定向折叠 Temperley–Lieb 代数

Chris Bowman、Zajj Daugherty、Maud de Visscher、Rob Muth 和 Loic Poulain d'Andecy

Abstract. 我们通过将后者实现为 Varagnolo–Vasserot 的定向折叠箭图 Hecke 代数的商，构造了双边界 Temperley–Lieb 代数和辛 blob 代数的简单模上的分次结构。我们证明辛 blob 代数是分次胞腔代数，并提出一种用于计算其分次分解矩阵的猜想性算法。在此过程中，我们给出了定向折叠箭图 Hecke 代数的首个显式有限维分次商系列，为研究这些代数的结构提供了新的切入点——这与 Libedinsky–Plaza 的"blob 代数方法"在模表示论中的思路一脉相承。

arXiv:2601.04012v1 [math.RT] 7 Jan 2026

1. 引言

Temperley–Lieb 代数最初作为统计力学中 Potts 模型的传递矩阵代数出现 [TL71]。后来，这些 Temperley–Lieb 代数及其模被范畴化[Kho00，BN05，Str09，BS11，Eli10]并发展为强大的函子结不变量。Piccirillo 对 Conway 结问题的解决戏剧性地彰显了这些不变量的影响力——这是量子拓扑领域的里程碑式成果 [Pic20]。人们甚至希望，这些 Temperley–Lieb 代数的范畴化能够为 Crane–Frenkel 的高阶范畴方法提供所需的四维拓扑量子场论，从而解决光滑庞加莱猜想 [LS22，Man22，Str]。

Martin–Saleur、Green–Martin–Parker 和 de Gier–Nichols 引入了新的边界条件，并大幅推广了经典 Potts 模型的传递矩阵代数 [MS94，MGP07，GMP12，dGN09]。对于单边界情形，Martin–Woodcock 和 Libedinsky–Plaza 提出了富有先见之明的猜想，认为这些广义传递矩阵代数受 p- Kazhdan–Lusztig 多项式支配——这在统计力学与模表示论之间架起了一座出人意料而强有力的桥梁 [MW00，LP20]。正如 Libedinsky–Plaza 所言，他们的猜想旨在"将物理学中的直觉引向（如今）晦涩难懂的模表示论领域"。此后，这些猜想已得到证实 [BCH23]，，由此开启了所谓范畴统计力学的研究：箭图 Hecke 代数和图示 Soergel 双模为对角化传递矩阵提供了新的分次与工具，而边界现象则被编码在更高阶的量子拓扑和范畴结构之中。

本文旨在通过将双边界 Potts 模型的传递矩阵代数纳入这一新兴的范畴框架，进一步推进这一前沿领域。对于单边界 Potts 模型（广义 *blob* 代数），通过将这些代数实现为箭图 Hecke 代数的分次商，这一范畴联系得以建立 [Pla13、PRH14、Bow22]。对于双边界 Potts 模型（即 辛 *blob* 代数，也称为 *2-边界 Temperley– Lieb* 代数的双重商代数），我们将传递矩阵代数构造为 *Varagnolo–Vasserot* [VV11] 的定向折叠箭图 Hecke 代数的分次商；这些代数最初源于他们验证 Enomoto– Kashiwara 猜想的工作 [EK06]。

定理 A。 辛 *blob* 代数是定向折叠箭图 *Hecke* 代数 $\mathscr{H}_n(q_0q_n, -q_0q_n^{-1}, \vartheta)$ 关于以下关系的分次商：

$$y_1 e_{\mathsf{t}_{(0,\vartheta)}} = 0 \quad \textit{and} \quad e_{\underline{i}} = 0 \ \textit{if}\ \underline{i} \neq \mathrm{res}(\mathsf{s}) \ \textit{for some}\ \mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n$$

其中，Std_n 是"标准定向反射杨表"的集合，而$\mathsf{t}^{(0,\vartheta)}$ 是此类杨表中最小的一个。该代数具有分次细胞基，其模范畴具有分次最高权结构。

这种新的分次结构使我们能够提出一个 LLT 风格的猜想 6.2 ，用于计算这些传递矩阵代数的（分次）分解数和单特征；该猜想以分次定向折叠 标准杨表的语言表述，并受到 Kleshchev–Nash 的研究启发 [KN10]。

统计力学中的表示论。 对于统计力学研究者而言，双边界 Temperley–Lieb 代数支配着具有非平凡边界的格点模型——环模型、Potts 模型和 XXZ 自旋链——并编码了确保边缘可积性的反射方程 [Bax82, dGP04, Nic06b, Nic06a]。如果说杨–巴克斯特方程控制着体可解性，那么这些代数则捕捉了竞争边界的可积物理 [Bax82, dGP04]。它们的简单模将物理直觉映射为边界谱：每个简单模都对应一个不变扇区，并决定特征值、简并度和标度指数 [dGP04, dGNPR05, Nic06a]。对简单模进行分类，可以辨明一般谱与不可分解谱或对数谱；后者标志着临界或非幺正行为，并能预测边界参数何时会产生新的不动点、谱重合或对数共形场论 [dGNPR05, Nic06b, Nic06a]。

长期以来，人们一直认为，在 q 单位根处计算双边界 Temperley–Lieb 代数／辛 blob 代数的简单模毫无希望——早在 20 年前，人们就已意识到，全面构造简单模超出了经典 Kazhdan–Lusztig 理论的范畴；此后，研究重点转向理解单项式基与呈示、块与拟遗传结构、特殊情形下的简单模，以及完整倾斜模的构造 [GMP08、dGN09、GMP12、Ern12、KMP16、GMP17、Ree18、Ern18、HGP19、DR25a]。我们的猜想 6.2 提出了一种显式算法，用于计算双边界 Temperley–Lieb 代数和辛 blob 代数在一般参数和非一般参数下的所有分次简单特征。

反过来说——秉承 Libedinsky–Plaza 将“物理直觉引入表示论中最困难问题之一”的愿景 [LP20]——我们现在来探讨，物理学家构造的辛 blob 代数如何为我们提供结构上的支撑，以应对范畴表示论中的一个重大未解问题。

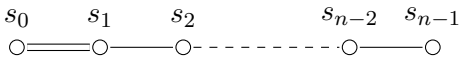
范畴表示论中的统计力学。 有限维代数视角已成为研究箭图 Hecke 代数的核心，以至于人们几乎将其视为理所当然。借助分圆商，箭图 Hecke 代数可以运用有限维表示论的完整工具体系来研究，从而能够进行明确计算和组合分析；例如，分次分解矩阵正是通过这种方式定义的，而关于分次简单特征的几乎所有结果也都是以这种方式提出猜想并加以证明的 [LLT96, EL, BCH23, BK09]。这些分圆商在更高层次的结构上也很有意义，因为它们将 Drinfel'd–Jimbo 量子群的最高权表示范畴化 [LV11, KK12]。因此，分圆视角如今已融入这一领域几乎所有方面。

与此形成鲜明对比的是，目前对定向折叠箭图 Hecke 代数的分圆商一无所知——例如，不存在类似 Ariki–Koike 构造的东西，我们甚至无法确定分圆商何时非零！我们希望这些分圆商能够范畴化 Enomoto–Kashiwara 代数 [VV11的EK06] 简单模，并通过 Schur–Weyl 对偶 [AP23]与新兴的 $\imath$量子群理论建立丰富的联系。由于没有明确的代数路径可以通向如此一般的构造，我们转而研究统计力学：定理 A 将辛 blob 代数实现为定向折叠箭图 Hecke 代数的第一个非平凡有限维分次商。因此，我们的猜想 6.2 为构造一族定向折叠箭图 Hecke 代数的分次简单模（针对非一般参数）提供了首个途径，也是迈向分圆商一般理论的第一步。

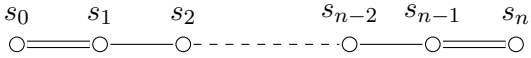
本文结构。 第 2 节回顾双边界 Hecke 代数、Temperley–Lieb 代数以及辛 blob 代数的背景。第 3 节研究这些代数在一般参数下的（可标定）简单模，由此我们可以借助这些代数的 Jucys–Murphy 元，了解从双边界 Temperley–Lieb 代数到辛 blob 代数的投影之核。第 4 节将定向折叠 Temperley–Lieb 代数定义为 Varagnolo–Vasserot 定向子 Hecke 代数关于一组关系的商，这些关系受第 3 节结果的启发；随后证明辛 blob 代数可经由定向折叠 Temperley–Lieb 代数分解。第 5 节给出定理 A 的证明：我们为定向折叠 Temperley–Lieb 代数构造一个分次细胞基，并同时证明定理 A 中的同态是双射。第 6 节提出我们用于计算分次分解矩阵的猜想性算法。

2. Two-boundary algebras

设 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$， $\Bbbk$ 为一个特征不等于 2 的域，并令 $\mathcal{R} = \Bbbk(q,\ q_0,\ q_n)$。本节回顾 [DR25b、DR25a]中研究的双边界辫群、赫克代数和 Temperley–Lieb 代数的刻画。我们回顾一下，类型 C_n 的考克斯特图为



并令 $W(C_n)$ 表示相应的 C_n 型魏尔群；我们还回顾一下， C_n 型 Coxeter^图如下：



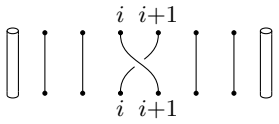
^并令 $W(C_n)$ 表示相应的 C_n 型仿射韦伊群。我们可以将魏尔群 $W(C_n)$ 视为 $\{\pm 1, \ldots, \pm n\}$ 上带符号置换构成的群，其中 $s_0 = (-1,\ 1)$，且$s_i = (-i,\ -(i+1))(i,\ i+1)$，其中 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ n-1$。

2.1. 双边界 Hecke 代数 H_n。

双边界 Hecke 代数是在$\mathcal{R}$ 上由可逆元素 T_0、T_1、……、T_n 生成的，其关系为

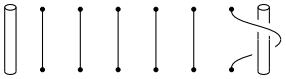
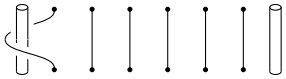
$$\begin{aligned}
(T_i - q_i)(T_i + q_i^{-1}) &= 1 \text{ for } 0 \leqslant i \leqslant n,\\
T_i T_j &= T_j T_i \text{ for } |i-j| > 1,\\
T_i T_{i+1} T_i &= T_i T_{i-1} T_i \text{ for } 1 < i < n-1,\\
T_0 T_1 T_0 T_1 &= T_1 T_0 T_1 T_0,\\
T_n T_{n-1} T_n T_{n-1} &= T_{n-1} T_n T_{n-1} T_n
\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $q_i = q$for $i = 1, \ldots, n-1$。 H_n中的元素可以表示为定义在具有两个刚性极点的空间上的辫的线性组合。对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$， T_i 的生成元 H_n 对应于下列图示：

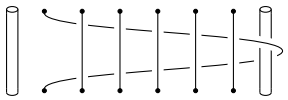
$T_i =$ 

(2.2)

for $i = 1, \ldots, n-1$，生成元 T_0和 T_n对应于辫图 s

$T_n =$  $T_0 =$ 

其中，辫图的乘法由将一个图示垂直堆叠在另一个图示之上定义。我们定义

$T_{0^\vee} = T_1^{-1} T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} T_n T_{n-1} \cdots T_1 =$  . (2.3)

于是， H_n 的 Jucys–Murphy 元定义为

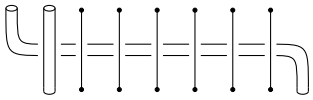
$$X_1 = T_{0^\vee} T_0 \qquad \text{and} \qquad X_{i+1} = T_i X_i T_i \tag{2.4}$$

对于 $i = 1, \ldots n-1$。元素 $X_1, \ldots, X_n$构成 H_n的一组极大交换元。我们令 $W(C_n)$通过 $w \cdot X_i = X_{w(i)}$ 作用于 $\{X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}\}$，其中 $w \in W$和 $i = \pm 1, \ldots, \pm n$，并约定 $X_{-i} = X_i^{-1}$。于是， H_n 的中心为

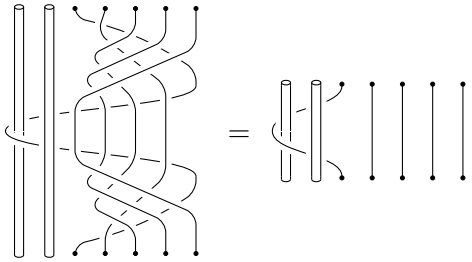
$$Z(H_n) = \mathcal{R}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]^{W(C_n)},$$

关于 X_1、……、 X_n 且在 $W(C_n$的作用下保持对称的 Laurent多项式。正如我们将在第 3 节中看到的，我们根据 Jucys–Murphy 元的作用，对大部分表示论 H_n （以及重要的商代数）进行了分类。第 3 节中特别关注的是经校准的 表示——即 X_1、……、 X_n 同时

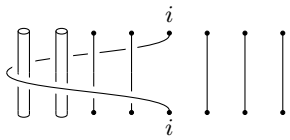
可对角化的有限维简单表示。因此，采用一种突出这些元素交换结构的图示呈示，很快就变得方便得多；具体做法是通过对右侧的极点进行共轭，将其移至左侧

$\sigma =$  . (2.5)

特别地，我们有

$T_{0^\vee} =$ 

因此（由方程（2.4））X_i 可以如下图示

$X_i =$  (2.6)

对于 $i = 2, \ldots, n$。如 [DR25b，注 23], 所述，通常用元素 $T_{0^\vee}$替换生成元 T_n，注意后者也满足以下关系

$$T_{0^\vee}T_i = T_iT_{0^\vee} \qquad T_1T_{0^\vee}T_1T_{0^\vee} = T_{0^\vee}T_1T_{0^\vee}T_1 \qquad (T_{0^\vee} - q_n)(T_{0^\vee} + q_n^{-1}) = 0 \tag{2.7}$$

对于所有 $i > 1$。

2.2. **双边界 Temperley–Lieb 代数**。对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in \mathcal{R}^\times$，定义

$$[k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \quad \text{and} \quad [\![x]\!] = x + x^{-1}, \tag{2.8}$$

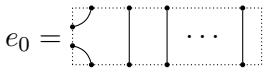
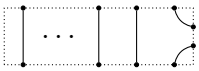
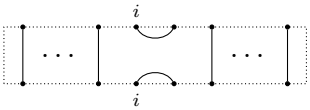
使得 $[\![q^k]\!] = [2k]/[k]$。定义 $e_i = T_i - q_i$（再次地，其中 $q_i = q$对于 $i = 1, \ldots, n-1$）。[1] 注意，二次关系 $(T_i - q_i)\ (T_i + q_i^{-1})\ = 0$由（2.1）给出，等价于

$$e_i^2 = -[\![q_i]\!]e_i. \tag{2.9}$$

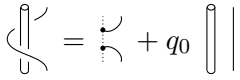
我们将双边界 Temperley–Lieb 代数 2TL$_n$定义为 H_n 关于以下关系的商

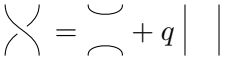
$$e_1e_0e_1 = [\![q_0q^{-1}]\!]e_1 \quad e_{n-1}e_ne_{n-1} = [\![q_nq^{-1}]\!]e_{n-1} \quad e_ie_{i+1}e_i = e_i \quad e_{i+1}e_ie_{i+1} = e_{i+1} \tag{2.10}$$

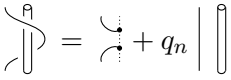
对于 $i = 1, \ldots, n-2$。随后，我们可以将 2TL$_n$ 的元素与具有两侧壁的 Temperley–Lieb图对应起来，记作

$e_0 =$  $e_n =$  $e_i =$ 

对于 $i = 1, \ldots, n-1$。特别地，我们可以通过局部skein型关系在辫图与 Temperley–Lieb图之间进行转换；对于生成元，这可以表示如下

$T_0 = e_0 + q_0,$ 

$T_i = e_i + q,$ 

$T_n = e_n + q_n,$ 

我们请参阅 [DR25a，§3。3] 其中介绍了由（2.10）推出的一些关键图示关系。

现在我们回顾双边界 Temperley–Lieb 代数的图示基的构造。取一个矩形，其上边和下边各有 n 个标记点，左侧和右侧各有偶数个标记点。我们用不相交弧连接成对的标记点，每个标记点恰好使用一次。允许用水平线连接左侧和右侧

[1]我们已将 $a = a_0 = a_n = 1$ 从 [DR25a]。

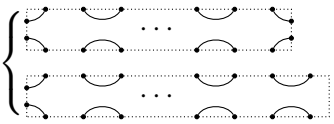
。如果一个图示中没有任何弧的两个终点都位于矩形左侧，或都位于矩形右侧，我们就称该图示为约化的。

命题 2.1 ([dGN09，命题 3。5])。 所有约化图构成双边界 *Temperley–Lieb* 代数（无限维）的基。

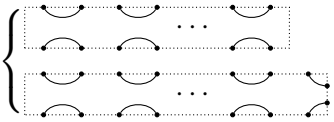
与 [dGN09，§3.2], 类似，我们定义双边界 Temperley–Lieb 代数中的以下元素

$$I_0 = \prod_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} e_{2i} \qquad I_1 = \prod_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} e_{2i-1}$$

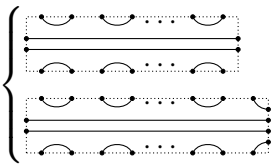
可将其可视化如下

$I_0 =$  (2.11)

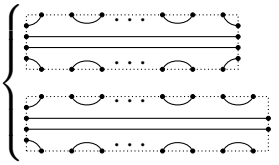
and

$I_1 =$  (2.12)

并且我们注意到，元素 I_0 和 I_1 是拟幂等元。将这些元素相乘，可得到横跨整个图示宽度的水平股线，如下所示

$I_1 I_0 I_1 =$ 

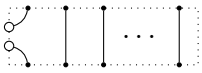
and

$I_0 I_1 I_0 =$ 

类似于将两个极点放置在辫图左侧的做法，我们可以将e_n 替换为

$$e_{0^\vee} = T_{0^\vee} - q_n = (T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}) e_n (T_{n-1} \cdots T_1), \tag{2.13}$$

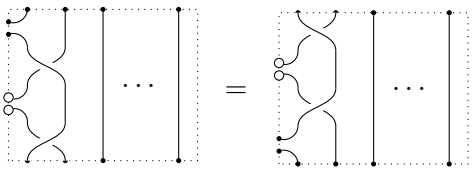
（与（2.3））对比。以图示方式识别

$e_0^\vee =$ .

虽然 e_0 和 $e_{0^\vee}$ 不交换，因为 $T_0(T_1 T_{0^\vee} T_1^{-1}) = (T_1 T_{0^\vee} T_1^{-1}) T_0$，但我们确实有

$$e_0 (T_1 e_{0^\vee} T_1^{-1}) = (T_1 e_{0^\vee} T_1^{-1}) e_0,$$

这可以用图示表示如下

 (2.14)

引理 2.2。

1。对于偶数 n，我们令 $\hat{} \; I_0 = e_0 e_2 \cdots e_{n-2}$和 $I_1^\vee = T_1 e_{0^\vee} T_1^{-1} e_3 \cdots e_{n-1}$。我们有

$$I_0 = \frac{-1}{q_0 + q_0^{-1}} \hat{I}_0 I_1^\vee \hat{I}_0.$$

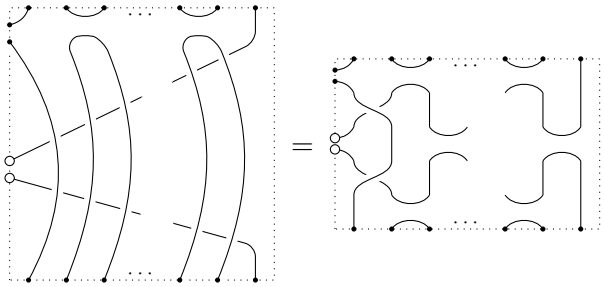
2. 当 n 为奇数时，令 $\hat{} \; I_1 = e_1 e_3 \cdots e_{n-2}$ 和 $I_0^\vee = e_{0^\vee} e_2 \cdots e_{n-1}$。我们有

$$I_1 = \hat{I}_1 I_0^\vee \hat{I}_1.$$

证明。当 n 为偶数时，我们有

$$I_0 = e_0e_2\dots e_{n-2}e_n = e_0e_2\dots e_{n-2}(T_{n-1}\cdots T_1)e_{0^\vee}(T_1^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1}) \tag{2.15}$$

其中，式（2.15）右侧可图示如下



(2.16)

and 等式由同痕直接得出。现在，式（2.16）右侧等于

$$\begin{aligned}
&(e_0e_2\cdots e_{n-2})(T_1e_{0^\vee}T_1^{-1}e_3e_5\cdots e_{n-1})(e_2\cdots e_{n-2})\\
=&\tfrac{-1}{q_0+q_0^{-1}}(e_0^2e_2\cdots e_{n-2})(T_1e_{0^\vee}T_1^{-1}e_3e_5\cdots e_{n-1})(e_2\cdots e_{n-2})\\
=&\tfrac{-1}{q_0+q_0^{-1}}(e_0e_2\cdots e_{n-2})(T_1e_{0^\vee}T_1^{-1}e_3e_5\cdots e_{n-1})(e_0e_2\cdots e_{n-2})\\
=&\tfrac{-1}{q_0+q_0^{-1}}\hat{I}_0I_1^\vee\hat{I}_0,
\end{aligned}$$

其中，倒数第二个等式由式（2.14）得出。因此，当 n 为偶数时，结论成立；当 n 为奇数时，计算过程类似。□

2.3. **辛 blob 代数**。令 Z 表示中心元 $Z = X_1 + \cdots + X_n + X_1^{-1} + \cdots + X_n^{-1} \in Z(H_n$。如 [DR25a，推论 3.3], 所示，我们有

$$I_1I_0I_1 = \varkappa I_1 \qquad I_0I_1I_0 = \varkappa I_0, \tag{2.17}$$

其中

$$\varkappa = \begin{cases} \frac{1}{[n]}Z - [\![q_0q_nq^{-1}]\!] & \text{if } n \in 2\mathbb{Z}, \text{ and} \\ \frac{1}{[n]}Z - [\![q_0q_n]\!] & \text{if } n \in 1+2\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.18}$$

定义 2.3 ([dGN09，定义 3.6])。将中心元 $\varkappa \mapsto \kappa \in \Bbbk(q, q_0, q_n)$特化后，我们定义辛 blob 代数，$B_n(\kappa)$，其为 $2\mathrm{TL}_n$ 关于以下关系的商

$$I_0I_1I_0 = \kappa I_0 \qquad I_1I_0I_1 = \kappa I_1. \tag{2.19}$$

我们强调，任意元素 $\varkappa \in Z(2\mathrm{TL}_n)$ 在每个有限维单模 $2\mathrm{TL}_n$-模上都作用为标量。因此，为了理解所有有限维单模 $2\mathrm{TL}_n$-模，只需理解 $B_n(\kappa)$ 的有限维单模，其中 κ。

注 2.4。在 [MGP07], *Green–Martin–Parker* 定义了一种图示代数"辛 *blob* 代数"，记作 $B_n(\delta, \delta_L, \delta_R, \kappa_L, \kappa_R, \kappa_{LR})$。对于可逆参数

$$\begin{array}{ccc} \delta = -(q+q^{-1}) & \delta_L = -(q_0+q_0^{-1}) & \delta_R = -(q_n+q_n^{-1}) \\ \kappa_L = q_0q^{-1} + qq_0^{-1} & \kappa_R = q_nq^{-1} + qq_n^{-1} & \kappa_{LR} = \kappa. \end{array}$$

已证明 $B_n(\delta, \delta_L, \delta_R, \kappa_L, \kappa_R, \kappa_{LR})$ 与 $B_n(\kappa)$ 同构，见 [GMP12，定理 3.4]。

3. Calibrated representations symplectic blob algebras

本节中，我们将仅在一般域上考察第 2 节中的代数 $\mathcal{R} = \Bbbk(q, q_0, q_n)$。对于所有这些代数，标定模可以定义为有限维简单模，且其上的 Jucys–Murphy 元 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 同时可对角化。从现在起，我们将使用参数

$$\alpha_1 = q_0q_n \qquad \text{and} \qquad \alpha_2 = -q_0q_n^{-1}. \tag{3.1}$$

3.1. **标定 2TL$_n$-模的组合学。** 本小节的所有内容均为对以下结果的回顾： [DR25b] 和 [DR25a，定理 4。3]。我们将剩余 定义为一个 n-元组$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n) \in (\mathcal{R}^\times)^n$。群 $W(C_n)$ 通过以下方式作用于剩余：

$$w \cdot (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\gamma_{w^{-1}(1)}, \dots, \gamma_{w^{-1}(n)}), \quad \text{writing } \gamma_{-i} = \gamma_i^{-1}.$$

我们用 $\mathcal{R}_\gamma$ 表示 $\mathcal{R}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ 的一维表示，其中 X_i 的作用为 $\gamma_i \in \mathcal{R}$。对应于 γ 的主系列模定义为模

$$M(\gamma) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{R}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]}^{H_n}(\mathcal{R}_\gamma)$$

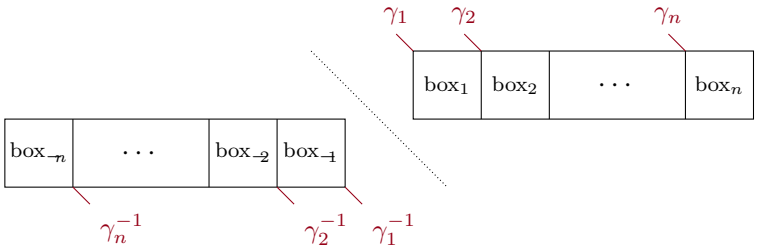
且该模的维数为 $|W(C_n)| = 2^n n!$。注意，若 γ 和 γ' 位于同一个 $W(C_n)$-轨道中，则 $M(\gamma) \cong M(\gamma')$。

对于一般参数，校准的 2TL$_n$-模的分类包括：首先对校准的 H_n-模进行分类；然后确定其中哪些直和项可通过商映射因子化到 2TL$_n$。第一部分是 [DR25b], 的重要内容，既可用斜局部区域（反射群 W 中在 γ上具有特定行为的元素）来描述；在条件良好的情况下，也可用带标记的方格排列及其对应的杨表推广形式来描述。第二部分见 [DR25a，定理 4。3]。现在我们回顾所需的背景知识，这些内容取自 [DR25b] 和 [DR25a，定理 4。3]。

