u,\ v}^w = 0$。结合定义 5.4，这说明 $t_{QR}^u t_{RP}^v = 0$ 除非$\tilde{C}_{QR}^u, \tilde{C}_{RP}^v \in \mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 对某个 λ成立，在这种情况下，和式 $\sum_{w\in W} \gamma_{uRv}^{QwP} t_{QP}^w$ 中的项除非 $\tilde{C}_{QP}^w \cong \mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 也成立，否则均为零。 □

渐近代数还具有一个对合，它将构成仿射胞腔结构的一部分。

定义 5.12。 记作 $\mathcal{H}_{\infty\bullet} = \mathcal{H}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\bullet$ 和 $\mathcal{S}_{\infty\bullet} = \mathcal{S}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\bullet$。 Let $\sigma(t_{QP}^w) = t_{PQ}^{w^{-1}}$.

引理 5.13。 σ 是 $\mathcal{S}_{\infty\bullet}$上的一个代数反对合，它限制在 $\mathcal{H}_{\infty\bullet}$上仍为代数反对合。

证明。 根据定义 3.10，我们有 $\tilde{h}_{uRv}^{QwP} = \tilde{h}_{v^{-1}Ru^{-1}\circ}^{Qw^{-1}P}$。此外，根据定义3.20，我们有 $w \sim_{LR} w^{-1}$，因此根据定义 5.2 (3)，我们有 $a(w) = a(w^{-1})$。故 $\tilde{\gamma}_{uRv}^{QwP} = \tilde{\gamma}_{v^{-1}Ru^{-1}\circ}^{Qw^{-1}P}$ □

我们还可以定义渐近版本的左胞腔和右胞腔。特别地，我们需要所选定的左胞腔与右胞腔的交集。

定义 5.14。 若 Γ 和 Ψ 分别是 $\mathcal{H}_\bullet$ 和 $\mathcal{S}_\bullet$ 的左胞腔，则将 $\left\{t_w \middle| \tilde{C}_w \in \Gamma \text{ 和 } t_{QP}^w \middle| \tilde{C}_{QP}^w \in \Psi\right\}$ 的 $\mathbb{Z}_\bullet$-张成分别记为 Γ_∞ 和Ψ_∞。

Write $\mathcal{B}_\bullet^\lambda = \Gamma_\infty^\lambda \cap \sigma\left(\Gamma_\infty^\lambda\right) = \Psi_\infty^\lambda \cap \sigma\left(\Psi_\infty^\lambda\right)$.

引理 5.15. 对于任意 Γ 和 Ψ，空间 Γ_∞ 和 Ψ_∞ 分别是 $\mathcal{H}_{\infty\bullet}$ 和 $\mathcal{S}_{\infty\bullet}$ 中的左理想。 $\mathcal{B}_\bullet^\lambda$ 是 $\mathcal{H}_{\infty\bullet}$的子代数。此外， σ 限制为 $\mathcal{B}_\bullet^\lambda$上的代数反对合。

证明. 若 $\tilde{\gamma}_{u,\ v}^w \neq 0$，则根据定义 5.10，必有 $v \sim_L w$。这说明 Γ_∞ 是一个左理想。此外，结合定义 5.4 可知，若 $\tilde{\gamma}_{uRv}^{QwP} \neq 0$，则 $v \sim_L w$。因此，根据定义 3.15，我们得到 Ψ_∞ 是一个左理想。第二个断言随即成立，因为 $\mathcal{B}_\bullet^\lambda$ 是一个右理想与一个左理想的交。最后一个断言由 $\mathcal{B}_\bullet^\lambda$ 和 σ的定义立即得出。 □

现在我们可以回顾 $\mathcal{H}_{\infty\bullet}$ 和 $\mathcal{S}_{\infty\bullet}$ 作为多项式环上的矩阵代数之和的显式描述。

定义 5.16. 对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，令

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{dom}}^m = \{(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m | a_j \geq a_{j+1},\ 1 \leq j \leq m\}.$$

对于 $\lambda \vdash n$，固定 $r_1 < \ldots r_p$，使得对于所有 r，恰有一个 r_i满足 $\lambda_r = \lambda_{r_i}$，并且 r_i 在满足 $\lambda_r = \lambda_{r_i}$的 r 中是极大的。令 $m_i = \lambda_{r_i} - \lambda_{r_{i+1}}$，取 $r_{p+1} = 0$，并记 dom (λ) $= \prod_i \mathbb{Z}_{\mathrm{dom}\circ}^{m_i}$

记 y_{ij} 为 dom(λ) 中的元素：当 $j' \leq j$ 时，其 (i, j') 分量为 1，其他所有分量均为 0。

注记 5.17。 因此，dom (λ) 在加法下由以下元素生成

$$\{y_{ij}|1 \le i \le p, 1 \le j \le m_i\} \cup \{-y_{im_i}|1 \le i \le p\}.$$

命题 5.18。 存在一个双射 $\mathrm{dom}(\lambda) \to \left\{w \in W \middle| t_w \in \mathcal{B}_\bullet^\lambda\right\}$, $x \mapsto w(x)$，使得 $\mathcal{B}_\bullet^\lambda$ 上的乘积由 $t_{w(x)}t_{w(y_{ij})} = \sum_{\tau+x\in\mathrm{dom}(\lambda)} t_{\tau+x}$ 给出，其中 τ 遍历所有元组（不必属于 $\mathrm{dom}(\lambda)$），这些元组恰好有 j 个 (i, j') 项为 1，其余所有项均为 0。

Furthermore, $\mathcal{B}_\bullet^\lambda = \mathbb{Z}_\bullet\left[t_{w(y_{ij})}, t_{w(y_{im_i})}^{-1}\middle| 1 \le i \le p, 1 \le j \le m_i\right]$.

代数 $\mathcal{S}_{\infty,\bullet}$ 同构于在 $\mathcal{B}_\bullet^\lambda$ 上的 $m_\lambda \times m_\lambda$ 矩阵代数，其行和列由 $\mathcal{S}_\bullet^\lambda$ 中的左胞腔 $t_{QP}^w \in \Psi \cap \iota\ \Phi$ 标记；该同构映射将 Φ Ψ 映射为仅在第 行和第 列非零的矩阵，并且该列中的值为 $t_{w'}$，其中 $\tilde{C}_{w'} = q^m\psi_{\Psi\cap\iota(\Phi)}\left(\tilde{C}_{QP}^w\right)$ 对某个 $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 成立。

证明。 第一部分见 [Xi02、定理 5.2.6(b)、定理 6.4.1、命题 8.1.3]。此外，根据 [Xi02，第 4.2(d, f) 节], ，我们有， $\mathcal{B}_\bullet^\lambda$ 同构于将表示环 $\prod_{i=1}^p \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})$ 的标量扩张至 $\mathbb{Z}_\bullet$ 所得到的代数，而根据标准结果，该代数又同构于所述代数：例如参见 [FH91，习题 23.36(d)]。最后一个断言见 [McG03，命题 4.13]。 □

通常的仿射胞腔结构是在 $\mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$ 上通过 t_w 与 C_w 之间的对应关系构建的。因此，要在 $\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}$ 上得到一种结构，我们需要寻找 $\mathcal{H}_{\infty_{q^{\pm\frac{1}{2}}}}$ 和 $\mathcal{S}_{\infty_{q^{\pm\frac{1}{2}}}}$ 的一个基，使其类似于 C_w，因为事实证明，这种基与 $\mathcal{H}_{q^{\pm1}}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm1}}$ 的配合更为自然。难点在于确保这个基张成 $\mathcal{B}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}^\lambda$ 的一个 $\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}$-子代数。为此，我们需要根据 x 理解 $w(\bar{x})$ 的长度。

For $k \ge 1$ and $1 \le l \le \lambda_k$, write $e_{k,l} = l + \sum_{k'=1}^{k-1} \lambda_{k'}$.

