arXiv:2601.04009v1 [math.GT] 7 Jan 2026

霍姆斯–汤普森面积、内接多边形与凸射影结构

XENIA FLAMM 和 GIUSEPPE MARTONE

Abstract. 完备旗标的正组在 $\mathbb{R}^3$ 中定义了两个凸多边形，其中一个内接于另一个。我们希望探究外侧多边形上的希尔伯特度量所诱导的内侧多边形的霍姆斯–汤普森面积，与旗标正组的双重比和三重比之间的关系。本文聚焦于旗标的正三元组与四元组。对于四元组，我们研究双曲四边形这一特殊情形，以及三穿孔球面上有限面积凸实射影结构的参数化。

1. Introduction

曲面 S 上的（标记）凸射影结构，是指将 S 的万有覆盖与一个开真凸子集 $\Omega \subset \mathbb{RP}^2$等同起来；这意味着 Ω 包含在 $\mathbb{RP}^2$ 的某个仿射图中，且在该仿射图中 Ω 是凸且有界的。射影空间的这类子集自然带有一种度量：希尔伯特度量。该度量下降为 S上的度量，使曲面成为一个芬斯勒流形。粗略地说，芬斯勒流形是在每个切空间上都赋有一族连续变化的范数的流形。该范数使我们能够在芬斯勒流形上定义度量，以及若干种（彼此不等价的）体积概念 [´APT04]。本文关注霍姆斯–汤普森体积：给定一个芬斯勒流形 M 和 $X \subset M$，霍姆斯与汤普森 [HT80] 通过利用余切丛上的自然辛结构，对 M 各点处相对于对偶芬斯勒范数的单位球进行积分，从而定义 X 的体积。本文旨在研究（有限面积）凸射影曲面的霍姆斯–汤普森面积。凸射影曲面的其他面积概念已在 [AC20] 中针对 p-面积进行了研究，也在 [CVV04, Mar12, Wol21]中针对布塞曼面积进行了研究，后者与豪斯多夫测度一致。请注意，根据 [Mar14, Proposition 9.4]，这三种概念是双利普希茨等价的。我们认为，满足克罗夫顿公式的霍姆斯–汤普森面积（见 [´APB06], ）应当会出现在计算凸实射影结构的希尔伯特测地流自交时（参见 [KP14, Lab07, MZ19]）。

在其开创性工作中，Fock–Goncharov [FG06], 另见 [BD14、BD17、FG07], 用正旗标的射影不变量来参数化 S（记作 $\mathcal{CP}$（S），即 $\mathbb{R}^3$（带标记的）有限面积凸射影结构空间。于是，一个自然的问题便是如何用这些参数表示凸射影曲面的面积。一般而言，这似乎是一项非常困难的任务。

当 $S = S_{0,3}$ 是一个三穿孔球面时，我们得到了凸射影结构在 $S_{0,3}$ 上的霍姆斯–汤普森面积的渐近增长结果。空间 $\mathcal{CP}(S_{0,3})$ 可由两个实数 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{t}$ 参数化（分别为一个二重比和一个三重比的对数），我们估计了与 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{t}$ 对应的凸射影结构 $\Psi(\mathbf{d},\mathbf{t})$ 的霍姆斯–汤普森面积关于 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{t}$的增长率，其中欧几里得范数 $\|(\mathbf{d},\mathbf{t})\|$ 趋于无穷大。

定理 1.1。令$\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(\Psi(\mathbf{d},\ \mathbf{t}))$ 表示三穿孔球面上凸射影结构$\Psi(\mathbf{d},\ \mathbf{t})$ 的霍姆斯–汤普森面积。那么，

$$\liminf_{\|(\mathbf{d},\mathbf{t})\|\to\infty} \frac{\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(\Psi(\mathbf{d},\mathbf{t}))}{\mathbf{d}^2+\mathbf{t}^2} > 0.$$

该结果由一个标准的比较结果推出：若 $\Omega \subset \Omega'$ 则 $\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}_{\Omega} \geq \mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}_{\Omega'}$(注 2.12)，以及对内接于四边形中的理想四边形的面积所作的精确研究，见 $\mathbb{RP}^2$定理 1.5。

Date：2026年1月8日。

为说明这一点，我们首先需要更详细地解释 Fock–Goncharov [FG07]给出的有限面积凸射影结构空间的参数化。为简单起见，这里我们只考虑 $S = S_{0,3}$ 的情形，但类似结论在更一般的情形下也成立。设 p_1, p_2, p_3 表示 $S_{0,3}$ 的三个尖点，设 $\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$ 表示 $S_{0,3}$ 的平衡理想三角剖分，其边从 p_i 指向p_{i+1}，且 $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。现在设 ρ 是 $S_{0,3}$ 上的一个有限面积凸射影结构。于是，$S_{0,3}$ 的万有覆盖可与射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 中的一个开真凸集 Ω_ρ 相识别，并满足如下性质：Ω_ρ 边界上的每个点都有唯一的切线。将 $S_{0,3}$ 的平衡三角剖分提升为 Ω_ρ 的一个（有向）理想三角剖分，并选取两个相邻的理想三角形，其理想顶点为$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$，沿 Ω_ρ的边界按此循环次序排列。 $\partial\Omega_\rho$中的四个点 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 构成一个凸四边形（即在包含 Ω_ρ闭包的仿射图中，这四点的凸包），且该四边形包含于由四条分别在 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$处与$\partial\Omega_\rho$ 相切的射影直线所确定的凸四边形内。因此，我们自然会考虑一对内接凸四边形 $\mathbf{P} = (P_{\mathrm{in}}, P_{\mathrm{out}})$，并估计 P_{in} 作为 P_{out}的子集时的霍姆斯–汤普森面积。我们还提到，Faifman、Vernicos 和 Walsh [FVW25, VW21] 研究了凸多面体的希尔伯特几何的渐近体积及其与组合结构的关系。

1.1. **内接四边形**。 为了证明定理 1.1 ，我们需要更深入地理解内接四边形的霍姆斯–汤普森面积。由于霍姆斯–汤普森面积是一个射影不变量（注 2.11），在 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}$的作用下，我们可以将 P_{out} 规范化为标准四边形Q_0 ，其顶点为 $(\pm 1, \pm 1)$ 和 $(\pm 1, \mp 1)$。第 4 节完成的一个关键技术步骤，是找到一个公式来计算 Q_0 的子集的霍姆斯–汤普森面积。

命题 1.2。 希尔伯特度量在内部点 (x, y) 处的对偶单位球 Q_0 的欧几里得面积 A_{Q_0} 等于

$$A_{Q_0}(x, y) = \frac{2 + \max\{|x|, |y|\}}{2(1 - x^2)(1 - y^2)}.$$

特别是，任意勒贝格可测子集 $U \subset Q_0$ 的霍姆斯–汤普森面积等于

$$\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}_{Q_0}(U) = \frac{1}{\pi} \int_U A_{Q_0}(u) d\mu(u),$$

其中， $d\mu$是 $\mathbb{R}^2$上的标准勒贝格测度。

对于一对内接凸四边形$\mathbf{P} = (P_{\mathrm{in}}, P_{\mathrm{out}})$，一般情形在具体计算中会遇到重大挑战。因此，我们将注意力限制在两个具有几何意义的无限例子族上，以研究曲面上的凸实射影结构。

1.1.1. 双曲四边形。第一个例子族由凸内接四边形对 $\mathbf{P} = (P_{\mathrm{in}}, P_{\mathrm{out}})$ 构成，对于这些四边形对，存在一个开椭圆 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{P})$，使得 P_{in} 是 $\mathcal{E}$ 中的理想多边形，且 P_{out} 的边界包含于经过 P_{in}各顶点处 $\mathcal{E}$ 的切线的并集中。注意， $\mathcal{E}$配备希尔伯特度量后是双曲平面的（克莱因–贝尔特拉米）模型，因此我们称内接四边形对 $\mathbf{P}$ 为双曲的。用 Fock–Goncharov坐标表示，对于 P_{in} 的任意定向对角线选择（见注 2.4），这类四边形对的特征是两个三重比均等于 1，且两个双重比均等于某个 $d \in (0, \infty)$，由此得到一参数内接四边形族，记为 $\mathbf{P}^{\mathrm{hyp}}(d) = (P\text{hyp in }(d)\ P^{\mathrm{hyp}}\text{ out }(d))$ 。第 5 节的主要结果是给出 $\mathbf{P}^{\mathrm{hyp}}(d)$ 的霍姆斯–汤普森面积关于双比 d的显式公式，其中涉及二对数函数。

定义 1.3。 对于每个 $z \in \mathbb{C}$，函数 $\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{1}{v} \ln(1 - v) dv$ 是 z 的二对数函数。

命题 1.4。 对于任意 $d>0$，令 $\mathbf{P}^{\mathrm{hyp}}(d)=(P^{\mathrm{hyp}}{}_{\text{内}}(d)\ P_{\text{外双曲}}(d))$ 为 $\mathbb{RP}^2$ 中的一对内接凸四边形组成的双曲对。则， $P_{\text{内双曲}}(d)$ 相对于 $P^{\mathrm{hyp}}{}_{\text{外}}(d)$ 的霍姆斯–汤普森面积等于

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(\mathbf{P}^{\mathrm{hyp}}(d))=\frac{1}{2\pi}\Big(&-\mathrm{Li}_2(-2d)+2\mathrm{Li}_2\left(\frac{-d}{1+d}\right)-2\mathrm{Li}_2(-(1+d))-2\mathrm{Li}_2\left(\frac{d}{1+d}\right)\\&-\mathrm{Li}_2\left(\frac{d}{2+d}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{-d}{2+d}\right)-2\mathrm{Li}_2(-d)-\mathrm{Li}_2(-(1+2d))-2\ln(1+d)\ln\left(\frac{2d}{1+d}\right)\\&+\ln\left(\frac{2}{1+d}\right)\left(-3\ln\left(\frac{2}{1+d}\right)+\ln\left(\frac{2+4d}{1+d}\right)+\ln(4)\right)+2\ln\left(\frac{4d}{1+d}\right)\ln\left(\frac{1}{1+2d}\right)+\frac{1}{2}\pi^2\Big).\end{aligned}$$

这一计算基于命题 $Q_0$1.2 中标准四边形的面积被积函数的计算。随后，我们使用命题 1.4 中的显式公式，证明霍姆斯–汤普森面积在 $d=1$处取得局部最大值，约等于双曲平面中理想四边形面积 $1/4$ 的 2π ，并且当 $\frac{3}{8}\pi$ （特别是 >0）时，面积趋于 $d\to 0$ 或$d\to\infty$。_ 更多详情请参见第5 节。

1.1.2. 三穿孔球面上的凸射影结构。 我们考虑的第二族内接四边形对，来自三穿孔球面上的有限面积凸射影结构$S_{0,\ 3}$，旨在证明定理1.1。

因此，令 $\rho\in\mathcal{CP}$(S0,3)。考虑四个点 $\xi_1,\dots,\xi_4\in\partial\Omega_\rho$，它们来自平衡理想三角剖分提升到 Ω_ρ 后的一对相邻三角形的顶点。利用[BD14、第 4] 节以及有限面积条件进行显式计算，可知与 $\xi_1,\dots,\xi_4$ 以及在这些点处与 Ω_ρ 相切的射影直线相对应的内接凸四边形对 $\mathrm{P}=(P_{\mathrm{in}},P_{\mathrm{out}})$ 的 Fock– Goncharov 参数为 $t,t',d,d\in(0,\infty)$，且满足 $tt'=dd'=1$。更多细节见第 7 节。因此，我们自然会考虑三重比为 t,t'、双比为 d,d' 且满足 $tt'=dd'=1$ 的内接凸四边形对 $\mathrm{P}(d,t)=(P_{\mathrm{in}}(d,t)\ P_{\mathrm{out}}(d,t))$。我们研究当 d 或 t 趋于零或无穷时，面积的渐近行为。更确切地说，在第 6 节中我们证明以下定理，它与比较结果结合后立即推出定理 1.1。

定理 1.5。 考虑由具有 *Fock–Goncharov* 参数 $t,t',d,d'\in(0,\infty)$ 的内接凸四边形对组成的族 $\mathbf{P}(d,t)$ ，满足 $tt'=1$和 $dd'=1$。那么，存在 $C\in(0,\infty)$ 使得

$$\lim_{\|(\ln(d),\ln(t))\|\to\infty}\frac{\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(\mathbf{P}(d,t))}{\ln^2(d)+\ln^2(t)}=C.$$

1.2. 内接三角形。 对于更一般曲面上的凸射影结构（而不仅仅是三孔球面），我们需要计算一对内接三角形的霍姆斯–汤普森面积。三角形的情形计算起来较为简单，并且在其他面积概念的研究中已受到一些关注。

第一步与四边形的情形一样，是计算 标准三角形 T_0 顶点为 (0，0)、(0，2) 和 (2，0) 的子集的霍姆斯–汤普森面积，这将在第 3节完成。

命题1.6。 内部点(x,y) 处的希尔伯特度量对偶单位球的欧几里得面积 A_{T_0} 等于

$$A_{T_0}(x,y)=\frac{3}{2xy(2-x-y)}.$$

由此我们得到以下直接推论。若**P**是一对内接凸三角形，则**P** 由一个不变量 $t=t(\mathbf{P})>0$（即三重比）参数化。接下来我们证明：

推论 1.7。 设$\mathbf{P}(t)=(P_{\mathrm{in}}(t)\ P_{\mathrm{out}}(t))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中一对具有福克–冈萨洛夫参数 $t\in(0,\infty)$的内接凸三角形。那么，$\mathbf{P}$ 的霍姆斯–汤普森面积满足

$$\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(\mathbf{P}(t))=\frac{3}{8\pi}\left(\pi^2+\ln^2(t)\right).$$

同样，在 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ 的作用下，我们可以将 P_{out} 归一化为 T_0。我们应用命题 1.6 的结果。于是，积分的计算可归约为 [AC20 中引理 3 所计算的积分。3] 由于 [dlH93]，在此情形下，霍姆斯–汤普森面积是他们所考虑的p–面积的一个标量倍数。

作为推论，我们陈述 Adeboye–Cooper [AC20，定理 02]的类似结果——现以霍姆斯–汤普森面积表述。

推论 1.8。设 $\mathcal{T}$ 是一个带 *puncture* 曲面 S 上的理想三角剖分，该曲面具有负欧拉示性数 $\chi(S)$，且 ρ 是 S 上的凸射影结构。则

$$\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(\rho) \geq \frac{3}{8}(-2\pi\chi(S)) + \frac{3}{8\pi}\sum_{i=1}^{-2\chi(S)} \ln^2(t_i),$$