首先，在（2.10）的商下仍保留校准子模的主系列模（在同构意义下）具有以下形式

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots, \gamma_n) = (\gamma_1, \gamma_1 q^2, \gamma_1 q^4, \dots, \gamma_1 q^{2n-2}). \tag{3.2}$$

此外， H_n-直和项 $M(\gamma)$中仍然保留的部分，可以通过特定的方格排列组合来概括，下面我们回顾这一组合。对于余数 γ ，如（3.2）所示，我们关联一个由 $2n$ 个方格组成的两行（杨）图，其定义如下



令方格$_i$ 为余数 γ_i对应的方格。我们将记录一个余数是否等于某个特殊点，也就是说，是否为 $\gamma_i \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$，方法是在方格$_i$ 的西北方放置一颗珠子，并在方格$_{-i}$的东南方放置一颗珠子。我们称此图为与 （两行）形状相关联的 γ。例如，当 $n = 2$时，共有九种这样的形状，如图1所示。

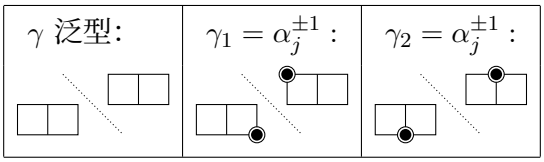


FIGURE 1. 对于 $n = 2$ ，九种可能的双行形状（其中 $9 = 1 + 2^2 + 2^2$ 对于$j = 1$，2）。

注3.1. 若将此组合模型直接与 [DR25b、DR25a], 的组合模型进行比较，便会发现一些显著的简化。特别是， [DR25a、§4] 中所需的其他标记排列在此处均被省略。之所以能够如此，是因为参数 q、α_1和 α_2的 $B_n(\kappa)$ 半单性所带来的一般性条件。具体来说，这些参数的条件意味着：*(1)* 任何相关形状的各行都不会重叠；*(2)* 任意给定的形状都不会同时与剩余 α_1 和 α_2相交。因此，对于任意带标记的形状，我们总能选择 γ_1 ，使对应行中的标记位于一个方格的西北侧。

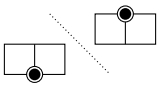
定义 3.2. 与 γ 相关联的（二行）形状的一个杨表是一个双射函数

$$\mathsf{t} : \{-n, \dots, -1, 1, \dots n\} \to \{-n, \dots, -1, 1, \dots n\},$$

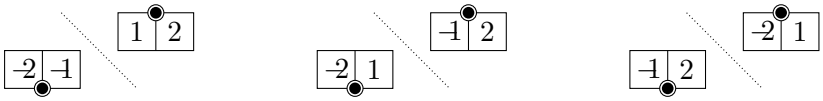
可看作是在方格$_i$ 中填入 $\mathsf{t}(i)$。如果杨表满足以下条件，则称其为标准杨表： *g:*

对称性：对于所有 $-n \leqslant i \leqslant n$，都有$\mathsf{t}(i) = -\mathsf{t}(-i)$。邻接性：对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有$\mathsf{t}(i) < \mathsf{t}(i+1)$。珠子：如果对于 $i \geqslant 1$ 而言，方格$_i$ 的右侧有一颗珠子，则$\mathsf{t}(i) > 0$。

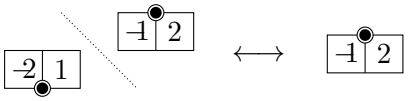
例 3.3。 例如，设 $\gamma = (\alpha_1 q^{-2}, \alpha_1)$，其对应的杨氏图如下



这里我们注意到，珠子位于方格的西北角，该方格的剩余是特殊点α_1。形状为 γ 的标准杨表如下



由于形状和标准杨表都具有旋转对称性，并且 $\{q^{2\ell}\gamma_1 \mid \ell = 0、\dots\dots、 n-1\}$ 均不同于 $\{q^{-2\ell}\gamma_1^{-1} \mid \ell = -1, 0, \dots, n-1\}$，因此只需处理置于 γ处的半个形状。例如，



(3.3)

给定一个杨表 t，填入条目 i 的方格具有剩余 $\gamma_{\mathsf{t}^{-1}(i)}$。为简洁起见，我们设

$$\gamma_i^{\mathsf{t}} := \gamma_{\mathsf{t}^{-1}(i)} \qquad \gamma_{-i}^{\mathsf{t}} := (\gamma_i^{\mathsf{t}})^{-1}. \tag{3.4}$$

$W(C_n)$ 对剩余的作用可以自然地记录在杨表上，即对于$w \in W(C_n)$， $w \cdot \mathsf{t}$ 是由 $(w \cdot \mathsf{t})(i) = w \cdot (\mathsf{t}(i))$ 确定的杨表，其中 $-n \leqslant i \leqslant n$。

定理 3.4 ([DR25b，定理 3.3], [DR25a，定理 4.1])。 *2TL* 的校准表示由以下元素标记：$2\mathrm{TL}_n$如 γ（3.2），满足 $\gamma_i \neq \pm 1$ 对所有 $i = 1, \dots, n$。标定模 $N(\gamma)$ 的基为

$$\{v_{\mathsf{t}} \mid \mathsf{t} \textit{ is a standard tableau of shape } \gamma\},$$

作用由下式给出

$$\begin{aligned}
X_i v_{\mathsf{t}} &= \gamma_i^{\mathsf{t}} v_{\mathsf{t}} && \textit{for } i = 1, \dots, n; \\
T_i v_{\mathsf{t}} &= [T_i]_{\mathsf{t}} v_{\mathsf{t}} + \sqrt{-([T_i]_{\mathsf{t}} - q)([T_i]_{\mathsf{t}} + q^{-1})}\; v_{s_i \mathsf{t}} && \textit{for } i = 1, \dots, n-1; \\
T_0 v_{\mathsf{t}} &= [T_0]_{\mathsf{t}} v_{\mathsf{t}} + \sqrt{-([T_0]_{\mathsf{t}} - q_0)([T_0]_{\mathsf{t}} + q_0^{-1})}\; v_{s_0 \mathsf{t}}; &&
\end{aligned}$$

其中

$$[T_i]_{\mathsf{t}} = \frac{q - q^{-1}}{1 - \gamma_i^{\mathsf{t}} \gamma_{-(i+1)}^{\mathsf{t}}} \qquad [T_0]_{\mathsf{t}} = \frac{(q_0 - q_0^{-1}) + (q_n - q_n^{-1})\gamma_{-1}^{\mathsf{t}}}{1 - (\gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2}$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant n$。

有人可能会担心， $s_i \cdot \mathsf{t}$ 不一定是标准的，因此 $v_{s_i \mathsf{t}}$ 可能不是 $N(\gamma)$ 的基中的元素；然而，在上述每个公式中，$v_{s_i \mathsf{t}}$ 的系数恰好在$s_i \cdot \mathsf{t}$ 不标准时为 0。

记 $Q_0 = q_0 - q_0^{-1}$和 $Q_n = q_n - q_n^{-1}$，通过一系列直接计算可以得到以下有用的恒等式

$$[T_0]_{\mathsf{t}} - q_0 = \gamma_{-1}^{\mathsf{t}} \left(\frac{(q_0 \gamma_{-1}^{\mathsf{t}} - q_0^{-1} \gamma_1^{\mathsf{t}}) + Q_n}{1 - (\gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2} \right) \qquad [T_0]_{\mathsf{t}} + q_0^{-1} = \gamma_{-1}^{\mathsf{t}} \left(\frac{(q_0 \gamma_1^{\mathsf{t}} - q_0^{-1} \gamma_{-1}^{\mathsf{t}}) + Q_n}{1 - (\gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2} \right).$$

因此（假设如我们所做的那样， $\gamma_1^{\mathsf{t}} \neq 0$），我们有

(*i*) $[T_0]_{\mathsf{t}} - q_0 = 0$ 当且仅当 $\gamma_1^{\mathsf{t}} = \pm q_0 q_n^{\pm 1} = \alpha_1$ 或 α_2;
(*ii*) $[T_0]_{\mathsf{t}} + q_0^{-1} = 0$ 当且仅当 $\gamma_1^{\mathsf{t}} = \pm q_0^{-1} q_n^{\mp 1} = \alpha_1^{-1}$或 α_2^{-1}。
特别地，这些恰好是使 $\mathsf{t}^{-1}(1)$ 成为标记盒的条件。

现在我们也可以着手研究 $T_{0^\vee} = X_1 T_0^{-1} = X_1(T_0 - Q_0)$ 的作用。为此，直接计算可得

$$[T_0]_{\mathsf{t}} - Q_0 = \gamma_{-1}^{\mathsf{t}} \left(\frac{Q_n + Q_0 \gamma_{-1}^{\mathsf{t}}}{1 - (\gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2} \right) \tag{3.5}$$

$$([T_0]_{\mathsf{t}} - q_0)([T_0]_{\mathsf{t}} + q_0^{-1}) = \frac{(\gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2}{1 - (\gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2} \left(Q_0^2 + Q_k^2 - (\gamma_1^{\mathsf{t}} - \gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2 + Q_0 Q_k (\gamma_1^{\mathsf{t}} + \gamma_{-1}^{\mathsf{t}}) \right). \tag{3.6}$$

这意味着

$$T_0^{-1} v_{\mathsf{t}} = ([T_0]_{\mathsf{t}} - Q_0) v_{\mathsf{t}} + \sqrt{-([T_0]_{\mathsf{t}} - q_0)([T_0]_{\mathsf{t}} + q_0^{-1})}\; v_{s_0 \mathsf{t}},$$

因此

$$\begin{aligned} T_{0^\vee} v_{\mathsf{t}} &= X_1 T_0^{-1} v_{\mathsf{t}} \\ &= X_1([T_0]_{\mathsf{t}} - Q_0) v_{\mathsf{t}} + X_1 \sqrt{-([T_0]_{\mathsf{t}} - q_0)([T_0]_{\mathsf{t}} + q_0^{-1})}\; v_{s_0 \mathsf{t}} \\ &= [T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} v_{\mathsf{t}} + \gamma_{-1}^{\mathsf{t}} \sqrt{-([T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} - q_n)([T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} + q_n^{-1})}\; v_{s_0 \mathsf{t}}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中我们可以明确计算出系数

$$[T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} = \frac{Q_n + Q_0 \gamma_{-1}^{\mathsf{t}}}{1 - (\gamma_{-1}^{\mathsf{t}})^2}. \tag{3.8}$$

最后一步是将（3.5）与以下内容结合起来：

$$([T_0]_{\mathsf{t}} - q_0)([T_0]_{\mathsf{t}} + q_0^{-1}) = ([T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} - q_n)([T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} + q_n^{-1}),$$

由于 $q_0 \leftrightarrow q_n$ 在（3.6）右侧具有对称性（或者也可以直接展开两边并进行比较）。和之前一样，我们有

(*i*) $[T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} - q_n = 0$ 当且仅当 $\gamma_1^{\mathsf{t}} = \pm q_0^{\pm 1} q_n = \alpha_1$ 或 α_2^{-1};
(*ii*) $[T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}} + q_n^{-1} = 0$ 当且仅当 $\gamma_1^{\mathsf{t}} = \pm q_0^{\mp 1} q_n^{-1} = \alpha_1^{-1}$或 α_2。

3.2. **校准的 $B_n(\kappa)$-模。** 本节的目标是分类哪些校准的 $2\mathrm{TL}_n$-模进一步通过商映射因子化到 blob 代数 $B_n(\kappa)$，见定义 2.3。在商映射 $B_n(\kappa)$ 后仍然成立的模，是指其中满足以下条件的模：要么 $\varkappa$ 的作用为 $\kappa \in \mathcal{R}$，要么 I_0 和 I_1 的作用均为 0。特别地，我们要分类那些满足以下条件的 $N(\gamma)$:

(*i*) 元素 $\varkappa$ 来自（2.18）的作用为固定的 κ；或者（*ii*）至少有一个 e_0、e_2、……的作用为 0，且至少有一个 e_1、e_3、……的作用为 0。

根据 [DR25a，命题 4.4],第一种情况恰好在以下条件成立时发生

$$\kappa = [\![\gamma_1 q^{n-1}]\!] - \begin{cases} [\![\alpha_1 q^{-1}]\!] & \text{when } n \text{ is even, and} \\ [\![\alpha_1]\!] & \text{when } n \text{ is odd.} \end{cases} \tag{3.9}$$

回顾一下，我们是在一般情形下工作，即在域 $\Bbbk(q, q_0, q_n)$ 上；此外，我们假设 κ 如（3.9）所示，其中某个 γ_1 满足 $\gamma_1 \notin \pm q^{\mathbb{Z}}$ 且 $\gamma_1 \notin \alpha_i^{\pm 1} q^{2\mathbb{Z}}$。本节余下部分将探讨第二种情形：对那些 I_0 和 I_1 作用为 0 的标定模进行分类，并证明以下命题。

命题 3.5。 设 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ 满足 $\gamma_i = q^{2(i-1)}\gamma_1$，并考虑 $2\mathrm{TL}_n$-模 $N(\gamma)$。那么，当且仅当以下情形之一成立时，$N(\gamma)$ 也是一个标定 $B_n(\kappa)$-模。

(*I*) γ_1 与 κ 满足（3.9），此时 $N(\gamma)$ 是 2^n维的；或（*II*）存在某个 $i \leq (n+1)/2$ 使得$\gamma_i \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$，对于较小的 i 还需满足以下一些附加限制：

- 若 $i = (n+1)/2$，则 $\gamma_i = \alpha_1$。
- 如果 $i = n/2$，那么 $\gamma_i \neq \alpha_1^{-1}$。

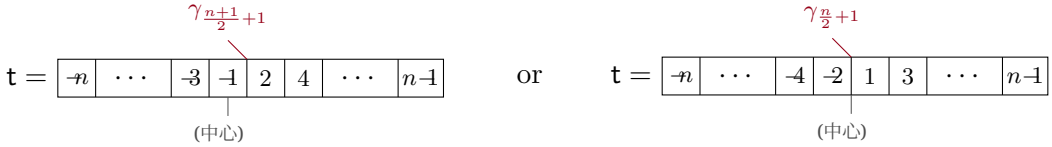
此外，这还提供了一组完备的非同构简单 B_n（κ）-模。

在本节余下部分中，假设我们不处于情形（I），也就是说， $\varkappa$ 不通过 $N(\gamma)$ $\kappa \in \Bbbk$作用。正如我们将在下面的引理中看到的，这必然会将我们的搜索范围缩小到那些标有珠子的形状；特别是，它们必然标记在最前面的 $n/2$个方格之一上。为证明这一点，回想一下 $e_0 = T_0 - q_0$， $e_{0^\vee} = T_{0^\vee} - q_n$以及 $e_i = T_i - q$对于 $i = 1$，……， $n-1$。因此，从定理3.4 (以及该定理之后的计算)我们可以看出

$$\begin{aligned} e_0 v_{\mathsf{t}} = 0 \quad & \text{当且仅当} \quad \gamma_1^{\mathsf{t}} \in \{\alpha_1, \alpha_2\}, \\ e_{0^\vee} v_{\mathsf{t}} = 0 \quad & \text{当且仅当} \quad \gamma_1^{\mathsf{t}} \in \{\alpha_1, \alpha_2^{-1}\}, \\ e_i v_{\mathsf{t}} = 0 \quad & \text{当且仅当} \quad \gamma_i^{\mathsf{t}} (\gamma_{i+1}^{\mathsf{t}})^{-1} = q^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

引理 3. **6.** 如果 I_0和 I_1都以 (γ) 上的 0 作用，则对于某个 $i \leq (n+1)/2$，有 $\gamma_i \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$。

证明。 考虑交错杨氏图表



分别对于 n 为奇数或偶数的情形。如果对于所有 $i \leq (n+1)/2$， $\gamma_i \notin \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$，则此杨表是标准的；并且对于所有 $j = 1, \ldots n-1$， $e_j v_{\mathsf{t}} \neq 0$。因此，如果 n 是偶数，则

$$I_1 = e_1 e_3 \ldots e_{n-1} \quad \text{does not act by 0 on } v_{\mathsf{t}}.$$

如果 n 为奇数，那么由于

$$\gamma_1^{\mathsf{t}} = \gamma_{\frac{n+1}{2}}^{-1} \notin \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\},$$

我们有 $e_0 v_{\mathsf{t}} \neq 0$。因此 $I_0 = e_0 e_2 \cdots e_{n-1}$不以 0 作用。 □

鉴于 $n = 1$ 和 $n = 2$的特殊情况，我们现在花些时间考虑小秩情形。

例 3.7。 对于 $n = 1$，我们有 $I_0 = e_0$ 以及 $I_1 = e_1 = e_{0^\vee}$。因此，根据 (3.10)，我们仅需考虑来自带标记形状的一维模：

$$N(\alpha) = \mathbb{C} v_{\mathsf{t}} \qquad where \qquad \mathsf{t} = \overset{\alpha}{\boxed{1}}$$

对于 $\alpha \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$。此外， $I_0 v_{\mathsf{t}} = 0$ 当且仅当 $\alpha = \alpha_1$ 或 α_2；并且 $I_1 v_{\mathsf{t}} = 0$ 当且仅当$\alpha = \alpha_1$ 或 α_2^{-1}。因此，恰好存在一个同时湮灭于 I_0 和 I_1的 2TL_1-模，即：$\Delta(\alpha_1)$。对于 $n = 2$、 $I_0 = e_0 e_2$ 和 $I_1 = e_1$同样如此。但唯一一个被 e_1 湮灭的 $N(\gamma)$ 是

$$N((\alpha, q^2\alpha)) = \mathbb{C} v_{\mathsf{t}}, \qquad where \qquad \mathsf{t} = \boxed{1}\boxed{2}.$$

例如，在 $N((q^{-2}\alpha, \alpha))$ 中，这个杨表

$$\mathsf{t} = \boxed{-1}\boxed{2}$$

是标准的，且 $I_1 v_{\mathsf{t}} \neq 0$。出于同样的原因，如果 γ 未标记， $N(\gamma)$ 不会被 I_1 消去。

现在我们可以证明命题3.5。

命题 *3.5* 的证明。 （I）部分由 [DR25a，命题 4 得出。4], 因此考虑（II）部分。正如引理 3.6中所见，我们可以将讨论限制在满足以下条件的 γ：其中 $\gamma_i \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$ 对于某个 $i \leqslant (n+1)/2$。
情况： $i < n/2$。这里，对于形状为 γ 的任意标准杨表 t，只要足够多的方格 $1, \ldots, n$ 填入正值，就能确保 t 满足以下两项条件：

- 至少存在一对 $(2j, 2j+1)$，使得 $\mathsf{t}^{-1}(2j+1) = \mathsf{t}^{-1}(2j) + 1$ （填有$2j$ 和 $2j+1$ 的方格位于相邻对角线上），因此 $e_{2j} v_{\mathsf{t}} = 0$。于是 $N(\gamma)$ 被 I_0 消去。
- 至少存在一对 $(2j-1,\ 2j)$，使得 $\mathsf{t}^{-1}(2j) = \mathsf{t}^{-1}(2j-1) + 1$ （填有$2j-1$ 和 $2j$ 的方格位于相邻对角线上），此时 $e_{2j-1} v_{\mathsf{t}} = 0$。因此 $N(\gamma)$ 也被 I_1 消去。

情形： n **奇数且** $i=(n+1)/2$。同样，可以运用鸽巢论证证明，对于上述几乎标准的杨表 t，$I_0v_{\mathsf{t}}=I_1v_{\mathsf{t}}=0$。关于 I_0，例外情况是指满足以下条件的标准杨表：

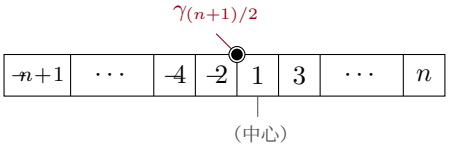
$$e_jv_{\mathsf{t}}\neq 0 \quad \text{for all } j=2,4,\dots,n-1,$$

它们都满足 $\mathsf{t}^{-1}(1)=i$（对角线上的方格 γ_i 填入了 1）。对于图 2 所示的这四个 $n=5$例子，由（3.10）可知，$e_0v_{\mathsf{t}}=0$（因此 $I_0v_{\mathsf{t}}=0$）当且仅当 $\gamma_i=\alpha_1$ 或 α_2。

为了证明 $I_1N(\gamma)=0$ 当且仅当 $\gamma_i=\alpha_1$，我们还得多费些功夫：e_n 在基 $\{v_{\mathsf{t}}\mid \mathsf{t}$ 标准 $\}$ 上的作用并不那么直接。首先注意，存在唯一一个标准杨表 t^*，使得对于所有 $j=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n-1$，都有 $e_jv_{\mathsf{t}^*}\neq 0$：

$$\mathsf{t}_\star^{-1}: 2i-1\mapsto i+(n-1)/2 \quad \text{and} \quad 2i\mapsto i-(n+1)/2.$$

如下图所示。



利用引理 2.2，我们将逐项构造 $I_1=\hat{}I_1I_0^\vee\hat{}I_1$ 在 v_{t^*} 上的作用。再次，可以参照 $n=5$ 图 2中的例子。对于 n 奇数，设 S_{odd} 和 S_{even} 为 W 的子群，定义如下：

$$S_{\text{odd}}=\langle s_1,s_3,\dots,s_{n-2}\rangle \quad \text{and} \quad S_{\text{even}}=\langle s_2,s_4,\dots,s_{n-1}\rangle.$$

$\hat{}$ 未被 $I_1=e_1e_3\cdots e_{n-2}$ 湮灭的杨表集合如下

$$\begin{aligned}F_{\text{odd}}&=\{\text{standard tableaux } \mathsf{t} \text{ of shape } \gamma \mid \mathsf{t}^{-1}(2i)\neq \mathsf{t}^{-1}(2i-1)+1 \text{ for all } i=1,\dots,(n-1)/2\}\\&=S_{\text{odd}}\mathsf{t}_\star.\end{aligned}$$

事实上，S_{odd} 在此轨道上自由作用：条件 $\mathsf{t}^{-1}(2i)\neq \mathsf{t}^{-1}(2i-1)+1$ 恰好保证了$s_{2i-1}\mathsf{t}$ 是标准的。因此，对于任意 $\mathsf{t}\in F_{\text{odd}}$，

$$\hat{I}_1v_{\mathsf{t}}=\textstyle\sum_{w\in S_{\text{odd}}}c_wv_{w\mathsf{t}_\star},$$

对于所有 $w\in S_{\text{odd}}$，存在某个 $c_w\neq 0$。但同样，只有一个标准杨表 $\mathsf{t}_\star$ 不存在位于相邻对角线上的 数对 $(i,\ i+1)$。因此，对于所有 $w\in S_{\text{odd}}-\{\mathsf{id}\}$，我们有 $e_jv_{w\mathsf{t}_\star}=0$，对 $\hat{}$ 所有 $j=2,\ 4,\ \dots,\ n-1$ 都成立。因此，对于任意 $\mathsf{t}\in F_{\text{odd}}$，令 $c=c_{\mathsf{id}}$ 为 I_1v_{t} 中 $v_{\mathsf{t}_\star}$ 的系数，我们有

$$e_2e_4\cdots e_{n-1}\hat{I}_1v_{\mathsf{t}}=e_2e_4\cdots e_{n-1}cv_{\mathsf{t}}=\textstyle\sum_{w\in S_{\text{even}}}cd_wv_{w\mathsf{t}_\star},$$

对于某个 $d_w\neq 0$，对所有 $w\in S_{\text{even}}$。上面的第二个等式可由与上述关于奇置换的类似推理得出：S_{even} $\mathsf{t}_\star$ 中的每个杨表都是标准的，并且 S_{even} 在此轨道上自由作用。

现在，由于 $w(1)=1$ 对所有 $w\in S_{\text{even}}$，由（3.10）可得 $e_{0^\vee}v_{w\mathsf{t}_\star}=0$ 当且仅当 $\gamma_i=\alpha_1$（我们已经假设 $\gamma_i=\alpha_1$，或者 α_2 在上文讨论 I_0 时的情形）。若如此，则对所有 $\mathsf{t}\in F_{\text{odd}}$，

$$I_1v_{\mathsf{t}}=\hat{I}_1I_0^\vee\hat{I}_1v_{\mathsf{t}}=\hat{I}_1(I_0^\vee\hat{I}_1v_{\mathsf{t}})=\hat{I}_1\times 0=0,$$

因此 $I_1N(\gamma)=0$。否则，若 $\gamma_i\neq\alpha_1$，则通过考察 I_1作用所得的最终$\hat{}$展开中 $v_{\mathsf{t}_\star}$ 的系数，可见 $I_1v_{\mathsf{t}_\star}\neq 0$（集合 $S_{\text{odd}}S_{\text{even}}$ 中稳定 $\mathsf{t}_\star$的唯一元素是 1）。因此，$I_0N(\gamma)=I_1N(\gamma)=0$当且仅当 $\gamma=\alpha_1$。

情形： n **为偶数且** $i=\frac{n}{2}$。这种情形与上一种情形非常相似：我们通过考察某个特别杨表在某些作用下的轨道，来处理例外的标准杨表。但现在，由于 e_0 和 e_n 都是 I_0的因子，对 γ_i 的条件变成了包含式而非排除式。

现在可以使用与上文相同的鸽巢论证来证明 $I_1v_{\mathsf{t}}=0$ 对所有标准 t都成立；并且 $I_0v_{\mathsf{t}}=0$ 对大多数标准 t都成立。再者，对于那些例外情形，$e_jv_{\mathsf{t}}\neq 0$ 对所有 $j=2$、4、……、$n-2$都成立，$\mathsf{t}^{-1}(1)=1$。若 $\gamma_i=\alpha_1$ 或 α_2，则问题已解决：在所有这类杨表上，$e_0v_{\mathsf{t}}=0$ 均成立，因此$I_0v_{\mathsf{t}}=0$。否则，我们将逐项研究 $I_0=\hat{}_{[\![q_0]\!]}^{1}I_0I_1^\vee\hat{}I_0$ 的作用。例子见图 3，其中 $n=6$。