命题 5.19。 $w_\lambda(e_{k,l}) = e_{k,\lambda_k-l+1}$ 对所有 $1 \le k \le r_p$ 和 $1 \le l \le \lambda_k$ 均成立。此外，$w_\lambda = w(0)$。

证明。 根据定义， $w_\lambda \le w_\lambda s_k$ 恰好对某个 i 对应的那些 $k \ne \lambda_i$ 成立。因此，由 [Xi02，引理 2.1.3(f)], 可知， $w(k) > w(k+1)$ 当且仅当某个 i 满足 $k \ne \lambda_i$。此外，由于 w_λ 是 s_k 的乘积，它必定置换元素 $\{1, \ldots, n\}$。因此，它由上述公式给出。（或者参见 [Xi02，第 5.5] 节。）

根据 [Xi02，第 5.3 节。5], $w_\lambda = w(0)$。 □

引理5.20。 假设 $x = (x_{i',j'}) \in \mathrm{dom}(\lambda)$ 对所有 i', j' 都有 $x_{i'j'} \ge 0$。那么

1. $w = w(x)$ *satisfies* $w(e_{k,l}) > w(e_{k,l+1})$ *for all* $1 \le l \le \lambda_k - 1$.
2. $l(w(x)) \in l(w_\lambda) + \sum_{i',j'} x_{i'j'}(n + r_{i'}) + 2\mathbb{Z}$.

证明。 这两个性质显然对 $w(0) = w_\lambda$成立。因此，根据归纳法，只需假设：若 i 是满足某个 j'条件的最大值，且 j 是满足 $x_{ij} > 0$条件的最大值，那么我们已经证明了关于 $w' = w(x')$ 的两个断言，

其中 $x'_{ij} = x_{ij} - 1$，且对所有其他的 i'，j'，都有 $x'_{i'j'} = x_{i'j'}$。但根据 [Xi02 引理 5.3，1], 我们有

$$w(a) = \begin{cases} w'(e_{k+1,j_{k+1}}), & a = e_{k,j_k},\ 1 \le k < r_i \\ w'(e_{1,j_1}) + n, & a = e_{r_i,j_i} \\ w'(a), & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.20.1}$$

其中 j_k 满足 $j_{r_i} = j$ 且

$$w'(e_{k,j_k-1}) > w'(e_{k+1,j_{k+1}}) > w'(e_{k,j_k}) \text{ for } 1 \le k \le r_i - 1, \tag{5.20.2}$$

此外，若 $a > e_{r_i,\ j}$，则 $w(a) = w'(a) = w_\lambda(a)$，且 $w(a)\ w'(a) > 0$ 当 $a > 0$时。

我们先考虑第一个断言。由于对于$a \neq e_{k,\ j_k}$, $1 \le k \le r_i$, $w'(e_{k,\ l}) > w'(e_{k,\ l+1})$，且 $w(a) = w'(a)$，因此只需验证

$$w'(e_{k,j_k-1}) > w'(e_{k+1,j_{k+1}}) > w'(e_{k,j_k+1}).$$

但其中第一个恰好就是上文等式 (5.20.2)中的第一个不等式；根据等式 (5.20.2)中的第二个不等式，我们有 $w'(e_{k+1,\ j_{k+1}}) > w'(e_{k,\ j_k}) > w'(e_{k,\ j_k+1})$。因此，第一个断言得证。

要证明第二个断言，只需证明 $l(w) \in l(w') + n + r_i + 2\mathbb{Z}$。回忆一下，$l(w') = \sum_{1\le a<b\le n} \left\lfloor \frac{w'(b)-w'(a)}{n} \right\rfloor$。因此，我们需要确定作替换 $w' \mapsto w$后，这个和中的各项如何变化。令 σ 表示由 $\sigma(e_{k+1,j_{k+1}}) = e_{k,j_k}$（当 $1 \le k \le r_i - 1$时）及 $\sigma(e_{1,j_1}) = e_{r_i,j_{r_i}}$定义的 $1, \dots, n$ 的置换，而在其他情况下 $\sigma(a) = a$。我们将比较 $l(w')$ 的和中的 (a, b) 项，与 $l(w)$ 的和中的 $(\min(\sigma(a)\ \sigma(b)), \max(\sigma(a)\ \sigma(b)))$-项。注意，除非 $a = e_{1,j_1}$，否则 $w'(a) = w(\sigma(a))$；若 $a = e_{1,j_1}$，则 $w'(a) + n = w(\sigma(a))$。因此，若 $a, b \neq e_{1,j_1}$，则这些项不同的唯一可能情形是 $\sigma(b) < \sigma(a)$。

对于 a和 b都不具有某个 $1 \le k \le r_i$所对应的e_{k,j_k} 形式的情况，我们有 $\sigma(a) < \sigma(b)$，因此这些项相等。

设 $1 \le k \le r_{i-1}$。若$a = e_{k+1,\ j_{k+1}}$ 和 b 任意，则有 $\sigma(a) < \sigma(b)$，因此这些项相等。类似地，若$b = e_{k+1,\ j_{k+1}}$ 和$a \neq e_{1,\ j_1}$，则有$\sigma(a) < \sigma(b)$，除非$a > e_{k,\ j_k}$；在这种情况下，$\sigma(a) > \sigma(b)$。若$e_{k,\ j_k} < a \le e_{k,\ \lambda_k}$，则根据第一个结论，有 $w'(a) = w(a) < w(e_{k,j_k}) = w'(e_{k+1,j_k+1})$，因此该项从 $\left\lfloor \frac{w'(e_{k+1,j_k+1}) - w'(a)}{n} \right\rfloor$ 变为

$$\left\lfloor \frac{w'(a) - w'(e_{k+1,j_k+1})}{n} \right\rfloor = \left\lceil \frac{w'(e_{k+1,j_k+1}) - w'(a)}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{w'(e_{k+1,j_k+1}) - w'(a)}{n} \right\rfloor + 1.$$

与此同时，若 $a \ge e_{k+1,1}$，则再次根据第一个断言，我们有 $w(a) = w'(a) >$

$w'(e_{k+1,j_k+1}) = w(e_{k,j_k})$，因此该项从

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(e_{k+1,j_k+1})-w'(a)}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lceil\frac{w'(a)-w'(e_{k+1,j_k+1})}{n}\right\rceil$$
$$= \left\lfloor\frac{w'(a)-w'(e_{k+1,j_k+1})}{n}\right\rfloor - 1$$

到 $\left\lfloor\frac{w'(a)-w'(e_{k+1\ j_k+1}}{n}\right\rfloor$.)