其中，t_i 是与 ρ 相关联的三重比，对应于理想三角剖分 $\mathcal{T}$ 中 S的 $-2\chi(S)$ 三角形。

对于负欧拉示性数的闭曲面，也有类似结果；此时我们将理想三角剖分替换为极大测地层状结构 [BD17]。

在双曲情形（当 $t_i = 1$ 对所有 i成立时），推论 1.8 右端等于 $3\,8(-2\pi\chi(S))$，由此恰好计算出双曲面积的 $3/8$。注意，我们对霍姆斯–汤普森面积作了归一化，使其在真凸域为椭圆时与双曲面积一致，见第 2.4节。

若能改进这一估计，将三重比和双比都纳入考量，将会很有意义，因为三重比和双比（给定 S上的一组拓扑数据后）可以完全参数化 $\mathcal{CP}(S)$ [FG07、BD14]。这正是我们最初考虑四边形的动机。具体而言，若能为一般的一对内接四边形 P 求得渐近行为或公式（如推论 1.7 中的公式），从而得到 $\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(\mathbf{P})$，将会很有意思，尽管这似乎是一项相当艰巨的任务。

本文结构与证明策略。第 2 节汇集了有关旗标正元组、它们与 $\mathbb{RP}^2$ 中内接多边形对之间的关系、芬斯勒流形的霍姆斯–汤普森体积，以及这些对象之间相互作用的背景知识。特别地，我们回顾 [LM74] 中的一项技术性结果（定理 2.19），该结果使我们能够明确求出凸多边形中一般点处切空间内单位球（相对于芬斯勒范数）的对偶。第 3 节中，我们先计算霍姆斯–汤普森面积积分的被积函数（命题 1.6），再将这一计算归结为 [AC20] 中 Adeboye 和 Cooper 计算的一个积分，由此证明推论 1.7。第 4 节专门讨论四边形。同样利用定理 2.19，我们求得标准四边形 Q_0 的一个子集的霍姆斯–汤普森面积的一般公式（命题 1.2）。命题 1.4 的证明通过第 5 节中的显式计算完成。定理 1.5 的证明在第 6 节中给出，并分为以下几个步骤：(a) 找出 P_{out} 的两个子集 T_1、T_2，它们包含于 P_{in} 中，且其霍姆斯–汤普森面积分别与 $\ln^2(d)$ 和 $\ln^2(t)$ 同阶；(b) 在 P_{out} 中找出一个非理想四边形 Q，使得 $Q \cap P_{\mathrm{in}}$ 包含 T_1、T_2，并且 (Q, P_{out}) 的霍姆斯–汤普森面积按 $\ln^2(d) + \ln^2(t)$ 的速率增长；(c) 证明 $P_{\mathrm{in}} \setminus Q$ 的增长速率慢于 $\ln^2(d)$ 和 $\ln^2(t)$ 中较小者，其中 $P_{\mathrm{in}} \setminus Q$ 是 P_{out} 中四个三角形的并集，每个三角形都含有一个理想顶点。最后，我们在第 7 节证明定理 1.1。

致谢。作者感谢 Ilesanmi Adeboye、Caleb Ashley、Samuel Bronstein 和 Constantin Vernicos 对本文的关注并进行有益的讨论。作者感谢高等科学研究所和亨利·庞加莱研究所在他们分别于2023年和2025年访问期间提供了优越的工作条件。

作者感谢亨利·庞加莱研究所（UAR 839 CNRS-索邦大学）和 CARMIN卓越实验室（ANR-10-LABX-59-01）提供的支持。本项目获得了欧洲研究委员会（欧洲研究委员会）根据欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号101018839）提供的资助，欧洲研究委员会资助协议101018839。第二作者感谢美国数学学会（美国数学学会）—西蒙斯本科院校教职人员研究提升基金提供的部分支持。

2. Preliminaries

本节将介绍关于旗标正元组、适当凸域上的希尔伯特度量及其相关的霍姆斯–汤普森体积的必要预备知识。本节最后记录一个关于多边形的对偶的结果（定理 2.19），在适当凸域为多边形的情况下计算霍姆斯–汤普森体积时，该结果将发挥重要作用。

2.1. 旗标的正三元组与四元组。

本小节内容的标准参考文献为 [FG07、BD14]。

在 $\mathbb{R}^3$ 中，（完全）旗 F 是一列向量子空间 $\{0\} = F^0 \subset F^1 \subset F^2 \subset F^3 = \mathbb{R}^3$，满足 $\dim F^i = i$（对于 $i = 0$、1、2、3）。我们用 $\mathcal{F}$ 表示旗标空间。

记号 2.1。 将旗写成一个 3×2 矩阵会很方便：

$$E = \begin{bmatrix} | & | \\ e_1 & e_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

其中 e_1 和 e_2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的非零向量，满足 E^1 是 e_1 的张成空间，而 E^2 是 e_1 和 e_2 的张成空间。在这种情况下，我们称向量有序对（e_1，e_2）为旗 E 的代表元。

三个旗标组成的组 $(E,\ F,\ G) \in \mathcal{F}^3$ 处于一般位置，如果对于任意满足 $a+b+c=3$ 的 $a,\ b,\ c \in \{0,1,2\}$，都有

$$E^a + F^b + G^c = \mathbb{R}^3.$$

类似地，四元组的旗 $(E,\ F,\ G,\ H) \in \mathcal{F}^4$ 处于一般位置，如果对于任意满足 $a+b+c+d=3$ 的 $a,\ b,\ c,\ d \in \{0,1,2\}$，都有

$$E^a + F^b + G^c + H^d = \mathbb{R}^3.$$

固定一个识别 $\Lambda^3\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}$。

定义 2.2 (三重比)。 考虑一个处于一般位置的旗标三元组 $(E,\ F,\ G)$，满足

$$E = \begin{bmatrix} | & | \\ e_1 & e_2 \\ | & | \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} | & | \\ f_1 & f_2 \\ | & | \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} | & | \\ g_1 & g_2 \\ | & | \end{bmatrix}.$$

该(E, F, G)的三重比为

$$T(E,F,G) \coloneqq \frac{e_1 \wedge e_2 \wedge f_1}{f_1 \wedge g_1 \wedge g_2} \cdot \frac{e_1 \wedge g_1 \wedge g_2}{e_1 \wedge f_1 \wedge f_2} \cdot \frac{f_1 \wedge f_2 \wedge g_1}{e_1 \wedge e_2 \wedge g_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

定义 2.3 （双比）。 考虑一般位置的一组旗四元组 (E, F, G, H)，满足

$$E = \begin{bmatrix} | & | \\ e_1 & e_2 \\ | & | \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} | & | \\ f_1 & f_2 \\ | & | \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} | & | \\ g_1 & g_2 \\ | & | \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} | & | \\ h_1 & h_2 \\ | & | \end{bmatrix}.$$

这些 双重比 （E, F, G, H）为

$$D_1(E,F,G,H) \coloneqq -\frac{e_1 \wedge g_1 \wedge f_1}{e_1 \wedge g_1 \wedge h_1} \cdot \frac{g_1 \wedge g_2 \wedge h_1}{g_1 \wedge g_2 \wedge f_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{and}$$

$$D_2(E,F,G,H) \coloneqq -\frac{e_1 \wedge e_2 \wedge f_1}{e_1 \wedge e_2 \wedge h_1} \cdot \frac{e_1 \wedge g_1 \wedge h_1}{e_1 \wedge g_1 \wedge f_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

三重比和双重比定义良好且非零，因为这些旗处于一般位置，并且它们的表达式不依赖于旗的代表元的选取。由于任意两个识别$\Lambda^3\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}$ 相差一个非零标量，三重比和双重比不依赖于这一选择。实际计算时，对于 $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$，将 $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ 计算为以列向量 v_1、v_2和 v_3为列的矩阵的行列式。

注 2.4. 注意，三重比和双重比在射影一般线性群 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$的作用下保持不变。另一方面，Fock–Goncharov 证明，两个处于一般位置的旗三元组属于同一个 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$-轨道，当且仅当它们具有相同的三重比。类似地，两个处于一般位置的旗四元组 (E,F,G,H) 和 (E',F',G',H') 属于同一个 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$-轨道，当且仅当它们具有相同的两个双重比，$T(E,F,G) = T(E',F',G')$，以及 $T(E,G,H) = T(E',G',H')$。

三重比在对旗作循环置换时保持不变。双比满足以下等式

$$D_a(E,F,G,H)\cdot D_a(E,H,G,F) = 1 \text{ for } a = 1 \text{ and } 2,$$
$$D_1(E,F,G,H)\cdot D_2(G,F,E,H) = D_2(E,F,G,H)\cdot D_1(G,F,E,H) = 1$$

旗 E、F、G和 H所扮演角色的不对称性，可以通过如下方式直观呈现：取一个四边形的定向三角剖分，其顶点按逆时针顺序标记为 E、F、G 和 H，且该定向三角剖分的唯一边从 E 指向 G。如果将从E 到 G 的对角线翻转为从 F 到 H的对角线，则坐标变换为

$$T(F,E,H) = t'\,\frac{1+d'+d't+d'td}{1+d+dt'+dt'd'}, \qquad T(F,H,G) = t\,\frac{1+d+dt'+dt'd'}{1+d'+d't+d'td},$$
$$D_1(F,E,H,G) = \frac{1+d'}{td'(1+d)}, \qquad D_2(F,E,H,G) = \frac{1+d}{t'd(1+d')},$$

例如，参见 [FG07，第 2 节。5]。

定义 2.5 （正性）。

- 一般位置的三个旗标组成的组 $(E,\ F,\ G)$ 是正的，如果 $T(E,\ F,\ G) > 0$。
- 处于一般位置的四个旗标组成的四元组 (E,F,G,H) 是正的，如果 (E,F,G) 和 (E,G,H) 是正的，并且 $D_a(E,F,G,H) > 0$ 对于 $a = 1$ 和 2。

更一般地，若一个由旗标组成的 k 元组 $\mathbf{F} = (F_1,\dots,F_k)$ 对所有满足 $a_1+\cdots+a_k = 3$ 的 $a_1,\dots,a_k \in \{0,1,2,3\}$ 都满足以下条件，则称其处于一般位置：

$$F_1^{a_1} + \cdots + F_k^{a_k} = \mathbb{R}^3.$$

如果对所有 $1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le k$，旗标 $(F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3})$ 组成的组都是正的，并且对所有 $1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le k$，四元组 $(F_{i_1},F_{i_2},F_{i_3},F_{i_4})$ 都是正的，那么该 k 元组就是正的。

Fock和Goncharov [FG06] 更一般地证明，对于处于一般位置的旗标组，这种正性概念与Lusztig 通过一般分裂李群中的全正性理论所定义的正性概念一致 [Lus94]。

2.2. **由正旗标组得到的凸多边形。** 在 [FG07]中，正性概念通过几何方式阐释如下。

任一完全旗标 F 唯一确定实射影平面中的一个点 $F^1 \in \mathbb{RP}^2$，以及一条射影直线 F^2 位于 $\mathbb{RP}^2$ 并经过 F^1。三个旗标组成的组（E，F，G）为正，当且仅当一个顶点为 [1]、E^1、F^1和 G^1 的三角形内接于一个顶点为 $E^2\cap F^2$、$F^2\cap G^2$和 $G^2\cap E^2$的三角形中，见 [FG07，引理 2。3]。

对于四元组，我们有类似的结论，见 [FG07，引理 2。4]。四元组（E，F，G，H）为正，当且仅当顶点为 E^1、F^1、G^1 和 H^1 （按此循环次序）的四边形内接于顶点为 $E^2\cap F^2$、$F^2\cap G^2$、$G^2\cap H^2$和 $H^2\cap E^2$（按此循环次序）的四边形。

更一般地，对于任意 $k \ge 2$，一组正的 k-元旗 $\mathbf{F} = (F_1, \dots..., F_k)$ 对应于一对凸 k边形，其中一个内接于另一个，并且顶点按照正确的循环次序出现，见 [FG07，定理 22] 及其证明。内 k边形的顶点为 $F_1^1, \dots..., F_k^1$(按此循环次序排列)，外 k边形的顶点为 $F_i^2 \cap F_{i+1}^2$（其中 $i = 1, \dots..., k$模 k（按此循环次序排列）。按照这一解释，我们现在可以定义如下对象。

定义 2.6. 设 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个正的 k 元旗组。记 $P_{\text{in}}(\mathbf{F}) \subset P_{\text{out}}(\mathbf{F})$ 为与 $\mathbf{F}$ 相关联的凸 k 边形。

[1]注意，$\mathbb{RP}^2$ 中的三角形（这里指的是在某个仿射图中为有界三角形的子集）既不由其顶点唯一确定，也不由界定它的射影直线唯一确定。

由于 **F** 处于一般位置， $P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F})$ 的顶点位于 $P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$ 的边的内部，并且 $P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$ 的每条边恰好包含 $P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F})$ 的一个顶点。特别地， $P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F})$ 在理想多边形中定义了一个 $P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$，见图 1。

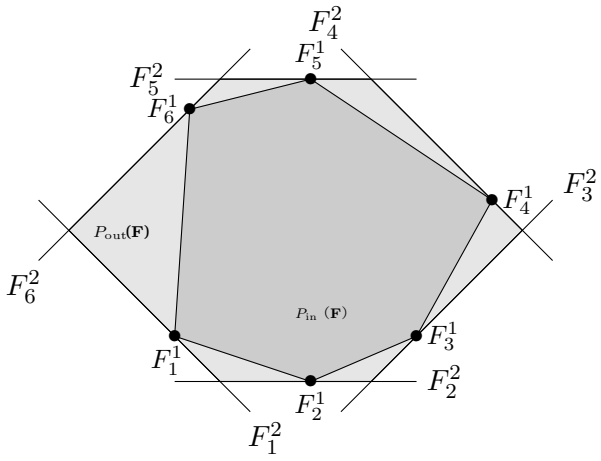

FIGURE 1. 一个正旗标组**F** 产生两个内接多边形 $P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F}) \subset P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$。

2.3. 希尔伯特距离。 我们对内接多边形的霍姆斯–汤普森面积所作的估计，主要受到曲面上的（带标记）凸实射影结构理论的启发。这种几何结构确定了 $\mathbb{RP}^2$中的一个真凸域。也就是说，它是实射影平面中的一个开子集 Ω，其闭包包含于某个仿射图中，并且 Ω 在该仿射图中是凸的。给定一个正旗标组**F**，则 $P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$的内部是 $\mathbb{RP}^2$中的一个真凸域的实例。