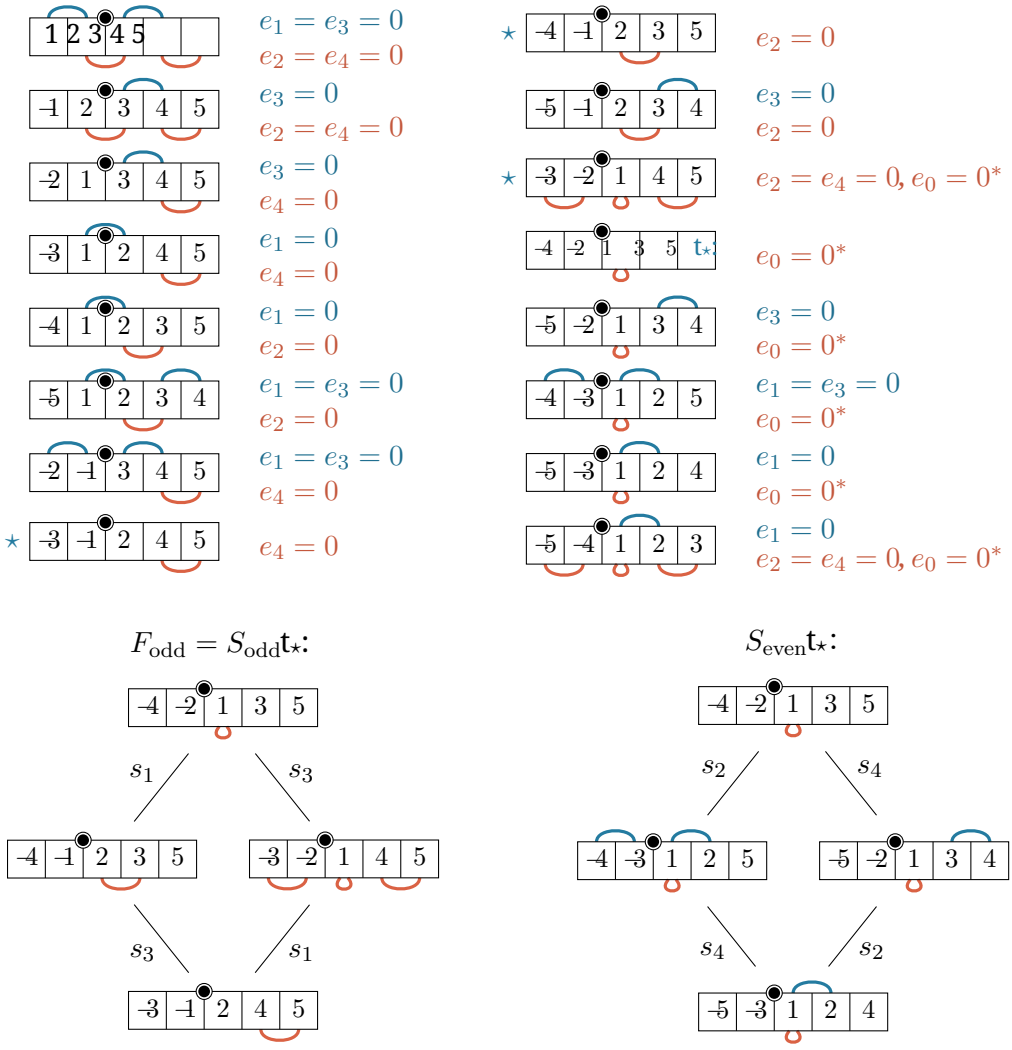
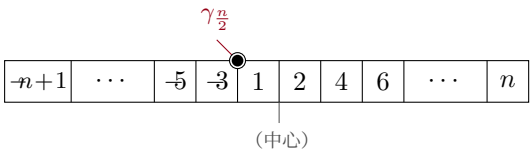


FIGURE 2. 命题 3.5 的证明示例，其中 $n = 5$ 和 $i = \frac{5+1}{2} = 3$。下图展示了形状为 $\gamma = (\beta q^{-4}, \beta q^{-2}, \beta, \beta q^2, \beta q^4)$ 的标准杨表 t。它们根据$e_0, e_1, \ldots, e_4$是否在相应的权向量 v_{t}上作用为 0，标记于 $N(\gamma)$ 中（其中， e_0作用为 0 当且仅当 $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$）。标记为 $\mathsf{t}_\star$的杨表是唯一满足对所有 $j = 1, \ldots, 4$ 均有 $e_j v_{\mathsf{t}_\star} \neq 0$ 的杨表。其他标记为 $\star$的杨表则是 F_{odd}中其余的元素，即对应权向量不被任何奇数 e_{2j-1}湮灭的那些元素。在该列表下方，可以找到 $\mathsf{t}_\star$ 在 $S_{\mathrm{odd}} = \langle s_1, s_3 \rangle$ 以及 $S_{\mathrm{even}} = \langle s_2, s_4 \rangle$的作用下的轨道。

令 $\mathsf{t}_\star$ 为满足 $e_j v_{\mathsf{t}_\star} \neq 0$ 对所有 $j = 2$、3、……、$n-1$ 的唯一形状为 γ 的标准杨表：

$$\begin{aligned} \mathsf{t}_\star^{-1}: \quad 1 &\mapsto \tfrac{n}{2}, \\ 2j &\mapsto j + \tfrac{n}{2} \qquad \text{for } j = 1, \ldots, \tfrac{n}{2}, \text{ and} \\ 2j+1 &\mapsto j - \tfrac{n}{2} \qquad \text{for } j = 1, \ldots, \tfrac{n}{2} - 1. \end{aligned}$$

（在这种情况下，不存在一个标准杨表使得 e_1、……、e_{n-1} 全都作用为 0），我们将其图示如下。



对于 n 偶数，定义

$$S_{\mathrm{odd}} = \langle s_3, s_5, \ldots, s_{n-1} \rangle \quad \text{and} \quad S_{\mathrm{even}} = \langle s_2, s_4, \ldots, s_{n-2} \rangle$$

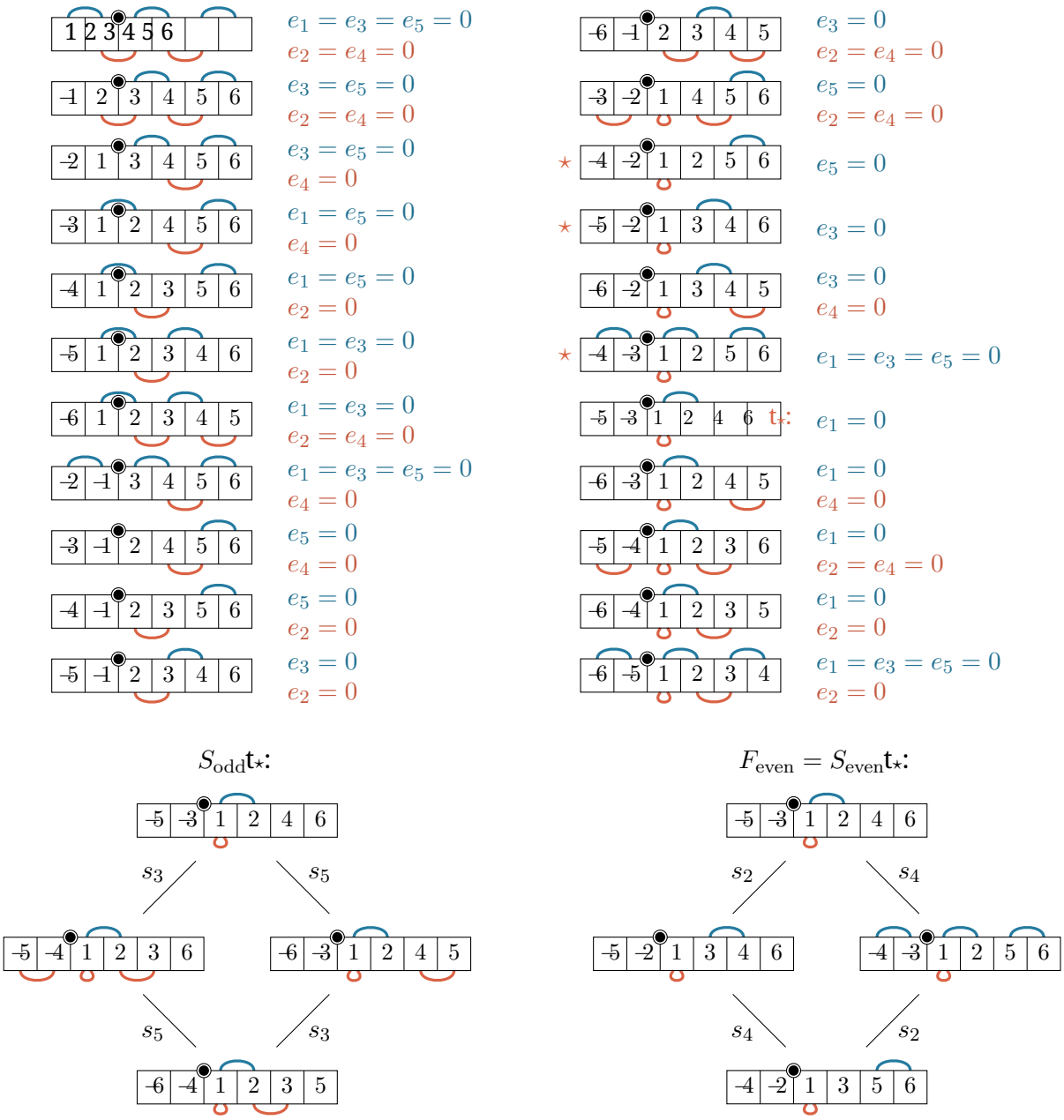


FIGURE 3. 命题 3.5 的证明示例，其中 $n = 6$ 且 $i = \frac{6}{2} = 3$。下方展示的是形状为 $\gamma = (\beta q^{-4}, \beta q^{-2}, \beta, \beta q^2, \beta q^4, \beta q^6)$ 的标准杨表 t。它们标出了 $e_0, e_1, \dots, e_5$ 中哪些元素在相应权向量 v_{t} 上作用为 0，向量属于 $N(\gamma)$（其中 e_0 作用为 0 当且仅当 $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$）。标记为 $\mathsf{t}_\star$ 的杨表是唯一一个对所有 $j = 2$、3、…、5，均满足 $e_j v_{\mathsf{t}_\star} \neq 0$ 的杨表。其余标记为 $\star$ 的杨表，是 F_{even} 中剩下的元素；其对应的权向量不会被任何偶数 e_{2j} 消去。在该列表下方，列出了 $\mathsf{t}_\star$ 在 $S_{\mathrm{odd}} = \langle s_3, s_5 \rangle$ 以及 $S_{\mathrm{even}} = \langle s_2, s_4 \rangle$ 作用下的轨道。

ˆ（注意 $s_1 \notin S_{\mathrm{odd}}$）。我们再次得到，未被 $I_0 = e_0 e_2 \cdots e_{n-2}$ 消去的杨表集合恰好是轨道

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{even}} &= \left\{ \text{standard tableaux } \mathsf{t} \text{ of shape } \gamma \;\middle|\; \mathsf{t}^{-1}(2j+1) \neq \mathsf{t}^{-1}(2j) + 1 \text{ for all } j = 1, \dots, \tfrac{n}{2} - 1 \right\} \\ &= S_{\mathrm{even}}\mathsf{t}_\star; \end{aligned}$$

并且 S_{even} 在该轨道上自由作用。此外，如果 $\gamma_i \neq \alpha_1$ 或 α_2，那么 e_0 在每个 v_{t} 上都以（非零）标量作用，其中 $\mathsf{t} \in F_{\mathrm{even}}$。因此，对于任意 $\mathsf{t} \in F_{\mathrm{even}}$，

$$\hat{I}_0 v_{\mathsf{t}} = \textstyle\sum_{w \in S_{\mathrm{even}}} c_w v_{w \cdot \mathsf{t}},$$

对于所有 $w \in S_{\text{even}}$，存在某个 $c_w \neq 0$。并且对于所有 $\mathsf{t} \in F_{\text{even}} - \{\mathsf{t}_\star\}$，都有 $e_j v_{\mathsf{t}} = 0$，对所有 $j = 3, 5, \ldots, n-1$均成立。因此，对于 $\mathsf{t} \in F_{\text{even}}$，令 $c = c_{\text{id}}$ 为 $v_{\mathsf{t}_\star}$ 在 $I_0 v_{\mathsf{t}}$中的（非零）系数，则有

$$e_3 e_5 \cdots e_{n-1} \hat{I}_0 v_{\mathsf{t}} = e_3 e_5 \cdots e_{n-1} c v_{\mathsf{t}_\star} = \textstyle\sum_{w \in S_{\text{odd}}} c d_w v_{w\mathsf{t}_\star},$$

对某个 $d_w \neq 0$，对所有 $w \in S_{\text{odd}}$.

我们有 $w(1) = 1$ 以及 $w(2) = 2$ 对所有 $w \in S_{\text{odd}}$，因此 $\gamma_1^{w\mathsf{t}_\star} = \gamma_i$ 且 $\gamma_2^{w\mathsf{t}_\star} = q^2\gamma_i$。所以两者都不是$s_0 w\mathsf{t}_\star$ 也不是 $s_1 w\mathsf{t}_\star$ 标准的。由定理 3.4，我们可以得出结论：

$$T_1 e_{0^\vee} T_1^{-1} v_{w\mathsf{t}_\star} = [T_1]_{w\mathsf{t}_\star} \left([T_{0^\vee}]_{w\mathsf{t}_\star} - q_n\right) [T_1]_{w\mathsf{t}_\star}^{-1} v_{w\mathsf{t}_\star} = \left([T_{0^\vee}]_{\mathsf{t}_\star} - q_n\right) v_{w\mathsf{t}_\star},$$

当且仅当 $\gamma_i = \alpha_1$ 或 α_2^{-1}（根据（3.10））时为 0。若是如此，则

$$I_0 v_{\mathsf{t}} = \tfrac{1}{[\![q_0]\!]} \hat{I}_0 I_1^\vee \hat{I}_0 v_{\mathsf{t}} = \tfrac{1}{[\![q_0]\!]} \hat{I}_0 (I_1^\vee \hat{I}_0 v_{\mathsf{t}}) = \tfrac{1}{[\![q_0]\!]} \hat{I}_0 \times 0 = 0,$$

因此 $I_0 N(\lambda_2) = 0$。否则，在由 I_0 作用得到的最终展开式中，$v_{\mathsf{t}_\star}$ 的系数非零（集合 $S_{\text{even}} S_{\text{odd}}$ 中稳定 $\mathsf{t}_\star$ 的唯一元素是 1）。因此，I_0 消去 $N(\gamma)$ 当且仅当 $\gamma_i = \alpha_2^{\pm 1}$ 或 α_1。

非同构简单模的完整列表。最后，很容易看出，我们对校准简单模所用的指标集与 [MGP07中的定理 8.13]构成双射。考察 Jucys–Murphy 元的特征值，也很容易看出这些模两两非同构 X_i，也就是说，比较剩余序列即可。□

将满足 (γ_1 3.9)的 q 乘以某个幂来作平移会比较方便：我们定义 $\vartheta = \gamma_1 q^n$ 当 n 为偶数时，$\vartheta = \gamma_1 q^{n-1}$ 当 n 为奇数时。因此，从现在起，除 q 之外，我们还将使用三个参数α_1、α_2和 ϑ，它们与 q_0、q_n和 κ 的关系为

$$\alpha_1 = q_0 q_n, \quad \alpha_2 = -q_0 q_n^{-1}, \quad \kappa = \begin{cases} [\![\vartheta q^{-1}]\!] - [\![\alpha_1 q^{-1}]\!] & n \in 2\mathbb{Z} \\ [\![\vartheta]\!] - [\![\alpha_1]\!] & n \in 1 + 2\mathbb{Z} \end{cases} \tag{3.11}$$

（见 (3.1) 和 (3.9)。

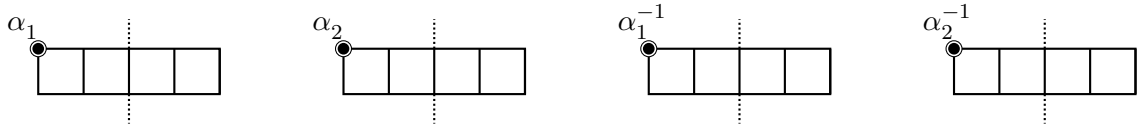
3.3. **形状与标准杨表**。在本文余下部分中，我们固定使用以下记号

$$\Lambda_0 = \{(0, \vartheta)\} \qquad \Lambda_1 = \{(0, \vartheta), (1, \alpha_1)\} \qquad \Lambda_2 = \{(0, \vartheta), (2, \alpha_1), (2, \alpha_2), (2, \alpha_2^{-1})\}$$

以及 $\Lambda_n = \Lambda_{n-2} \cup \{(n, \beta) \mid \beta \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}\}$ 对于 $n > 2$。我们称 Λ_n 中的元素为大小为 n的形状。我们在 Λ_n 上定义如下偏序：对于 $(k_i, \beta_i) \in \Lambda_n$，$(k_1, \beta_1) < (k_2, \beta_2)$ 当且仅当 $k_1 < k_2$。命题 3.5 指出，Λ_n 为具有一般参数的辛 blob 代数的简单模提供了一个指标集；此外，该代数的一组基由形状为 $(k, \beta) \in \Lambda_n$ 的标准杨表对来指标化（由定理 3.4 和 Artin–Wedderburn 理论可得）。

注意，Λ_n 由形状 (k, β) 组成，其中 $0 < k \leqslant n$ 的奇偶性相同，且当 k 较小时，β 受到一些限制，同时还包括特殊形状 $(0, \vartheta)$。我们将形状$\lambda = (k, \beta)$ 视为一排 n 个方格，并在从左向右数第 $(\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + 1)$ 个方格的左上角放置一颗珠子，该方格由 $\beta \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}, \vartheta\}$索引。

例 3.8。对于 $n = 4$ 形状 $((4, \alpha_1)$、$(4, \alpha_2)$、$(4, \alpha_1^{-1})$、$(4, \alpha_2^{-1}))$ 如下所示



以及由 Λ_2 得到的形状为$(2, \alpha_1)$、$(2, \alpha_2)$、$(2, \alpha_2^{-1})$ 和$(0, \vartheta)$，如下图所示



我们回顾一下，形状为 λ 的杨表 t 是用 $\{\pm1,\dots,\pm n\}$ 中的整数填入方格，并且对每个 i 或 $-i$，恰好包含一个等于 $i\in\{1,\dots,n\}$的元素。魏尔群 $W(C_n$通过对方格中元素的作用，在给定形状的所有杨表集合上作用。若杨表 t 是标准的，则其元素从左到右严格递增；此外，若 $\lambda\neq(0,\vartheta)$，则只有珠子左侧的方格可以（但不必）包含负元素。我们将 $\mathsf{Shape}(\mathrm{t})=\lambda\in\Lambda_n$记作。例子请见图 4 。对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}$，我们记作：

$$\mathrm{Std}_n(\lambda)=\{\text{standard tableaux t with } \mathrm{Shape}(\mathrm{t})=\lambda\}$$

并且我们令 $\mathsf{Std}_n=\cup_{\lambda\in\Lambda_n}\mathsf{Std}_n(\lambda)$。

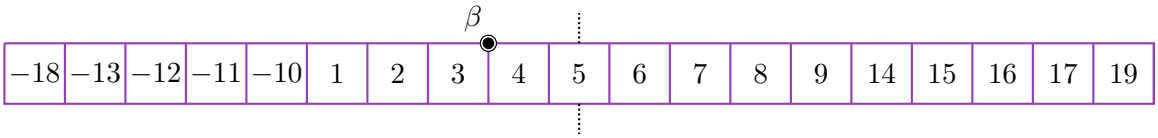


FIGURE 4. 形状为 (k,β) 的标准杨表，适用于 $k=3$ 和 $n=19$。

4. The orientifold quiver Temperley–Lieb algebra

本节中，我们定义主要的代数对象——定向折叠 Temperley–Lieb 代数。我们从定向反射 quiver Hecke 代数出发定义它，并利用上一节关于校准表示的结果，建立它与辛 blob 代数之间的联系。从现在起，我们将参数限定在一个特征不等于 2 的域 $\Bbbk$ 中，并要求满足以下假设。

既定假设。 我们令 q、α_1、α_2、$\vartheta\in\Bbbk^\times$ 和 $q^{2e}=1$，其中某个 $e>2$ 取最小值（允许$e=\infty$）。此外，我们要求 $\alpha_i^{\pm1}$、$\alpha_i^{\pm1}q^{\pm2}$ 是 *12* 个互不相同且不等于 ±1 的点，并且$\vartheta\notin\{\pm1,\alpha_i^{\pm1},\pm q,\pm q^2\}$。

4.1. 定向反射 quiver Hecke 代数。 类型 C 魏尔群 $W_n:=W(C_n)=\langle s_k\mid 0\leqslant k<n\rangle$ 在 $(\Bbbk^\times)^n$ 上按以下方式作用为带符号置换。生成元 s_0 将第一个分量取逆，而对于 $k>0$，生成元 s_k 通过交换第 k 个和第 $(k+1)$ 个分量来作用。我们考虑 $\Bbbk^\times$ 的以下子集：

$$I=\{\alpha_1^{\pm1}q^{2l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\cup\{\alpha_2^{\pm1}q^{2l}\}_{l\in\mathbb{Z}}\cup\{\vartheta^{\pm1}q^{2l}\}_{l\in\mathbb{Z}}.$$

根据命题 3.5，辛 blob 代数的所有 Jucys–Murphy 元 $X_1,\dots,X_n$ 的特征值均属于 I。现在我们回顾本文所关注的分次代数的定义。

定义 *4.1 ([PdW20] 和 [AP23])*。我们定义 $\mathscr{H}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)=\oplus_\Lambda\mathscr{H}_n^\Lambda(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$，其中对于 Λ中的一个 $W(C_n)$-轨道，代数 $\mathscr{H}_n^\Lambda(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$ 是由元素生成的结合 $\Bbbk$-代数

$$\{\psi_a\}_{0\leqslant a\leqslant n-1}\cup\{y_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}\cup\{e_{\underline{i}}\}_{\underline{i}\in\Lambda}$$

满足以下定义关系。我们有交换关系

$\sum_{i\in\Lambda}e_i=1$，$e_ie_j=\delta_{i,\,j}e_i$，$y_ry_s=y_sy_r$，$y_re_i=e_iy_r$，$\psi_a\psi_b=\psi_b\psi_a$ $\psi_0y_t=y_t\psi_0$给出 $0\leqslant a\leqslant b-2$ 和 $t>1$。对于 $0\leqslant a<n$ 和 $1\leqslant b<n$ 以及 $\underline{i}=(i_1,\dots,i_n)\in\Lambda$，我们有

$$\psi_ae_{\underline{i}}=e_{s_a(\underline{i})}\psi_a \tag{4.1}$$

$$(\psi_by_j-y_{s_b(j)}\psi_b)e_{\underline{i}}=\begin{cases}-e_{\underline{i}} & j=b,\ i_b=i_{b+1}\\ e_{\underline{i}} & j=b+1,\ i_b=i_{b+1}\\ 0 & \text{否则}\end{cases} \tag{4.2}$$

$$\psi_b^2e_{\underline{i}}=\begin{cases}0 & i_b=i_{b+1}\\ e_{\underline{i}} & i_{b+1}\notin\{q^2i_b,i_b,q^{-2}i_b\}\\ (y_{b+1}-y_b)e_{\underline{i}} & i_{b+1}=q^2i_b\\ (y_b-y_{b+1})e_{\underline{i}} & i_{b+1}=q^{-2}i_b\,,\end{cases} \tag{4.3}$$

$$(\psi_b\psi_{b+1}\psi_b - \psi_{b+1}\psi_b\psi_{b+1})e_{\underline{i}} = \begin{cases} e_{\underline{i}} & i_b = i_{b+2} = q^{-2}i_{b+1} \\ -e_{\underline{i}} & i_b = i_{b+2} = q^2 i_{b+1} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{4.5}$$

$$(\psi_0 y_1 + y_1\psi_0)e_{\underline{i}} = \begin{cases} 0 & i_1^{-1} \neq i_1 \\ 2e_{\underline{i}} & i_1^{-1} = i_1 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\psi_0^2 e_{\underline{i}} = \begin{cases} 0 & i_1^{-1} = i_1\,, \\ e_{\underline{i}} & i_1 \neq i_1^{-1} \text{ and } i_1^{\pm 1} \notin \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ y_1 e_{\underline{i}} & i_1 \in \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ -y_1 e_{\underline{i}} & i_1^{-1} \in \{\alpha_1, \alpha_2\} \end{cases} \tag{4.7}$$

$$(\psi_0\psi_1\psi_0\psi_1 - \psi_1\psi_0\psi_1\psi_0)e_{\underline{i}} = \begin{cases} 2\psi_0 e_{\underline{i}} & q^2 i_1 = i_2 \in \{\pm 1\} \\ -2\psi_0 e_{\underline{i}} & q^{-2} i_1 = i_2 \in \{\pm 1\} \\ -\psi_1 e_{\underline{i}} & i_2^{-1} = i_1 \in \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ \psi_1 e_{\underline{i}} & i_2 = i_1^{-1} \in \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{4.8}$$

我们用 $\star$ 表示将每个生成元映射到其自身的对合反同构（很容易验证，定义关系在 $\star$作用下保持不变）。

定理 4.2 ([PdW20] 和 [AP23])。 设 $m\colon\ I \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 具有有限支撑。代数 $\mathscr{H}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 的分圆商，模关系 $y^{m(i_1)}e_i = 0$ （对所有 $i \in I^n$ 成立）所得，与双边界 *Hecke* 代数 H_n 的分圆商模关系 $\prod_{i\in I}(X_1 - i)^{m(i)} = 0$所得同构。

定理 4.3 ([PdW20, PdR21])。 代数 $\mathscr{H}_n^\Lambda$具有如下 $\mathbb{Z}$-分次：

$$\deg(e_{\underline{i}}) = 0 \qquad \deg(\psi_b e_{\underline{i}}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i_{b+1} = q^{\pm 2} i_b \\ -2 & \text{if } i_b = i_{b+1}\,, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

$$\deg(y_j e_{\underline{i}}) = 2 \qquad \deg(\psi_0 e_{\underline{i}}) = \begin{cases} -2 & i_1^{-1} = i_1 \\ \delta_{i_1,\alpha_1} + \delta_{i_1,\alpha_1^{-1}} + \delta_{i_1,\alpha_2} + \delta_{i_1,\alpha_2^{-1}} & otherwise \end{cases}.$$

4.2. **更多杨表组合。** 我们用 t_λ 表示 Std 中的以下特定元素$_n(\lambda)$：1 位于带有珠子的方格中，然后将 -2，-4，-6，..... 依次放在其左侧，直到最左边的方格；剩余的整数带正号，并按递增顺序放入剩余方格中。示例见图 5和 6。

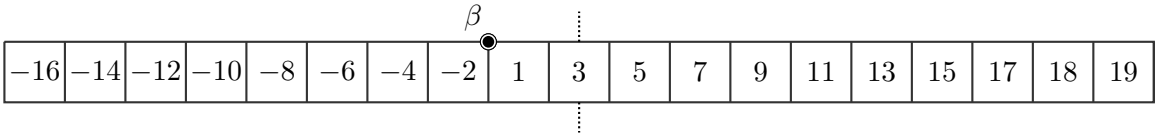


FIGURE 5.杨表 $\mathsf{t}^{(k,\beta)}$ 分别对应 $k = 3$ 和 $n = 19$。我们有 $\mathsf{res}(\mathsf{t}^{(k,\beta)}) = (\beta,\ \beta^{-1}q^2,\ \beta q^2,\ \beta^{-1}q^4,\ \beta q^4,\ \beta^{-1}q^6,\ \beta q^6,$ 等等)。

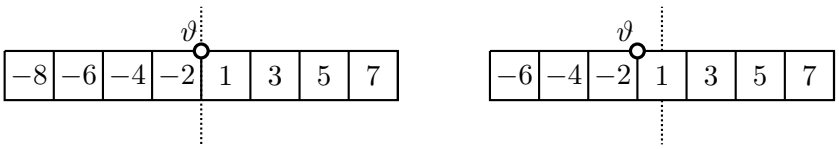


FIGURE 6. 杨表 $\mathsf{t}^{(0,\vartheta)}$ 分别对应 $n = 8$ 和 $n = 7$。

对于任意标准杨表 $\mathsf{t} \in \mathsf{Std}_n(\lambda)$，我们将 $w_\mathsf{t} \in W(C_n)$ 定义为 $\mathsf{t} = w_\mathsf{t}(\mathsf{t}_\lambda)$.