。

若 $a = e_{1,\ j_1}$ 和 $b > e_{r_i,\ j}$，则 $\sigma(a) < \sigma(b)$ 且 $w(b) = w'(b) = w_\lambda(b) \le n$，因此当 $w'(e_{1,\ j_1}) > 0$ 时，该项从

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(b)-w'(e_{1,j_1})}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lceil\frac{w'(e_{1,j_1})-w'(b)}{n}\right\rceil$$

to

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(b)-w'(e_{1,j_1})-n}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lceil\frac{w'(e_{1,j_1})-w'(b)}{n}\right\rceil + 1.$$

若 $a = e_{1,\ j_1}$ 和 $e_{r_1,\ j_1} < b \le e_{r_i,\ j_{r_i}}$，则 $\sigma(a) > \sigma(b)$，因此该项从 $\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(b)}{n}\right.\right.\right.$ $\left.\left.\left.-w'(\ \overline{e_{1\ j_1}}\ .)\right\rfloor\right|\right|$ 变为 $\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(e_{1,\ \overline{j_1)+n-w'\ b}}}{n}\right\rfloor\right|\right|()$。若 $w'(b) > w'(e_{1,\ j_1})$，则

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(b)-w'(e_{1,j_1})}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lfloor\frac{w'(b)-w'(e_{1,j_1})}{n}\right\rfloor$$

and

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(e_{1,j_1})+n-w'(b)}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lceil\frac{w'(b)-w'(e_{1,j_1})}{n}\right\rceil - 1 = \left\lfloor\frac{w'(b)-w'(e_{1,j_1})}{n}\right\rfloor$$

而如果 $w'(b) < w'(e_{1,j_1})$，则

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(b)-w'(e_{1,j_1})}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lceil\frac{w'(e_{1,j_1})-w'(b)}{n}\right\rceil$$

and

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(e_{1,j_1})+n-w'(b)}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lfloor\frac{w'(e_{1,j_1})-w'(b)}{n}\right\rfloor + 1 = \left\lceil\frac{w'(e_{1,j_1})-w'(b)}{n}\right\rceil.$$

因此，在这两种情况下，该项都不会改变。

最后，如果 $b = e_{r_1,\ j_1}$ 那么根据第一个断言 $w'(a) > w'(e_{1,\ j_1})$，因此贡献从

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(e_{1,j_1})-w'(a)}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lceil\frac{w'(a)-w'(e_{1_{j_1}})}{n}\right\rceil$$

to

$$\left|\left|\left\lfloor\frac{w'(e_{1,j_1}+n-w'(a)}{n}\right\rfloor\right|\right| = \left\lceil\frac{w'(a)-w'(e_{1_{j_1}})}{n}\right\rceil - 1.$$

综上所述，长度的变化为

$$\begin{aligned} l(w)-l(w') =& \sum_{k=1}^{r_i-1}((\lambda_k-j_k)-(j_{k+1}-1))+\left(n-j_{r_i}-\sum_{k=1}^{r_i-1}\lambda_k\right)-(j_1-1) \\ =& n+r_i-2\sum_{k=1}^{r_i}j_k \\ \in& n+r_i+2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

现在我们已经具备了定义新基并证明它是一个子代数所需的一切。

定义 5.21. 对于满足 $t_w \in \mathcal{B}_\bullet^\lambda$ 的 $w \in W$，定义一个新元素

$$\tilde{t}_w = q^{\frac{l(w)-l(w_\lambda)}{2}} t_w \in \mathcal{B}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}^\lambda.$$

令 $\tilde{\mathcal{B}}_\bullet^\lambda$ 表示 $\left\{\tilde{t}_w \middle| t_w \in \mathcal{B}_\bullet^\lambda\right\}$ 的 $\mathbb{Z}_\bullet$-张成空间。因此

$$\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}^\lambda = \mathcal{B}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}^\lambda = \mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}\left[t_{w(y_{ij})}, t_{w(y_{im_i})}^{-1} \middle| 1\le i\le p, 1\le j\le m_i\right].$$

定理 5.22. $\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm1}}^\lambda = \mathbb{Z}_{q^{\pm1}}\left[\tilde{t}_{w(y_{ij})}\ \tilde{t}_w^{-1}{}_{(y_{im_i})} \middle| 1\le i\le p, 1\le j\le m_i\right]$。特别地，它是一个交换的、有限生成的 $\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}$-子代数，且包含于 $\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}^\lambda$ 中。

证明. 要证明 $\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm1}}^\lambda$ 是一个子代数，只需证明乘积 $\tilde{t}_{w(x)}\tilde{t}_{w(y_{ij})}$ 属于 $\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm1}}^\lambda$。但是

$$\tilde{t}_{w(x)}\tilde{t}_{w(x_{ij})} = q^{\frac{l(w(x))+l(w(y_{ij}))-l(w_\lambda)}{2}} \sum_{\tau+x\in\mathrm{dom}(\lambda)} q^{\frac{-l(w(\tau+x))}{2}}\tilde{t}_{w(\tau+x)} \qquad (5.22.1)$$

其中，τ 遍历所有恰好有 j 个 (i,j') 项为 1、其余项均为 0 的元组。因此，目标是证明

$$l(w(x))+l(w(y_{ij}))-l(w_\lambda)-l(w(\tau+x))\in 2\mathbb{Z}.$$

注意，若 $t_w \in \mathcal{B}_\bullet^\lambda$，则由定义 3.14 可得 $t_{\omega^n w}\in\mathcal{B}_\bullet^\lambda$。事实上，根据 $x\mapsto w(x)$ 的构造（参见 [Xi02，第 5.2.1] 节），$\omega^n w(x) = w(x')$，其中 $x'_{ij} = x_{ij}+r_i$。此外，这也表明 $\omega^n w(\tau+x) = w(\tau+x') \in \mathcal{B}_\bullet^\lambda$，因此，由于 $l(w(x)) = l(w(x'))$ 且 $l(w(\tau+x)) = l(w(\tau+x'))$，我们可以在上式中用 x' 替换 x。如此反复足够多次后，我们可以假设对所有 i，j，都有 $x_{ij}\ge 0$。

但由定义 5.20，我们有：

$$\begin{aligned} l(w(x)) &\in l(w_\lambda) + \sum_{i',j'} x_{i'j'}(n + r_{i'}) + 2\mathbb{Z} \\ l(w(y_{ij})) &\in l(w_\lambda) + j(n + r_i) + 2\mathbb{Z} \\ l(w(\tau + x)) &\in l(w_\lambda) + \sum_{i',j'} x_{i'j'}(n + r_{i'}) + j(n + r_i) + 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

因此我们确实有 $l(w(x)) + l(w(y_{ij})) - l(w_\lambda) - l(w(\tau + x)) \in 2\mathbb{Z}$。