真凸域 Ω 上的希尔伯特距离定义如下：对于 Ω 中任意 $p \neq q$，连接这两个点的直线与 Ω 的边界交于不同的点 a 和 b。那么，适当重新标记后， a， p， q和 b沿射影线段按此顺序出现于 Ω 的闭包中，并且我们定义

$$d_\Omega(x,y) \coloneqq \frac{1}{2}\ln[q:p:a:b],$$

其中 $[q:\ p:\ a:\ b]$ 是射影交比，约定为 $[t:1:0:\ \infty] = t$。

配备希尔伯特度量的真凸域 Ω 是芬斯勒流形的一个例子，即赋有连续函数 $\|\cdot\|\colon TM \to [0,\infty)$ 的流形 M，该函数在零截面之外光滑，并且在每个切空间上限制为一个（不一定对称的）范数。与黎曼流形一样，这使我们能够在 M 上定义一个（不一定对称的）度量。对于作为 $\mathbb{R}^2$子集的真凸域 Ω，我们可以定义一个连续函数

$$\|\cdot\|_\Omega\colon T\Omega \to [0,\infty), \quad (p,\xi) \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_\Omega(p,p+t\xi),$$

该函数在每个切空间上限制为对称范数，其关联度量即为希尔伯特度量。我们可以按照 [中的方法显式计算范数 $\|\cdot\|_\Omega$ Ben04，第 3.2 节。1]。

具体而言，将 Ω 视为 $\mathbb{R}^2$ 的子集，并考虑 $v = (p,\ \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \cong T\Omega$ 的一个切向量。令 $v^\pm$ 表示由 v 所定义的定向直线与 Ω 边界上的正向（分别为反向）交点。于是，存在正标量 $\sigma^+(v)$ 和 $\sigma^-(v)$，使得

$$\xi = \sigma^+(v)(v^+ - p) = \sigma^-(v)(p - v^-),$$

且 v 的芬斯勒范数等于 $\|v\|_\Omega = \frac{1}{2}(\sigma^+(v) + \sigma^-(v))$。

2.4. **霍姆斯–汤普森面积。** 芬斯勒流形上的霍姆斯–汤普森体积最初由霍姆斯–汤普森于 [HT80]提出。其依据是这样一个观察：一个 n维流形的余切丛带有自然的辛形式，而其 n次外幂是一种体积形式。关于芬斯勒流形上体积的介绍，我们推荐 [´APT04]。

定义 2.7。 霍 姆斯–汤普森体积：芬斯勒流形 $(M, \|\cdot\|)$ 中可测集 X 的 is

$$\mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}(X) := \frac{1}{\epsilon_n}\int_{B^*X}\frac{1}{n!}\omega^n,$$

其中，ω 是余切丛 T^*M 上的标准辛形式，M 是 $B^*X = \{(p,\xi) \in T^*M \ \|\xi\|_p^* \le 1\}$ 对偶单位球。这里，ϵ_n 表示 n 维单位球的体积。

在霍姆斯–汤普森体积的定义中除以 ϵ_n 进行归一化，是为了使得当 $\|\cdot\|$ 来自一个标量积时，换言之，当 M 为黎曼流形时，霍姆斯–汤普森体积与黎曼体积一致。一般而言，文献中对此并无统一标准。

注 2.8。 请注意，对于芬斯勒流形，并不存在唯一的规范体积。尽管霍姆斯–汤普森体积并不等同于相应距离的豪斯多夫测度（布塞曼体积 [Bus50]），但它在许多方面都很自然，例如，全测地子流形相对于霍姆斯–汤普森面积被积函数是极小的，并且它满足克罗夫顿公式，等等。关于霍姆斯–汤普森体积相较于其他体积概念的优点，感兴趣的读者可参阅 [´APB06]。

注2.9。 由于我们要求赋范向量空间上任何合理的体积概念都具有平移不变性，因此每个切空间上的体积都必须是勒贝格测度的某个倍数，参见例如[´APT04，第 3]节。特别是，对于真凸域，所有体积概念都双利普希茨等价 [Mar14，命题9。4]，因此，渐近结果不取决于所选的体积概念。

对于本文的论述，只需计算真凸域 Ω 的子集的霍姆斯–汤普森体积，其中 Ω 位于 $\mathbb{R}^2$，并赋有希尔伯特度量。在这种情况下，每个点 $x \in\Omega$ 处的切空间和余切空间都可以与 $\mathbb{R}^2$ 相识别。此外，缩放因子 ϵ_2 等于 π，即单位圆盘的面积。

注2.10。 博雷尔子集 $X \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的霍姆斯–汤普森体积满足

$$\mathrm{vol}_\Omega^{\mathrm{HT}}(X) = \frac{1}{\pi}|B^*X| = \frac{1}{\pi}\int_X |B_p^*|\,\mathrm{dvol}_2(p),$$

其中，对于每个点 $p \in\Omega$，集合 $B_p^* \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $(\|\cdot\|_\Omega)_x$的对偶单位球；$|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中子集的通常体积，而 dvol_2 是标准的二维体积。

注 2.11. 给定一个博雷尔子集 $X \subset \Omega \subset \mathbb{RP}^2$ 和 $g \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$，则

$$\mathrm{vol}_\Omega^{\mathrm{HT}}(X) = \mathrm{vol}_{g\Omega}^{\mathrm{HT}}(gX).$$

注 2.12. 若 $\Omega \subseteq \Omega' \subset \mathbb{RP}^2$ 是两个真凸域，且 $X \subseteq\Omega$，则

$$\mathrm{vol}_\Omega^{\mathrm{HT}}(X) \ge \mathrm{vol}_{\Omega'}^{\mathrm{HT}}(X).$$

注意到 $T_p^*\Omega'$中的对偶单位球包含于 $T_p^*\Omega$的对偶单位球中，即可得证。

由于下文不会涉及其他体积概念，我们将用 vol_Ω 代替 $\mathrm{vol}_\Omega^{\mathrm{HT}}$。此外，由于我们讨论的是二维流形，因此将其称为面积。

定义 2.13 。我们定义正 k 元旗组的霍姆斯–汤普森面积 $\mathbf{F}$在 $\mathbb{R}^3$ b y

$$\mathrm{vol}(\mathbf{F}) := \mathrm{vol}_{P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})}(P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F})),$$

其中 $P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F}) \subset P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$ 是 k 中的内接凸 $\mathbb{RP}^2$ 边形，由 $\mathbf{F}$ 按照定义 2.6定义。

准确地说，我们计算的是相对于 $P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$ 的内部 上的希尔伯特度量而言的 $P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F})$ 的内部 的体积。不过，为了简化叙述，我们对开多边形使用相同的记号。

2.5. **希尔伯特距离的单位切球**。我们已经看到，为了计算赋有希尔伯特度量的开真凸域 Ω 中子集 $X \subseteq \Omega$ 的 Holmes– Thompson 体积，我们需要了解单位切球及其对偶。Ω 的形状与 Ω 中一点 $p \in$处的单位切球之间存在重要联系。为此，我们首先需要引入一个由 Papadopoulos–Troyanov 提出的定义。

定义 2.14 ([PT09，定义 6.4 和 6。5])。 设 $[a_1, a_2] \subset \mathbb{R}^n$ 为一条紧线段，且 $a_1 \neq a_2$，并且 $p \in [a_1, a_2]$。以 为中心的 $[a_1, a_2]$ 调和对称化 p，记作 $\mathcal{H}([a_1, a_2],\ p)$，是线段 $[b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^n$，其中 $b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}^n$ 满足

- p is the center of $[b_1, b_2]$,
- $\frac{1}{|p-b_1|} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|p-a_1|} + \frac{1}{|p-a_2|}\right)$ (with the convention $\frac{1}{0} = \infty$), and
- $a_2 - a_1 \in \mathbb{R}_{>0}(b_2 - b_1)$.

调和对称化 有界开线段 $(a_1,\ a_2) \subset \mathbb{R}^n$ 以 p 为中心的调和对称化定义为 s

$$\mathcal{H}((a_1, a_2), p) \coloneqq \mathcal{H}([a_1, a_2], p) \cap (a_1, a_2).$$

若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸有界集，且 p 位于 Ω 的内部，则以 p 为中心的 Ω 的调和对称化是集合 $\mathcal{H}(\Omega\ p)$，它由将 Ω 中经过 p 的每条线段替换为以 p为中心的调和对称化得到。

调和对称化与平移可交换，具体而言， $\mathcal{H}(\Omega\ p) - p = \mathcal{H}(\Omega - p,\ o)$，其中 o 是 $\mathbb{R}^n$中的原点。以下定理（事实上并不局限于二维）说明了引入调和对称化的动机。

定理2.15 （[PT09，命题 9。2]）。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$ 是赋有希尔伯特度量的真凸域。那么，对于所有 $p \in \Omega$ 单位球 $B_p \subset T_p\Omega \cong \mathbb{R}^2$ 等于调和对称化$\mathcal{H}$（$\Omega - p,\ o$）在$\Omega - p$ 的原点 o。

在特殊情况下，可以显式计算调和对称化。例如，多边形就是这种情况，在本文中我们尤其关注多边形。更一般地， [PT09，命题6.7（7）] 声称，多面体的调和对称化仍是多面体（任意维数均如此）。由于我们未能在文献中找到这一事实的证明，因此将在二维情形下证明一个稍强的版本。

首先，我们有如下观察，它将 $\mathbb{R}$ 中关于 0 的紧线段的调和对称化与调和交比联系起来。

引理 2.16. 设 $[a_1, a_2] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{RP}^1$ 是一个包含 0 的紧子集。那么， $[a_1, a_2]$ 关于 0 的调和对称化等于 $[-b, b]$，其中 $b > 0$ 满足 $[0 :\ b :\ a_2 :\ -a_1] = -1$，交比 $[a :\ b :\ c :\ d] = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}$ 定义如下。

证明。 调和对称化定义中的第一和第三个条件显然满足。对于第二个条件，我们计算

$$[0 : b : a_2 : -a_1] = \frac{a_2}{a_2 - b} \cdot \frac{-a_1 - b}{-a_1} = \frac{1}{1 - \frac{b}{a_2}} \cdot \left(1 + \frac{b}{a_1}\right).$$

S将此交比设为 -1，并回想 $a_1 < 0$ 和 $b,\ a_2 > 0$，可得 s

$$2 = \frac{b}{a_2} - \frac{b}{a_1} = |b|\left(\frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|}\right),$$

这等价于调和对称化定义中的第二个条件。 □

引理 2.17。 设 ℓ 和 ℓ' 是经过原点 o、位于 $\mathbb{R}^2$中的两条不同直线。设 L_1 是一条与 ℓ和 ℓ' 相交于下半平面的直线，并设 L_1 上以交点为端点的线段为 s_1 。类似地，设 L_2 是一条与 ℓ 和 ℓ' 相交于上半平面的直线，并设 L_2 上以交点为端点的线段为 s_2 。

那么，存在端点分别位于 ℓ 和 ℓ' 上的线段 r_1 和 r_2，使得对于每一条经过 o、一个端点在 s_1 上而另一个端点在 s_2 上的线段，以 o 为中心进行调和对称化后，所得线段的一个端点位于 r_1 上，另一个端点位于 r_2 上。

证明。考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的线段 $-s_1$ 和 s_2。那么，$-L_1$ 是包含 $-s_1$ 的直线。直线 $-L_1$ 和 L_2（现在视为 $\mathbb{RP}^2$ 中的射影直线）相交于唯一一点 $q \in \mathbb{RP}^2$，其中我们将 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{RP}^2$ 中的一个固定仿射图等同。考虑经过 q 和 o 的射影直线 L_0。调和条件

$$[L_0 : L : L_2 : -L_1] = -1$$

唯一确定了一条 L 经过 q 的射影直线（因为交比是四条经过同一点的射影直线的不变量）。现在，ℓ（视为 $\mathbb{RP}^2$中的一条射影直线）与 L 相交于唯一的点 a。类似地，ℓ' 与 L 相交于唯一的点 a'。令 $r_2 := [a, a'] \subset L$，以及 $r_1 := -r_2$。我们断言，这些就是所需的线段。

现在令 s为另一条经过 o 的线段，其端点分别位于 s_1 和 s_2中。于是，由 s 张成的射影直线 ℓ_s 与 L_0、L_1、L_2 和 L相交。根据交比的性质，相应的交点 o、x、x_2、x_1 满足 $[o : x : x_2 : x_1] = -1$。因此根据引理 2.16，点 $x = \ell_s \cap L$ 是 s 的调和对称化的一个端点（由对称性，$-x$ 是另一个端点）。现在，$x \in r_2$（因而 $-x \in -r_2 = r_1$也如此），因为 s 的端点位于 s_1 和 s_2中，所以 ℓ_s 位于 ℓ 和 ℓ'之间。□

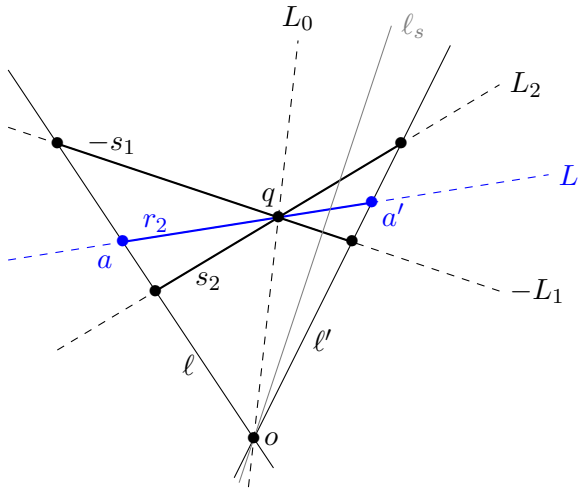

FIGURE 2. 调和对称化的可视化及引理的证明 2.17 .

现在我们可以证明所需的命题。

命题 2.18. 设 P 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个 k-多边形，其内部包含原点 o。那么，以 o 为中心的 P 的调和对称化是一个 k'-多边形，且满足 $k \le k' \le 2k$。

此外 此外，$\mathcal{H}(P, o)$ 的顶点位于经过 o 和 P的一个顶点的直线上 .