我们如下定义杨表的剩余序列。首先，为 λ 中的每个方格赋予一个内容：将带有珠子的方格的内容设为 β，然后每向右移动一步，内容乘以 q^2；每向左移动一步，内容乘以 q^{-2}。现在，设 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n$，且 $i \in \{1, \dots, n\}$。如果 $+i$ 出现在 t 中，我们将 $\mathrm{res}_i(\mathsf{t})$ 定义为包含 $+i$ 的方格的内容。否则，我们将 $\mathrm{res}_i(\mathsf{t})$ 定义为包含 $-i$ 的方格内容的倒数。最后，令：

$$\mathrm{res}(\mathsf{t}) = (\mathrm{res}_1(\mathsf{t}), \dots, \mathrm{res}_n(\mathsf{t})) \in I^n$$

参见图 5 中的示例。魏尔群 $W(C_n$ 在杨表上的作用，通过剩余序列转化为对 I^n 的作用，其中生成元 s_0 将第一个坐标取逆，而生成元 s_j $(1 \leqslant j \leqslant n-1$ 则交换第 j 个与第 $(j+1)$ 个坐标。

上一节关于一般表示论的结果表明，辛 blob 代数的 Jucys–Murphy 元的共同谱由标准杨表的剩余序列给出，即，

$$\mathrm{Spec}(X_1, \dots, X_n) = \{\mathrm{res}(\mathsf{t}) \mid \mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n\}.$$

对于形状 $(0, \vartheta)$，这需要利用 (3.9) 做一个简短的验证，以确认 (3.11) 确实是 ϑ 与 κ 之间的正确关系。杨表 t_λ 的定义可由它们满足的以下性质证明其合理性。注意，这尤其意味着，$\mathrm{res}(\mathsf{t}_\lambda) = \mathrm{res}(\mathsf{t}_{\lambda'})$ 当且仅当 $\lambda = \lambda'$。

命题 4.4。对于所有 $\lambda \in \Lambda_n$，如果 $\mathrm{res}(\mathsf{t}_\lambda) = \mathrm{res}(\mathsf{u})$，且 $\mathsf{t}_\lambda \neq \mathsf{u} \in \mathrm{Std}_n$，那么 $\mathrm{Shape}(\mathsf{u}) < \lambda$。

˜证明。证明关于一个扩展形状集 Λ_n 的命题稍微方便一些；该集合通过重新允许禁形 $(1, \beta)$（当 $\beta \neq \alpha_1$ 为奇数时）以及禁形 $(2, \alpha_1^{-1})$（当 n 为偶数时）而得到。

作为预备步骤，我们断言，对于 $\lambda = (1, \beta)$，以及 $\mathsf{u} \in \mathrm{Std}_n(\lambda)$，只有当 $\mathsf{u} = \mathsf{t}_\lambda$ 时，才有 $\mathrm{res}(\mathsf{u}) = \mathrm{res}(\mathsf{t}_\lambda)$。事实上，对于 u，n 的位置有两种选择：在右端带一个 $+$ 符号，或在左端带一个 $-$ 符号。对应的两个剩余分别是 βq^{n-1} 和 $\beta^{-1} q^{n-1}$。它们彼此不同，因为 $\alpha_i^{\pm 1}$ 各不相同；由 $\mathrm{res}(\mathsf{u}) = \mathrm{res}(\mathsf{t}_\lambda)$ 可知，n 是最右侧方格中的条目，与 t_λ 中的情形一样。类似地，对于 $n-1$，有两种选择，分别得到剩余 βq^{n-3} 和 $\beta^{-1} q^{n-1}$。它们彼此不同，因为 $\alpha_i^{\pm 1}$ 和 $q^2 \alpha_i^{\pm 1}$ 各不相同。因此，u 中的 $n-1$ 必须像 t_λ 中一样，在左端带一个减号。对所有 $i < n-1$ 重复这一推理，可得 $\mathsf{u} = \mathsf{t}_\lambda$。

现在来检验命题对 $n = 1$ 和 $n = 2$ 是否成立。对于 $n = 1$，利用 $\alpha_i^{\pm 1}$ 和 ϑ 彼此不同这一事实即可立即验证。对于 $n = 2$ 和 $\lambda = (2, \beta)$，同样可由 $\alpha_i^{\pm 1}$ 彼此不同推出。对于 $\lambda = (0, \vartheta)$，我们有 $\mathrm{res}(\mathsf{t}_\lambda) = (\vartheta, \vartheta^{-1} q^2)$，且它必须与以下各项不同：

$$(\beta, \beta q^2) \text{ for all } \beta \in \{\alpha_i^{\pm 1}\}, \quad (\vartheta q^{-2}, \vartheta), \quad (\vartheta^{-1} q^2, \vartheta), \quad (\vartheta^{-1}, \vartheta^{-1} q^2).$$

于是由 $\vartheta^2 \notin \{1, q^2\}$ 和 $q^2 \neq 1$ 可得结论。

接着令 $n \geqslant 3$ 和 $\lambda \in \Lambda_n$，并假设 $\mathrm{res}(\mathsf{t}_\lambda) = \mathrm{res}(\mathsf{u})$，其中 $\mathrm{Shape}(\mathsf{u}) \not< \lambda$。

令 $\lambda = (k, \beta) \in \Lambda_n$，其中 $k \neq 0$，使得 $\mathrm{Shape}(\mathsf{u}) = (c, \beta')$，其中 $c \geqslant k$。首先假设 $k \neq 1$。字母 n 位于 t_λ 的最右端；移除它后，我们得到 $\mathsf{t}_\lambda{\downarrow_{\leqslant n-1}}$ 是由 λ' 与 $\lambda' = (k-1, \beta)$ 构成的。现在注意，从 u 中移除 n 后，$\mathsf{u}{\downarrow_{\leqslant n-1}}$ 是形状为 $(c-1, \beta')$ 或 $(c+1, \beta')$ 的标准杨表。无论哪种情况，其形状都是 $\not< \lambda'$，这与归纳假设矛盾。

若 $k = 1$，我们从 t_λ 中移除 n 和 $n-1$，得到 $\mathsf{t}_\lambda{\downarrow_{\leqslant n-2}} = \mathsf{t}_{\lambda'}$，其中 $\lambda' = (k, \beta) \in \Lambda_{n-2}$。现在从 u 中移除 n 和 $n-1$，除非 u 的形状为 $(1, \beta')$ 且 $n-1$ 和 n 都位于 u 的右端，否则我们总能得到一个大小为 $n-2$ 的标准杨表。除这一情形外，由归纳假设，我们像之前一样得出这是不可能的。在剩余情形中，条件 $\mathrm{res}_n(\mathsf{t}_\lambda) = \mathrm{res}_n(\mathsf{u})$ 意味着 $\beta' = \beta$，于是利用证明开头的预备结果即可得出结论。

最后，令 $\lambda = (0, \vartheta)$。同样地，我们移除 n 和 $n-1$，得到 $\mathsf{t}_\lambda{\downarrow_{\leqslant n-2}} = \mathsf{t}_{\lambda'}$，其中 $\lambda' = (0, \vartheta) \in \Lambda_{n-2}$。我们还从 u 中移除 n 和 $n-1$；如前所述，唯一不能立即应用归纳假设的情形是 u 的形状为 $(1, \beta')$，且 $n-1$ 和 n 都位于 u 的右端。在这种情况下（n 为奇数），由 $\mathrm{res}_n(\mathsf{t}_\lambda) = \mathrm{res}_n(\mathsf{u})$ 可得 $\vartheta q^{n-1} = \beta' q^{n-1}$，这是不可能的。□

事实证明，标准杨表 t_λ 还满足另一项唯一性性质。回想一下，魏尔群的生成元 s_0 会将一个序列的首个条目替换为其逆元。

命题 4.5. 对于所有满足 $\lambda \neq (0,\vartheta)$ 的 $\lambda \in \Lambda_n$，若 $s_0(\mathrm{res}(\mathsf{t}_\lambda)) = \mathrm{res}(\mathsf{u})$ 对于 $\mathsf{u} \in$ 标准杨表$_n$ 成立，则 形状$(\mathsf{u}) < \lambda$。

证明。 我们采用与命题证明中相同的归纳法4.4 ，只做了很˜小的修改。这次我们像之前一样扩展 Λ_n 中的形状集合，但仅针对 $n > 1$。

首先，如果 $\lambda = (1, \beta)$，重复相同的证明可得：若 $\mathsf{res}(\mathsf{u}) = s_0 \cdot \mathsf{res}(\mathsf{t}_\lambda)$，且 u 的形状为 λ，那么对于从 2 到 n 的所有元素，u 和 t_λ 必须相同。由于在 t_λ 中用 -1 替换 1 后，我们无法得到标准杨表，因此这样的 u 不可能存在。

归纳步骤完全相同，但对于 n 的较小˜值，我们必须更加谨慎，因为在归纳步骤中从 n 约化到 $n-2$ 时，还有一种可能会落在集合 Λ_{n-2} 之外。下面将处理这一点。

对于 $n = 1$，唯一的形状是 $\lambda = (1, \alpha_1)$，且我们有 $\mathsf{res}(\mathsf{t}_\lambda) = (\alpha_1)$；应用 s_0 后得到 (α_1^{-1})，这与我们关于 α_1 的既定假设相矛盾。因此，$s_0(\mathsf{res}(\mathsf{t}_\lambda))$ 不可能是某个标准杨表的剩余序列。

对于 $n = 2$，唯一的形状是 $(2, \beta)$，对此验证是显然的。

最后，我们还需要处理形状为 $(3, \beta)$ 的 $n = 3$ 和 u，因为大小为 2 的归纳步骤可能会因此使我们超出 Λ_1。u 的剩余序列是 $(\beta, \beta q^2, \beta q^4)$，我们需要˜确保它与所有满足 $\lambda \in \Lambda_3$ 的 $s_0(\mathsf{res}(\mathsf{t}_\lambda))$ 都不同。这相当于检验它与以下各项不同：

$$(\beta'^{-1}, \beta' q^2, \beta' q^4) \quad \text{and} \quad (\beta'^{-1}, \beta'^{-1} q^2, \beta' q^2).$$

对于第一项，这显然成立，因为 $\beta \neq \beta^{-1}$。若与第二项相等，则得到$\beta' = \beta^{-1}$ 和 $\beta = q^2\beta^{-1}$，这与我们关于 α_1，α_2 的既定假设相矛盾。□

4.3. **定向反演 quiver Temperley–Lieb 代数**。 有了这些组合学准备后，我们现在可以定义定向反演 quiver Temperley–Lieb 代数了。这可以看作是 [PRH14] 中思想的自然推广。

定义 4.6。 我们将定向反演 *quiver Temperley–Lieb* 代数 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$定义为 $\mathscr{H}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 关于以下关系的商

$$e_{\underline{i}} = 0 \text{ for } \underline{i} \neq \mathrm{res}(\mathsf{t}) \text{ for some } \mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n \qquad y_1 e_{\mathrm{res}(\mathsf{t}_{(0,\vartheta)})} = 0 \tag{4.9}$$

其中 $\mathsf{t}^{(0,\vartheta)}$ 是形状为 $(0, \vartheta)$ 的特定标准杨表（见图 6） 。

我们现在可以证明将 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 与辛 blob 代数 $B_n(\kappa)$ 联系起来的同构定理的前半部分。

命题4.7。 存在一个从 $\mathscr{H}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 到辛 *blob* 代数 $B_n(\kappa)$ 的满同态，并且该同态可因子分解为经过定向反演 *quiver Temperley–Lieb* 代数$\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$的同态。

证明。 由于 B_n（κ）是双边界 Hecke 代数的有限维商 H_n，Jucys– Murphy 元 X_1 自动满足 B_n（κ）中的有限阶特征方程。此外，对一般半单情形下 B_n（κ）的校准表示的研究（第 3节）表明，其特征值均属于集合

$$I = \{\alpha_1^{\pm 1} q^{2l}\}_{l \in \mathbb{Z}} \cup \{\alpha_2^{\pm 1} q^{2l}\}_{l \in \mathbb{Z}} \cup \{\vartheta^{\pm 1} q^{2l}\}_{l \in \mathbb{Z}}.$$

回顾定理 4.2中的同构，幂等元 e_i 对应于 Jucys–Murphy 元的公共广义特征空间上的投影算子 X_1、……、X_n。序列i =（i_1、……、i_n）对应于 X_1、……、X_n的特征值序列。因此，定理 4.2适用于某个具有有限支撑的映射 m： $I \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。忽略 m的具体形式，我们仍可得到一个满态射

$$\Theta : \mathscr{H}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta) \to B_n(\kappa),$$

并且我们必须证明 (4.9) 的关系属于此态射的核。关系$e_i = 0$ 对于 $i \neq \mathrm{res}(\mathsf{t})$，其中 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n$ 显然在 $B_n(\kappa)$ 中成立，这可由校准表示的研究得出，因为集合 $\{\mathrm{res}(\mathsf{t}) \mid \mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n\}$ 给出了 $X_1, \ldots, X_n$ 的所有可能公共特征值序列。

现在考虑关系 $y_1 e_{\mathrm{res}(\mathsf{t}_{(0,\vartheta)})} = 0$。我们首先回顾定理 4.2 中的同构：元素 $y_j e_i$ 是对应于 $i \in I^n$ 的公共特征空间中 Jucys–Murphy 元 X_j 的幂零部分。特别地，如果该特征空间的维数为 1，那么它必为 0。现在，命题 4.4 意味着，标准杨表 $\mathsf{t}^{(0,\vartheta)}$ 的剩余序列不会作为 Std_n 中另一个标准杨表的剩余序列出现，因为形状 $(0,\vartheta)$ 位于序的底部。这意味着对应于剩余序列 $\mathsf{res}(\mathsf{t}^{(0,\vartheta)})$ 的公共特征空间维数为 1，因此对于所有 $j = 1, \dots, n$，关系 $y_j e_{\mathrm{res}(\mathsf{t}_{(0,\vartheta)})} = 0$ 在 $B_n(\kappa)$ 中成立。□

5. Cellular basis of the orientifold quiver Temperley–Lieb algebra

第 3.2 节的主要结果是，形状集合 Λ_n 为具有一般参数的辛 blob 代数的简单模的指标集（以及这些简单 $B_n(\kappa)$ 模的构造）。在本节中，我们将证明，对于满足既定假设（见前一节或引言）的任意参数，Λ_n 构成定向折叠箭图 Temperley-Lieb 代数 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 的整分次胞腔结构的偏序集。这也将完成辛 blob 代数 $B_n(\kappa)$ 与 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 之间同构定理证明的后半部分。

5.1. 定向折叠路径。 我们将多次使用标准杨表的以下基本性质：将形状中的前 k 个元素依次放置以构成标准杨表后，元素 $k+1$ 至多有两种放置方式 $+$（向右且带有一个 $+$ 符号，或向左且带有一个 $-$ 符号）。这使我们能够将定向折叠杨表重新表述为二维欧几里得空间中的路径。正如我们已经看到的，标准杨表的剩余序列在研究定向折叠箭图 Temperley-Lieb 代数（或辛 blob 代数）时起着至关重要的作用。因此，我们将以一种便于识别标准杨表剩余类的方式，将杨表嵌入欧几里得空间中。

定义 e 为满足 $q^{2e} = 1$的最小正整数（如果存在）。若不存在这样的整数，则令 $e = \infty$。根据既定假设，我们有 $e > 2$。

对于 $\beta \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}, \vartheta^{\pm 1}\}$，我们记作 $\beta = q^b$，其中若 $\beta \notin q^{\mathbb{Z}}$，则 b 只是一个形式符号。我们还假设，若 $e < \infty$ 且 $\beta \in q^{\mathbb{Z}}$，则 $0 < b < 2e$。我们定义格 $\mathcal{L}_\beta$ 如下：

$$\mathcal{L}_\beta = (b, 0) + \mathbb{Z}\varepsilon_1 + \mathbb{Z}\varepsilon_2 = \{(b + m - n, m + n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\varepsilon_1 := (1, 1)$，且 $\varepsilon_2 := (-1, 1)$。我们将在 $\mathbb{R}^2$ 中绘制此格：放置一个标记为 β的顶点 $(b, 0)$，并从该顶点画出对应于 ε_1步和 ε_2步的边。注意，我们的 y轴方向朝下，因此 ε_1 是东南步，ε_2 是西南步。我们只需要并且只展示 y坐标非负的顶点。

注意，在格 $\mathcal{L}_\beta$ 中，只有当 $b \in \mathbb{Z}$（即 $\beta \in q^{\mathbb{Z}}$）时，才存在 x 坐标为 0 的点。在这种情况下，我们会经过具有 $x = 0$ 的点画一条超平面。此外，在这种情况下 $\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{\beta^{-1}}$，我们将这两个带标记的格合并，把两个标记点 β 和 β^{-1} 放在同一个格上。也就是说，$\mathcal{L}_\beta$ 的顶点 $(-b, 0)$ 标记为 β^{-1}。

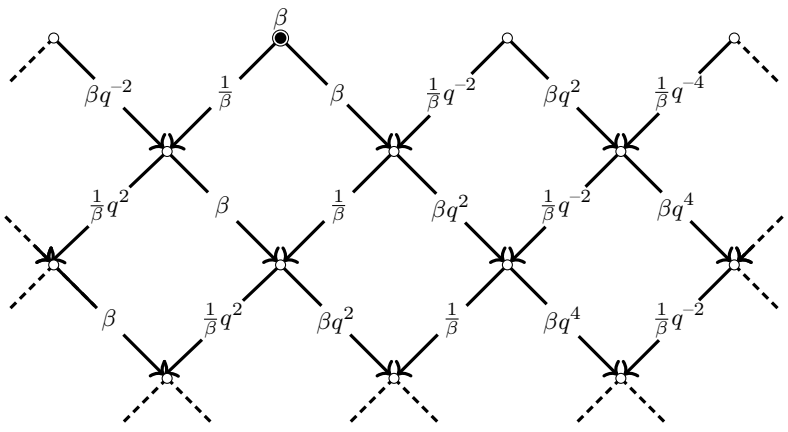


Figure 7. 格 $\mathcal{L}_\beta$ 中各步的剩余。

现在，无论 β^{-1} 是否与 β 位于同一个格上，如果我们还有另一个 $\beta' \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}, \vartheta^{\pm 1}\}$ 满足 $\beta' \in \beta q^{2\mathbb{Z}}$，那么就有 $\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{\beta'}$，并且我们将这两个带标记的格合并，把两个标记点 β 和 β' 放在同一个格上。也就是说，如果 $\beta' = q^{2c}\beta$，那么 β' 就标记了 $\mathcal{L}_\beta$ 中的顶点 $(b+2c,\ 0)$。

最后，根据同一 $q^{2\mathbb{Z}}$-轨道中 $\{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}, \vartheta^{\pm 1}\}$ 里特殊点的数量，我们的格 $\mathcal{L}_\beta$ 最多可能有 6 种不同类型的标记。特殊点 β 是否属于 $q^{\mathbb{Z}}$，决定了它是否有一个超平面。

假设对于某个 $e > 0$，$q^{2e} = 1$。那么在每个格 $\mathcal{L}_\beta$ 中，我们也将标记点 $(b, 0)$ 沿 $2e$ 的整数倍进行水平平移所得的点标记为 β。因此，所有点 $(b+2re, 0)$、$r \in \mathbb{Z}$，都标记为 β。我们对每种类型的标记点都这样处理。

进一步假设我们的格 $\mathcal{L}_\beta$ 在 $x = 0$ 处有第一个超平面。那么，对于所有 $r \in \mathbb{Z}$，我们都在 $x = re$ 处绘制平行超平面。

对于格 $\mathcal{L}_\beta$中的每一步 $+\varepsilon_1$ 或 $+\varepsilon_2$，我们都关联一个剩余 $i \in I$。具体而言，首先将剩余 β 关联到步 $(b-j,\ j) \xrightarrow{+\varepsilon_1} (b-j+1,\ j+1)$（对所有 $j \geqslant 0$），并将剩余β^{-1}关联到步 $(b+j,\ j) \xrightarrow{+\varepsilon_2} (b+j-1,\ j+1)$（对所有 $j \geqslant 0$）。然后，通过如下设定，将其推广到格中的每一步：

$$\mathrm{res}((x+1, y+1) \xrightarrow{+\varepsilon_1} (x+2, y+2)) = q^2 \mathrm{res}((x, y) \xrightarrow{+\varepsilon_1} (x+1, y+1))$$

and

$$\mathrm{res}((x-1, y+1) \xrightarrow{+\varepsilon_2} (x-2, y+2)) = q^2 \mathrm{res}((x, y) \xrightarrow{+\varepsilon_2} (x-1, y+1)).$$

对于每个 $(x,\ y) \in \mathcal{L}_\beta$。图7 和8对此作了说明。

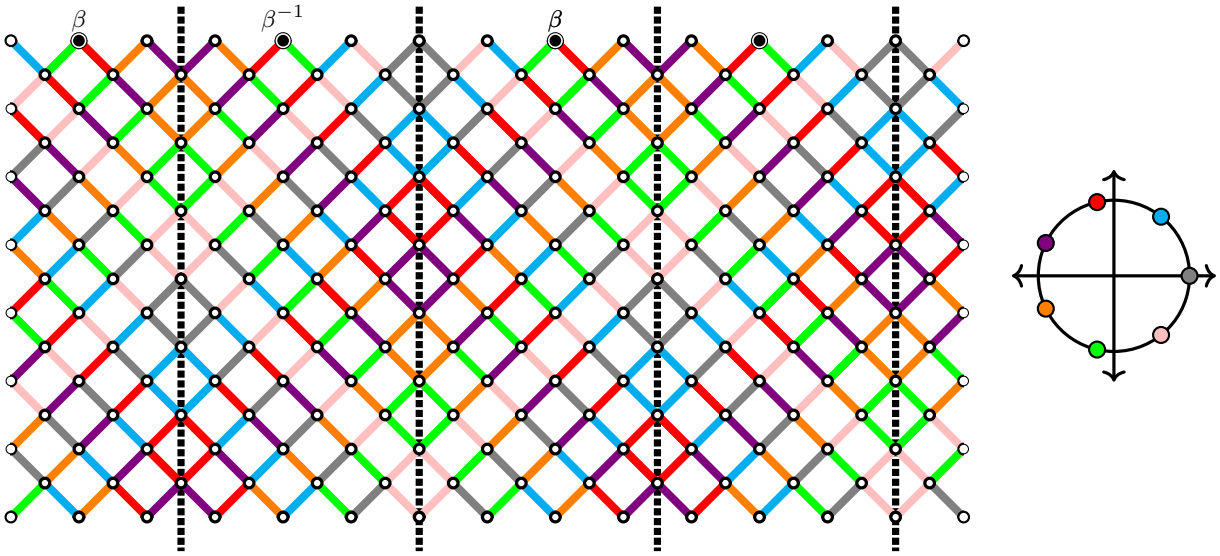


FIGURE 8. 左图展示了格 $\mathcal{L}_\beta$ 中 $e = 7$ 和 $\beta = q^4$对应的各步的剩余。右图给出了 q^2 的 7 个不同幂的颜色。

注意，若 $\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{\beta'}$，则剩余的定义是一致的。另请注意，关于超平面 $x = 0$ 和 $x = re$ 的反射（若存在），对于 $r \in \mathbb{Z}$，会保持剩余不变。此外，对于任意 $r \in \mathbb{Z}$（当 $e < \infty$时），平移 $(2re,\ 0)$ 也会保持剩余不变。图8对此作了说明

现在我们可以将标准杨表嵌入格 $\mathcal{L}_\beta$for $\beta \in \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm}, \vartheta^{\pm}\}$。令 $0 \leqslant k \leqslant n$ with $k \equiv n$ 模 2，当 $k \neq 0$ 时，并令 t $\in$ Std$_n(k,\ \beta)$。我们定义 m(t) $= \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ − #t 中负元素的个数。（注意，当 t $\in$ Std$_n(0,\ \vartheta)$ 时，m(t) 可以为负。）我们将 t 描绘为 $\mathcal{L}_\beta$ 中一条从顶点 $(b-1-2m(\mathsf{t}),\ 1)$ 出发的路径，具体如下：我们按模数递增顺序读取 t 的元素；如果元素为正，就走一步 $+\varepsilon_1 := (1,\ -1)$；如果元素为负，就走一步 $+\varepsilon_2 := (-1,\ 1)$。我们还使用以下记号 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 和 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$。注意，形状为 $(k,\ \beta)$ 的所有路径都会终止于同一点。这些路径的终点为 $(b-1+k,\ n+1)$，位于