现在，$\tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm\frac{1}{2}}} = \mathcal{B}^\lambda_{q^{\pm\frac{1}{2}}} = \mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}\left[t_{w(y_{ij})}\ t_w^{-1}(y_{im_i}) \middle| 1 \le i \le p, 1 \le j \le m_i\right]$。因此，通过对 $t_{w(y_ij)} \mapsto \tilde{t}_{w(y_ij)}$ 重新缩放，我们有 $\tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm\frac{1}{2}}} = \mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}\left[\tilde{t}_{w(y_{ij})}\ \tilde{t}_w^{-1}(y_{im_i})\right]$。由于 $\tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm1}}$ 是一个子代数，我们有 $\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}\left[\tilde{t}_{w(y_{ij})}\ \tilde{t}_w^{-1}(y_{im_i})\right] \subseteq \tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm1}}$。为证明反向包含关系，注意若 $x \in \tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm1}}$，我们可以将其写成由 $\tilde{t}_{w(y_{ij})}$ 和 $\tilde{t}_w^{-1}(y_{im_i})$ 的乘积构成的 $\mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$-线性组合。然而，$\tilde{t}_{w(y_{ij})}$ 和 $\tilde{t}_w^{-1}(y_{im_i})$ 的乘积总是属于 $\tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm1}}$，因此，这类乘积的 $\mathbb{Z}_{q^{\pm\frac{1}{2}}}$-线性组合当且仅当系数为 $q^{\frac{1}{2}}$ 的奇次幂的项之和为零时才属于 $\tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm1}}$。因此，只有系数属于 $\tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm1}}$ 的项之和才会等于 x。

□

注记 5.23。我们有 $t^2_{w(y_{11})} = t_{w(2y_{11})} + t_{w(y_{12})}$，并且根据 [Xi02，第 5.5]节，我们有 $l(w(y_{11})) = l(w_\lambda) + n - r_1$ 以及 $l(w(y_{12})) = l(w_\lambda) + 2n - 4r_1$，因此 $\tilde{t}_{w(y_{12})}$ 在 $\tilde{t}^2_{w(y_{11})}$ 中的系数为 q^{-r_1}。因此，$\tilde{\mathcal{B}}^\lambda_q$ 不是一个子代数。

我们还为新基的结构系数引入了记号。

定义 5.24。令 $\tilde{\gamma}^w_{u,v}$ 为 $\tilde{t}_w$ 在乘积 $\tilde{t}_u\tilde{t}_v$ 中的系数。

注记 5.25。因此 $\tilde{\gamma}^w_{u,v} = q^{\frac{l(u)+l(v)-l(w)-l(w_\lambda)}{2}}\gamma^w_{u,v}$ 对于 $u, v, w \in \mathcal{H}_\infty{}^\lambda_\bullet$。

6 仿射胞腔结构

我们回顾一下 [KX12，定义 2.1] 中给出的仿射胞腔代数的定义，以供参考。

定义 6.1. 设 R 是一个交换诺特环，A 是一个 R-代数，且 i 是 A 上的一个 R-反对合。若 A 中的一个双边理想 J 满足 $i(J) = J$，则称其为仿射胞腔理想，条件是存在

- 一个有限秩 V 的自由 R-模，
- 一个有限生成的交换 R-代数 B，其上带有 R-反对合 σ，
- 一个 $\Delta = V \otimes_R B$ 上的左 A-模结构，使得 Δ 是一个 A-B-双模 e 带有标准的右 B-模结构，

使得，若我们通过 $xa = \tau^{-1}(i(a)\tau(x))$ 为 $\Delta' = B \otimes_R V$ 定义右 A-模结构，其中 $\tau\colon \Delta' \to \Delta,\ b \otimes v \mapsto v \otimes b$，则存在一个$A$-$A$-双模同构 α：$J \to \Delta \otimes_B \Delta' = V \otimes_R B \otimes_R V$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\alpha} & V \otimes_R B \otimes_R V \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v\otimes b\otimes v' \mapsto v'\otimes\sigma(b)\otimes v} \\ J & \xrightarrow[\alpha]{} & V \otimes_R B \otimes_R V \end{array}$$

A 是仿射胞腔的，当且仅当存在一个 R-模分解 $A = \bigoplus_{k=1}^{K} J'_k$，使得对于所有 k，都有

1. $i(J'_k) = J'_k$2. $J_k = \bigoplus_{k'=1}^{k} J'_{k'}$ 是 A中的一个双边理想；3. $J'_k = J_k/J_{k-1}$ 是 A/J_{k-1}中的一个仿射胞腔理想。

注 6.2。回顾 [KX12，命题 2.2]，仿射胞腔理想 J 从 A继承了一个乘积，该乘积通过 α 在 $V \otimes_R B \otimes_R V$上诱导出一个乘积，并且该乘积具有如下形式 $(u \otimes b \otimes v)(u' \otimes b' \otimes v') = u \otimes b(v,\ u')b' \otimes v'$，其中 R为某个双线性映射 $V \times V \to B$。

在本节中，我们将证明 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}$ 连同其对合 ι 是定义在 $\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}$ 上的仿射胞腔。最后一个尚待证明的结果是下述众所周知结果的整系数版本。

命题 6.3。设 $\tilde{C}^{u}_{QP} \in \mathcal{S}_{q^{\pm 1}}$，设 $\tilde{C}^{v}_{P\varnothing}$、$\tilde{C}^{y}_{Q\varnothing} \in \Psi^{\lambda}$，并设 $\tilde{t}^{w}_{\varnothing\varnothing} \in \mathcal{S}^{\lambda}_{\infty q^{\pm 1}}$。则

$$\sum_{\tilde{C}^{x}_{Q\varnothing} \in \Psi^{\lambda}} h^{Qx\varnothing}_{uPv} \gamma^{y}_{x,w} = \sum_{\tilde{C}^{x}_{P\varnothing} \in \Psi^{\lambda}} h^{Qy\varnothing}_{uPx} \gamma^{x}_{v,w}.$$

证明。根据定义 5.2 (3) 和定义 3.15，我们有 $a(v) = a(y)$。

记 $u = u'\omega^{i}$、$v = v'\omega^{j}$、$w = w'\omega^{k}$ 和 $y = y'\omega^{l}$ 分别为 $u',\ v',\ w',\ y' \in W^{\text{仿射}}$。另记 $v'' = \omega^{i}v'\omega^{-i}$、$w'' = \omega^{i+j}w'\omega^{-(i+j)}$ 和 $w''' = \omega^{j}w'\omega^{-j}$。特别注意，根据定义 5.2 (3)，我们有 $a(v) = a(v') = a(v'')$，并且 $a(y') = a(y)$。

因此，记 $x = x'\omega^{m}$ 为 $x \in W^{\mathrm{aff}}$，并注意到根据定义 5.2 (3)，$a(x) = a(x')$，由定义 3.6 和定义 5.5 可得

$$\sum_{a(x)=a(v)} h^{x}_{u,v}\gamma^{y}_{x,w} = \sum_{a(x')=a(v'')} h^{x'}_{u',v''}\gamma^{y'}_{x',w''}\delta_{i+j+k,l}$$
$$\sum_{a(x)=a(v)} h^{y}_{u,x}\gamma^{x}_{v,w} = \sum_{a(x')=a(v')} h^{y'}_{u',\omega^{i}x'\omega^{-i}}\gamma^{x'}_{v',w'''}\delta_{i+j+k,l}.$$

在后一个等式中，进行代换 $x'' = \omega^i x' \omega^{-i}$，并再次注意到根据定义 5.2 (3)， $a(x') = a(x'')$，由定义 5.5 可得

$$\sum_{a(x')=a(v')} h^{y'}_{u',\omega^i x'\omega^{-i}} \gamma^{x'}_{v',w'''} \delta_{i+j+k,l} = \sum_{a(x'')=a(v'')} h^{y'}_{u',x''} \gamma^{x''}_{v'',w''} \delta_{i+j+k,l}$$