证明。记 $z_1, \dots, z_k$为 P的顶点。对于每个顶点 z_j，考虑经过z_j和 o的直线。（对于多边形 $Q_0 - p$，可以在图 5 中看到这一构造。）将这条直线与 ∂P的另一个交点记为 z'_j。现在，将所有点 z_j和 z'_j依次标记为 $y_1, \dots, y_{k'}$，按绕 ∂P的循环次序排列。注意，$k \le k' \le 2k$。

我们断言，对于所有的 $j = 1, \dots, k'$，线段 s_j（连接 y_j和 y_{j+1}，且包含于边界∂P中）在以 o 为中心的调和对称化作用下映射为一条线段。由于所有 $j = 1, \dots, m$对应的 s_j的并（约定 $y_{m+1} = y_1$）覆盖了 ∂P，因此 $\mathcal{H}(P, o)$ 是一个多边形。

这个断言可由引理 2.17 轻易证明。事实上，取满足 $1 \le j \le k'$的 j。那么 j在这些 y_i中确定了四个点，即 y_j、y_{j+1}，以及分别从 y_j 和 y_{j+1} 出发并经过 o的射线的交点。这些点分别对应于 y_m 和 y_{m+1}，其中 $m \neq j-1$、j、$j+1$。根据构造，相应的线段 s_j和 s_m经旋转后满足引理 2.17 的条件，从而证明了该断言。因此，$\mathcal{H}(P, o)$ 是一个多边形。

根据定义，线段 s_j 的两个端点都位于经过 o 和P 的一个顶点的直线上（而且，其至少一个端点属于 P的顶点集）。根据证明

引理 2.17中的构造，r_j（即 s_j 以 o为中心进行调和对称化后的像）的端点位于同一直线上。这证明了第二个结论。□

2.6. **多边形的对偶**。在接下来的几节中，当真凸域 Ω 是一个多边形时，我们需要计算霍姆斯–汤普森面积。正如上一小节所见，在这种情况下，希尔伯特距离在每个点处的单位切球都是一个对称多边形。因此，我们需要能够计算多边形的对偶，而对偶仍然是多边形。凸对称多边形的顶点与其对偶多边形之间存在一个显式公式。我们采用[LM74]中描述的算法。

因此，设 $P \subset \mathbb{R}^2$ 是一个以 $o = (0,0)$ 为中心的对称多边形，有 $2k$ 个顶点。将P中位于水平轴上方或非负水平轴上的顶点从左到右标记为 $z_1, \dots, z_k$。我们还令 $z_0 := -z_k$，并对所有 $i = 0, \dots, k$，记 $z_i = (x_i, y_i)$。

定理 2.19 （[LM74]）。顶点为 $\pm z_i$ 的多边形的对偶多边形的顶点为 $\pm w_i$ 其中 i =1，……，k。

$$w_i = \frac{1}{x_{i-1}y_i - x_i y_{i-1}} \begin{pmatrix} y_i - y_{i-1} \\ x_{i-1} - x_i \end{pmatrix}.$$

3. Holmes–Thompson area of a positive triple of flags

本节的目标是证明以下命题。

命题 3.1 （推论 1.7）。设 **F** 是 $\mathbb{R}^3$ 中的正旗标三元组，其三重比为 $t \in$ （0，∞）。则

$$\mathrm{vol}(\mathbf{F}) = \frac{3}{8\pi}(\pi^2 + \ln^2(t)).$$

注 3.2。vol(F) 按 $\ln^2(t)$ 增长的结果，已经可以从 [AC20，命题 0.3]（Adeboye 和 Cooper 对 p-面积得出 1 8($\pi^2 + \ln^2(t)$)）或 [Wol21，命题 3]（Wolpert 证明了存在正的常数 c_1 和 c_2，使得 T 的豪斯多夫测度分别被 $c_1(1 + \ln^2(t))$ 和 $c_2(1 + \ln^2(t))$ 从上、下界住）中得到。尽管他们计算的是不同的面积概念，de la Harpe [dlH93] 证明了带有希尔伯特度量的单形具有赋范向量空间的结构（见注2.9）。因此，所涉及的所有面积概念彼此之间都是标量倍数，从而得到相同的渐近行为。

在证明上述命题之前，我们先进行一些预备性的考察与归一化处理。在第 2.2节中我们已经看到，正旗标三元组定义了两个三角形，其中一个内接于另一个。经过 $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ 的作用，我们可以假设外三角形是标准三角形 T_0，其顶点为

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

而且内三角形 T 的顶点为

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix},$$

其中 $s = \frac{2t}{t+1} \in (0,2)$，且 t 是 **F**的三重比。事实上，考虑旗（见记号 2.1）

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

在$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$的轨道中，其中 **F**。利用公式（2.1），我们得到

$$t := T(\mathbf{F}) = T(E, F, G) = \frac{s}{2 - s}, \text{ or, equivalently } s = \frac{2t}{t+1}.$$

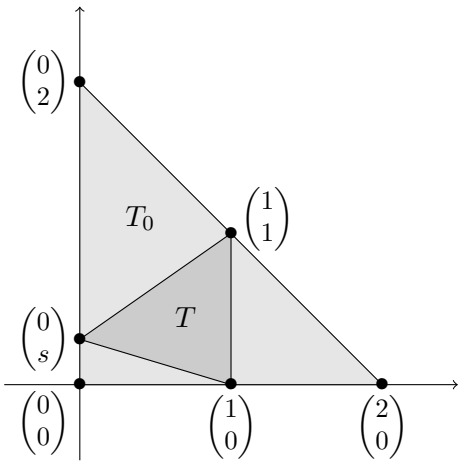

FIGURE 3. 一个正旗标三元组会产生两个内接三角形 $T \subset T_0$。

3.1. 三角形的希尔伯特度量单位球。回顾第2.5节，对于任意 $p = (x, y) \in T_0$ ，点 p 周围的希尔伯特度量单位球是一个至多有六个顶点的多边形。此外，由定理2.15、命题 2.18 的证明以及调和对称化的平移不变性可知，我们可以如下显式计算切空间 T_pT_0 中单位球的顶点。设 z 是 T_0 的一个顶点。接着，令 $v_z = (p, \xi_z)$ 为点 p 处沿 z 方向的单位切向量。记相应测地线的两个端点为 $v_z^{\pm}$，并注意到根据约定 $v_z^+ = z$ 。由于 v_z 的范数为单位长度，存在 $\sigma_z \in \mathbb{R}$ 使得

$$\xi_z = \sigma_z(v_z^+ - p) = (2 - \sigma_z)(p - v_z^-).$$

使用这些 se 记号，我们可以显式计算 $\xi_z \in \mathbb{R}^2$ T 的一个顶点 z 的向量 0.

对于 $z_1 = (0, 0)$，我们得到等式

$$\sigma_{z_1}\left(-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = (2 - \sigma_{z_1})\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{2}{x+y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right),$$

由此我们推得

$$\xi_{(0,0)} = (x + y - 2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

类似的计算可得

$$\xi_{(2,0)} = \begin{pmatrix}x(2-x)\\-xy\end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \xi_{(0,2)} = \begin{pmatrix}-xy\\y(2-y)\end{pmatrix}.$$

3.2. **三角形的希尔伯特度量的对偶单位球**。现在我们可以证明以下引理。

引理 3.3 (命题1.6)。点$x, y) \in T_0$ 处的对偶单位球面积等于

$$A_{T_0}(x, y) \coloneqq \frac{3}{2xy(2 - x - y)}. \tag{3.1}$$

证明。 上一节中我们已经看到如何计算单位球的顶点。我们希望将定理2.19 应用于顶点为 $\pm\xi_{(0,0)}, \pm\xi_{(2,0)}, \pm\xi_{(0,2)}$的六边形。顶点 $-\xi_{(0,0)}$, $\xi_{(0,2)}$和$-\xi_{(2,0)}$ 位于水平轴上方。记 $\prec$ 为 $\mathbb{R}^2$中向量第一坐标上的次序。于是

$$-\xi_{(2,0)} \prec \xi_{(0,2)} \prec -\xi_{(0,0)}.$$

因此，应用定理2.19，我们得到对偶多边形的顶点为

$$\pm w_1 = \pm\frac{1}{2(x+y-2)}\begin{pmatrix}\frac{2-y}{x}\\1\end{pmatrix}, \ \pm w_2 = \pm\begin{pmatrix}-\frac{1}{2x}\\\frac{1}{2y}\end{pmatrix}, \ \pm w_3 = \pm\frac{1}{2(x+y-2)}\begin{pmatrix}-1\\\frac{x-2}{y}\end{pmatrix}.$$

注意，所有分母均不为零，因为 $p = (x,\ y)$ 位于 T_0 的内部；特别地，我们有$x,\ y > 0$ 和 $x + y < 2$。

为了计算对偶六边形的欧几里得面积，我们首先注意到

$$-w_1 = \frac{1}{2(2-x-y)}\begin{pmatrix}\frac{2-y}{x}\\ 1\end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{2(2-x-y)}\begin{pmatrix}1\\ \frac{2-x}{y}\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2x}\\ \frac{1}{2y}.\end{pmatrix}$$

都位于上半平面，因为 $x,\ y > 0$ 和 $x + y < 2$。此外，$w_2 \prec w_3 \prec -w_1$。利用顶点为 $\pm w_1,\ \pm w_2,$ 和 $\pm w_3$ 的六边形关于原点对称这一事实，我们应用鞋带公式得到

$$A_{T_0}(x,y) = \det(-w_1, w_3) + \det(w_3, w_2) + \det(w_2, w_1),$$

其中，$\det(v,\ w)$表示以向量 v 和 w为列的 2×2 矩阵的行列式。因此，对偶单位球的面积等于 $\frac{2xy}{(2-x-y)}^3$，如所需。□

3.3. 的霍姆斯–汤普森面积 T。注意，到目前为止，我们尚未要求点 p 位于内接三角形 T内。计算时我们必须作此要求

$$\mathrm{vol}(\mathbf{F}) = \mathrm{vol}^{\mathrm{HT}}_{T_0}(T) = \frac{1}{\pi}\int_T A_{T_0}(x,y)d(x,y).$$

由于 T_0 赋予希尔伯特度量后是一个赋范向量空间，根据 [dlH93], ， T 的霍姆斯–汤普森面积与其 p面积相差一个与参数无关的正标量 t （等价地，s）。因此，应用 [AC20], ，存在 $\mu > 0$，使得对每个 $t \in (0,\ \infty)$

$$\mathrm{vol}(\mathbf{F}) = \frac{\mu}{8}\left(\pi^2 + \ln^2(t)\right).$$

我们在 $t = s = 1$的情况下计算 μ。那么，$p = (x,\ y) \in T$ 当且仅当

$$0 < x < 1, \quad -x + 1 < y < 1.$$

现在我们准备证明命题3.1。

命题 *3.1*的证明。 我们显式计算

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_T A_{T_0}(x,y)d(x,y) &= \int_0^1\int_{-x+1}^1 \frac{1}{xy(2-x-y)}dydx = \int_0^1\int_{-x+1}^1 \frac{1}{x(2-x)}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-x-y}\right)dydx\\ &= -2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x(2-x)}dx = -2\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u^2}du = -\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du - \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u}du = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

这一计算表明，当 $t = 1$ 等于 $\frac{3\pi}{8}$ 时，$\mathbf{F}$ 的霍姆斯–汤普森面积为$\frac{\pi^2}{8}$，而其 p-面积为$\frac{\pi^2}{8}$。因此，$\mu = \frac{3}{\pi}$ 且 $\mathrm{vol}(\mathbf{F}) = \frac{3}{8\pi}(\pi^2 + \ln^2(t))$。□

4. Holmes–Thompson area of a positive quadruple of flags

本节将建立一个公式，用于根据正三元组和双比计算正旗标四元组 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbb{R}^3$ （见定义 2.13）的霍姆斯–汤普森面积。在 $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{R})$ 的作用下，我们可以进行归一化，使得 $\mathbf{F}$ 的外四边形为标准四边形 $Q_0 \subset \mathbb{R}^2$，其顶点为

$$z_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \qquad z_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \qquad z_3 = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix} \qquad z_4 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

以下命题 ，在第4.1 节和4.2节中得到证明，是本节的关键技术贡献 .

命题 4.1 (命题 1.2)。 点处对偶单位球的面积 $(x,\ y) \in Q_0 \setminus \{y = \pm x\}$ 等于

$$A_{Q_0}(x,y) \coloneqq \frac{2 + \max\{|x|, |y|\}}{2(1-x^2)(1-y^2)}.$$

如图所示4，将**F** 的外四边形归一化为 Q_0，则存在 α_1， α_2， β_1，以及 β_2 属于区间 $(-1,\ 1)$，使得内四边形 Q 的顶点为

$$w_1 = \begin{pmatrix}\beta_1\\1\end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix}-1\\\alpha_1\end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix}\beta_2\\-1\end{pmatrix} \qquad w_4 = \begin{pmatrix}1\\\alpha_2\end{pmatrix}.$$

命题 4.1 给出了一种根据**F**的 Fock–Goncharov 参数计算 vol(**F**) 的方法 .

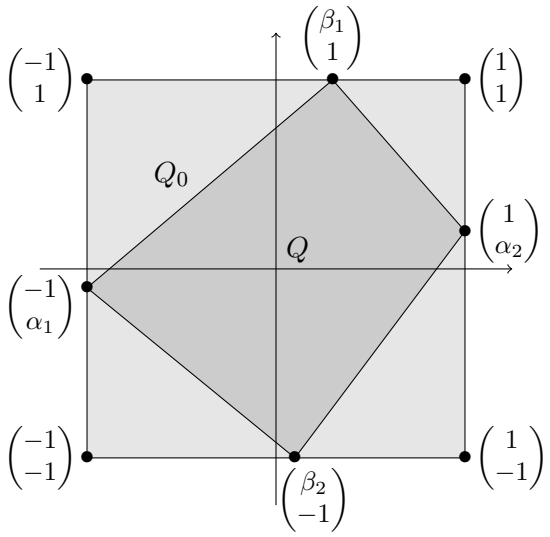

FIGURE 4. 一个正旗标四元组产生两个内接四边形 $Q \subset Q_0$。

推论4.2. 设**F** $=(E, F, G, H)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个正旗标四元组，其三重比为 $t = T(E, F, G)$、 $t' = T(E, G, H)$，双比为 $d = D_1(E, F, G, H)$、 $d' = D_2(E, F, G, H)$。那么

$$\mathrm{vol}(\mathbf{F}) = \frac{1}{\pi}\int_Q A_{Q_0}(x, y)dxdy,$$

其中 Q 是内接于标准四边形 Q_0 的凸四边形，其顶点为

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\\alpha_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\beta_2\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\\alpha_2\end{pmatrix}.$$

满足条件的

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{d(1-t)\cdot\frac{1+t'}{1+t} + t' - dd'}{d(1+t)\cdot\frac{1+t'}{1+t} + t' + dd'} \qquad \alpha_2 = \frac{d'(1-t')\cdot\frac{1+t}{1+t'} + t - dd'}{d'(1+t')\cdot\frac{1+t}{1+t'} + t + dd'},\\ \beta_1 &= -\frac{t' - d\cdot\frac{1+t'}{1+t}}{t' + d\cdot\frac{1+t'}{1+t}}, \qquad \beta_2 = \frac{t - d'\cdot\frac{1+t}{1+t'}}{t + d'\cdot\frac{1+t}{1+t'}}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