除 $k = 0$ 时 n 为奇数的情形外，此时路径终止于 $(b,\ n+1)$。根据此定义，杨表的剩余序列恰好是沿 $\mathcal{L}_\beta$ 上的路径，依次取每一步的剩余所得的剩余序列。示例见图 9 和图 10

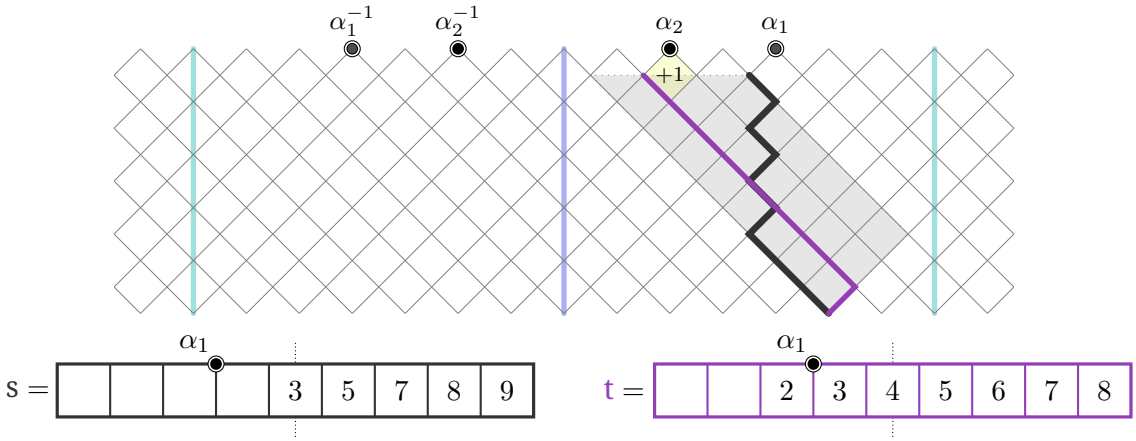


FIGURE 9. 这里 $e = 14$ 和 $\alpha_1 = q^8$ 和 $\alpha_2 = q^4$。我们在 $\mathrm{Std}_9(3, \alpha_1)$ 中描绘了两个杨表 s 和 t 及其对应的路径。第一条（黑色）路径的次数为 0，第二条（紫色）路径的次数为 1。我们注意到，这些路径周围的灰色阴影通过标示相关特殊点所在的位置，使我们能够将它们与杨表唯一对应起来。这些杨表的形状为 $(3, = x_s)$。我们有 $= 7$ (0) $x_s(2) = 9(4)$ $x_s(6) = x_s$和 $= x_s(8) = 9$。

注*5.1.* 当我们绘制表示 $Std_n(k, \beta)$ 中一个杨表的任意路径 t $\mathcal{L}_\beta$ 时，我们将其置于一个灰色区域 $\mathbb{T}_{(k,\beta)}$ 中，该区域记录了杨表的形状 (k, β)。具体而言，我们对所有路径 $s \in Std_n(k, \beta)$ 的集合的凸包进行阴影填充。除非 $\beta = \vartheta$ （此时它是一个三角形），该阴影区域始终呈梯形形状。梯形的宽度与 k 直接相关；随着 k 变小，宽度会增大（事实上，宽度等于 $\frac{n-k}{2}$ ）。当 $k \neq 0$ 时，对于 $\beta = q^b$，该区域 $\mathbb{T}_{(k,\beta)}$ 的右上角是顶点 $(b-1, 1)$。示例见图 *9* 和图 *10*。

对我们而言，考虑格 $\mathcal{L}_\beta$上的其他路径会很方便，而不仅仅是对应于标准杨表的那些路径。我们的所有路径都从格中的某个顶点（c，1）出发，长度为 n，且每一步都只能采取 $+\varepsilon_1$ 或 $+\varepsilon_2$的形式。对于 $\mathcal{L}_\beta$上的路径 p，我们用 $x_\mathsf{q}(i)$表示路径走完 $0 \leqslant i \leqslant n$ 步后的 x坐标。

固定起点后，路径 p 完全由其步序列 $\mathsf{p} = (\varepsilon_{p(1)}, \ldots\ldots, \varepsilon_{p(n)})$确定，其中 $p(i) = 1$ 或 2。给定这样一条起点为（c，1）、位于格 $\mathcal{L}_\beta$上的路径，我们将 $-\mathsf{p}$记作起点为（$-c$，1）、位于格 $\mathcal{L}_{\beta^{-1}}$上的路径 $(\varepsilon_{p(1)}, \ldots\ldots, \overline{\varepsilon_{p(n)}})$。注意，在 $\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{\beta^{-1}}$ 且因而包含超平面 $x = 0$的情况下，路径 $-\mathsf{p}$是 p 关于该超平面的完全反射。否则，$-\mathsf{p}$ 位于与 p 不同的格中。现在假设对某个最小的 $e > 0$，有 $q^{2e} = 1$。那么对于路径 p 以及 $r \in \mathbb{Z}$，我们将 $\rho_{2re}(\mathsf{p})$定义为 p 经 $2re$水平平移所得的路径。

此外，如果存在超平面，那么对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ 我们写作 $\sigma_i \cdot \mathsf{p} = \mathsf{q}$，如果 $x_i(\mathsf{p}) = re$ 对于某个$r \in \mathbb{Z}$ 且

$$\varepsilon_{q(t)} = \begin{cases} \varepsilon_{p(t)} & \text{for } 1 \leqslant t \leqslant i \\ \varepsilon_{\overline{p(t)}} & \text{for } i+1 \leqslant t \leqslant n. \end{cases}$$

换句话说，路径 p 和 q 在某一点之前相同 $x_i(\mathsf{p}) = x_i(\mathsf{q})$，其中 $i \geqslant 1$ 该点位于某个超平面上；此后，路径 q 的其余部分是将路径 p 的其余部分关于该超平面反射得到的。

如果这两条路径可以通过有限次操作（σ_i）、平移 ρ_{2re} 以及操作 $\mathsf{p} \mapsto -\mathsf{p}$ 由一条变为另一条，我们就写作 $\mathsf{p} \sim \mathsf{q}$。

下面的引理可直接由定义得出。

引理 5.2。 设s、$\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n$ 表示两个标准杨表。则$\mathsf{s} \sim \mathsf{t}$ 当且仅当$\mathrm{res}(\mathsf{s}) = \mathrm{res}(\mathsf{t})$。

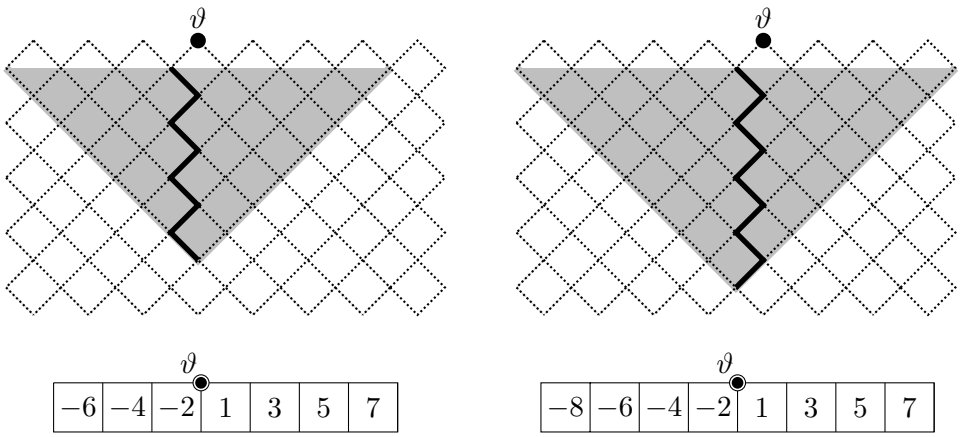


FIGURE 10. 形状为 $(0, \vartheta)$ 的标准杨表对应的所有路径所围成的阴影区域，其中 n 为偶数， n 为奇数。

注 5.3。 将形状为$(0、\ \vartheta)$ 的标准杨表同时在上述格 $\mathcal{L}_\vartheta$ 以及格 $\mathcal{L}_{\vartheta^{-1}}$ 中进行可视化将很有帮助，只需将每个$\mathsf{t} \in \mathcal{L}_\vartheta$ 映射到 $-\mathsf{t} \in \mathcal{L}_{\vartheta^{-1}}$即可。

需要注意的是，如果我们绘制一条路径 s 于 $\mathcal{L}_\beta$ 中，却不将其置于灰色阴影区域内（如备注 5.1所示），这条路径可能对应多个不同的杨表；例如，以下两个杨表



都对应图 9 中的紫色路径，但对应不同的灰色区域（对应于 $(3, \alpha_1)$ 的灰色区域如图 9所示；我们将对应于 $(7, \alpha_2)$ 的灰色区域中的这条路径留给读者作为练习绘制）。我们希望找出最大的 $(k, \beta) \in \Lambda_n$，使得给定路径可以绘制在相应的灰色区域中（在上面的例子中，这样的最大元素是 $(7, \alpha_2)$）。设 s 是 $\mathcal{L}_\beta$ 中的一条路径，且满足 $x_{\mathsf{s}}(0) \leqslant x_{\mathsf{s}}(n)$。（若不满足，则考虑 $\mathcal{L}_{\beta^{-1}}$ 中的路径 $-\mathsf{s}$，其满足 $x_{-\mathsf{s}}(0) \leqslant x_{-\mathsf{s}}(n)$。）我们首先找到起点右侧的第一个标记点，也就是说，考虑满足 $q^{2m_{\mathsf{s}}+x_{\mathsf{s}}(0)+1} \in \{\alpha_i^{\pm 1}\}$ 的最小整数 $m_{\mathsf{s}} \geqslant 0$，如果存在的话。如果

$$\lambda = (x_{\mathsf{s}}(n) - x_{\mathsf{s}}(0) - 2m_{\mathsf{s}}, q^{2m_{\mathsf{s}}+x_{\mathsf{s}}(0)+1}) \in \Lambda_n$$

接着，我们将 s 的最大形状定义为 $\mathsf{max(s)} = \lambda \in \Lambda_n$。若不存在这样的 $\lambda \in \Lambda_n$，则当 n 为奇数时，我们定义 $\mathsf{max(s)} = (0, \vartheta) \in \Lambda_n$ if $q^{x_{\mathsf{s}}(n)} = \vartheta$，当 n 为偶数时，定义为 $q^{x_{\mathsf{s}}(n)+1} = \vartheta$。最后，若不属于上述情况，则路径 s 不对应任何标准杨表，此时我们不定义 max(s)。

5.2. 由定向折叠路径得到的置换。在本小节中，对于每个 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$，我们将利用格 $\mathcal{L}_\beta$ 定义一个元素 ψ_{t}。包含所有路径 $\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$ 的区域 $\mathbb{T}_{(k,\beta)}$ 被 (1×1) 单位瓦片铺砌（我们也包括顶行中的瓦片，它们只有一半被阴影覆盖）；若两块瓦片沿一条边相接，就称它们相邻。路径 $\mathsf{t}^{(k,\beta)}$ 位于区域$\mathbb{T}_{(k,\beta)}$ 内，并按定义将该区域分为左侧 $\mathbb{L}_{(k,\beta)}$ 和右侧 $\mathbb{R}_{(k,\beta)}$。我们将容许铺砌 $\mathbb{T}$ 定义为 $\mathbb{T}_{(k,\beta)}$ 中的任意瓦片集合，只要其中不包含一对相邻瓦片 T，T'，使得 $T \in \mathbb{L}_{(k,\beta)}$ 和 $T' \in \mathbb{R}_{(k,\beta)}$。我们将容许铺砌 $\mathbb{T}$ 的长度定义为其中包含的瓦片数。我们按如下方式对 $\mathbb{L}_{(k,\beta)}$（分别对$\mathbb{R}_{(k,\beta)}$）中的瓦片排序：

- 给定两个相邻瓦片 T，$T' \in \mathbb{L}_{(k,\ \beta)}$，如果 T'的质心的 x坐标严格小于 T的质心的相应坐标，则记作 $T \leqslant_L T'$。
- 给定两个相邻瓦片 T，$T' \in \mathbb{R}_{(k,\ \beta)}$，若 T'的质心的 x 坐标严格大于 T的质心的 x 坐标，我们记作 $T \leqslant_R T'$。

注意，当 $m > m'$ 时，我们称形式为 $b+m$ 的 x 坐标严格大于形式为 $b+m'$ 的 x 坐标（即使 b 只是一个形式符号）。

利用传递性，我们将 $\leqslant_L$ 扩展为 $\mathbb{L}_{(k,\beta)}$ 上的偏序（并将 $\leqslant_R$ 扩展为 $\mathbb{R}_{(k,\beta)}$上的偏序）。设$\mathbb{T}$ 为一个容许铺砌，T为 $\mathbb{T}$中的一块瓦片。我们称 $T \in \mathbb{L}_{(k,\beta)} \cap \mathbb{T}$（分别称 $T \in \mathbb{R}_{(k,\beta)} \cap \mathbb{T}$）支撑于 $\mathbb{T}$，如果在偏序 $\leqslant_L$（分别为 $\leqslant_R$）中小于 T 的每一块瓦片都属于 $\mathbb{T}$。

定义 5.4. 若容许铺砌 $\mathbb{T}$ 中的每一块瓦片都受到支撑，则称其为约化的。我们将约化容许铺砌 $\mathbb{T}$ 的长度 $\ell(\mathbb{T})$ 定义为 $\mathbb{T}$中的瓦片数。

命题 5.5. 路径$\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 与约化容许铺砌$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}_{(k,\beta)}$之间存在双射。

证明。 给定一条路径 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$，我们可以铺砌严格位于 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 与 $\mathsf{t}^{(k,\beta)} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 之间的区域，从而得到一个可容许约化铺砌。反过来，给定一个可容许约化铺砌 $\mathbb{T}$，我们可以通过描绘沿着 $\mathbb{T}$ 边缘延伸的东南／西南路径，与之关联一条路径 t。请读者验证这两个映射互为逆映射。□

定义 5.6。 对于每个 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$，我们将相应的可容许约化铺砌记为 $\mathbb{T}_{\mathsf{t}}$。我们将 $\mathbb{T}_{\mathsf{t}}$ 中瓦片 T 的次数定义为

- $+1$ 若 T 位于顶行，且有一个标记点标记为 $\alpha_i^{\pm 1}$；
- $+1$ T 不在顶行，且 T 的一个顶点位于超平面上；
- -2 若一个超平面平分了 T；
- 0否则。

我们将路径 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 的次数定义为其中所有瓦片次数之和。 $\mathbb{T}_{\mathsf{t}}$示例见图 9、11 和12 。

注意，带有标记点且标记为 ϑ 的瓦片次数为 0。

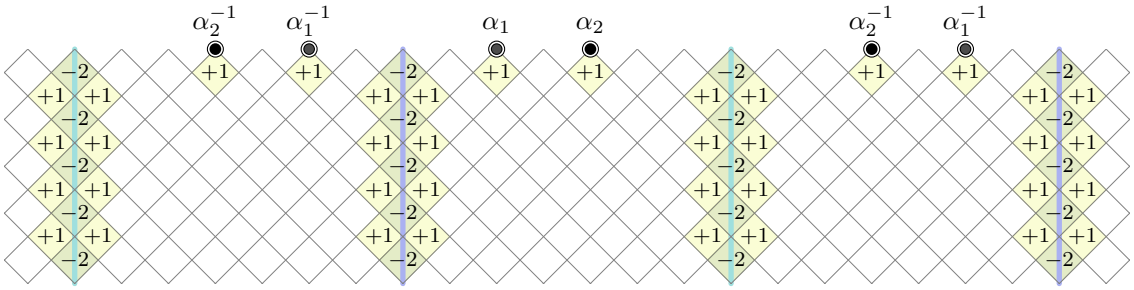


FIGURE 11. $e = 14$、 $\alpha_1 = q^4$ 和 $\alpha_2 = q^8$的瓦片次数。

定义 5.7。 设 $\mathbb{T}$ 是一个包含 ℓ 个瓦片的可容许约化铺砌，我们将映射 $\tau\colon \mathbb{T} \to \{1,2,\ldots,\ell\}$ 称为一个铺砌杨表，使得对于任意一对满足 $T <_L T'$ 或 $T <_R T'$ 的瓦片 T、T'，都有 $\tau(T) < \tau(T')$。

按照构造，瓦片 $T \in \mathbb{T}_{(k,\beta)}$ 的顶点的 y 坐标等于某个 $y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们称其为瓦片 T 的高度；我们将瓦片 T 的内容定义为相应的反射 $s_y \in W(C_n)$。设 $\mathbb{T}$ 是一个包含 ℓ 个瓦片的容许铺砌。给定铺砌杨表$\tau\colon \mathbb{T} \to \{1,\ldots,\ell\}$，我们将关联字 w_τ 定义为对 $y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 对应的 s_y 按序相乘，顺序由依照 τ 指定的次序读取 $\mathbb{T}$ 中各瓦片的内容确定。

命题 5.8. 给定$\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$，$w_{\mathsf{t}}$ 的约化表达式由来自 $\mathbb{T}_{\mathsf{t}}$的所有铺砌杨表集合的字 w_τ 给出。

证明. 这是通过归纳应用命题5.5得出的。 □

我们将杨表 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 的长度定义为 $\ell(\mathsf{t}) = \ell(w_{\mathsf{t}}) = \ell(\mathbb{T}_{\mathsf{t}})$。对每个 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$，为其对应的可容许约化铺砌 $\mathbb{T}_{\mathsf{t}}$ 选定一个特定的铺砌杨表 $\tau(\mathsf{t})$，这将对我们有所帮助。这等价于为 w_{t} 选定一个特定的约化表达式。

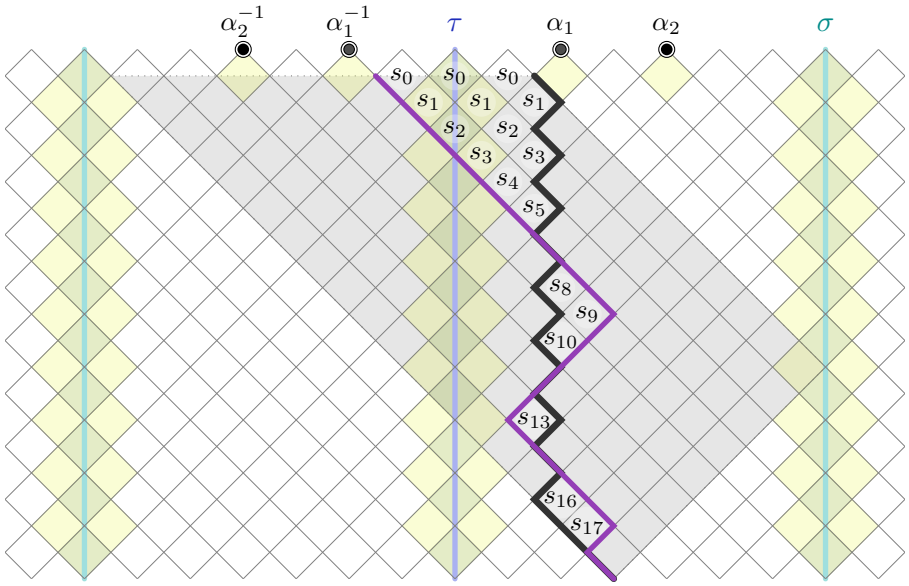


FIGURE 12. 我们描绘两条路径$\mathsf{t}^{(3,\beta)}$和$\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_{19}(3, \beta)$，其中$\beta = \alpha_1 = q^4$和$\alpha_2 = q^8$以及$e = 14$。置换$w_{\mathsf{t}}$可以从图示中读出（下文将给出该置换的一个具体字）。路径s的次数为一次；注意到在-2个次数为$+1$的瓦片与3个次数为s和$\mathsf{t}^{(3,\beta)}$之间，因此可知这一点。

定义5.9。令$\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$。我们定义$\tau(\mathsf{t})$表示这样一种铺砌杨表：先在$\mathbb{L}_{(k,\beta)} \cap \mathbb{T}_{\mathsf{t}}$中逐步填入内容最小的瓦片，然后在$\mathbb{R}_{(k,\beta)} \cap \mathbb{T}_{\mathsf{t}}$中逐步填入内容最大的瓦片。示例见图 *12* 。

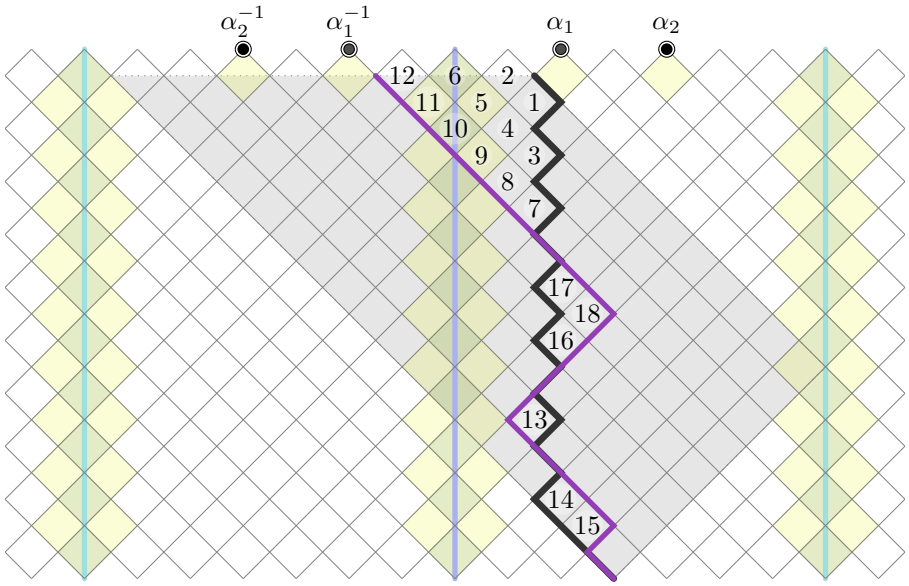


FIGURE 13. 我们描绘路径s的铺砌杨表$\tau(\mathsf{s})$；对于$\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_{19}(8, \beta)$，其中有$\beta = \alpha_1 = q^4$和$\alpha_2 = q^8$。

例5.10。对于$\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_{19}(8, \beta)$如图*12*所示，$w_{\mathsf{s}}$所对应的铺砌杨表$\tau(\mathsf{s})$的约化词如下：

$$w_{\mathsf{s}} = (s_9 s_8)(s_{10})(s_{17} s_{16}) s_{13} (s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5)(s_0 s_1 s_2 s_3)(s_0 s_1).$$

给定$\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(b, \beta)$以及某个约化表达式$w_{\mathsf{t}} = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_\ell}$，我们定义$\psi_{\mathsf{t}} := \psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots \psi_{i_\ell} \in \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$。注意，根据交换关系和命题$\psi_{\mathsf{t}}$ 5.8，此定义是良定义的（与所选约化表达式无关）。

命题 5.11。 给定 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 我们有 $\deg(\psi_{\mathsf{t}} e_{\mathrm{res}(\mathsf{t}_{(k,\beta)})}) = \deg(\mathsf{t})$。

证明。 回顾一下，杨表 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 的剩余序列可以从其对应路径在 $\mathcal{L}_\beta$ 上的步读出。 $\mathbb{T}_{\mathsf{t}}$ 中高度为 $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 的每块瓦片都对应元素 $\psi_{\mathsf{t}} e_{\mathrm{res}(\mathsf{t}_{(k,\beta)})}$中的一个生成元 ψ_j 。被超平面平分的高度为 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的瓦片对应于 $\psi_j e(i)$，其中$i_j = i_{j+1}$ ，其次数为 -2 ，符合要求。被超平面平分的高度为 0 的瓦片对应于 $\psi_0 e(i)$，其中 $i_1 \in \{\pm 1\}$ ，其次数为 -2 ，符合要求。与超平面相接的高度为 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的瓦片对应于 $\psi_k e(i)$，其中 $i_{k+1} = i_k q^{\pm 2}$ ，其次数为 $+1$，符合要求。与不同于 ϑ 的标记点相接的高度为 0 的瓦片对应于 $\psi_0 e(i)$，其中 $i_1 = \alpha_i^{\pm 1}$，其次数为 $+1$ ，符合要求。所有其他瓦片都对应次数为 0 的生成元，其次数也符合要求。□

5.3. **梯形杨表与幂等理想**。 从现在起，对于标准杨表 t，我们几乎总是写 e_{t}，而不是 $e_{\mathrm{res}(\mathsf{t})}$ 。对于 $0 \leqslant m \leqslant n$ ，我们定义

$$e_{\leqslant m} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \sum_{(k,\beta) \in \Lambda_n} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \qquad e_{<m} = \sum_{0 \leqslant k < m} \sum_{(k,\beta) \in \Lambda_n} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}$$

并定义

$$\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{\leqslant m} = \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta) e_{\leqslant m} \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$$
$$\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<m} = \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta) e_{<m} \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta).$$

定义 5.12。 如果杨表 $\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 满足 $\max(\mathsf{s}) = (k,\beta)$ ，且

$$x_{\mathsf{s}}(n) - x_{\mathsf{s}}(0) = \max\{x_{\mathsf{t}}(n) - x_{\mathsf{t}}(0) \,:\, \mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n \ \textit{with}\ \mathrm{res}(\mathsf{t}) = \mathrm{res}(\mathsf{s})\}.$$