最后，由 [Lus87, 方程 2.4(d)]，我们有

$$\sum_{a(x')=a(v'')} h^{x'}_{u',v''} \gamma^{y'}_{x',w''} \delta_{i+j+k,l} = \sum_{a(x'')=a(v'')} h^{y'}_{u',x''} \gamma^{x''}_{v'',w''} \delta_{i+j+k,l}.$$

将这些结果综合起来，得到：

$$\begin{aligned}
\sum_{a(x)=a(v)} h^x_{u,v} \gamma^y_{x,w} &= \sum_{a(x')=a(v'')} h^{x'}_{u',v''} \gamma^{y'}_{x',w''} \delta_{i+j+k,l} \\
&= \sum_{a(x'')=a(v'')} h^{y'}_{u',x''} \gamma^{x''}_{v'',w''} \delta_{i+j+k,l} \\
&= \sum_{a(x')=a(v')} h^{y'}_{u',\omega^i x'\omega^{-i}} \gamma^{x'}_{v',w'''} \delta_{i+j+k,l} \\
&= \sum_{a(x)=a(v)} h^y_{u,x} \gamma^x_{v,w}.
\end{aligned}$$

现在注意，若 $h^x_{u,\ v} \neq 0$ 则 $x \leq_L v$，因此由 [Lus87, 推论 1.9(b)] 和定义 3.12，我们有 $x \sim_L v$，从而 $\tilde{C}_x \in \Gamma^\lambda$。类似地，若 $h^y_{u,\ x} \neq 0$ 则 $y \leq_L x$，同理可得 $\tilde{C}_x \in \Gamma^\lambda$。因此我们得到

$$\sum_{\tilde{C}_x \in \Gamma^\lambda} h^x_{u,v} \gamma^y_{x,w} = \sum_{\tilde{C}_x \in \Gamma^\lambda} h^y_{u,x} \gamma^x_{v,w}.$$

但由定义 3.9，我们有

$$h^{Qx\varnothing}_{uPv} \gamma^y_{xw} = p_P^{-1} q^{\frac{l(w_P)}{2}} h^x_{u,v} \gamma^y_{x,w}$$

and

$$h^{Qy\varnothing}_{uPx} \gamma^x_{vw} = p_P^{-1} q^{\frac{l(w_P)}{2}} h^y_{u,x} \gamma^x_{v,w}.$$

因此，为完成证明，只需证明我们可以将求和限制为仅对 x（它们分别是最大长度的 $W_Q \backslash W$ 和 $W_P \backslash W$ 陪集代表元）进行。但我们知道， u 和 v 分别是这些陪集的最大长度代表；根据定义 3.8，这恰好意味着 $s \in Q$ 和 $s \in P$ 对 C_u 和 C_v 的左作用分别是乘以 q。但对它们进行右乘不会改变这一性质，因此该和确实仅在这样的 x 时非零。

□

对于每个 $\lambda \vdash n$，固定 $\mathcal{H}^\lambda_{q^{\pm 1}}$ 中左胞腔的一种指标编排 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n_\lambda}$，使得 $\Gamma_1 = \Gamma^\lambda$。然后将其扩展为 $\mathcal{S}^\lambda_{q^{\pm 1}}$ 中左胞腔的一种指标编排 $\Psi_1, \ldots, \Psi_{m_\lambda}$，使得 $\Gamma_i \subseteq \Phi_i$。

定理 6.4。 设 $\tilde{C}^u_{QP} \in \mathcal{S}_{q^{\pm 1}}$，设 $\tilde{C}^v_{P\varnothing}, \tilde{C}^y_{Q\varnothing} \in \Psi^\lambda$ 使得 $\tilde{C}^v_{P\varnothing} \in \iota(\Psi_i)$ 且 $\tilde{C}^y_{Q\varnothing} \in \iota(\Psi_j)$，并设 $\tilde{t}_w \in B$。对于 $\tilde{C}^x_{R\varnothing} \in \iota(\Psi_k)$，令 $\tilde{C}^{x_k}_{\varnothing\varnothing}$ 为 $\iota\left(\Psi^\lambda\right)$ 中满足 $\tilde{C}^{x_k}_{\varnothing\varnothing} = q^m \phi_{\iota(\Psi_k)}\left(\tilde{C}^x_{R\varnothing}\right)$ 的唯一元素，其中某个 $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。那么

$$\sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing} \in \Psi^\lambda \cap \iota(\Psi_j)} \tilde{h}^{Qx\varnothing}_{uPv} \tilde{\gamma}^{y_j}_{x_j,w} = \sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing} \in \Psi^\lambda \cap \iota(\Psi_i)} \tilde{h}^{Qy\varnothing}_{uPx} \tilde{\gamma}^{x_i}_{v_i,w}.$$

证明。对于 $1 \le k \le n_\lambda$，令 $\tilde{C}^{w^k}_{\varnothing\varnothing}$ 为 $\Psi_k \cap \iota(\Psi_k)$ 中满足 $\tilde{C}^w_{\varnothing\varnothing} = q^m \phi_{\Psi_k \cap \iota(\Psi_k)}\left(\tilde{C}^{w^k}_{\varnothing\varnothing}\right)$ 的唯一元素，其中 $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。取定义 6.3 并对所有 w_k 求和，得到

$$\sum_{k=1}^{n_\lambda} \sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing} \in \Psi^\lambda} h^{Qx\varnothing}_{uPv} \gamma^y_{xw_k} = \sum_{k=1}^{n_\lambda} \sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing} \in \Gamma^\lambda} h^{Qy\varnothing}_{uPx} \gamma^x_{vw_k}.$$

然而，根据定义 5.18，除非 $k = j$，否则有 $\gamma^y_{xw_k} = 0$；除非 $k = i$，否则有 $\gamma^x_{vw_k} = 0$。因此可化简为

$$\sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing} \in \Psi^\lambda} h^{Qx\varnothing}_{uPv} \gamma^y_{xw_j} = \sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing} \in \Psi^\lambda} h^{Qy\varnothing}_{uPx} \gamma^x_{vw_i}.$$

但是，再次根据定义 5.18，若 $\tilde{C}^x_{Q\varnothing} \notin \iota(\Psi_j)$，则 $\gamma^y_{xw_j} = 0$。类似地，若 $\tilde{C}^x_{P\varnothing} \notin \iota(\Psi_i)$，则 $\gamma^x_{vw_i} = 0$。因此，我们可以进一步将求和化简为

$$\sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing} \in \Psi^\lambda \cap \iota(\Psi_j)} h^{Qx\varnothing}_{uPv} \gamma^y_{xw^j} = \sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing} \in \Psi^\lambda \cap \iota(\Psi_i)} h^{Qy\varnothing}_{uPx} \gamma^x_{vw^i}.$$

现在，再次根据定义 5.18，我们有 $\gamma^{y_j}_{x_j w} = \gamma^y_{xw^j}$ 和 $\gamma^x_{vw^i} = \gamma^{x_i}_{v_i w}$，因此

$$\sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing} \in \Psi^\lambda \cap \iota(\Psi_j)} h^{Qx\varnothing}_{uPv} \gamma^{y_j}_{x_j w} = \sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing} \in \Psi^\lambda \cap \iota(\Psi_i)} h^{Qy\varnothing}_{uPx} \gamma^{x_i}_{v_i w}.$$