证明。 第一个断言由霍姆斯–汤普森面积的定义和命题4.1直接得出。通过将参数 α_1、 α_2、 β_1和 β_2 与**F**的 Fock–Goncharov不变量联系起来，我们便完成了该推论的证明。具体而言，我们使用 $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{R})$ 中的一个元素，将四元组 **F** 映射到由（参见记号 2.1）定义的四元组 $(E'、\ F'、\ G'、\ H')$

$$E' = \begin{bmatrix}\beta_1 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1 & 1-\beta_1\\1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \qquad F' = \begin{bmatrix}-1 & -1\\\alpha_1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\\alpha_1 & 1+\alpha_1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$G' = \begin{bmatrix}\beta_2 & -1\\-1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_2 & 1+\beta_2\\-1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \qquad H' = \begin{bmatrix}1 & 1\\\alpha_2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\\alpha_2 & 1-\alpha_2\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

接着，按照第 2.1 节中的三重比和双重比定义，可得

$$t = T(E', F', G') = \frac{1-\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1+\beta_2}{1+\beta_1}, \qquad t' = T(E', G', H') = \frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2} \cdot \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2},$$

$$d = D_1(E', F', G', H') = \frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1} \cdot \frac{(1+\alpha_1)(1+\beta_1)+(1-\alpha_1)(1+\beta_2)}{(1+\alpha_2)(1-\beta_1)+(1-\alpha_2)(1-\beta_2)} = \frac{1+\beta_1}{1-\beta_1} \cdot t' \cdot \frac{1+t}{1+t'},$$

$$d' = D_2(E', F', G', H') = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} \cdot \frac{(1+\alpha_2)(1-\beta_1)+(1-\alpha_2)(1-\beta_2)}{(1+\alpha_1)(1+\beta_1)+(1-\alpha_1)(1+\beta_2)} = \frac{1-\beta_2}{1+\beta_2} \cdot t \cdot \frac{1+t'}{1+t}.$$

恒等式（4 .1）可通过求解这些双比和三重比，从而得到 α_1， α_2， β_1， β_2 s. □

4.1. **希尔伯特度量的单位球。** 我们首先证明命题 4.1 ，方法是求出 $p = (x, y)$ 处 $Q_0 \setminus \{y = \pm x\}$中单位球顶点的公式。如第 3.2 节所示，我们显式计算标准四边形 $Q_0 \setminus \{y = \pm x\}$ 中 T_pQ_0 的单位球顶点，其中 $p = (x, y)$。

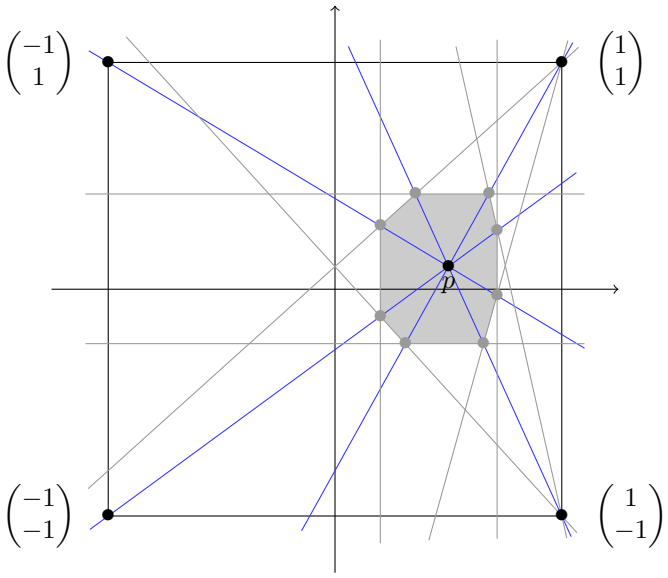

FIGURE 5. 希尔伯特度量下， Q_0中点 p 处 Q_0 单位球的计算。

我们需要根据 p 相对于直线 $y = \pm x$ 的位置，分情况讨论。第一种情况如图 5 所示。

情形 |y| < x： </style}对于， 2， 3， 4， 令 $v_{z_i} = (p,\ \xi_{z_i})$ 表示基于 p、方向为 z_i 的单位切向量。对于 $z_i = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，存在 $\sigma_{z_1} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sigma_{z_1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - p\right) = (2 - \sigma_{z_1})\left(p - \begin{pmatrix}\star\\-1\end{pmatrix}\right),$$

其中， $\star$ 的值与我们的目的无关。由此可推得

$$\xi_{z_1} = (1+y)\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}.$$

类似的计算可得

$$\xi_{z_2} = (1-x)\begin{pmatrix}-(1+x)\\1-y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_3} = -(1-x)\begin{pmatrix}1+x\\1+y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_4} = -(1-y)\begin{pmatrix}-(1-x)\\1+y\end{pmatrix}.$$

由于 T_pQ_0 中的单位球关于原点对称，这些顶点及其对径点足以描述它。对于其他情形，类似的计算可得：

情形 $|\mathbf{x}| < \mathbf{y}$:

$$\xi_{z_1} = (1+x)\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_2} = (1-x)\begin{pmatrix}-(1+x)\\1-y\end{pmatrix}$$
$$\xi_{z_3} = -(1-y)\begin{pmatrix}1+x\\1+y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_4} = -(1-y)\begin{pmatrix}-(1-x)\\1+y\end{pmatrix}.$$

情形 $\mathbf{x} < -|\mathbf{y}|$:

$$\xi_{z_1} = (1+x)\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_2} = (1+y)\begin{pmatrix}-(1+x)\\1-y\end{pmatrix}$$
$$\xi_{z_3} = -(1-y)\begin{pmatrix}1+x\\1+y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_4} = -(1+x)\begin{pmatrix}-(1-x)\\1+y\end{pmatrix}.$$

情形 $\mathbf{y} < -|\mathbf{x}|$:

$$\xi_{z_1} = (1+y)\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_2} = (1+y)\begin{pmatrix}-(1+x)\\1-y\end{pmatrix}$$
$$\xi_{z_3} = -(1-x)\begin{pmatrix}1+x\\1+y\end{pmatrix}, \qquad \xi_{z_4} = -(1+x)\begin{pmatrix}-(1-x)\\1+y\end{pmatrix}.$$

4.2. **对偶单位球**。 现在我们可以证明命题4.1。

命题 *4.1* 的证明。 上一节中我们已经看到如何计算点 $p \in Q_0 \setminus \{y = \pm x\}$ 处单位球的顶点。我们希望应用定理 2.19 来计算顶点为 $\pm\xi_{z_1}$， $\pm\xi_{z_2}$，$\pm\xi_{z_3}$，$\pm\xi_{z_4}$ 的对称多边形的对偶。在这四种情形中，顶点

$$\xi_{z_1}, \xi_{z_2}, -\xi_{z_3}, \text{ and } -\xi_{z_4}$$

都位于水平轴上方。回忆一下， $\prec$ 表示向量 $\mathbb{R}^2$的第一坐标上的序关系。为了指定顶点的顺序，我们需要分别处理上述四种情形。回忆一下，我们有$-1 < x$， $y < 1$。

情形 $|\mathbf{y}| < \mathbf{x}$: </style}我们有 , 因此对偶八边形的顶点为 , .. . , $\pm w_4$，其中

$$w_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{1-x^2}\\0\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\frac{1}{1-x}\\\frac{1}{1-y}\end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{1-y^2}\end{pmatrix}, \qquad w_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\\frac{1}{1+y}\end{pmatrix};$$

参见定理2.19。再次使用引理3.3证明中的鞋带公式，我们计算其（勒贝格）面积为

$$A_{Q_0}(x,y) = \frac{2+x}{2(1-x^2)(1-y^2)}.$$

我们对其他三种情形进行类似计算，得到如下结果:

情形 $|\mathbf{x}| < \mathbf{y}$: 我们有 $\xi_{z_2} \prec -\xi_{z_4} \prec -\xi_{z_3} \prec \xi_{z_1}$和 $A_{Q_0}(x,y) = {}^{2+y}_{2\,1-x^2\,()(1-y^2)}$。

Case $\mathbf{x} < -|\mathbf{y}|$: We have $-\xi_{z_4} \prec \xi_{z_2} \prec -\xi_{z_3} \prec \xi_{z_1}$ and $A_{Q_0}(x,y) = \frac{2-x}{2(1-x^2)(1-y^2)}$.

情形 $\mathbf{y} < -|\mathbf{x}|$: 我们有 $-\xi_{z_4} \prec \xi_{z_2} \prec \xi_{z_1} \prec -\xi_{z_3}$和 $A_{Q_0}(x,y) = {}^{2-y}_{2\,1-x^2\,()(1-y^2)}$。

综合所有情形， $p = (x,y) \in Q_0$ 处的对偶球面积为

$$A_{Q_0}(x,y) = \frac{2+\max\{|x|,|y|\}}{2(1-x^2)(1-y^2)},$$

至此命题的证明4.1结束。 □

5. Example 1: Hyperbolic case

本节的目标是证明命题1.4。为此，假设我们有一个正旗标四元组$\mathbf{F} = (E,\ F,\ G,\ H)$，其三重比为

$$t = t' = T(E,F,G) = T(E,G,H) = 1$$

与双重比

$$d = d' = D_1(E,F,G,H) = D_2(E,F,G,H) \in (0,\infty).$$

就曲面上的几何结构而言，这对应于由双曲结构产生的一组四旗，并通过克莱因–贝尔特拉米模型将其视为凸实射影结构的情形。因此，我们称$\mathbf{F}$ 为双曲的。

注5.1。 请注意，$\mathbf{F}$是否为双曲的，并不取决于用于定义 $\mathbf{F}$的三重比和双重比的定向对角线的选择，下面对此作出解释。首先，注意在这种情况下，反转对角线的方向不会改变三重比和双重比，这是因为它们具有注 2.4 中所述的对称性。此外，若按照注 E 到 G 的方式，将对角线翻转为从 F 到 H 的对角线，如注2.4所示，则坐标变换变为

$$T(F,E,H) = T(F,H,G) = \frac{1+d+d+d^2}{1+d+d+d^2} = 1, \quad D_1(F,E,H,G) = D_2(F,E,H,G) = \frac{1+d}{d(1+d)} = \frac{1}{d}.$$

假设四元组 $\mathbf{F}$ 是双曲的，则第 4节（另见图 4）中的归一化变为 $\alpha = -\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = -\beta_2 \in (-1,\ 1)$ 和 $d = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \in (0,\ \infty)$。根据对称性，我们可以假设 $\alpha \geq 0$。于是，如图 6所示，点 $p = (x,\ y)$ 位于四边形 Q 当且仅当

$$|y+x| < 1+\alpha \text{ and } |y-x| < 1-\alpha.$$

注意到，我们事先知道面积 vol(**F**) 有限，因为它不大于克莱因–贝尔特拉米模型中的双曲平面内一个理想四边形的霍姆斯–汤普森面积，即 2π （参见注释 2.12）。

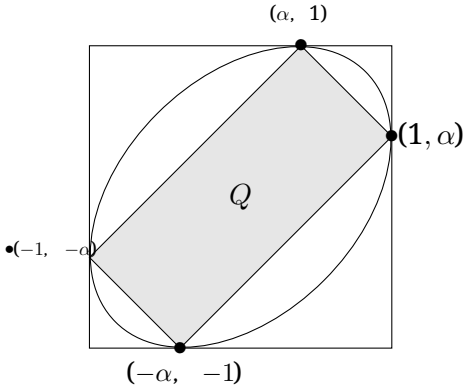

Figure 6. 一对双曲四边形

要计算 Q 相对于标准四边形 Q_0的霍姆斯–汤普森面积，请回顾命题 4.1 ： 我们需要在 Q上对函数 A_{Q_0} 进行积分。由于在本小节中外四边形固定为 Q_0，为提高可读性，我们记 A 而不记作 A_{Q_0}。我们首先作变量代换，令 $x+y=u$ 并令 $x-y=v$，利用恒等式 $\max\{|x|,|y|\} = \frac{|x+y|}{2} + \frac{|x-y|}{2}$ 可得

$$4\int_Q A(x,y)dxdy = 2\int_Q \frac{2+\max\{|x|,|y|\}}{(1-x^2)(1-y^2)}dydx = \frac{1}{2}\int_{Q'} \frac{4+|u|+|v|}{(1-\frac{1}{4}(u+v)^2)(1-\frac{1}{4}(u-v)^2)}dudv, \tag{5.1}$$

其中我们在顶点为 Q' 的矩形上积分

$$(1+\alpha, \pm(1-\alpha)) \text{ and } (-(1+\alpha), \pm(1-\alpha)).$$

由于被积函数关于 u轴和 v轴对称，因此只需在第一象限上积分。由此可得

$$\begin{aligned}4\int_Q A(x,y)dxdy &= 2\int_0^{1+\alpha}\int_0^{1-\alpha}\frac{4+u+v}{(1-\frac{1}{4}(u+v)^2)(1-\frac{1}{4}(u-v)^2)}dvdu\\ &= 32\int_0^{1+\alpha}\int_0^{1-\alpha}\frac{4+u+v}{(4-(u+v)^2)(4-(u-v)^2)}dvdu\end{aligned}$$

现在，对变量 v 使用部分分式分解，经过初等（但繁琐）的计算可得

$$4\int_Q A=\int_0^{1+\alpha}\frac{4}{u}\left(\frac{3\ln(2-u-v)}{u-2}+\frac{(u+3)\ln(2+u-v)}{u+2}-\frac{(u+1)\ln(2-u+v)}{u-2}-\frac{\ln(2+u+v)}{u+2}\right)\Bigg|_0^{1-\alpha}du.$$

然后，借助计算软件 [WR] 以及等式

$$\mathrm{Li}_2(x)-\mathrm{Li}_2(2-x)=\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(x-1)-\frac{\pi^2}{6}+\ln(x-1)\ln(2-x),\quad \text{for } x<0,$$

我们推得

$$\begin{aligned}4\int_Q A=2\Bigg[&3\mathrm{Li}_2\left(-\frac{2-u}{1-\alpha}\right)+3\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1+\alpha-u}{1-\alpha}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{u}{3-\alpha}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{u}{3-\alpha}\right)-3\mathrm{Li}_2\left(-\frac{u}{1+\alpha}\right)\\&+3\mathrm{Li}_2\left(\frac{u}{1+\alpha}\right)-\mathrm{Li}_2\left(-\frac{2+u}{1-\alpha}\right)-\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1+\alpha+u}{1-\alpha}\right)+3\ln(1+\alpha-u)\ln\left(\frac{2-u}{1-\alpha}\right)\\&+\ln(1-\alpha)\ln\left(\frac{(1-\alpha)^2(2+u)}{(2-u)^3}\right)-\ln\left(\frac{2+u}{1-\alpha}\right)\ln(1+\alpha+u)\\&+2\mathrm{Li}_2\left(-\frac{u}{2}\right)-2\mathrm{Li}_2\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{\pi^2}{3}\Bigg]\Bigg|_0^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