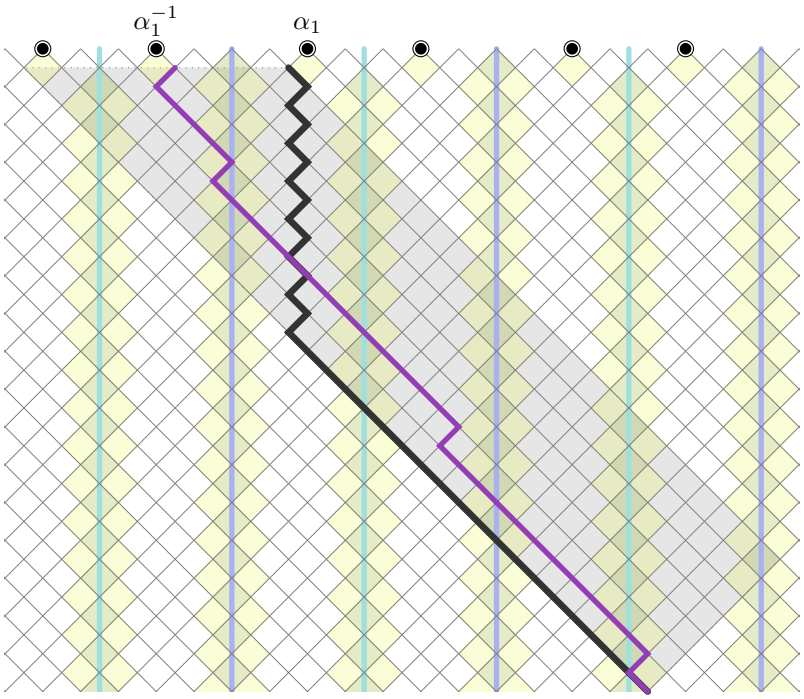


FIGURE 14. 这里 $e = 7$ 和 $\alpha_1 = q^4$ 分别为 $\alpha_2 \notin \alpha_1 q^{2\mathbb{Z}}$。我们描绘了两个梯形杨表 $\mathsf{t}_{(15,\alpha_1)}, \mathsf{s} \in \mathrm{Std}_{33}(15,\alpha_1) \in \Lambda_{33}$。

例 *5.13*。设 $\beta = \alpha_1 = q^4$ 和 $\alpha_2 = q^8$。图*12*中描绘的 $t^{(k,\beta)}$ 和 *s* 都是形状为 $(3,\beta) \in \Lambda_{19}$ 的梯形杨表。事实上，很容易看出，对于所有 $(k,\beta) \in \Lambda_n$，$t^{(k,\beta)}$ 都是梯形杨表。图 *14* 中还描绘了另外两个例子。图*15*中的杨表不是梯形杨表。这一点可以通过观察到 $\max(s) \neq (15,\alpha_1)$ 以及 $x_{\mathsf{t}}(33) - x_{\mathsf{t}}(0)$ 在其剩余类中不是极大值来确定。注意，梯形杨表在其剩余类中并不唯一。图*16*展示了同一剩余类中的八个不同梯形杨表。

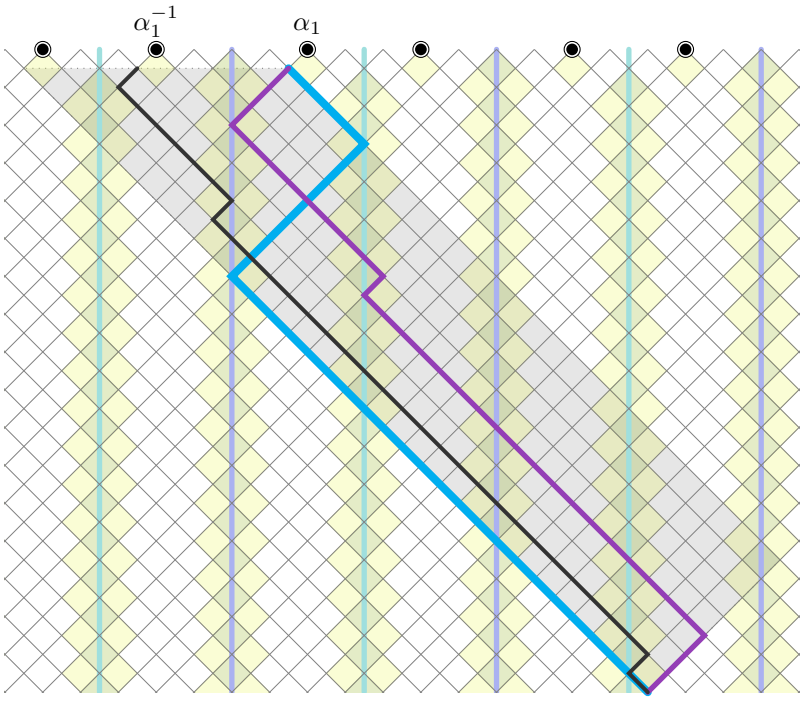


FIGURE 15. 此处 $e = 7$ 以及 $\alpha_1 = q^4$ 带有 $\alpha_2 \notin \alpha_1 q^{2\mathbb{Z}}$。此处我们描绘了杨表 s、t、u，它们 不是 梯形杨表。

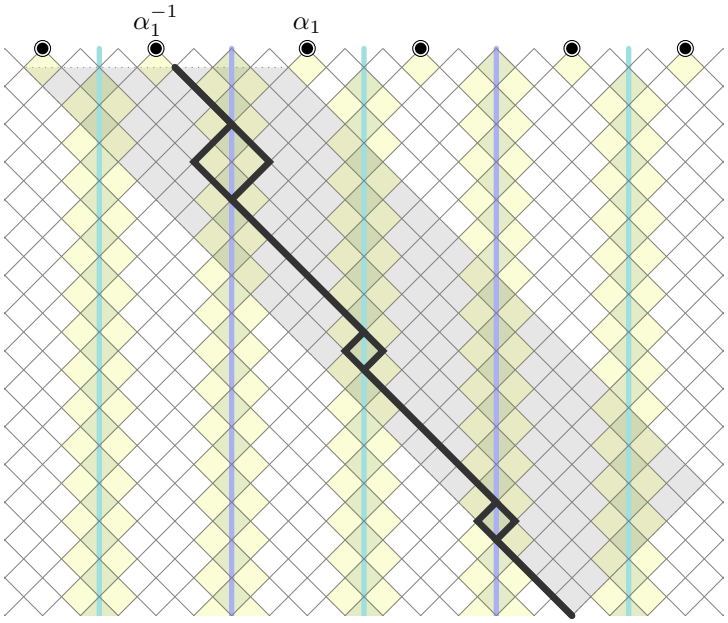


FIGURE 16. 此处 $e = 7$ 以及 $\alpha_1 = q^4$ 带有 $\alpha_2 \notin \alpha_1 q^{2\mathbb{Z}}$。我们描绘了同一剩余类中的八个不同梯形杨表。

命题 5.14。 对于梯形杨表 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$，有 $e_{\mathsf{t}} \in \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant k}$。

证明。我们将选择剩余类 t 中唯一的梯形杨表 $\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$，使得 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}}$ 为极大值。在图16中，这个杨表在穿过 $\mathsf{t}^{(k,\beta)}$ 之前取左侧，之后取右侧。我们对 $\ell(\mathbb{T}_{\mathsf{s}})$ 进行归纳，$\ell(\mathbb{T}_{\mathsf{s}}) = 0$ 的情形是平凡的（因为在此情形下 $\mathsf{s} = \mathsf{t}^{(k,\beta)}$）。根据梯形杨表的定义，$\square \in \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$ 蕴含 $\square$ 不会接触标记为 $\alpha_i^{\pm 1}$ 的标记点，否则便会与 $\max(\mathsf{s}) \in \Lambda_n$ 的极大性矛盾。

我们考虑包含铺砌杨表 $\tau(\mathsf{s})$ 的极大条目 ℓ 的瓦片 $\square$。瓦片 $\square$ 的高度为 $h\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，次数为 -2、0 或 $+1$，这构成了证明中的几种情形。

情形 1： 若 $\square$ 的次数为零，则 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}}=\mathbb{T}'_{\mathsf{s}}\cup\square$ 与 $\mathsf{s}'\in\mathrm{Std}_n(k,\ \beta)$ 构成一个梯形杨表。根据构造，$\psi_h^2 e_{\mathsf{s}}=e_{\mathsf{s}}$，因为该瓦片的次数为 0，因此

$$e_{\mathsf{s}}=\psi_h^2 e_{\mathsf{s}}=\psi_h e_{\mathsf{s}'}\psi_h\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{\leqslant k}$$

由归纳法得出。

情形 2：若 $\square$ 是一个次数为 -2 的瓦片，则 $\square$ 位于一个超平面上。我们先假设 $h>0$。在这种情况下，e_{s} 的第 h 个和第 $(h+1)$ 个元素相等。此时，我们令 $\square'$ 满足 $\tau_{\mathsf{s}}(\square')=(\ell-1)$，并令 u 满足 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}}=\mathbb{T}_{\mathsf{u}}\cup\square'\cup\square$。若 $\square\in\mathbb{L}_{(k,\beta)}\cap\mathbb{T}_{\mathsf{s}}$（分别为 $\square\in\mathbb{R}_{(k,\beta)}\cap\mathbb{T}_{\mathsf{s}}$），则 $\square'$ 的高度为 $h+1\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$（分别为 $h-1\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$）。我们考虑前一种情况，因为后一种情况完全相同。图 14 中，路径 s 的一个内角处超平面上的高度为 6 的瓦片 $\square$ 是一个例子。瓦片 $\square'$ 位于瓦片 $\square$ 的东南方。我们有 $\mathrm{res}_a(\mathsf{s})=\mathrm{res}_a(\mathsf{u})$，其中 $a\neq h$、$h+1$、$h+2$，并且

$$(\mathrm{res}_h(\mathsf{s}),\mathrm{res}_{h+1}(\mathsf{s}),\mathrm{res}_{h+2}(\mathsf{s}))=(i,i,iq^2),\quad (\mathrm{res}_h(\mathsf{u}),\mathrm{res}_{h+1}(\mathsf{u}),\mathrm{res}_{h+2}(\mathsf{u}))=(i,iq^2,i).$$

如图17所示。

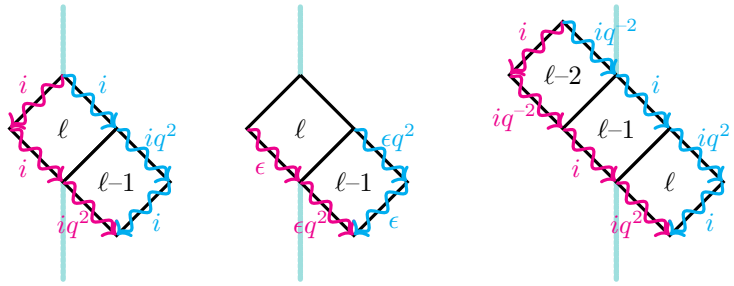


FIGURE 17. 命题 5.14证明中的各个情形。

我们将证明

$$e_{\mathsf{s}}\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)e_{\mathsf{u}}\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$$

然后用归纳法推出结论。首先注意到

$$\begin{aligned}(y_{h+1}\psi_h y_{h+1}\psi_h-\psi_h y_{h+1}\psi_h y_h)e_{\mathsf{s}}&=(y_{h+1}(\psi_h y_{h+1})\psi_h-\psi_h(y_{h+1}\psi_h)y_h)e_{\mathsf{s}}\\&=(y_{h+1}(y_h\psi_h+1)\psi_h-\psi_h(\psi_h y_h+1)y_h)e_{\mathsf{s}}\\&=(y_{h+1}\psi_h-\psi_h y_h)e_{\mathsf{s}}\\&=e_{\mathsf{s}}\end{aligned}$$

其中，第二个和第四个等式由 (4.4) 得出，第三个等式由 (4.5) 得出，注意到 $\mathrm{res}_h(\mathsf{s})=\mathrm{res}_{h+1}(\mathsf{s})$。因此，只需证明

$$\psi_h y_{h+1}\psi_h e_{\mathsf{s}}\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{\leqslant k}.$$

利用 (4.5)，并注意到 $\mathrm{res}_{h+1}(\mathsf{s})=i$ 和 $\mathrm{res}_{h+2}(\mathsf{s})=iq^2$，可得

$$y_{h+1}e_{\mathsf{s}}=y_{h+2}e_{\mathsf{s}}-\psi_{h+1}^2 e_{\mathsf{s}}.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\psi_h y_{h+1}\psi_h e_{\mathsf{s}}&=(\psi_h y_{h+2}\psi_h-\psi_h\psi_{h+1}^2\psi_h)e_{\mathsf{s}}\\&=(\psi_h^2 y_{h+2}-\psi_h\psi_{h+1}^2\psi_h)e_{\mathsf{s}}\\&=-\psi_h\psi_{h+1}^2\psi_h e_{\mathsf{s}}\\&=-\psi_h\psi_{h+1}e_{\mathsf{u}}\psi_{h+1}\psi_h\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)e_{\mathsf{u}}\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)\subseteq \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{\leqslant k}\end{aligned}$$

其中，第二个等式由交换关系 (4.2) 得出，第三个等式由（注意到 $\mathrm{res}_h(\mathsf{s})=\mathrm{res}_{h+1}(\mathsf{s})$）得出，而最 (4.5) 后一行则由 (4.3) 和归纳法得出。

现在我们考虑 $h=0$ 的子情形。我们继续假设 $\square$ 是一个位于超平面上的 s_0-瓦片，其次数为 -2。这意味着 e_{s} 的第一项等于 ± 1，在这种情况下

我们令 $\square'$ 满足 $\tau_{\mathsf{s}}(\square') = (\ell - 1)$，并令 u 满足 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}} = \mathbb{T}_{\mathsf{u}} \cup \square' \cup \square$。在这种情况下，对于 $a \neq 1,2$，我们有 $\mathrm{res}_a(\mathsf{s}) = \mathrm{res}_a(\mathsf{u})$，并且

$$(\mathrm{res}_1(\mathsf{s}), \mathrm{res}_2(\mathsf{s})) = (\epsilon, \epsilon q^2), \qquad (\mathrm{res}_1(\mathsf{u}), \mathrm{res}_1(\mathsf{u})) = (\epsilon q^2, \epsilon)$$

对于 $\epsilon \in \{1, -1\}$。图17对此作了说明。我们有

$$e_{\mathsf{s}} = \tfrac{1}{4}(y_1\psi_0 y_1\psi_0 + \psi_0 y_1\psi_0 y_1)e_{\mathsf{s}} = \tfrac{1}{4}y_1(\psi_0 y_1\psi_0)e_{\mathsf{s}} + \tfrac{1}{4}(\psi_0 y_1\psi_0)y_1 e_{\mathsf{s}}$$

by t对（4.6）应用两次（以及选择性括号化）。因此，只需证明

$$\psi_0 y_1\psi_0 e_{\mathsf{s}} \in \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)e_{\mathsf{u}}\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta).$$

现在，我们有

$$\begin{aligned}
\psi_0 y_1\psi_0 e_{\mathsf{s}} &= \psi_0(y_2 - \psi_1^2)\psi_0 e_{\mathsf{s}} \\
&= (\psi_0^2 y_2 - \psi_0\psi_1^2\psi_0)e_{\mathsf{s}} \\
&= -\psi_0\psi_1^2\psi_0 e_{\mathsf{s}} \\
&= -\psi_0\psi_1 e_{\mathsf{u}}\psi_1\psi_0 e_{\mathsf{s}} \in \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant k}
\end{aligned}$$

其中，第一个等式由 (4.5) 得出，第二个由 (4.2) 得出，第三个由 (4.8) 得出，最后一个由 (4.3) 得出。

情形 3： 若 $\square$ 是一个次数为 1 的瓦片，那么由于 s 是一个以 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}}$ 为极大的梯形杨表，我们有以下两种情况：$\square \in \mathbb{L}_{(k,\beta)} \cap \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$，且 $\square$ 最右侧的顶点位于一个超平面上；或 $\square \in \mathbb{R}_{(k,\beta)} \cap \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$，且 $\square$ 最左侧的顶点位于一个超平面上。注意，$\square$ 不在顶行，因为 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}}$ 的顶行中没有次数为 1 的瓦片（没有标记点）；这同样是由于 s 是一个梯形杨表。我们考虑后一种情况，因为前一种情况完全相同。在此情形下，令 $\square'$ 满足 $\tau_{\mathsf{s}}(\square') = \ell - 1$，并令 $\square''$ 满足 $\tau_{\mathsf{s}}(\square'') = \ell - 2$。令 u 满足 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}} = \mathbb{T}_{\mathsf{u}} \cup \square'' \cup \square' \cup \square$。对于所有 $a \neq h-2,\ h-1,\ h,\ h+1$，我们有 $\mathrm{res}_a(\mathsf{s}) = \mathrm{res}_a(\mathsf{u})$ 和

$$\begin{aligned}
(\mathrm{res}_{h-2}(\mathsf{s}), \mathrm{res}_{h-1}(\mathsf{s}), \mathrm{res}_h(\mathsf{s}), \mathrm{res}_{h+1}(\mathsf{s})) &= (q^{-2}i, i, q^2 i, i), \\
(\mathrm{res}_{h-2}(\mathsf{u}), \mathrm{res}_{h-1}(\mathsf{u}), \mathrm{res}_h(\mathsf{u}), \mathrm{res}_{h+1}(\mathsf{u})) &= (i, q^{-2}i, i, q^2 i).
\end{aligned}$$

图17对此作了说明。我们断言：

$$e_{\mathsf{s}} = \psi_h\psi_{h-1}\psi_{h-2}e_{\mathsf{u}}\psi_{h-2}\psi_{h-1}\psi_h \tag{5.1}$$

由于 u 是一个梯形杨表，且 $\mathbb{T}_{\mathsf{u}}$ 在其剩余类中极大，因此只要验证该断言，证明便可通过归纳法得出。首先注意到：

$$\begin{aligned}
\psi_3\psi_2\psi_1 e(i, q^{-2}i, i, iq^2)\psi_1\psi_2\psi_3 &= \psi_3\psi_2\psi_1^2 e(q^{-2}i, i, i, q^2 i)\psi_2\psi_3 \\
&= \psi_3\psi_2(y_2 - y_1)e(q^{-2}i, i, i, iq^2)\psi_2\psi_3 \\
&= \psi_3\psi_2 y_2 e(q^{-2}i, i, i, iq^2)\psi_2\psi_3 \\
&= -\psi_3 e(q^{-2}i, i, i, q^2 i)\psi_2\psi_3 \\
&= \psi_3\psi_2\psi_3 e(q^{-2}i, i, q^2 i, i) \\
&= (-\psi_2\psi_3\psi_2 + 1)e(q^{-2}i, i, iq^2, i)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中第一项和第五项由 (4.3) 得出，第二项由 (4.5) 得出，第三项和第四项由 (4.4) 和 (4.5) 得出，最后一项由 (4.6) 得出。因此我们有：

$$\psi_h\psi_{h-1}\psi_{h-2}e_{\mathsf{u}}\psi_{h-2}\psi_{h-1}\psi_h = (-\psi_{h-1}\psi_h\psi_{h-1} + 1)e_{\mathsf{s}}.$$

现在注意到，$s_{h-1}s_n s_{h-1}(\mathrm{res}(\mathsf{s}))$ 不是标准杨表的剩余序列，因此利用以及 (4.10)，我们有 (4.3)
$\psi_{h-1}\psi_h\psi_{h-1}e_{\mathsf{s}} = 0$，从而断言得证。 □

推论 5.15. 设 $\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n$。我们有 $e_{\mathsf{s}} \in \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant k}$，其中 k 是满足以下条件的最大值：存在一个形状为 (k, β)、属于 s 的剩余类的标准杨表。

证明。 取一个与 s 属于同一剩余类的梯形杨表 t，并设其形状为 (k', β')。由前述命题可知，$e_{\mathsf{s}} = e_{\mathsf{t}} \in \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant k'}$ 包含于 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant k}$，其中 k 如陈述所示，这是由 k 的极大性得出的。□

5.4. **定向折叠 Temperley–Lieb 代数的分次细胞基。** 现在我们可以构造定向折叠 Temperley–Lieb 代数的分次细胞基了。为此需要一些预备引理，它们将在证明细胞理想结构时发挥作用。

引理 5.16。 设 $\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 对于 $0<k\leqslant n$ 和 $\beta\in\{\alpha_1^{\pm 1},\alpha_2^{\pm 1}\}$成立。若 $s_0(\mathsf{t})\notin \mathrm{Std}_n(k,\beta)$，则

$$\psi_0\psi_{\mathsf{t}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<k}.$$

证明。注意，当且仅当路径 s 是由路径 t 将第一个 $+\epsilon_1$（分别为 $+\epsilon_2$）步替换为 a $+\epsilon_2$（分别为 $+\epsilon_1$）步得到时，$\mathsf{s}=s_0(\mathsf{t})$。等价地，当且仅当 $x_{\mathsf{t}}(0)=c$、$x_{\mathsf{s}}(0)=c\pm 2$，并且对所有 $1\leqslant i\leqslant n$都有 $x_{\mathsf{t}}(i)=x_{\mathsf{s}}(i)$ 时，$\mathsf{s}=s_0(\mathsf{t})$。现在很容易看出，当且仅当 $x_{\mathsf{t}}(0)=b-1$ 时，$\mathsf{s}=s_0(\mathsf{t})\notin \mathrm{Std}_n(k,\beta)$；在这种情况下，对于某个 $w\in\langle s_2,\dots s_{n-1}\rangle$，$\mathsf{t}=w\mathsf{t}^{(k,\beta)}$。因此

$$\psi_0(\psi_{\mathsf{t}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}})=\psi_{\mathsf{t}}(\psi_0 e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}})$$

因此，只需证明

$$\psi_0 e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=e(s_0\mathrm{res}(\mathsf{t}_{(k,\beta)}))\psi_0\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<k}$$

这可由命题 4.5 和推论5.15立即得到。 □

引理 5.17. 设 $0<k\leqslant n$ 和 $\beta\in\{\alpha_1^{\pm 1},\alpha_2^{\pm 1}\}$。我们有

$$\psi_j e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<k}$$

对所有 $n-k<j<n$均成立。

证明。我们的假设 $n-k<j<n$ 等价于：$\mathsf{t}^{(k,\beta)}$中的 j 步和 $j+1$ 步均为 $+\epsilon_1$。若 $\mathsf{t}^{(k,\beta)}(j)$ 不在某个超平面上，则不存在剩余序列为 $s_j(\mathrm{res}(\mathsf{t}^{(k,\beta)}))$ 的杨表，因此根据定义 4.6，$\psi_j e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=0\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$。若 $\mathsf{t}^{(k,\beta)}(j)$ 在某个超平面上，则令 $\mathsf{u}:=s_j(\sigma\cdot_j \mathsf{t}^{(k,\beta)})$，并用 $\mathsf{t}\sim\mathsf{u}$ 表示该等价类中对应的梯形杨表（若存在；示例见图 18）。若不存在这样的 t，则 $e_{\mathsf{u}}=0$，结论得证。现在容易看出，若 t 存在，则 $\mathrm{Shape}(\mathsf{t})<(k,\beta)$，因为路径的宽度必定增加。由推论 5.15，我们有

$$\psi_j e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=e_{\mathsf{t}}\psi_j\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<k} \tag{5.3}$$

符合要求。 □

命题 5.18。 令 $\mathsf{t}\in\mathrm{Std}_n(k,\beta)$ 对应于 $(k,\beta)\in\Lambda_n$。我们有

$$y_j e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\in \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<k}$$

对所有 $1\leqslant j\leqslant n$ （其中令 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<0}=\{0\}$）。

证明。首先假设 $j=1$。若 $k\neq 0$，则 $s_0(\mathsf{t}^{(k,\beta)})\notin \mathrm{Std}_n(k,\beta)$，因此结合引理 5.16 以及利用 (4.8) 得到的事实 $y_1e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=\pm\psi_0^2 e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}$，结论成立。若 $k=0$，则根据定义 4.6 有$y_1e_{\mathsf{t}_{(0,\vartheta)}}=0$。现在假设 $j=2$ 且 $k\neq n$。对于 $\beta\in\{\alpha_1^{\pm1},\alpha_2^{\pm1},\vartheta\}$，我们有 $e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=e(\beta,\beta^{-1}q^2,\dots)$，并且

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_0\psi_1 e(\beta,\beta q^{-2},\dots)\psi_1\psi_0\psi_1&=\psi_1\psi_0(y_2-y_1)e(\beta q^{-2},\beta,\dots)\psi_0\psi_1\\&=\psi_1(y_2+y_1)e(\beta^{-1}q^2,\beta,\dots)\psi_1\\&=(y_1+y_2)e(\beta,\beta^{-1}q^2,\dots)\\&=(y_1+y_2)e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}},\end{aligned}$$

其中，第一个等号由 (4.3) 和 (4.5) 得出；第二个等号利用了 (4.3) 和 (4.8)，以及 βq^{-2} 不等于 ±1 且不属于 $\{\alpha_i^{\pm1}\}$ 这一事实（见我们的既定假设）；第三个等号利用了 (4.3)、(4.4) 和 (4.5)，以及 $\beta^{-1}q^2\notin\{\beta,\beta q^{\pm2}\}$ 这一事实（同样来自我们的既定假设）。我们有 $e(\beta,\ \beta q^{-2}\dots\dots)=0$，因为在标准杨表中，$\beta$之后唯一可能的剩余是 βq^2 和 $\beta^{-1}q^2$，而它们都不等于 βq^{-2}。因此，如上所见，我们有 $y_2e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=-y_1e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=0$。

现在假设 $j=2$和 $k=n$。在这种情况下，根据 $e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=e(\beta,\beta q^2,\dots)$，我们有 an d

$$y_2e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}=y_2e(\beta,\beta q^2,\dots)=(\psi_1^2+y_1)e(\beta,\beta q^2,\dots)=(\psi_1^2+y_1)e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}$$

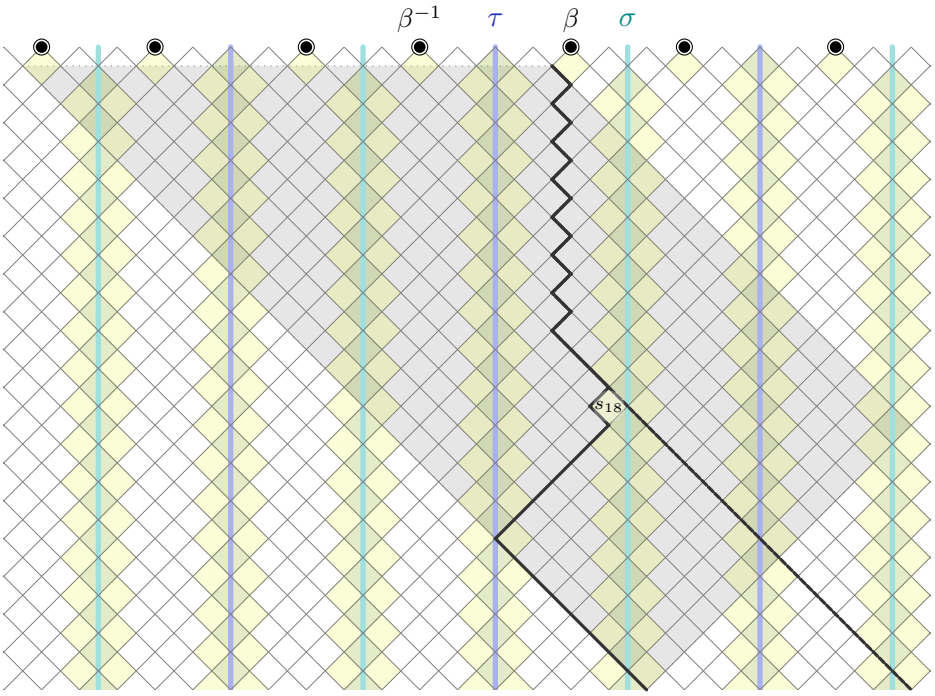


FIGURE 18. 此处 $e = 14$ 以及 $\alpha_1 = q^4$，并且 $\alpha_2 \notin \alpha_1 q^{2\mathbb{Z}}$。我们画出了两个梯形杨表，用以说明引理 5.17 证明中的第二种情况。我们有 s_{18} 将一条路径的剩余序列变为另一条路径的剩余序列。