现在，在左侧的求和中，由于 $C^x_{Q\varnothing}, C^y_{Q\varnothing} \in \iota(\Psi_j)$，根据 $\phi_{\iota(\Psi_j)}$ 的构造，我们有 $l(x) - l(x_j) = l(y) - l(y_j)$。类似地，在右侧的求和中，$l(x) - l(x_i) =$

$l(v) - l(v_i)$。利用这一点，我们现在可以得出结论：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing}\in\Psi^\lambda\cap\iota(\Psi_j)} \tilde{h}^{Qx\varnothing}_{uPv}\tilde{\gamma}^{y_j}_{x_j,w}\\
=&\sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing}\in\Psi^\lambda\cap\iota(\Psi_j)} q^{\frac{l(u)+l(v)+l(w)+l(x_j)-l(x)-l(y_j)-l(w_\lambda)}{2}} h^{Qx\varnothing}_{uPv}\gamma^{y_j}_{x_j,w}\\
=&q^{\frac{l(u)+l(v)+l(w)-l(y)-l(w_\lambda)}{2}} \sum_{\tilde{C}^x_{Q\varnothing}\in\Psi^\lambda\cap\iota(\Psi_j)} h^{Q\varnothing}_{uPv}\gamma^{y_j}_{x_j,w}\\
=&q^{\frac{l(u)+l(v)+l(w)-l(y)-l(w_\lambda)}{2}} \sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing}\in\Psi^\lambda\cap\iota(\Psi_i)} h^{Qy\varnothing}_{uPx}\gamma^{x_i}_{v_i w}\\
=&\sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing}\in\Psi^\lambda\cap\iota(\Psi_i)} q^{\frac{l(u)+l(v_i)+l(w)+l(x)-l(x_i)-l(y)-l(w_\lambda)}{2}} h^{Qy\varnothing}_{uPx}\gamma^{x_i}_{v_i,w}\\
=&\sum_{\tilde{C}^x_{P\varnothing}\in\Psi^\lambda\cap\iota(\Psi_i)} \tilde{h}^{Qy\varnothing}_{uPx}\tilde{\gamma}^{x_i}_{v_i,w}.
\end{aligned}$$

□

现在我们可以将所有部分整合起来了。

定理 6.5。 $\mathcal{H}_{q^{\pm1}}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm1}}$ 是关于 $\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}$ 的仿射胞腔代数。具体而言：

- 胞腔理想分别为 $\mathcal{H}^\lambda_{q^{\pm1}}$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_{q^{\pm1}}$
- 胞腔理想上的序为任意一个扩张递减 *dom*-支配序的全序

- $\mathcal{H}^\lambda_{q^{\pm1}}$ 和 $\mathcal{S}^\lambda_{q^{\pm1}}$ 上的仿射胞腔理想结构由– 自由的 $\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}$-模 $V = \langle v_1, \dots, v_{n_\lambda}\rangle$ 和 $U = \langle u_1, \dots, u_{m_\lambda}\rangle$ 给出，其秩为

$$n_\lambda = \frac{n!}{\prod_i(\mu_i!)} \quad \textit{and} \quad m_\lambda = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{n!}{(n-i)!i!}\right)^{\lambda_i-\lambda_{i+1}}$$

  分别，其中 μ 是 λ的对偶分拆

  – 有限生成交换代数

$$B = \tilde{\mathcal{B}}^\lambda_{q^{\pm1}} = \mathbb{Z}_{q^{\pm1}}\left[\tilde{t}_{w(y_{ij})}, \tilde{t}^{-1}_{w(y_{im_i})}\middle| 1\le i\le p, 1\le j\le m_i\right]$$

  其中， m_i 是序列 $\lambda_r - \lambda_{r+1}$ 中第 i 个非零值

  – 同构

$$\alpha^{-1} : V\otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}} B\otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}} V \to \mathcal{H}^\lambda_{q^{\pm1}}$$
$$\beta^{-1} : U\otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}} B\otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm1}}} U \to \mathcal{S}^\lambda_{q^{\pm1}}$$

由.....给出

$$v_i \otimes \tilde{t}_w \otimes v_j \mapsto \phi_{\Gamma_j \cap \iota(\Gamma_i)} \left(\tilde{C}_w \right)$$
$$u_i \otimes \tilde{t}_w \otimes u_j \mapsto \phi_{\Psi_j \cap \iota(\Psi_i)} \left(\tilde{C}^w_{\varnothing\varnothing} \right).$$

证明。固定一个指标编排 $\lambda^1, \ldots, \lambda^K$，使得如果 $\lambda^i > \lambda^j$，那么 $i < j$。

我们有 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}} = \bigoplus_{k=1}^K \mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}} = \bigoplus_{k=1}^K \mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}$。此外，根据定义 3.20，我们有 $\iota\left(\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}\right) = \mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}$ 和 $\iota\left(\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}\right) = \mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}$；根据定义3.21，子模 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^k = \bigoplus_{k'=1}^k \mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^{k'}}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^k = \bigoplus_{k'=1}^k \mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^{k'}}$ 分别是 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}$ 中的双边理想。

要证明 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{\lambda^k}$ 分别是$\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{k-1}$ 和$\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{k-1}$ 中的仿射胞腔理想，只需证明它们分别是较大的商 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda_k}$和 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda_k}$中的仿射胞腔理想。以下我们将$\lambda_k$简记为 λ。

由定义3.23，U和 V的秩分别等于 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{\lambda}$和$\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{\lambda}$中的左胞腔数。将这些空间的标准基分别记为 $v_1, \ldots, v_{n_\lambda}$和 $u_1, \ldots u_{m_\lambda}$。通过 $v_i \mapsto u_i$，将 V视为 U的子模。再记 $B = \tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm 1}}^{\lambda}$，注意此时由定义5.22可得 $B = \left[\tilde{t}_{w(y_{ij})} \ \tilde{t}_w^{-1}{}^{(y_{im_i})} \middle| 1 \le i \le p, 1 \le j \le m_i \right]$。

根据定义 4.12，α^{-1} 和 β^{-1} 是模同构，因此记作 α^{-1} 和 β^{-1}。注意，α 是 β在 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{\lambda}$ 上的限制。此外，再次根据定义 4.12，$\iota\beta^{-1}(u_i \otimes \tilde{t}_w \otimes u_j) = \beta^{-1}(u_j \otimes \sigma(\tilde{t}_w) \otimes u_j)$。

根据构造，$\alpha^{-1}\left(V \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B \otimes v_j\right) = \Gamma_j$，根据定义 3.22 是一个左 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$-理想，同理 $\beta^{-1}\left(U \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B \otimes u_j\right) = \Phi_j$是一个左 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$-理想。再使用一次定义 4.12，我们有 $\phi_{\Gamma_j}(\alpha^{-1}(v_i \otimes \tilde{t}_w \otimes v_j)) = \alpha^{-1}(v_i \otimes \tilde{t}_w \otimes v_1)$ 和 $\phi_{\Psi_j}\left(\beta^{-1}(u_i \otimes \tilde{t}_w \otimes u_j)\right) = \beta^{-1}(u_i \otimes \tilde{t}_w \otimes u_1)$，并且根据 定义 4.14，这些分别是左 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ -模同构和左 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ -模同构。因此，相应的左作用 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ 和 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ 在 $V \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} V$ 和 $U \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} U$ 上的作用由 $V \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B$ 和 $U \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B$ 分别。