请注意，一旦得到上述积分表达式，我们就可以通过计算其导数轻松验证其正确性。对 $u\to 0$ 和 $u\to 1+\alpha$ 取极限很直接，除了（可能）$\ln(1+\alpha-u)\ln\left(\frac{2-u}{1-\alpha}\right)$ 这一项，但我们可以验证

$$\lim_{u\to 1+\alpha}\ln(1+\alpha-u)\ln\left(\frac{2-u}{1-\alpha}\right)=0.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}4\int_Q A=&-2\mathrm{Li}_2\left(-2\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)+4\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}(-\alpha-1)\right)-4\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{\alpha-1}\right)-4\mathrm{Li}_2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\\&-2\mathrm{Li}_2\left(\frac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)+2\mathrm{Li}_2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-3}\right)-4\mathrm{Li}_2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)-2\mathrm{Li}_2\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-1}\right)-4\ln\left(-\frac{2}{\alpha-1}\right)\ln(\alpha+1)\\&+2\ln(1-\alpha)(-3\ln(1-\alpha)+\ln(\alpha+3)+\ln(4))+2\ln(2(\alpha+1))\ln\left(\frac{1-\alpha}{3+\alpha}\right)+\pi^2\\=\,&2\,\Big(-\mathrm{Li}_2\left(-2d\right)+2\mathrm{Li}_2\left(\frac{-d}{1+d}\right)-2\mathrm{Li}_2\left(-(1+d)\right)-2\mathrm{Li}_2\left(\frac{d}{1+d}\right)\\&-\mathrm{Li}_2\left(\frac{d}{2+d}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{-d}{2+d}\right)-2\mathrm{Li}_2\left(-d\right)-\mathrm{Li}_2\left(-(1+2d)\right)-2\ln\left(1+d\right)\ln\left(\frac{2d}{1+d}\right)\\&+\ln\left(\frac{2}{1+d}\right)\left(-3\ln\left(\frac{2}{1+d}\right)+\ln\left(\frac{2+4d}{1+d}\right)+\ln(4)\right)+2\ln\left(\frac{4d}{1+d}\right)\ln\left(\frac{1}{1+2d}\right)+\frac{1}{2}\pi^2\Big),\end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了 $d=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$。这就证明了命题 1.4。

备注 5.2。 利用上述公式和计算软件 [WR], 可以证明

$$\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}\int_Q A = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}\int_Q A = \frac{32\ln(2)}{9} + 8\ln(3) - 16 < 0.$$

因此，霍姆斯– 汤普森面积在 $\alpha = 0$ 处达到局部最大值。计算可得，对于 $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned}\int_Q A =& \frac{1}{4}\Big(- 2\mathrm{Li}_2\left(-2\right) + 4\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\mathrm{Li}_2\left(-2\right) - 4\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) \\ & - 2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right) - 4\mathrm{Li}_2\left(-1\right) - 2\mathrm{Li}_2\left(-3\right) + 2\ln(2)\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \pi^2\Big) \approx 4.66565,\end{aligned}$$

thus

$$\mathrm{vol}(\mathbf{F}) = \mathrm{vol}(E,F,G,H) = \frac{1}{\pi}\int_Q A \approx 1.48512.$$

特别地，与双曲空间中理想四边形的面积比较，可得

$$\frac{\mathrm{vol}(E,F,G,H)}{2\pi} \approx 0.23636,$$

从而粗略计算得到 $1/4$ 倍的双曲面积。绘制函数 $\mathbf{vol(F)}$ 关于变量 $\alpha \in (-1,1)$ 的图像表明， $\alpha = 0$ (等价地, $d = 1$) 是一个全局最大值 [WR], 见图 7。

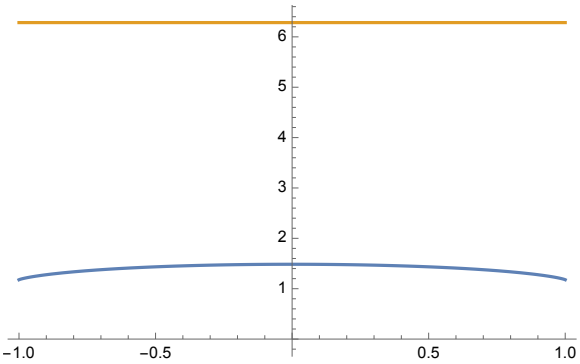

FIGURE 7. 函数 $\mathbf{vol(F)}$ 关于参数 $-1 < \alpha < 1$ 的图像。水平线表示双曲面积，其为常数，等于 2π。

推论 5.3. 我们有 极限$_{\alpha\to 1}\frac{1}{\pi}\int_Q A = \frac{3}{8}\pi \approx 1.17810 > 0$。特别地，极限$_{\alpha\to 1}\int_Q A \neq 0$。

证明。 我们使用上文对 $\int_Q A$ 的显式计算，以及关于二对数函数的以下性质：$\mathbf{Li_2(0)} = 0$、$\mathbf{Li_2(1)} = \frac{\pi^2}{6}$、$\mathbf{Li_2}(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$；对于负实数 z，有

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{\ln^2(-z)}{2} - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right),$$

例如参见 [Zag07，第 **1** 节和 2]。利用这个恒等式，我们接着得到，对于某个正函数 $f(\alpha)$，满足极限$_{\alpha\to 1} f(\alpha) > 0$(例如 $f(\alpha) = \alpha + 1$ 或 $f(\alpha) = \alpha + 3$)，使得

$$\lim_{\alpha\to 1}\mathrm{Li}_2\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha - 1}\right) = \lim_{\alpha\to 1} -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1-\alpha}{f(\alpha)}\right).$$

将此方法应用四次于 $\int_Q A$ 的显式表达式并进行化简，即可得到所需结果。 □

6. Example 2: $dd' = 1$ and $tt' = 1$

我们尤其关注这样一个正旗标四元组的例子（E, F, G, H），其满足

$$tt' = T(E,F,G)\cdot T(E,G,H) = 1 \qquad \text{and} \qquad dd' = D_1(E,F,G,H)\cdot D_2(E,F,G,H) = 1, \tag{6.1}$$

因为这些条件在对三穿孔球面上的有限面积凸实射影结构进行参数化时会出现，详见第 7 节。注意，正如备注5.1中所述，由备注2.4可知，关系式 (6.1) 不依赖于旗四元组 $\mathbf{F} = (E, F, G, H)$ 所选取的定向对角线，因此我们记作 $\mathbf{F}(d, t)$。

使用第 4 节中的归一化坐标，方程 (6.1) 化为 $\beta_1 = \beta_2$ 和 $\alpha_1 = \alpha_2$，因此我们设 $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2$ 和 $\beta := \beta_1 = \beta_2$，并采用记号 $Q = Q_{\alpha,\beta}$。由面积函数 $A = A_{Q_0}$的对称性，只需考虑 $0 \le \alpha, \beta < 1$的情形。根据 Marquis 的工作 [Mar12]（参见第 7 节的讨论以及备注 2.9 和 2.12），我们先验地知道积分 $\int_{Q_{\alpha,\beta}} A$ 是有限的。

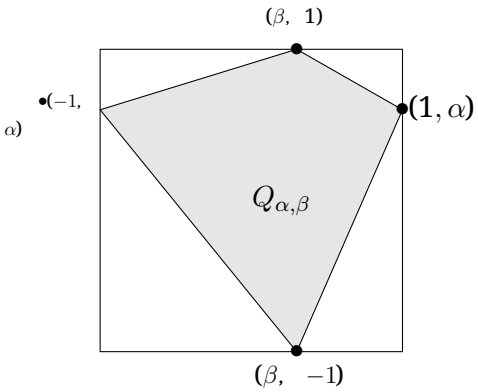

Figure 8. 我们研究内接于标准四边形的$Q_{\alpha,\beta}$ 的霍姆斯–汤普森面积的渐近行为。

本节的主要结果如下。

定理 6.1。 对于 $0 \le \alpha, \beta < 1$，存在一个常数 $C \in (0, \infty)$ 使得

$$\lim_{\max\{\alpha,\beta\}\to 1} \frac{\int_{Q_{\alpha,\beta}} A(x,y)\,dxdy}{\ln^2(1-\max\{\alpha,\beta\})} = C.$$

根据第 4 节中的方程（4.1），我们可以表示为

$$\alpha = \frac{1-t}{1+t}, \quad \beta = -\frac{1-d}{1+d},$$

并且我们注意到，当且仅当 $\alpha \ge 0$ 时 $0 < t \le 1$，当且仅当 $\beta \ge 0$ 时 $1 \le d$。因此，我们立即得到以下推论。

推论 6.2（定理 1.5）。 存在一个常数 $C \in (0, \infty)$ 使得

$$\lim_{\|(\ln(d),\ln(t))\|\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{F}(d,t))}{\ln^2(d) + \ln^2(t)} = C.$$

证明。 我们注意到，若 $\alpha, \beta \ge 0$，则

$$\ln^2(1-\alpha) = \ln^2\left(\frac{2t}{1+t}\right), \text{ and } \ln^2(1-\beta) = \ln^2\left(\frac{2}{1+d}\right) = \ln^2\left(\frac{1+d}{2}\right),$$

其增长方式类似于 $\ln^2(t)$，当 $t \to 0$ 时；而 $\ln^2(d)$，当 $d \to +\infty$ 时。因此，当 $d \to +\infty$ 或 $t \to 0$ 时，或者等价地，当 $\beta \to 1$ 或 $\alpha \to 1$ 时，我们可以直接应用定理 6.1。

若此时 $1 \le t \to +\infty$，则 $-1 < \alpha \le 0$，我们需要在面积计算中将 α 替换为 $-\alpha$，由定理 6.1 可得 $\ln^2(1+\alpha) = \ln^2\left(\frac{2}{1+t}\right) = \ln^2\left(\frac{1+t}{2}\right)$，其增长速度类似于 $\ln^2(t)$，当 $t \to +\infty$。

类似地，若 $1 \geq d \to 0$，则 $-1 < \beta \leq 0$，我们需要将 β 替换为 $-\beta$，由定理 6.1可得 $\ln^2(1+\beta) = \ln^2\left(\frac{2d}{1+d}\right)$，其增长速度类似于 $\ln^2(d)$，当 $d \to 0$。结合所有四种可能情况，证明即告完成。□

6.1. **证明概要**。为便于阅读，我们将证明分成几个步骤。主要工作在于步骤 3 的证明。

步骤 1： 令 T_α（分别 T_β）表示包含于 $Q_{\alpha,\ \beta}$ 由直线 $y = \pm x$和 $y = \alpha$（分别 $x = \beta$）截出的三角形，见图 9。

引理 6.3. 我们有

$$\lim_{\alpha\to 1} \frac{\int_{T_\alpha} A(x,y)dxdy}{\ln^2(1-\alpha)} = \lim_{\beta\to 1} \frac{\int_{T_\beta} A(x,y)dxdy}{\ln^2(1-\beta)} = \frac{3}{8}.$$

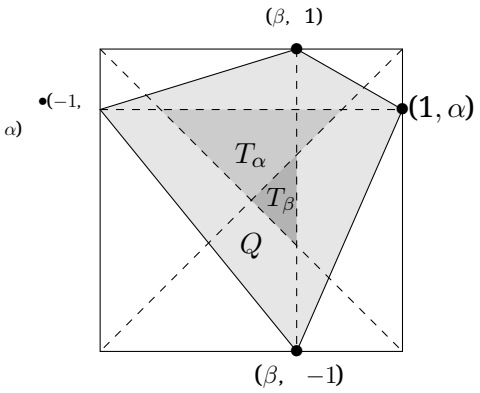

FIGURE 9. 由直线 $y = \pm x$ 和 $y = \alpha$ 分别截出的三角形 T_α 和 T_β $x = \beta$。

步骤 2。 设 $(\gamma,\ \gamma)$ 为直线 $y = x$ 与经过 $(1,\ \alpha)$ 和 $(\beta,\ 1)$ 的直线的交点。我们有

$$\gamma = \gamma_{\alpha,\beta} = \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta} \geq \max\{\alpha,\beta\}.$$

记 为 $Q' = Q'_{\alpha,\ \beta}$ 顶点为 $(\pm\gamma,\ \pm\gamma)$ 和 $(\pm\gamma,\ \mp\gamma)$ 的正方形，如图 10 .

引理 6.4. 我们有

$$\lim_{\max\{\alpha,\beta\}\to 1} \frac{\int_{Q'_{\alpha,\beta}} A(x,y)dxdy}{\ln^2(1-\max\{\alpha,\beta\})} = \frac{3}{2}.$$

步骤 3. 最后，记$\Delta_i = \Delta_{i、\ \alpha、\ \beta}$分别为 $i = 1$、2、3、4 所对应的连通分支 $Q \setminus Q'$，见图10。注意，这些是四个三角形，因为 $\gamma \geq$ 最大值$\{\alpha,\beta\}$。

命题 6.5. 对于所有 $i = 1$、2、3、4，我们有

$$\lim_{\max\{\alpha,\beta\}\to 1} \frac{\int_{\Delta_i} A(x,y)dxdy}{\ln^2(1-\max\{\alpha,\beta\})} = 0.$$

定理*6.1*的证明。结合引理6.3、6.4和命题6.5的陈述即可立即得到证明。□

6.2. **引理 6.3 的证明**。回顾由直线 T_α 和 $y = \pm x$ 以及 $y = \alpha$ 所截出的区域 T_α。注意，在区域 T_α 中，我们有 $y \geq |x|$，因此，除去一个因子 2，我们的目标是计算

$$\int_{T_\alpha} \frac{2+y}{(1-y^2)(1-x^2)} dxdy.$$

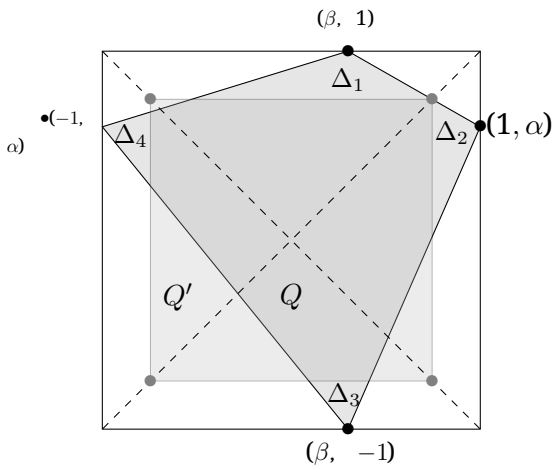

FIGURE 10. 顶点为（$\pm\gamma$, $\pm\gamma$）和（$\pm\gamma$, $\mp\gamma$）的 Q' 正方形，以及 $Q \setminus Q'$的连通分支 Δ_i。