利用（4.5）。现在，结论由 $j = 1$ 和引理 5.17得出。

现在，假设根据归纳法，对于 $j \geqslant 2$，结论成立。首先，假设在 $\mathsf{t}^{(k,\beta)}$ 中，第 j 步和第 $(j+1)$ 步是 $+\epsilon_1$。这意味着 $\mathrm{res}_{j+1}(\mathsf{t}^{(k,\beta)}) = q^2 \mathrm{res}_j(\mathsf{t}^{(k,\beta)})$，因此利用 (4.5)，我们有

$$y_{j+1} e_{\mathsf{t}^{(k,\beta)}} = (\psi_j^2 + y_j) e_{\mathsf{t}^{(k,\beta)}} ,$$

并且我们可以应用引理 5.17 以及归纳假设。

最后，假设在 $\mathsf{t}^{(k,\beta)}$ 中，第 j 步和第 $(j+1)$ 步分别是 $+\epsilon_1$ 和 $+\epsilon_2$（也就是说，j 是奇数）。这意味着 $e_{\mathsf{t}^{(k,\beta)}} = e(\ldots, \beta^{-1}q^{j-1}, \beta q^{j-1}, \beta^{-1}q^{j+1}, \ldots)$，其中我们只显示位置 $j-1$，j，$j+1$ 上的剩余。我们有：

$$\begin{aligned}
&\psi_{j-1}\psi_j e(\ldots, \beta q^{j-1}, \beta^{-1}q^{j+1}, \beta^{-1}q^{j-1}, \ldots)\psi_j\psi_{j-1} \\
&= \psi_{j-1}(y_{j+1} - y_j) e(\ldots, \beta q^{j-1}, \beta^{-1}q^{j-1}, \beta^{-1}q^{j+1}, \ldots)\psi_{j-1} \\
&= (y_{j+1} - y_j) e(\ldots, \beta^{-1}q^{j-1}, \beta q^{j-1}, \beta^{-1}q^{j+1}, \ldots) \\
&= (y_{j+1} - y_j) e_{\mathsf{t}^{(k,\beta)}}
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由 (4.3) 和 (4.5) 得出，注意到第 j 个和第 $j+1$ 个剩余相差 q^2。第二个不等式同样由 (4.3) 和 (4.5) 得出，因为 $\beta^{-1} \notin \{\beta, \beta q^{\pm 2}\}$。结合归纳假设以及 $e(\ldots, \beta q^{j-1}, \beta^{-1}q^{j+1}, \beta^{-1}q^{j-1}, \ldots) = 0$这一事实即可得到结论，因为它不可能是标准杨表的剩余序列。在路径模型中很容易看出这一事实：我们可以看到 $s_j s_{j-1}\mathsf{t}^{(k,\beta)}$ 不是一条有效路径。

另一种情形是 j 为偶数，且第 j 步和第 $j+1$ 步分别为 $+\epsilon_2$ 和 $+\epsilon_1$，处理方式类似，留给读者完成（将 j 和 $j-1$ 的顺序反过来即可）。□

命题5.19。设 $i \in I^n$，且 $w \in W(C_n)$ 是一个由简单对换的乘积表示的元素：$w = s_{t_1} s_{t_2} \ldots s_{t_m}$，其中某个 $0 \leqslant t_1, \ldots, t_m < n$。

(i) 如果 $s_{t_1} s_{t_2} \ldots s_{t_m}$ 不是一个约化词，那么 $\psi_{t_1}\psi_{t_2}\ldots\psi_{t_m} e(i) \in \mathscr{H}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 可以写成以下各项的线性组合

$$\psi_{t_{a_1}}\psi_{t_{a_2}}\ldots\psi_{t_{a_b}} f(y) e(\underline{i})$$

对于 $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_b \leqslant m$、$b < m$，且 $s_{t_{a_1}} s_{t_{a_2}} \cdots s_{t_{a_b}}$ 是一个约化词，并且 $f(y)$ 是关于 y_1、…、y_n 的多项式。

(ii) 我们有

$$y_k \psi_{t_1} \psi_{t_2} \ldots \psi_{t_m} e(\underline{i}) = \psi_{t_1} \psi_{t_2} \ldots \psi_{t_m} y_{w^{-1}(k)} e(\underline{i}) + \ldots$$

其中 . .. 表示形如以下各项的线性组合

$$\psi_{t_{a_1}} \psi_{t_{a_2}} \ldots \psi_{t_{a_b}} f(y) e(\underline{i})$$

对于 $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_b \leqslant m$、$b < m$，且 $f(y)$ 是关于 y_1、. . .、y_n 的多项式。

证明。证明过程与 [BKW11中的引理 2.5 和命题 2 完全相同。5]唯一需要稍作说明的是，对于 $W(C_n)$，我们要用到 Matsumoto 定理，而非有限对称群的 Matsumoto 定理。□

命题 5.20。代数 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 具有由双边理想构成的过滤

$$0 \leqslant \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant 0} \leqslant \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant 1} \leqslant \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant 3} \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant n}$$
$$0 \leqslant \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant 0} \leqslant \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant 2} \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant n}$$

当 n 为奇数或 偶数时，分别有$\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant n} = \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant n}$。这里每个子商 nt

$$\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{\leqslant k} / \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{<k}$$

分解为

$$\bigoplus_{\{\beta \mid (k,\beta) \in \Lambda_n\}} \Bbbk\text{–span}\{\psi_{\mathsf{s}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^* + \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{<k} \mid \mathsf{s}, \mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)\} \tag{5.4}$$

且 (5.4) 的分解是 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$-双模的直和。

证明。我们将 用归纳法对 $0 \leqslant k \leqslant n$进行证明。固定一个 $0 \leqslant k \leqslant n$，对任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，定义

$$\Delta_{\leqslant \ell}(k, \beta) := \Bbbk\text{–span}\{\psi_{\mathsf{u}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{v}}^* + \mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)^{<k} \mid \mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta), \ell(\mathsf{u}) + \ell(\mathsf{v}) \leqslant \ell\}.$$

我们以类似的方式定义 $\Delta_{<\ell}(k, \beta)$。对于给定的 $\ell = \ell(\mathsf{s}) + \ell(\mathsf{t})$，我们将通过归纳法证明以下两个断言

$$y_j \psi_{\mathsf{s}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^* \in \Delta_{<\ell}(k, \beta) \qquad \psi_j \psi_{\mathsf{s}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^* \begin{cases} = \psi_{\mathsf{p}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^* & \text{if } \mathsf{s} < s_j(\mathsf{s}) = \mathsf{p} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta) \\ \in \Delta_{<\ell}(k, \beta) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

从而得出结论。

断言 1. 由命题 5.19(ii) 可知

$$y_j \psi_{\mathsf{s}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^* = \sum_{\mathsf{p} \leqslant \mathsf{s}} \psi_{\mathsf{p}} f(y) e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^*.$$

若 $\mathsf{p} = \mathsf{s}$ 则注意到 $f(y)$ 是一个一次多项式（事实上，它就等于 $y_{w_{\mathsf{s}}(j)}$），因此根据命题 5.18，该项为零。根据定义，所有其他项都属于 $\Delta_{<\ell}(k, \beta)$。

断言 2. 我们将根据杨表 $s_j(\mathsf{s})$ 是否以及如何不满足标准条件，分情况证明此断言。若 $\mathsf{p} := s_j(\mathsf{s}) \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$ 是标准的且 $\mathsf{p} > \mathsf{s}$，则无需证明。若 $s_j(\mathsf{s})$ 是标准的，且 $s_j(\mathsf{s}) < \mathsf{s}$，则 $s_j w_{\mathsf{s}}$ 不是约化的；我们可以先用命题 5.19(i) 化简这个非约化字，再用命题 5.18 将 $\psi_j \psi_{\mathsf{s}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^*$ 改写为所需形式（因为多项式 $f(y)$ 中的任何正次数项都为零）。

最后还需考虑 $s_j(\mathsf{s})$ 不是标准杨表的情形。在这种情况下，我们令 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}}$表示 $\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$ 的（可容许、约化）铺砌。置换 $s_j w_{\mathsf{s}}$ 有一个可容许的（非约化）铺砌 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}} \cup \square$，对应某个不受支持的 $\square$（其 y 坐标为 $y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$）。有两块瓦片 $\square'$ 和 $\square''$ 与 $\square$ 相邻，且它们在铺砌块序中严格靠下；不失一般性，我们可设 $\square' \in \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$ 和 $\square'' \notin \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$。（注意，$\square'$，$\square'' \in \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$ 意味着 $s_j(\mathsf{s}) > \mathsf{s}$ 是标准的，而$\square'$，$\square'' \notin \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$ 意味着 $s_j(\mathsf{s}) < \mathsf{s}$ 是标准的。）

归纳法的基础情形。我们先考虑归纳法的基础情形。这些基础情形如下：(0) $\mathsf{s} = \mathsf{t}^{(k,\beta)}$ and $\mathsf{p} = s_j(\mathsf{s}) \notin \mathrm{Std}_n(k, \beta)$ (1) $\mathsf{s} = s_j(\mathsf{t}^{(k,\beta)}) \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$ and $s_{j\pm 1}(\mathsf{s}) \notin \mathrm{Std}_n(k, \beta)$ or (2) $\mathsf{s} = s_0 s_1(\mathsf{t}^{(k,\beta)}) \in \mathrm{Std}_n(k, \beta)$ and $s_1(\mathsf{s}) \notin \mathrm{Std}_n(k, \beta)$。情形 (0) 已在引理 5.16 和 5.17 中处理。在情形 (1) 中，我们有 $1 \leqslant j \leqslant n - k$，并且可以假设

j 为奇数（ j 为偶数的情形完全相同），并且 $s_{j+1}(\mathsf{s}) \notin \mathrm{Std}_n(k,\ \beta)$（情形 $s_{j-1}(\mathsf{s}) \notin \mathrm{Std}_n(k,\ \beta)$ 完全相同）。我们有

$$e_{\mathsf{s}} = e(\ldots, \beta^{-1}q^{j+1}, \beta q^{j-1}, \beta q^{j+1}, \ldots)$$

其中我们只写出了位置 j，$j+1$ 和 $j+2$处的剩余。注意

$$s_{j+1}(\mathrm{res}(\mathsf{s})) = e(\ldots, \beta^{-1}q^{j+1}, \beta q^{j+1}, \beta q^{j-1}, \ldots)$$

不是标准杨表的剩余序列。事实上，在剩余 $\beta^{-1}q^{j+1}$之后，有两种选择： βq^{j-1} 和 $\beta^{-1}q^{j+3}$ ，而根据关于 β的既定假设，它们都不等于 βq^{j+1} 。因此，根据 (4.10)，$e_{s_{j+1}(\mathrm{res}(\mathsf{s}))} = 0$ 。由 (4.3) 可得

$$\psi_{j+1}\psi_j e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* = \psi_{j+1}e_{\mathsf{s}}\psi_j e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* = e_{s_{j+1}(\mathrm{res}(\mathsf{s}))}\psi_{j+1}\psi_j e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* = 0.$$

在情形 (2) 中，我们有

$$e_{\mathsf{s}} = e(\beta q^{-2}, \beta, \ldots) \qquad e_{s_1(\mathrm{res}(\mathsf{s}))} == e(\beta, \beta q^{-2}, \ldots).$$

同样，根据既定假设，由于 $\beta q^{-2} \notin \{\beta^{-1}q^2, \beta q^2\}$ ，这不是标准杨表的剩余序列。因此，结论可由情形 (1) 同理得到。

归纳步骤。现在假设 $\ell(\mathsf{s}) \geqslant 2$ 和 $w_{\mathsf{s}} \neq s_0 s_1$。那么我们属于以下三种情形之一：(*i*) $\mathsf{s} = s_0 s_1 s_0 \mathsf{u}$，其中 $\mathsf{u} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$，且 $j=1$；(*ii*) $\mathsf{s} = s_{j-1}s_j\mathsf{u}$，其中 $\mathsf{u} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$；或 (*iii*) $\mathsf{s} = s_{j+1}s_j\mathsf{u}$，其中 $\mathsf{u} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta)$。在这三种情形中，$s_j(\mathsf{s})$ 都不是标准的。情形 (*i*) 和 (*ii*) 如图19所示。

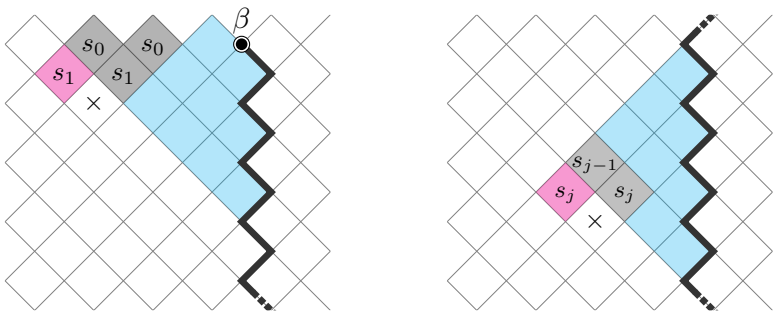


FIGURE 19. 归纳步骤的情形（i）和（ii）。灰色和蓝色瓦片的并集等于 $\mathbb{T}_{\mathsf{s}}$，其中 s 为标准杨表；粉色瓦片不满足标准性条件。 $\times$ 标出了缺失的瓦片 $\square'' \notin \mathbb{T}_{\mathsf{s}}$。我们强调，图中绘制的 s 具有最小长度，使得加入粉色瓦片会违反标准性条件；非最小情形可由交换关系推出。

我们首先考虑情形（ii）（并指出，情形（iii）也可以用完全相同的方式处理）。在情形（ii）中，利用（4.6），可得

$$\psi_j\psi_{\mathsf{s}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* = \psi_j\psi_{j-1}\psi_j\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* = \begin{cases}\psi_{j-1}\psi_j\psi_{j-1}\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \\ (\psi_{j-1}\psi_j\psi_{j-1} \pm 1)\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^*\end{cases}$$

这取决于 $\mathsf{s}(j-1)$ 是否位于某个超平面上。注意，$s_{j-1}(\mathsf{u})$ 不是标准的，并且$\ell(\mathsf{u}) = \ell(\mathsf{s}) - 2$，因此由归纳法可得 $\psi_{j-1}\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \in \Delta_{<\ell-2}(k,\beta)$ 和 $\psi_{j-1}\psi_j\psi_{j-1}\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \in \Delta_{<\ell}(k,\beta)$。此外，根据定义有 $\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \in \Delta_{\leqslant\ell-2}(k,\beta) \subseteq \Delta_{<\ell}(k,\beta)$，因此两种情形下均有 $\psi_j\psi_{\mathsf{s}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \in \Delta_{<\ell}(k,\beta)$。

现在考虑情形（i）。在此处，利用（4.9），我们有

$$\psi_1\psi_{\mathsf{s}}e_{\mathsf{t}_{(j,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* = \psi_1\psi_0\psi_1\psi_0\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(j,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* = \begin{cases}(\psi_0\psi_1\psi_0\psi_1 \pm 2\psi_0)\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(j,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \\ (\psi_0\psi_1\psi_0\psi_1 \pm \psi_1)\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(j,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \\ \psi_0\psi_1\psi_0\psi_1\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(j,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^*\end{cases}.$$

取决于 $\mathsf{u}(1)$ 位于超平面上，还是靠近标记点 $\pm\alpha_i$。注意，$\ell(\mathsf{u}) = \ell - 3$和 $s_1(\mathsf{u})$ 是非标准的，因此根据归纳法，$\psi_1\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^*$和 $\psi_0\psi_1\psi_0\psi_1\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^*$属于 $\Delta_{<\ell}(k,\ \beta)$。此外，$\psi_0\psi_{\mathsf{u}}e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}}\psi_{\mathsf{t}}^* \in \Delta_{\leqslant\ell-2}(k,\ \beta) \subseteq \Delta_{<\ell}(k,\ \beta)$。□

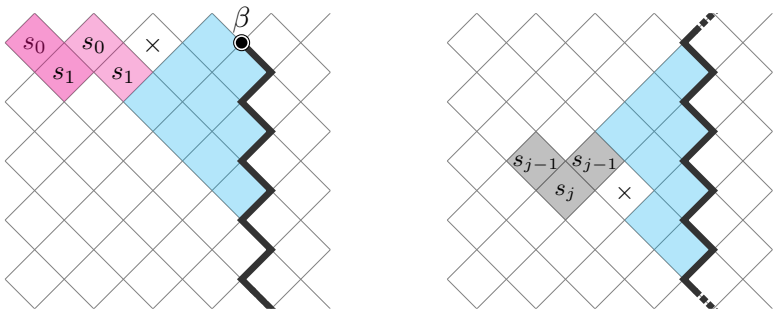


FIGURE 20. 重写归纳步骤中的情形（i）和（ii）。比较此处"缺失"的瓦片 $\times$ 与图 19 中的瓦片，并注意它在瓦片偏序中更小（这正是归纳步骤）。

推论5.21。 代数 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$ 和 $B_n(\kappa)$ 同构。代数 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$相对于基是一个拟遗传分次胞腔代数

$$\{\psi_{\mathsf{st}} := \psi_{\mathsf{s}} e_{\mathsf{t}_{(k,\beta)}} \psi_{\mathsf{t}}^{*} \mid \mathsf{s},\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(k,\beta),(k,\beta)\in\Lambda_n\}$$

the 反自反同构 $*$ 以及相对于偏序 $(\Lambda_n,\leqslant$ 的任意全序细化).

证明。 辛 blob 代数是 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \vartheta)$ 的一个商，由命题 4.7可知。命题 5.20 中的生成集的秩等于 blob 代数的秩（注意，命题 5.20 中用于索引的标准杨表集合，与命题 3.5 和定理 3.4 中 blob 代数所用的集合相同，即可看出这一点）。因此，商映射是同构，命题 5.20 中的生成集实际上是一个基。根据定义，反自反同构映射与胞腔结构相容。胞腔性的其他公理已在命题 5.20中得到验证。该代数是拟遗传代数，因为每个胞腔理想都由一个幂等元生成（根据定义）。□

给定 $\lambda\in\Lambda_n$，我们定义 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$ 中的以下左胞腔理想。

$$\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{\leqslant\lambda} = \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)e_{\mathsf{t}_\lambda}$$
$$\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<\lambda} = \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{\leqslant\lambda}\cap\Bbbk\{\psi_{\mathsf{st}} \mid \mathsf{s},\mathsf{t}\in\mathrm{Std}_n(\mu),\mu<\lambda\}.$$

左胞腔模 $\Delta_{\Bbbk}(\lambda)$ 定义如下

$$\Delta_{\Bbbk}(\lambda) = \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{\leqslant\lambda}/\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<\lambda}.$$

根据推论 5.21，该胞腔模有如下基

$$\{\psi_{\mathsf{s}}e_{\mathsf{t}_\lambda} + \mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<\lambda} \mid \mathsf{s}\in\mathrm{Std}_n(\lambda)\}.$$

我们滥用记号，以 ψ_{s} 表示 $\psi_{\mathsf{s}}e_{\mathsf{t}_\lambda}+\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<\lambda}\in\Delta_{\Bbbk}(\lambda)$。现在回顾这一分次胞腔结构如何帮助我们构造分次简单 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$-模。对于每个 $\lambda\in\Lambda_n$，我们在 $\Delta_{\Bbbk}(\lambda)$ 上定义双线性形式 $\langle-,-\rangle^{\lambda}$ 如下

$$\psi_{\mathsf{t}_\lambda\mathsf{s}}\psi_{\mathsf{tt}_\lambda} \equiv \langle\psi_{\mathsf{s}},\psi_{\mathsf{t}}\rangle^{\lambda}\, e_{\mathsf{t}_\lambda} \pmod{\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)^{<\lambda}} \tag{5.5}$$

对于任意 $\mathsf{s},\mathsf{t}\in\mathrm{Std}_n(\lambda)$。令 $\Bbbk$ 为特征不等于 2 的任意域。将这些形式的根基除去后，我们得到一组完备的两两不同构的简单 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\alpha_2,\vartheta)$-模

$$L_{\Bbbk}(\lambda) = \Delta_{\Bbbk}(\lambda)/\mathrm{rad}(\Delta_{\Bbbk}(\lambda)),$$

对于 $\lambda\in\Lambda_n$。

6. A conjectural LLT-style algorithm for graded decomposition matrices

最初的 LLT 猜想是用量子群 Fock空间的语言表述的[LLT96]；本文的定向反转箭图Temperley–Lieb代数与量子群并无明显联系（尽管二者之间确实存在一些联系 $\imath$量子群 [宾夕法尼亚州23]），因此读者或许会疑惑，究竟如何才能将 LLT 猜想推广到我们的情形。在 [KN10], Kleshchev–Nash 指出，原始 LLT 理论的各个方面都可以用分次杨表组合学的语言，以完全初等的方式重新诠释

，从而将 LLT算法重新表述为在 Hu–Mathas 的分次胞腔基中进行的一种自然计算 $\Bbbk\mathfrak{S}_n$ [HM10]。本文给出了 [HM10、KN10]的分次杨表／路径以及分次胞腔基的精确定向折叠类比；在本节中，我们将通过给出 LLT／Kleshchev–Nash算法的直接类比，并证明简单模维数的界（与特征无关！），来展现我们构造分次杨表／路径／胞腔基的成果。

我们验证猜想的两个重要情形：(*i*) q 不是单位根的情形（此时我们发现，任一块至多含有 5 个简单模）；以及 (*ii*) q 是单位根但 $\alpha_1,\ \alpha_2 \notin q^{\mathbb{Z}}$ 的情形（此时我们发现，随着 n 增大，一个块可以含有任意多个简单模）。从某种意义上说，这两种情形彼此正交。在情形 (*i*) 中，我们还将看到，中山猜想对定向折叠 Temperley–Lieb 代数的朴素推广并不成立。

我们注意到，关于辛 blob 代数在 $\mathbb{C}$上的（未分次）分解数，已有一些研究。具体而言，[GMP17] 中构造的某些标准模之间的非零同态表明，有些分解数非零。

6.1. **猜想**。 我们不在 Fock空间中进行计算，而是使用以下杨表论对象。

定义 6.1。 对于每一对 $\lambda=(\beta_1,k_1)\ \mu=(\beta_2,k_2)\in\Lambda_n$，我们将 $\mathsf{CStd}_n(\lambda,\mu)$ 定义为满足 $\mathrm{res}(\mathsf{s})=\mathrm{res}(\mathsf{t}^\mu)$ 的标准杨表 $\mathsf{s}\in\mathrm{Std}_n(\lambda)$ 的集合；我们称这些为形状为 shape λ 的 μ-着色标准杨表。

受 LLT/Kazhdan–Lusztig 理论中类似情形的启发，我们考虑杨表计数多项式

$$\dim_v(e_{\mathsf{t}_\mu}\Delta(\lambda))=\textstyle\sum_{\mathsf{s}\in\mathsf{CStd}_n(\lambda,\mu)}v^{\deg(\mathsf{s})}. \tag{6.1}$$

我们注意到，矩阵

$$(\Delta_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda_n}\qquad \Delta_{\lambda,\mu}:=\dim_v(e_{\mathsf{t}_\mu}\Delta(\lambda))$$

相对于 Λ_n 按递减顺序排列的自然序是下三角幺模的。现在，由于e_{t_μ} 生成简单模 $L(\mu)$，我们有 $[\Delta(\lambda):L(\mu)]\neq 0$ 蕴含 $\Delta_{\lambda,\ \mu}\neq 0$。这意味着由 $\Delta_{\lambda,\ \mu}\neq 0$ 生成的 Λ_n 上的等价关系的等价类（我们称之为 Δ-等价类）是若干块的并。因此，要描述 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \vartheta)$ 的分解矩阵，只需描述对应于每个 Δ- 等价类的子矩阵。

现在，矩阵 Δ 可以唯一地分解为下单位三角矩阵的乘积 $\Delta=NA$

$$N:=(n_{\lambda,\nu}(v))_{\lambda,\mu\in\Lambda_n}\qquad A:=(a_{\nu,\mu}(v))_{\nu,\mu\in\Lambda_n}$$

使得 $n_{\lambda,\ \nu}(v)\in v\mathbb{Z}[v]$ 对于 $\lambda\neq\nu$ 和 $a_{\nu,\ \mu}(v)\in\mathbb{Z}[v+v^{-1}]$。该矩阵分解的递归算法通过令 $a_{\lambda,\ \lambda}(v)=1=n_{\lambda,\ \lambda}(v)$ 并定义多项式来给出

$$a_{\lambda,\mu}(v)\in\mathbb{Z}[v+v^{-1}]\qquad n_{\lambda,\mu}(v)\in v\mathbb{Z}[v]$$

如下通过对阶数 $\leqslant$ 进行归纳法

$$a_{\lambda,\mu}(v)+n_{\lambda,\mu}(v)=\sum\nolimits_{\mathsf{s}\in\mathrm{CStd}(\lambda,\mu)}v^{\deg(\mathsf{s})}-\sum\nolimits_{\lambda<\nu<\mu}n_{\lambda,\nu}(v)a_{\nu,\mu}(v).$$