最后，根据定义 6.4，$\Psi^\lambda = \beta^{-1}(U \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B \otimes u_1)$ 上的右正则 B 作用与左 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ 作用相互交换。因此，限制之后，$\Gamma^\lambda = \beta^{-1}(V \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} B \otimes v_1)$ 上的右正则 B 作用与左 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{H}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ 作用也相互交换。 □

最后我们指出，这种仿射胞腔结构还具有幂等性。记 $\mathcal{H}_{p_P^{-1}} = \mathcal{H}_{q^{\pm 1}} \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} \mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}\left[p_P^{-1}\right]$。

定理 6.6。$\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ 中的双边理想 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{\lambda}$ 由非零幂等元 $\tilde{C}_{P_\lambda P_\lambda}^{w_\lambda}$生成。

此外，$\mathcal{H}_{p_P^{-1}}/\mathcal{H}_{p_P^{-1}}^{>\lambda}$ 中的双边理想 $\mathcal{H}_{p_P^{-1}}^{\lambda}$ 由非零幂等元 $\frac{1}{p_{P_\lambda}}\tilde{C}_{w_\lambda}$生成。

——

证明。根据定义 4.8，我们有 $\tilde{C}_{w_\lambda} \in \mathcal{H}_\bullet^\lambda$，因此根据定义 3.15，我们也有 $\tilde{C}_{P_\lambda P_\lambda}^{w_\lambda} \in \mathcal{S}_\bullet^\lambda$。

现在，设 $P \subseteq S^{\mathrm{fin}}$。那么 $\tilde{C}_{PP}^{w_P}$ 是 W_P 中所有长度为极大长度的 $y \leq w_P$ 对应的 T_{PP}^y 之和。但唯一满足条件的 y 是 w_P，而且对于任意 w，$P_{w,\,w}=1$，因此 $\tilde{C}_{PP}^{w_P}=T_{PP}^{w_P}=1_{x_P\mathcal{H}_\bullet}$ 是 $x_P\mathcal{H}_\bullet$ 上的恒等映射，故为幂等元。

现在，$\tilde{C}_{PP}^{w_P}$ 为幂等元恰好意味着 $\tilde{h}_{w_P P w_P}^{PvP} = \delta_{vw}$。因此 $\tilde{h}_{w_P w_P}^{v} = p_P \tilde{h}_{w_P P w_P}^{PvP} = p_P\delta_{vw_P}$，所以我们便有 $\tilde{C}_{w_P}\tilde{C}_{w_P} = p_P\tilde{C}_{w_P}$，故 $\frac{1}{p_P}\tilde{C}_{w_P}$ 在 $\mathcal{H}_{p_P^{-1}}$ 中也为幂等元。此外，

$$\tilde{h}_{w_P \varnothing w_P}^{Pv\varnothing} = \tilde{h}_{w_P \varnothing w_P}^{\varnothing v P} = \tilde{h}_{w_P w_P}^{v} = p_P\delta_{vw_P}$$

因此 $\tilde{C}_{P\varnothing}^{w_P}\tilde{C}_{w_P}\tilde{C}_{\varnothing P}^{w_P} = p_P^2\tilde{C}_{PP}^{w_P}$。所以，如果 $\tilde{C}_{P_\lambda P_\lambda}^{w_\lambda}$生成 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^\lambda$，那么 $\tilde{C}_{w_{P_\lambda}}$生成 $\mathcal{H}_{p_P^{-1}}^\lambda$。

现在考虑一般的基元素 $\tilde{C}_{QP}^w \in \mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^\lambda$。设

$$\beta\left(\tilde{C}_{QP}^w\right) = q^{m_1}u_i \otimes b \otimes u_j \quad \text{and} \quad \beta\left(\tilde{C}_{P_\lambda P_\lambda}^{w_\lambda}\right) = u_k \otimes 1 \otimes u_k.$$

定义 $q^{m_2}\tilde{C}_{QP_\lambda}^u = \beta^{-1}(u_i \otimes b \otimes u_k)$ 和 $q^{m_3}\tilde{C}_{P_\lambda P}^v = \beta^{-1}(u_k \otimes 1 \otimes u_j)$。注意，实际上 $q^{m_1+m_2+m_3} = 1$。现在，由于 $\tilde{C}_{P_\lambda P_\lambda}^{w_\lambda}$是幂等元，我们有 $(u_k \otimes 1 \otimes u_k)^2 = u_k \otimes 1 \otimes u_k$，因此 $(u_k,\ u_k) = 1$。所以在 $\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}/\mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^{>\lambda}$ 中，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{QP_\lambda}^u\tilde{C}_{P_\lambda P_\lambda}^{w_\lambda}\tilde{C}_{P_\lambda P}^v &= q^{-(m_2+m_3)}\beta^{-1}\left((u_i \otimes b \otimes u_k)(u_k \otimes 1 \otimes u_k)(u_k \otimes 1 \otimes u_j)\right)\\ &= q^{m_1}\beta^{-1}(u_i \otimes b \otimes u_j)\\ &= \tilde{C}_{QP}^w.\end{aligned}$$

□

定理 6.7 R $\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}$ $\mathcal{S}_R = ..$ 设 是一个诺特整环，$\mathcal{S}_{q^{\pm 1}} \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} R$ *[12, 4 4]* 是一个 - 代数。那么 满足 *KX* 定理 . . 的条件。因此，$\mathcal{S}_R$ 的导出范畴可由这些导出范畴分层

$$\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm 1}}^\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} R = R\left[\tilde{t}_{w(y_{ij})}, \tilde{t}_{w(y_{im_i})}^{-1}\middle| 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m_i\right],$$

并且，如果 R 具有有限整体维数，那么 $\mathcal{S}_R$也具有有限整体维数。

此外，如果 $p_{S^{\mathrm{fin}}}$ R $\mathcal{H}_R =$ 在 中可逆，那么 $\mathcal{H}_{q^{\pm 1}} \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} R$ 类似的结论对 也成立。

证明。根据 [KX12，引理 2.4] 和定义 6.5，$\mathcal{S}_R$ 是仿射胞腔的，其仿射胞腔理想为 $\mathcal{S}_R^\lambda = \mathcal{S}_{q^{\pm 1}}^\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} R \cong U_R \otimes \left(\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm 1}}^\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} R\right) \otimes_R U_R$，其中 $U_R = U \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} R$。但是 $\tilde{\mathcal{B}}_{q^{\pm 1}}^\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_{q^{\pm 1}}} R = R\left[\tilde{t}_{w(y_{ij})}\ \tilde{t}_w^{-1}{}_{(y_{im_i})}\middle| 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq m_i\right]$ 是一个

整环，因此雅各布森根为零。此外，根据标准结果，它的整体维数为 $R+\sum_{i=1}^{p} m_i = R+\lambda_1$：例如参见 [MR01，定理 7.5.3 (iii, iv)]。

关于 $\mathcal{H}_R$ 的论证相同，注意若 $P \subseteq S^{\mathrm{fin}}$，则 p_P 整除 $p_{S^{\mathrm{fin}}}$。