将 $T_\alpha = \{(x,\ y) \in Q_0 \mid -y \le x \le y,\quad 0 \le y \le \alpha\}$ 参数化后，我们得到

$$\int_0^\alpha \frac{2+y}{1-y^2}\left(\int_{-y}^{y}\frac{1}{1-x^2}dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{2+y}{1-y^2}\Big[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Big]\Big|_{-y}^{y}dy = \int_0^\alpha \frac{2+y}{1-y^2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)dy =: f(\alpha).$$

再次注意到 $\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)' = \frac{2}{1-y^2}$，并进行分部积分，我们可以计算得出：

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left[\frac{2+y}{4}\ln^2\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right]\Bigg|_0^\alpha - \frac{1}{4}\int_0^\alpha \ln^2\left(\frac{1+y}{1-y}\right)dy \\ &= \left[\frac{2+y}{4}\ln^2\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right]\Bigg|_0^\alpha - \frac{1}{4}\int_0^\alpha \big(\ln^2(1+y) + \ln^2(1-y) - 2\ln(1+y)\ln(1-y)\big)\,dy. \end{aligned}$$

$\ln^2(1+y)$ 和 $\ln^2(1-y)$ 的积分可通过先分别令$x = 1+y$ 和 $x = 1-y$进行变量代换，再利用常值函数 1 进行分部积分来计算。$\ln(1+y)\ln(1-y)$ 的积分稍微复杂一些，但也可以用类似的方法求解：先令 $x = 1+y$进行变量代换，然后对 $\ln(x)$ 进行分部积分。接下来需要计算形如 $\int_{2-x}^{x}\ln(x)dx$ 的积分。为此，我们先令 $u = 2-x$，以进一步简化，并得到形如 $\int_u^2 \ln(2-u)du$ 的积分。现在令 $v = \frac{u}{2}$，并回想 $\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{1}{t}\ln(1-t)dt$，也可求得最后这个积分。综合以上结果，得到

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) &- \frac{\pi^2}{12} + \frac{\ln^2(2)}{2} \\ &+ \frac{1}{4}\Big(\ln^2(1+\alpha) - 4\ln(2)\ln(1-\alpha) + 3\ln^2(1-\alpha) - 2\ln(1-\alpha)\ln(1+\alpha)\Big). \end{aligned}$$

利用 $\mathrm{Li}_2(0) = 0$，可直接看出

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{f(\alpha)}{\ln^2(1-\alpha)} = \frac{3}{4}.$$

现在请注意，在区域 T_β 中我们有 $x \ge |y|$，因此我们要计算

$$\int_{T_\beta}\frac{2+x}{(1-y^2)(1-x^2)}dxdy.$$

我们可以将 $T_\beta = \{(x,y) \in Q_0 \mid -x \le y \le x,\ 0 \le x \le \beta\}$ 参数化，因此可通过与上述相同的计算得到

$$\int_{T_\beta} \frac{2+x}{(1-y^2)(1-x^2)} dxdy =: f(\beta), \text{ and } \lim_{\beta\to 1} \frac{f(\beta)}{\ln^2(1-\beta)} = \frac{3}{4}.$$

6.3. **引理的证明** **ma 6.4.** 注意，由对称性可知，只需计算.....的两倍 te

$$\int_{T_\gamma} \frac{2+y}{(1-y^2)(1-x^2)} dxy,$$

其中， T_γ 是由直线 $y = \pm x$ 和$y = \gamma = \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}$围成的区域。 ———

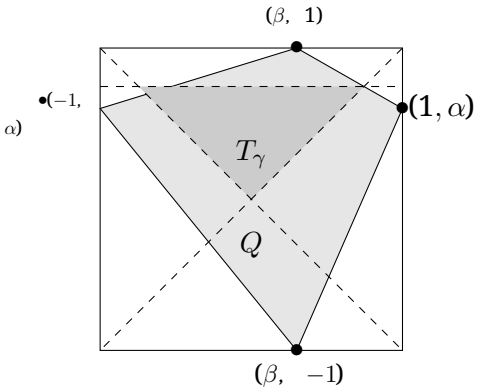

FIGURE 11. 由直线 $y = \pm x$ 和 $y = \gamma$ 截出的三角形 T_γ。

我们可以将 $T_\gamma = \{(x,\ y) \in Q_0 \mid -y \le x \le y,\ \ 0 \le x \le \gamma\}$，因此，与引理 6.3的证明中相同的计算给出

$$\int_{T_\gamma} \frac{2+y}{(1-y^2)(1-x^2)} dxdy =: f(\gamma).$$

我们希望计算

$$\lim_{\max\{\alpha,\beta\}\to 1} \frac{f(\gamma)}{\ln^2(1-\max\{\alpha,\beta\})}.$$

由于 $f(\gamma)$ 的增长速度与 $\ln^2(1-\gamma)$ 相同，只需注意到

$$\lim_{\alpha\to 1} \frac{\ln(1-\gamma)}{\ln(1-\alpha)} = \lim_{\beta\to 1} \frac{\ln(1-\gamma)}{\ln(1-\beta)} = 1.$$

6.4. **命题 6.5 的证明**。 最后，注意到 $Q \setminus Q'$ 由四个互不相交的三角形组成 $\Delta_1, \dots, \Delta_4$(我们省略了这些区域对 α 和 β 的依赖关系），每个三角形都有一个顶点位于 Q 的一条边上，并有一条边平行于某个坐标轴。

命题 6.6. 对于每个 $i = 1,2,3,4$，我们有

$$\lim_{\alpha\to 1} \frac{\int_{\Delta_i} A(x,y)dxdy}{\ln^2(1-\alpha)} = \lim_{\beta\to 1} \frac{\int_{\Delta_i} A(x,y)dxdy}{\ln^2(1-\beta)} = 0.$$

其思路是将每个 Δ_i 进一步分成两个相邻三角形， Δ_i^r 和 Δ_i^l。图 12 中以 Δ_1为例进行了说明。我们先考虑包含在 Δ_1 中的三角形 Δ_1^r，其顶点为（β,1）、（β,γ）和（γ,γ）。特别地，对于所有（x,y）$\in \Delta_1^r$，都有 $y \ge |x|$。注意，经过（β, 1）和（γ,γ）的直线方程为

$$x = \beta + \frac{1-\beta}{1-\alpha}(1-y).$$

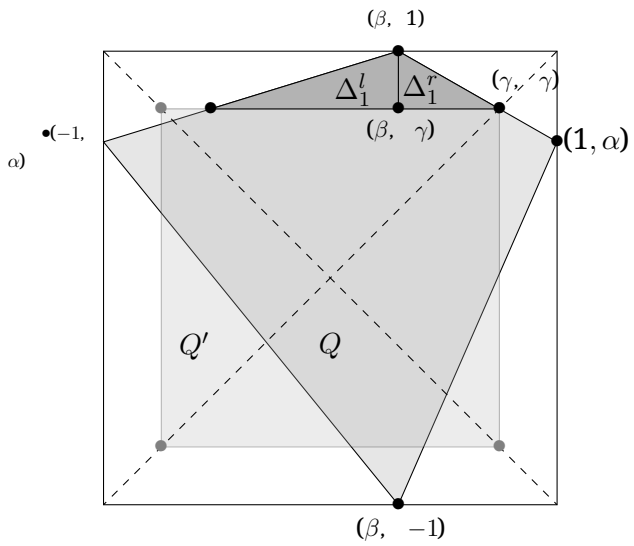

FIGURE 12. 包含在 Δ_1 中的三角形 Δ_1^r 和 Δ_1^l。

命题6.7。我们有

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\int_{\Delta_1^r}\frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)}dxdy}{\ln^2(1-\alpha)}=\lim_{\beta\to 1}\frac{\int_{\Delta_1^r}\frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)}dxdy}{\ln^2(1-\beta)}=0.$$

证明。由于 $\Delta_1^r\subset Q$，我们知道其霍姆斯–汤普森面积有限，因此可以通过参数化 $\Delta_1^r=\{(x,\ y)\in Q_0\mid \gamma\le y\le 1,\quad \beta\le x\le\beta+\frac{1-\beta}{1-\alpha}(1-y)\}$，应用富比尼–托内利定理，写成——

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1^r}\frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)}dxdy&=\int_\gamma^1\left(\frac{2+y}{1+y}\cdot\frac{1}{1-y}\left(\int_\beta^{\beta+\frac{1-\beta}{1-\alpha}(1-y)}\frac{dx}{1-x^2}\right)\right)dy\\&<2\int_\gamma^1\frac{1}{1-y}\operatorname{arctanh}(x)\Big|_\beta^{\beta+\frac{1-\beta}{1-\alpha}(1-y)}dy\\&=2\int_\gamma^1\frac{1}{1-y}\left(\operatorname{arctanh}\Big(\beta+\frac{1-\beta}{1-\alpha}(1-y)\Big)-\operatorname{arctanh}(\beta)\right)dy\end{aligned}$$

Set

$$\delta:=\frac{1-\beta}{1-\alpha}>0\qquad\text{and}\qquad F(y):=\operatorname{arctanh}\left(\beta+\delta(1-y)\right)-\operatorname{arctanh}(\beta).$$

继续之前，我们需要一个辅助引理。

引理6.8。对于所有 $y\in[\gamma,1]$，我们有

$$F(y)\le\frac{\operatorname{arctanh}(\gamma)-\operatorname{arctanh}(\beta)}{1-\gamma}(1-y).$$

证明。我们先证明，对于所有 $y\in[\gamma,1]$，$F(y)\ge 0$。由于 $F(1)=0$，只需证明 F在此区间上递减。鉴于

$$F'(y)=-\frac{\delta}{1-(\beta+\delta(1-y))^2},$$

函数 F在区间 $[\gamma,1]$上递减，若对于所有 $y\in[\gamma,1]$，都有 $0<\beta+\delta(1-y)<1$。从几何上可以看出这个不等式，因为 $\beta+\delta(1-y)$给出了连接点 $(\beta,1)$和 (γ,γ)的线段上某一点的 x坐标，而 $0<\beta<\gamma<1$。现在，只需证明函数 F是凹向上的

因为

$$x = \frac{\operatorname{arctanh}(\gamma) - \operatorname{arctanh}(\beta)}{1-\gamma}(1-y)$$

是割线的方程，它经过 $(\gamma, F(\gamma))$ 和 $(1, F(1))$ 两点。显然可见 t

$$F''(y) = \frac{2\delta^2\left(\beta + \delta(1-y)\right)}{\left(1-\left(\beta+\delta(1-y)\right)^2\right)^2} \geq 0,$$

由此完成了引理的证明。 □

应用该引理，我们估计

$$\int_\gamma^1 \frac{1}{1-y}\left(\operatorname{arctanh}\Big(\beta + \frac{1-\beta}{1-\alpha}(1-y)\Big) - \operatorname{arctanh}(\beta)\right) dy < \left(\operatorname{arctanh}(\gamma) - \operatorname{arctanh}(\beta)\right),$$

并注意到

$$\lim_{\alpha\to 1} \frac{\operatorname{arctanh}(\gamma) - \operatorname{arctanh}(\beta)}{\ln^2(1-\alpha)} = \lim_{\beta\to 1} \frac{\operatorname{arctanh}(\gamma) - \operatorname{arctanh}(\beta)}{\ln^2(1-\beta)} = 0,$$

从而完成证明。 □

现在，考虑三角形 Δ_1^ℓ，其顶点为 $(\beta,\ 1)$、$(\beta,\ \gamma)$，以及水平线 $y=\gamma$ 与连接 $(\beta,\ 1)$ 和 $(-1,\ \alpha)$ 的直线之间的交点，见图 12。特别地，对所有 $(x,\ y)$，都有 $y \geq |x|$。注意，经过 $(\beta,\ 1)$ 和 $(-1,\ \alpha)$ 的直线方程为

$$x = \beta - \frac{1+\beta}{1-\alpha}(1-y).$$

命题 6.9。我们有

$$\lim_{\alpha\to 1} \frac{\int_{\Delta_1^\ell} \frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)} dxdy}{\ln^2(1-\alpha)} = \lim_{\beta\to 1} \frac{\int_{\Delta_1^\ell} \frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)} dxdy}{\ln^2(1-\beta)} = 0.$$

证明。同样地，由于我们知道 Δ_1^ℓ 的霍姆斯–汤普森面积是有限的，因此可以应用 Fubini–Tonelli 定理，以 $\Delta_1^\ell = \{(x,\ y) \in Q_0 \mid \gamma \leq y \leq 1,\quad \beta - \frac{1+\beta}{1-\alpha}(1-y) \leq x \leq \beta\}$ 为参数化，写成

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1^\ell} \frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)} dxdy &< 2\int_\gamma^1 \frac{1}{1-y}\operatorname{arctanh}(x)\Big|_{\beta - \frac{1+\beta}{1-\alpha}(1-y)}^{\beta} dy \\ &= 2\int_\gamma^1 \frac{1}{1-y}\left(\operatorname{arctanh}(\beta) - \operatorname{arctanh}\Big(\beta - \frac{1+\beta}{1-\alpha}(1-y)\Big)\right) dy.\end{aligned}$$

注意，

$$\begin{aligned}2\left(\operatorname{arctanh}(\beta) - \operatorname{arctanh}\Big(\beta - \frac{1+\beta}{1-\alpha}(1-y)\Big)\right) &= \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - \ln\left(\frac{1+\beta - \frac{1+\beta}{1-\alpha}(1-y)}{1-\beta+\frac{1+\beta}{1-\alpha}(1-y)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{1+\beta}{1-\beta}\frac{1-y}{1-\alpha}}{1-\frac{1-y}{1-\alpha}}\right) = \ln\left(1 + \frac{\frac{1-y}{1-\alpha}}{1-\frac{1-y}{1-\alpha}}\left(1+\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{1-\beta}\frac{\frac{1-y}{1-\alpha}}{1-\frac{1-y}{1-\alpha}}\right).\end{aligned}$$

注意，由于 $0 < \alpha < y < 1,\quad 1-\beta > 0$ 和 $0 < (1-y)/(1-\alpha) < 1$。因此我们可以使用不等式

$$\ln(1+z) \leq z \text{ for all } z \geq 0$$

得到

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1^\ell} \frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)} dxdy &< \int_\gamma^1 \frac{1}{1-y}\frac{2}{1-\beta}\frac{\frac{1-y}{1-\alpha}}{1-\frac{1-y}{1-\alpha}} dy \\ &= \frac{2}{1-\beta}\int_\gamma^1 \frac{1}{y-\alpha} dy = \frac{2}{1-\beta}\big(\ln(1-\alpha) - \ln(\gamma-\alpha)\big).\end{aligned}$$