□

参考文献

[AJS94] H. H. Andersen、J. C. Jantzen 和 W. Soergel。《量子群在特征 p 下的 p 次单位根处的表示，以及半单群的表示：与 p 无关》。载于：Ast´erisque 220 (1994)，第 321 页。ISSN：0303-1179,2492-5926。[Ber25] Rose Berry。《 l-模素数幂域 GL_n 的导出模单幺块》。2025。arXiv：2509 . 13088 [math.RT]。 URL：https : / / arxiv . org / abs/2509.13088.[BK99] Colin J. Bushnell 和 Philip C. Kutzko。《GL_n 中的半单类型》。载于：Compositio Math. 119.1 (1999)，第 53–97 页。 ISSN：0010-437X,1570- 5846。 DOI：10.1023/A:1001773929735。 URL：https://doi.org/10.1023/A:1001773929735.[Cui15] Weideng Cui。《BLN 代数的仿射胞腔性》。载于：《代数杂志》441 (2015)，第 582–600 页。 ISSN：0021-8693,1090-266X。 DOI：10.1016/j. jalgebra . 2015 . 06 . 031。 URL：https : / / doi . org / 10 . 1016 / j . jalgebra.2015.06.031.[Cui16] Weideng Cui。《仿射 q-舒尔代数的仿射胞腔性》。载于：Proc. Amer. Math. Soc. 144.11 (2016)，第 4663–4672 页。 ISSN：0002-9939,1088- 6826。 DOI：10.1090/proc/13261。 URL：https://doi.org/10.1090/ proc/13261.[Dat09] Jean-Francois Dat。《p-进群光滑表示的有限性》。载于：J. Inst. Math. Jussieu 8.2 (2009)，第 261–333 页。 ISSN：1474-7480,1475-3030。 DOI：10.1017/S1474748008000054。 URL：https: // doi.org/10.1017/S1474748008000054.[DL25] Jean-Fran.cois Dat 和 Thomas Lanard。《$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上的零深度表示》。2025。arXiv：2202.03982 [math.RT]。 URL：https://arxiv. org/abs/2202.03982.[DPS98] J. Du、B. Parshall 和 L. Scott。《胞腔与 q-舒尔代数》。载于：Transform. Groups 3.1 (1998)，第 33–49 页。 ISSN：1083-4362,1531-586X。DOI：10 . 1007 / BF01237838。 URL：https : / / doi . org / 10 . 1007 / BF01237838.[FH91] William Fulton 和 Joe Harris。《表示论》。第 129 卷。数学研究生教材。入门课程，数学读物丛书。Springer-Verlag，纽约，1991，第 xvi+551 页。 ISBN：0-387-97495-4。DOI：10.1007/978-1-4612-0979- 9。 URL：https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0979-9。

[Gre99] R. M. Green。《仿射 q-舒尔代数》。载于：《代数杂志》215.2 (1999)，第 379–411 页。 ISSN：0021-8693,1090-266X。 DOI：10.1006/jabr.1998. 7753。 URL：https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7753.[Hel+24] David Helm 等。《 p-进经典群的分块分解及其内形式》。2024。arXiv：2405.13713 [math.RT]。 URL：https: // arxiv.org/abs/2405.13713.[KL79] David Kazhdan 和 George Lusztig。《Coxeter 群与 Hecke 代数的表示》。载于：《数学发明》53.2 (1979)，第 165–184 页。 ISSN：0020-9910,1432-1297。 DOI：10 . 1007 / BF01390031。 URL：https :// doi.org/10.1007/BF01390031.[KX12] Steffen Koenig 和 Changchang Xi。《仿射胞腔代数》。载于：《数学进展》229.1 (2012)，第 139–182 页。 ISSN：0001-8708,1090-2082。 DOI：10. 1016/j.aim.2011.08.010。 URL：https://doi.org/10.1016/j. aim.2011.08.010.[Lus03] G. Lusztig。《不等参数 Hecke 代数》。第 18 卷。CRM 专著丛书。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2003，第 vi+136 页。 ISBN：0-8218-3356-1。 DOI：10 . 1090 / crmm / 018。 URL：https://doi.org/10.1090/crmm/018.[Lus85] George Lusztig。《仿射 Weyl 群中的胞腔》。载于：《代数群及相关专题》（京都/名古屋，1983）。第 6 卷。《纯数学高级研究》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1985，第 255–287 页。 ISBN：0-444-87711-8。DOI：10.2969/aspm/00610255。 URL：https://doi.org/10.2969/aspm/00610255.[Lus87] George Lusztig。《仿射 Weyl 群中的胞腔 II》。载于：《代数杂志》109.2 (1987)，第 536–548 页。 ISSN：0021-8693。 DOI：10.1016/0021-8693(87) 90154-2。 URL：https://doi.org/10.1016/0021-8693(87)90154- 2.[Lus99] G. Lusztig。《量子仿射 $\mathfrak{gl}_n$ 中的非周期性》。载于：第 3 卷，第 1 期。《Michael Atiyah 爵士：二十世纪的一位伟大数学家》。1999，第 147–177 页。 DOI：10.4310/AJM.1999.v3.n1.a7。 URL：https://doi.org/ 10.4310/AJM.1999.v3.n1.a7.[McG03] Kevin McGerty。《量子仿射 $\mathfrak{sl}_n$ 中的胞腔》。载于：Int. Math. Res. Not. 24 (2003)，第 1341–1361 页。 ISSN：1073-7928,1687-0247。 DOI：10.1155/ S1073792803211 20X。 URL：https://doi.org/10.1155/S107379280321120

X.

[MR01] J. C. McConnell 和 J. C. Robson。《非交换诺特环》。修订版。第 30 卷。数学研究生教材。L. W. Small 协作。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2001 年，第 xx+636 页。 ISBN：0-8218-2169-5。 DOI：10.1090/gsm/030。 URL：https://doi.org/10.1090/gsm/030。[Shi86] 施建一。《某些仿射魏尔群中的 Kazhdan-Lusztig 胞》。第 1179 卷。数学讲义。Springer-Verlag，柏林，1986 年，第 x+307 页。 ISBN：3-540-16439-1。 DOI：10 .1007 / BFb0074968。 URL：https://doi.org/10.1007/BFb0074968。

[Shi96] Jian-Yi Shi。“某些仿射 Weyl 群的双侧胞腔上的偏序”。载于：《代数杂志》179.2（1996），第 607–621 页。 ISSN：0021-8693,1090- 266X。 DOI：10.1006/jabr.1996.0027。 URL：https://doi.org/10. 1006/jabr.1996.0027。[Vig03] Marie-France Vign´eras。“约化 p-进群的舒尔代数 I”。载于：《杜克数学杂志》116.1（2003），第 35–75 页。 ISSN：0012-7094,1547-7398。DOI：10.1215/S0012-7094-03-11612-9。 URL：https://doi.org/10.1215/S0012-7094-03-11612-9。[Xi02] Nanhua Xi。“仿射 Weyl 群的双侧胞腔的基环，类型为 $\widetilde{A}_{n-1}$”。载于：《美国数学会回忆录》157.749（2002），第 xiv+95 页。ISSN：0065-9266,1947-6221。 DOI：10.1090/memo/0749。 URL：https: //doi.org/10.1090/memo/0749。