由于

$$\gamma-\alpha=\frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}-\alpha=\frac{1-\alpha\beta-2\alpha+\alpha^2+\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}=\frac{(1-\alpha)^2}{2-\alpha-\beta},$$

我们得出

$$0<\int_{\Delta_1^\ell}\frac{2+y}{(1-x^2)(1-y^2)}dxdy<\frac{2}{1-\beta}\big(\ln(2-\alpha-\beta)-\ln(1-\alpha)\big).$$

不难验证

$$\lim_{\alpha\to1}\frac{\frac{2}{1-\beta}\big(\ln(2-\alpha-\beta)-\ln(1-\alpha)\big)}{\ln^2(1-\alpha)}=\lim_{\beta\to1}\frac{\frac{2}{1-\beta}\big(\ln(2-\alpha-\beta)-\ln(1-\alpha)\big)}{\ln^2(1-\beta)}=0,$$

这就完成了证明。 □

令 $\mathrm{vol}(\Delta_i)$ 表示 $i=1,2,3,4$ 内接于标准四边形时的霍姆斯–汤普森面积。由对称性（关于直线 $y=x$ 的反射），我们立即推出，若 Δ_2 表示 $Q\setminus Q'$ 中顶点为 $(1,\alpha)$ 的连通分支，则

$$\lim_{\alpha\to1}\frac{\mathrm{vol}(\Delta_2)}{\ln^2(1-\alpha)}=\lim_{\beta\to1}\frac{\mathrm{vol}(\Delta_2)}{\ln^2(1-\beta)}=0.$$

最后，若 R_x 表示关于 x 轴的欧几里得反射，且 R_y 表示关于 y 轴的欧几里得反射，在重新标记 Δ_3 和 Δ_4 后，由于 $\alpha,\beta\geq0$，我们有

$$\Delta_3\subseteq R_x(\Delta_1)\qquad\text{and}\qquad\Delta_4\subseteq R_y(\Delta_2).$$

因此，由对称性

$$\lim_{\alpha\to1}\frac{\mathrm{vol}(R_x(\Delta_1))}{\ln^2(1-\alpha)}=\lim_{\beta\to1}\frac{\mathrm{vol}(R_x(\Delta_1))}{\ln^2(1-\beta)}=0$$

and

$$\lim_{\alpha\to1}\frac{\mathrm{vol}(R_y(\Delta_2))}{\ln^2(1-\alpha)}=\lim_{\beta\to1}\frac{\mathrm{vol}(R_y(\Delta_2))}{\ln^2(1-\beta)}=0.$$

综合以上结果，命题6.5的证明至此完成。

7. Convex projective structures on a thrice-punctured sphere

我们将第6节的结果应用于三穿孔球面$S=S_0$上的凸实射影结构，3。 S 上唯一的完备有限面积双曲结构给出一类离散忠实表示 ρ_0': $\pi_1(S_0,3)\to\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$的共轭类。将其与$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$到$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$的不可约表示复合后，我们得到一类表示 $[\rho_0]$ 的共轭类，其中绕每个穿孔的整体变换都共轭于一个最大若尔当块。Marquis [Mar12]证明，在$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$特征簇中连续变形 $[\rho_0]$，且绕每个穿孔的整体变换始终共轭于一个最大若尔当块，这种变形对应于 S 上的、具有有限布塞曼面积的凸实射影结构。鉴于布塞曼面积与霍姆斯–汤普森面积双利普希茨等价（见注2.9），这些凸实射影结构的霍姆斯–汤普森面积也有限。此外，按照Fock和Goncharov [FG07，FG06]的意义，这些表示是正的。

$S=S_0,3$ 上有限面积带标记凸实射影结构的空间与 $\mathbb{R}^2$ 同胚，下面简要回顾其 Fock–Goncharov 参数化。令 p_1、p_2、p_3 表示 S 的三个尖点，并令 $\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$ 表示 S 的平衡理想三角剖分，其边从 p_i 指向 p_{i+1}、$\widetilde{\ }$，且满足 $i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。给定 S 上的有限面积凸实射影结构 ρ，令 $\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$ 表示平衡理想三角剖分在真凸域 $\Omega_\rho\subset\mathbb{RP}^2$ 中的提升，并选取一个理想三角形 $\sim T_0\in\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$，其顶点为 $\widetilde{p}_1$、$\widetilde{p}_2$、$\widetilde{p}_3$，按此循环次序排列于 Ω_ρ 周围。考察 $\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$ 中与 T_0 相邻的三个理想三角形，可得点 $\widetilde{q}_1$、$\widetilde{q}_2$、$\widetilde{q}_3\in\partial\Omega_\rho$，使得 $\widetilde{p}_1$、$\widetilde{q}_3$、$\widetilde{p}_2$、$\widetilde{q}_1$、$\widetilde{p}_3$、$\widetilde{q}_2$ 按此循环次序排列于 Ω_ρ 周围。注意，在这些点中的每一点处，都有唯一一条与 Ω_ρ 相切的直线，并且

然后将对应于 $(\widetilde{p}_1, \widetilde{q}_3, \dots, \widetilde{q}_2)$ 的旗的正 6 元组记为 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6)$。这个旗的正 6 元组确定以下 Fock–Goncharov 参数

$$\begin{aligned} r_1 &= D_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_5), \qquad r_2 = D_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_5),\\ b_1 &= D_1(\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_1), \qquad b_2 = D_2(\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_1),\\ g_1 &= D_1(\xi_5,\xi_6,\xi_1,\xi_3), \qquad g_2 = D_2(\xi_5,\xi_6,\xi_1,\xi_3),\\ t_1 = T(\xi_1,\xi_3,\xi_5),&\text{ and } t_2 = T(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = T(\xi_3,\xi_4,\xi_5) = T(\xi_1,\xi_5,\xi_6). \end{aligned}$$

由于我们假设 ρ 具有有限面积，博纳洪–德雷耶长度等式 [BD14，命题 13]表明这些参数必须满足以下等式

$$r_1 g_2 = b_1 r_2 = g_1 b_2 = 1 \quad \text{and} \quad r_2 g_1 t_1 t_2 = b_1 r_2 t_1 t_2 = g_1 b_2 t_1 t_2 = 1.$$

然后可以看出，选定一个三重比和一个双比即可唯一确定其余参数。为明确起见，令 $t = t_1$ 和 $d = r_1$。因此，若 $\mathcal{CP}(S_{0,\ 3})$表示$S_{0,\ 3}$上的带标记有限面积凸实射影结构空间，则有一个双射

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}} \colon \mathcal{CP}(S_{0,3}) &\to \mathbb{R}^2\\ [\rho] &\to (\mathbf{d},\mathbf{t}) \coloneqq (\ln d, \ln t). \end{aligned}$$

我们将 $\Phi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}$ 的逆记作 $\Psi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}$。

注意，在 $\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$ 中由两个相邻三角形构成的四边形确定了一个正旗标四元组 $\mathbf{F} = (E,\ F,\ G,\ H)$，它满足

$$T(E,F,G)\cdot T(E,G,H) = 1 \quad \text{and} \quad D_1(E,F,G,H)\cdot D_2(E,F,G,H) = 1. \tag{7.1}$$

换言之，四元组$\mathbf{F}$满足第6节中讨论的约束。注意，根据备注2.4，对 $\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$ 进行对角线翻转或改变边的方向后，等式（7.1）仍然成立。

现在，令 $\mathrm{vol}(\Psi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}(\mathbf{d},\ \mathbf{t}))$ 表示由ρ 参数化为 $(\mathbf{d},\ \mathbf{t})$ 的凸实射影结构的霍姆斯–汤普森面积 $P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F})$ 是内接于 Ω 的理想四边形ρ ，并且 $\Omega\rho$ 包含于四边形 $P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})$ 中。于是，备注2.12 立即推出以下结论。

推论 7.1。令 $\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}$ 表示三穿孔球面的平衡理想三角剖分 $S_{0,\ 3}$。对于$(\mathbf{d}、\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^2$，考虑相应的有限面积凸射影结构 $\Psi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}(\mathbf{d}、\mathbf{t})$。令$\mathbf{F}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中与 $\Psi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}(\mathbf{d}、\mathbf{t})$所对应的真凸域中的两个相邻三角形 $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathrm{bal}}$ 相对应的正旗标四元组。那么，

$$\mathrm{vol}(\Psi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}(\mathbf{d},\mathbf{t})) \geq \mathrm{vol}(\mathbf{F}) = \mathrm{vol}_{P_{\mathrm{out}}(\mathbf{F})}(P_{\mathrm{in}}(\mathbf{F})).$$

然后，利用第 6节的结果，我们得到以下推论。

推论 7.2（定理 m 1.1）**.** 存在一个常数 $C > 0$ 使得对于任意 $(\mathbf{d},\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^2$，都有 t

$$\liminf_{\|(\mathbf{d},\mathbf{t})\|\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(\Psi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}(\mathbf{d},\mathbf{t}))}{\mathbf{d}^2+\mathbf{t}^2} \geq C.$$

证明。 根据上述推论，我们知道

$$\mathrm{vol}(\Psi_{\mathcal{T}_{\mathrm{bal}}}(\mathbf{d},\mathbf{t})) \geq \mathrm{vol}(\mathbf{F})$$

对于一个正旗标四元组 $\mathbf{F}$，其 Fock–Goncharov 参数为 $t,\ t',\ d,\ d' > 0$ 满足 $tt' = 1$且 $dd' = 1$。然后，在第 6 节中，我们证明了 $\mathrm{vol}(\mathbf{F}(d,\ t))$ 与 $\max\{\ln^2(d),\ \ln^2(t)\}$ 相当，见推论 6.2，由此完成证明。 □

References

[AC20] Ilesanmi Adeboye 和 Daryl Cooper。凸射影曲面的面积与福克–冈察洛夫坐标。 *J.* , ( ): – .

[´APB06] J. C. ´Alvarez Paiva 和 G. Berck。芬斯勒空间中的豪斯多夫测度有什么问题。 *Adv. Math.*, 204 2 647 663, 2006

[´APT04] J. C. ´Alvarez Paiva 和 A. C. Thompson。赋范空间与芬斯勒空间上的体积。载于 *geometry* 1 48 2004 *A Sampler of Riemann-Finsler* , 第 – 页。剑桥：剑桥大学出版社，。

Topol. Anal. 12 2 533 546, 2020

[BD14] Francis Bonahon 和 Guillaume Dreyer。Hitchin 分支的参数化。 *Duke Math. J.*, 163 2975, 2014 15 2935( ): – .[BD17] Francis Bonahon 和 Guillaume Dreyer。Hitchin 特征标与测地层状结构。 *Acta Math.*, 218 295, 2017 2 201( ): – .[Ben04] Yves Benoist。可除凸子集。I。载于 *Algebraic groups and arithmetic. Proceedings of the international conference Mumbai India December 17–22 2001*, , , , 第 – 页。新德里：Narosa 出版社／塔塔基础研究院出版，2004。[Bus50] Herbert Busemann。芬斯勒空间几何。 *Bull. Am. Math. Soc.*, 56:5–16, 1950。[CVV04] B. Colbois、C. Vernicos 和 P. Verovic。希尔伯特几何中理想三角形的面积。 *Enseign. Math. (2)*, 50 3 4 203 237, 2004 (-): – .[dlH93] Pierre de la Harpe。关于单纯形的希尔伯特度量。载于 *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, 第 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 卷第 181 册，第 97–119 页。剑桥大学出版社，剑桥，1993。[FG06] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov。局部系统的模空间与高阶 Teichmüller 理论。 *Publ.Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 103:1–211, 2006。[FG07] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov。曲面上凸射影结构的模空间。 *Adv. Math.*, 208(1):249– 273, 2007。[FVW25] Dmitry Faifman、Constantin Vernicos 和 Cormac Walsh。Funk 几何的体积增长与多胞体旗。 *Geom. Topol.*, 29(7):3773–3811, 2025。[HT80] R. D. Holmes 和 A. C. Thompson。Minkowski 空间中的 N 维面积与内容。 *Pac. J. Math.*, 85 110, 1980 77: – .[KP14] Inkang Kim 和 Athanase Papadopoulos。凸实射影结构与希尔伯特度量。载于 *Handbook of Hilbert geometry* 22 *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* 307 338 ¨ 2014 , 第 卷，第 – 页。欧洲数学学会，苏黎世，。[Lab07] Fran¸cois Labourie。交比、曲面群、P$SL(n, \mathbb{R})$ 与圆周的微分同胚。 *Publ. Math. Inst.Hautes Études Sci.*, (106):139–213, 2007。[LM74] Robert H. Lohman 和 Terry J. Morrison。关于凸多边形的极线。 *Am. Math. Mon.*, 81:1016–1018, 1974。[Lus94] G. Lusztig。约化群中的全正性。载于 *Lie theory and geometry: in honor of Bertram Kostant on the occasion of his 65th birthday. Invited papers some originated at a symposium held at MIT Cambridge MA USA in May 1993* 531 568 ¨ 1994 , , , , 第 – 页。美国马萨诸塞州波士顿：Birkhauser，。[Mar12] Ludovic Marquis。有限体积的凸射影曲面。载于 *Annales de l'Institut Fourier*，第 62 卷，第 325–392 页，2012。[Mar14] Ludovic Marquis。希尔伯特几何中的群论概览。载于 *Handbook of Hilbert geometry* 22 *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* 207 261 ¨ 2014 , 第 卷，第 – 页。欧洲数学学会，苏黎世，。[MZ19] Giuseppe Martone 和 Tengren Zhang。正比表示。 *Comment. Math. Helv.*, 94 345, 2019 2 273( ): – .[PT09] Athanase Papadopoulos 和 Marc Troyanov。凸集与芬斯勒结构的调和对称化及其在希尔伯特几何中的应用。 *Expo. Math.*, 27(2):109–124, 2009。[VW21] Constantin Vernicos 和 Cormac Walsh。凸体的旗逼近性与希尔伯特几何的体积增长。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 54(5):1297–1314, 2021。[Wol21] Scott A. Wolpert。内接三角形与四边形的希尔伯特面积。 *Geom. Dedicata*, 214:177–192, 2021。[WR] Wolfram Research 公司。Mathematica，版本 13.1.1.0。美国伊利诺伊州香槟市，2025年。[Zag07] Don Zagier。二对数函数。载于 *Frontiers in number theory physics and geometry II. On conformal field theories discrete groups and renormalization. Papers from the meeting Les Houches France March 9–21 2003*, , , , , , , 第 3–65 页。柏林：Springer，2007。

Institut des Hautes Etudes Scientifiques

Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences

Email address: flamm@ihes.fr, xenia.flamm@mis.mpg.de

Sam Houston State University

Email address: gxm120@shsu.edu