我们将 $n_{\lambda,\ \mu}(v)$ 定义为与 $\lambda,\ \mu\in\Lambda_n$ 相关联的定向反演 LLT 多项式。

猜想 6.2。 在复数域上，定向反演 *quiver Temperley–Lieb* 代数的分次分解数由定向反演 *LLT* 多项式给出

$$\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}[\Delta(\lambda):L(\mu)\langle k\rangle]v^k=n_{\lambda,\mu}(v)$$

对于 $\lambda,\mu\in\Lambda_n$。

注 6.3. 经典 *Temperley–Lieb* 代数和单边界 *Temperley–Lieb* 代数（*"blob* 代数*"*）的复分次分解矩阵已在 [PRH14、Pla13]中计算。两种情况下，答案都由$\widehat{\ }$型 A_1的（抛物）*Kazhdan–Lusztig* 多项式给出，这些多项式可以按照与上述完全相同的方式，通过通常的（非定向折叠）杨表／路径组合学计算或定义，参见例如 [KN10] 和 [Bow25，第 12]章。广义 *blob* 代数的复分次分解矩阵在 中被猜想，并在 [MW00] 中得到证明

在 [Bow22]中。在这种情况下，答案由型 $\widehat{\ }$的极大抛物 *Kazhdan–Lusztig* 多项式给出，这些多项式可以按照与上述完全相同的方式计算或定义。我们的猜想 *6.2* 深受 [PRH14、Pla13、Bow22], 中的定理启发并推动；然而，与这些经典情形不同，我们的定向反演 *LLT* 多项式显然无法用 *Kazhdan–Lusztig* 理论来解释。鉴于定向折叠箭图 *Hecke* 代数与 $\imath$量子群之间日益显现的联系（例如参见 [AP23]），自然会问，我们的定向反演 *LLT* 多项式能否用 $\imath$*BW* [的 Kazhdan–Lusztig 理论18], 来解释；不过，目前这纯属推测。

6.2. **简单模维数的界限。** 以下观察在分次元胞代数理论中相当标准，但对于下文而言同样强大且有用。

命题 6.4。 设 $\Bbbk$ 是一个特征不等于 *2* 的域。简单模的维数满足以下界限

$$\dim(L_{\Bbbk}(\lambda)) \geqslant \sharp\{\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n(\lambda) \mid \mathsf{s} \sim \mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(\lambda) \ \textit{with}\ \mathsf{max}(\mathsf{t}) = \lambda\} \tag{6.2}$$

证明。 我们有 $e_{\mathsf{s}} = e_{\mathsf{t}}$ 当 $\mathsf{s}, \mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n(\lambda)$ 如方程（6.2中所示。注意到 $e_{\mathsf{t}}\Delta(\mu) = 0$ 当$\mu > \lambda$ 时，由命题 5.14可得。我们进一步注意到 $[\Delta(\lambda): L(\mu)] = 0$ 当 $\mu \not> \lambda$ 时，由推论 5.21可得。结合这两个事实，我们立即推出

$$\dim(e_{\mathsf{t}}L(\lambda)) = \dim(e_{\mathsf{t}}\Delta(\lambda)) = \sharp\{\mathsf{s} \in \mathrm{Std}_n(\lambda) \mid \mathsf{s} \sim \mathsf{t}\} \tag{6.3}$$

于是结论成立。 □

6.3. **关于 $\Bbbk$任意（特征不同于 2）的分解矩阵，其中 q 为单位根且 $\alpha_1, \alpha_2, \vartheta \notin q^{\mathbb{Z}}$。** 在此情形下不存在超平面，因此我们的格中的所有瓦片都没有负次数。于是，$\Bbbk$-代数 $\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 对任意域 $\Bbbk$ 都是非负分次的。我们将首先通过一个例子说明所发生的情况，然后概述一般情形。

例 6.5。 令 ξ 和 i 分别表示本原 *5* 次和 *4* 次单位根。设 $q^2 = \xi$, $\alpha_1 = i$,$\alpha_2 = i\xi^2$，以及 $\vartheta = i\xi^3$。我们按下方图 *21* 所示为这些单位根着色。我们将考察由下式给出的 Δ-等价类：

$$\{(16, \alpha_1), (12, \alpha_2), (6, \alpha_1), (2, \alpha_2), (16, \alpha_1^{-1}), (10, \alpha_2^{-1}), (6, \alpha_1^{-1}), (0, \vartheta)\}$$

矩阵 $(\Delta_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda_n}$ 的对应块如下：

	$(16,\alpha_1)$	$(12,\alpha_2)$	$(6,\alpha_1)$	$(2,\alpha_2)$	$(16,\alpha_1^{-1})$	$(10,\alpha_2^{-1})$	$(6,\alpha_1^{-1})$	$(0,\vartheta)$
$(16,\alpha_1)$	1	0	0	0	0	0	0	0
$(12,\alpha_2)$	v	1	0	0	0	0	0	0
$(6,\alpha_1)$	v^2	v	1	0	0	0	0	0
$(2,\alpha_2)$	v^3	v^2	v	1	0	0	0	0
$(16,\alpha_1^{-1})$	0	0	0	0	1	0	0	0
$(10,\alpha_2^{-1})$	0	0	0	0	v	1	0	0
$(6,\alpha_1^{-1})$	0	0	0	0	v^2	v	1	0
$(0,\vartheta)$	v^4	v^3	v^2	v	v^3	v^2	v	1

这并不难计算。例如，第一列中的非零元素对应于由图中杨表张成的*22*一维空间。这些杨表只需通过“将标记点向右平移”即可得到。所有其他非零元素也可以用类似方式计算。根据定义

$$(\Delta_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda_n} = (N_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda_n} \qquad (A_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda_n} = \mathrm{Id}_{\Lambda_n}.$$

在此情形下，猜想成立，因为$(\Delta_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda_n}$ 的非对角元次数全都严格为正（而分次简单模的特征必须属于 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}[q+q^{-1}]$，这是由分次胞腔性所决定的。更详细的讨论请参见 [Bow25，第 6 节。7]）。特别要指出的是，这个Δ-等价类实际上是$\mathrm{TL}_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$的一个块。

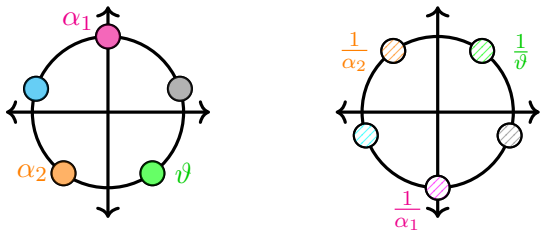


FIGURE 21. 例 6.5 中的剩余和特殊点 α_1, α_2, ϑ 以及它们的逆元。在左侧（右侧）我们画出了 $i\xi^k$（以及 $-i\xi^k$），对应于 $0 \leqslant k \leqslant 4$。

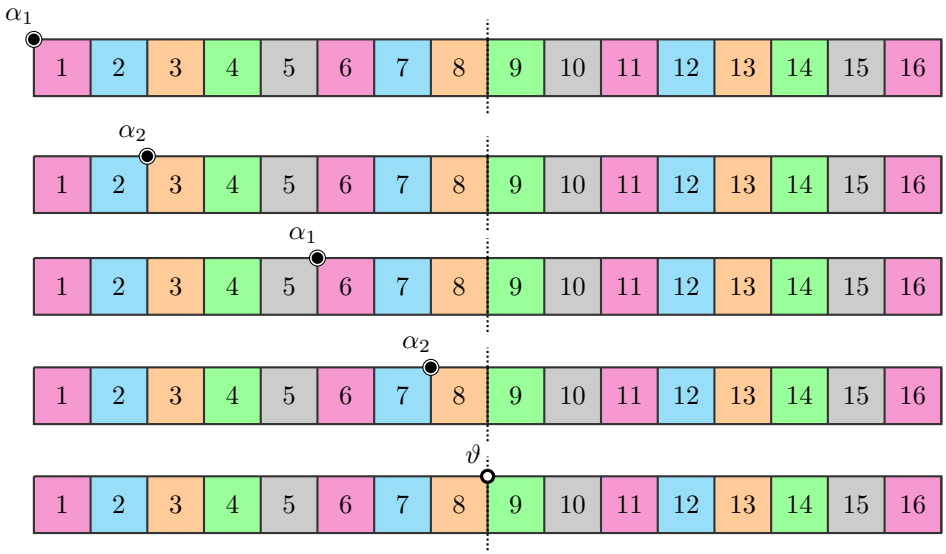


FIGURE 22. 对于 $\mathsf{CStd}(\lambda, \mu)$，其中 $\lambda \in \Lambda_{16}$ 以及 $\mu = (16, \alpha_1)$，如例 6.5所示的所有元素。我们将它们画成杨表，以此突出"将标记点向右平移"这一思想。

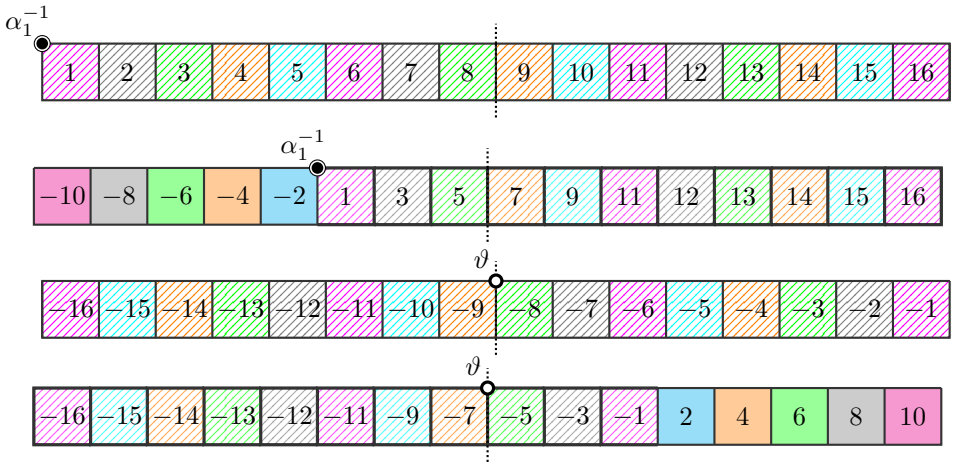


FIGURE 23. 令 $\nu = (16, \alpha_1^{-1})$ $\mu = (6, \alpha_1^{-1})$ 和 $\lambda = (0, \vartheta)$，如例 6.5 所示。我们画出了杨表 t^ν、t^μ，以及 $\mathsf{CStd}_n(\lambda, \nu)$ 和 $\mathsf{CStd}_n(\lambda, \mu)$ 中唯一的元素。注意，我们平移了标记点，并且翻转了符号和顺序（因为 $\vartheta \notin q^{\mathbb{Z}}\alpha_1^{-1}$，但 $\vartheta^{-1} \in q^{\mathbb{Z}}\alpha_1^{-1}$）。

一般情形（q 是单位根，但 $\alpha_1, \alpha_2, \vartheta \notin q^{\mathbb{Z}}$）并不比例6.5更难。对于 $\lambda = (k_1, \beta_1)$ $\mu = (k_2, \beta_2) \in \Lambda_n$，我们有$\mathsf{CStd}_n(\lambda, \mu) \neq \emptyset$当且仅当 $\beta_1 = \beta_2 q^{2a}$对于某个$0 \leqslant a < e$和 $k_2 - k_1 \in 2a + 2e\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$成立。每个非零权空间仍由一个杨表张成，该杨表以完全相同的方式通过"将标记点向右移动"得到；

该猜想成立（对 $\Bbbk$不作限制），因为分次简单模的特征必属于 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}[q+q^{-1}]$。注意，如果 $\vartheta \in \alpha_j q^{\mathbb{Z}}$，对于 $\mu=(k,\ \alpha_j^{-1})$ 和 $\lambda=(0,\ \vartheta)$，我们必须反转杨表条目的顺序和符号，如 $\alpha_j^{-1} \notin \vartheta q^{\mathbb{Z}}$所示，见图 23。

6.4. 当 q 不是单位根时的分解矩阵与中山猜想。 令$\alpha_1,\ \alpha_2 \in q^{\mathbb{Z}}$ 其中 q 不是单位根，并假设 $\alpha_1=q^{a_1}$ 且 $\alpha_2=q^{a_2}$ 满足 $0<a_1<a_2$。根据定义，对于 $\lambda,\ \mu \in \{(k,\ \alpha_1^{\pm 1}) \mid 0<k \leqslant n\}$，我们有 $\mathsf{CStd}_n(\lambda,\ \mu)=\emptyset$，除非 $\lambda=(k-2a_1,\ \alpha_1)$ 且 $\mu=(k,\ \alpha_1^{-1})$（或是平凡情形，此时 $\lambda=\mu$）。事实上，$\mathsf{CStd}_n((k-2a_1,\ \alpha_1),\ (k,\ \alpha_1^{-1}))$ 中有唯一一个元素，且其次数为 0。我们断言

$$[\Delta(k-2a_1,\alpha_1) : L(k,\alpha_1^{-1})]=0 \tag{6.4}$$

在任意域上 $\Bbbk$ （特征不等于 2）（由此猜想6.2 在此情形下成立）。我们设 $\lambda=$ $(k-2a_1,\ \alpha_1)$ 以及 $\mu=$ $(k,\ \alpha_1^{-1})$，并如下定义 Std_n（λ）中的元素：

- 令s $\in \mathrm{Std}_n$（λ）表示由t^μ 向右平移标记点 a_1方格得到的杨表；
- 令$\mathsf{t} \in \mathrm{Std}_n$（$\lambda$）表示不属于同一剩余类中的梯形杨表的唯一最小长度杨表；
- 令 u $<\mathsf{t}$ 表示从 $\mathbb{T}_\mathsf{t}$ 中移除一块瓦片后得到的唯一杨表；
- 令 v $\in \mathsf{Std}_n(\lambda)$ 表示满足 $\mathsf{u} \sim \mathsf{v}$（且 $\mathsf{u} \neq \mathsf{v}$）的唯一元素；

有关示例，请参见图24 。通过验证即可证明这一点

$$\langle \psi_\mathsf{s}, \psi_\mathsf{s}\rangle e_{\mathsf{t}_\lambda} = \psi_\mathsf{s}^*\psi_\mathsf{s} e_{\mathsf{t}_\lambda} = \pm\psi_\mathsf{t}^*\psi_\mathsf{t} e_{\mathsf{t}_\lambda} = \pm\psi_\mathsf{u}^* y_1 \psi_\mathsf{u} e_{\mathsf{t}_\lambda} = \pm 2\psi_\mathsf{u}^*\psi_\mathsf{v} e_{\mathsf{t}_\lambda} = \pm\langle 2\psi_\mathsf{u}, \psi_\mathsf{v}\rangle e_{\mathsf{t}_\lambda} \tag{6.5}$$

对于 $\langle \psi_\mathsf{u}, \psi_\mathsf{v}\rangle \neq 0$，(6.5) 的第一个等式由定义得出。(6.5) 的第二个等式由交换关系和 (5.2) 得出。第三个等式由关系 (4.7) 得出。第五个等式由定义以及分次考虑 $\langle \psi_\mathsf{u}, \psi_\mathsf{u}\rangle = 0 = \langle \psi_\mathsf{v}, \psi_\mathsf{v}\rangle$ 得出；并且根据方程 (6.3)，此权空间的 Gram 矩阵满秩（因为 u 是一个梯形杨表），因此 $\langle \psi_\mathsf{u}, \psi_\mathsf{v}\rangle \neq 0$。我们将在一个具体例子中证明第四个等式（一般情形类似）。接着注意到，(6.5) 立即推出 $\psi_\mathsf{s} \notin \mathsf{rad}\ \langle -,-\rangle_\lambda$，因此 $[\Delta(k-2a_1,\alpha_1) :\ L(k,\alpha_1^{-1})]=0$。

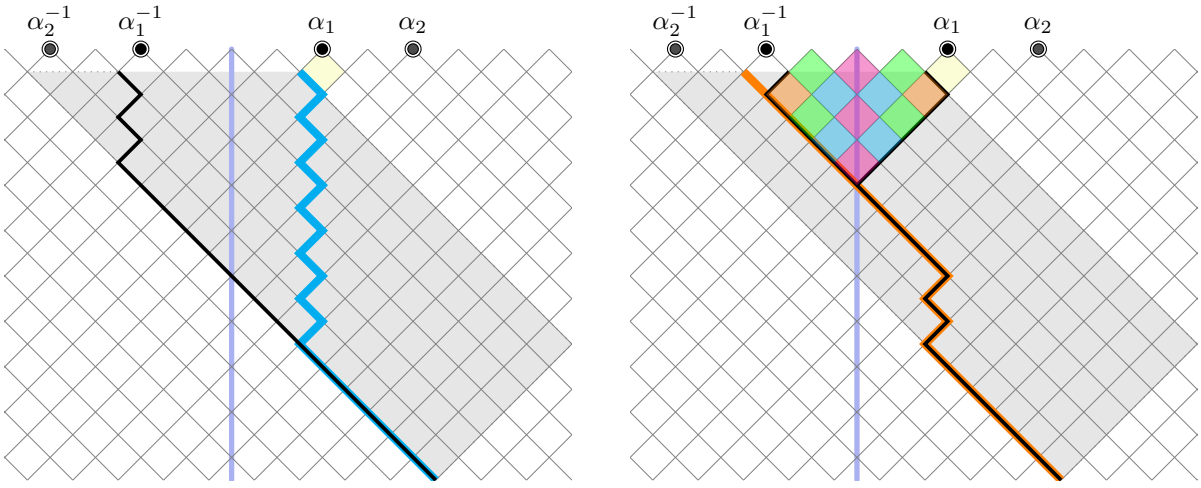


FIGURE 24. 这里 $\alpha_1=q^4$ 以及 $\alpha_2=q^8$。左侧描绘了非梯形杨表 s 和杨表 t_λ。右侧描绘了非梯形杨表 t 以及杨表对 u $\sim \mathsf{v}$ 使得u 是一个梯形杨表。这些是例 6.6 中证明所用的杨表。

例6.6. 设 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in q^{\mathbb{Z}}$ 其中 q 不是单位根，并假设 $\alpha_1=q^4$ 且 $\alpha_2=q^8$。我们将证明，对于图 中的 u，v （见图 24），有

$$\begin{aligned} y_1\psi_\mathsf{u} &= y_1\psi_1(\psi_0\psi_2)(\psi_1\psi_3)(\psi_0\psi_2\psi_4)(\psi_1\psi_3)(\psi_0\psi_2)\psi_1\psi_\mathsf{v} \\ &= \psi_1\psi_0\psi_2\psi_1\psi_3\psi_0\psi_2(\psi_4 y_5+1)\psi_1\psi_3\psi_0\psi_2\psi_1\psi_\mathsf{v} \\ &= \psi_1\psi_0\psi_2\psi_1\psi_0(\psi_3\psi_2\psi_3)\psi_1\psi_0\psi_2\psi_1\psi_\mathsf{v} \\ &= \psi_1\psi_0\psi_2\psi_1\psi_0(\psi_2\psi_3\psi_2+1)\psi_1\psi_0\psi_2\psi_1\psi_\mathsf{v} \end{aligned}$$

$$= \psi_1\psi_0\psi_2(\psi_1\psi_0\psi_1\psi_0)\psi_2\psi_1\psi_{\mathsf{v}}$$
$$= \psi_1\psi_0\psi_2(\psi_0\psi_1\psi_0\psi_1 + 2\psi_0)\psi_2\psi_1\psi_{\mathsf{v}}$$
$$= 2\psi_1\psi_0\psi_0\psi_2\psi_2\psi_1\psi_{\mathsf{v}} = 2\psi_{\mathsf{v}}$$

其中，第一个等式由定义得出（将着色与图24比较）；第二个等式由反复应用（4.2）得出；第三、第五和第七个等式由剩余类考量及（4.9）（以及交换关系）得出；第四个等式由（4.5）得出；第六个等式由（4.8）得出；第八个等式由（4.4）得出。因此，我们验证了 (6.5)，从而在此情形下验证了 (6.4)。对于此块中的所有其他对 λ，$\mu \in \Lambda_n \setminus \{(0, \vartheta)\}$，有

$$\sum_{\mathsf{s}\in \mathsf{CStd}_n(\lambda,\mu)} v^{\deg(\mathsf{s})} \in \mathbb{Z}[q]$$

因此，分解矩阵的其余元素可立即推得。对于特征不为 2 的 $\Bbbk$，相应块的分次分解矩阵与域 $\Bbbk$ 无关，具体如下

	$(18, \alpha_2^{-1})$	$(14, \alpha_1^{-1})$	$(6, \alpha_1)$	$(2, \alpha_2)$
$(18, \alpha_2^{-1})$	1	0	0	0
$(14, \alpha_1^{-1})$	v	1	0	0
$(6, \alpha_1)$	v	0	1	0
$(2, \alpha_2)$	v^2	v	v	1

注6.7。上述例子表明，中山猜想对于 $TL_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 不成立。也就是说：$TL_n(\alpha_1, \alpha_2, \vartheta)$ 的块并非由形状/杨表的剩余类的 $W(C_n)$-轨道给出（这与 A 型的圆分 Hecke 代数和 Temperley–Lieb 代数的情形不同）。要看出这一点，只需注意：如果 $\alpha_1 \in q^{a_1}$ 但 $\alpha_2 \notin q^{\mathbb{Z}}$ 且 $\vartheta \notin q^{\mathbb{Z}}$，那么例6.6中的两个单余模具有相同的剩余的 $W(C_n)$-轨道，但不属于同一个块。

致谢。第一作者感谢英国工程与自然科学研究委员会通过资助项目 EP/V00090X/1 提供经费。本文写于五位作者均在 ICERM 参加"代数组合学中的范畴化与计算"项目期间，该项目于2025年秋季举行。

References

[AP23] A. Appel 和 T. Przezdziecki, *Generalized Schur-Weyl dualities for quantum affine symmetric pairs and orientifold KLR algebras*, 《Adv. Math.》 **435** (2023), 论文编号为 109383, 52。[BN05] D. Bar-Natan, *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*, 《Geom. Topol.》 9 (2005), 1443–1499。[Bax82] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 伦敦, 1982年。[Bow22] C. Bowman, *The many integral graded cellular bases of Hecke algebras of complex reflection groups*, 《Amer. J. Math.》 144 (2022年), 第2期, 437–504。[Bow25], *Diagrammatic algebra*, Universitext, Springer, ©2025. 附有 Geordie Williamson 撰写的序言。[BC18] C. Bowman 和 A. Cox, *a path theoretic approach to Modular decomposition numbers of cyclotomic Hecke and diagrammatic Cherednik algebras*, 《Forum Math. Sigma》 **6** (2018), 论文编号 e 。[BCH23] C. Bowman, A. Cox 和 A. Hazi, *Path isomorphisms between quiver Hecke and diagrammatic Bott-Samelson endomorphism algebras*, 《Adv. Math.》 **429** (2023), 论文编号为 109185, 106。[BDD+] C. Bowman、A. Dell'Arciprete、M. De Visscher、A. Hazi、R. Muth 和 C. Stroppel, *Quiver presentations and Schur–Weyl duality for Khovanov arc algebras*, 2411 15520, （即将在《Math. Z.》发表）arXiv: 。。[BHDS] C. Bowman、A. Hazi、M. De Visscher 和 C. Stroppel, *Quiver presentations and isomorphisms of Hecke categories and Khovanov arc algebras*, 2309 13695, arXiv: 。。[BK09] J. Brundan 和 A. Kleshchev, *Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras*, 《Adv. Math.》 222 (2009), 第6期, 1883–1942。[BKW11] J. Brundan、A. Kleshchev 和 W. Wang, *Graded Specht modules*, 《J. Reine Angew. Math.》 655 (2011), 61–87。[BS11] J. Brundan 和 C. Stroppel, *Highest weight categories arising from Khovanov's diagram algebra I: cellularity*, 《Mosc. Math. J.》 11 (2011), 第4期, 685–722, 821–822。[BW18] H. Bao 和 W. Wang, *A new approach to Kazhdan-Lusztig theory of type B via quantum symmetric pairs*, 《Ast´erisque》 (2018), 第402期, vii+134。[dGN09] J. de Gier 和 A. Nichols, *The two-boundary Temperley–Lieb algebra*, 《J. Algebra》 321 (2009), 第4期, 1132–1167。[dGNPR05] J. de Gier、A. Nichols、P. Pyatov 和 V. Rittenberg, *Magic in the spectra of the XXZ quantum chain with boundaries at $\Delta = 0$ and $\Delta = -1/2$*, **729** (2005), 387–418, 《Nuclear Physics B》 （），–。[dGP04] J. de Gier 和 P. Pyatov, *Bethe ansatz for the Temperley–Lieb loop model with open boundaries*, 《Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment》 2004 (2004), 第03期, P03002。[DR25a] Z. Daugherty 和 A. Ram, *Calibrated representations of two boundary Temperley–Lieb algebras*, 《Ann. Represent. Theory》 2 (2025), 405–438。[DR25b], *Two boundary Hecke algebras and combinatorics of type C*, 《Ann. Represent. Theory》 2 (2025), 355–404。[EK06] N. Enomoto 和 M. Kashiwara, *Symmetric crystals and affine Hecke algebras of type B*, 《Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.》 82 (2006), 第8期, 131–136。[EL] B. Elias 和 I. Losev, *Modular representation theory in type A via Soergel bimodules*, arXiv:1701.00560。

[Eli10] B. Elias, *A diagrammatic Temperley–Lieb categorification*, 《Int. J. Math. Math. Sci.》（2010），文章编号530808，47页。[Ern12] D. Ernst, *Diagram calculus for a type affine C Temperley–Lieb algebra I*, 《J. Pure Appl. Algebra》216（2012），67–88。[Ern18], *Diagram calculus for a type affine C Temperley–Lieb algebra, II*, 《J. Pure Appl. Algebra》222（2018），795–830。[GMP08] R. M. Green、P. P. Martin 和 A. E. Parker, *On the non-generic representation theory of the symplectic blob algebra* 2008 , arXiv预印本（）。[GMP12], *A presentation for the symplectic blob algebra*, 《J. Algebra Appl.》11（2012），第3期，1250060，22页。[GMP17], *On quasi-heredity and cell module homomorphisms in the symplectic blob algebra*, arXiv:0807.4101。[HGP19] A. Harbat、C. Gonz´alez 和 D. Plaza, *Type $\widehat{C}$ Temperley–Lieb algebra quotients and Catalan combinatorics*, arXiv:1904.08351。[HM10] J. Hu 和 A. Mathas, *Graded cellular bases for the cyclotomic Khovanov–Lauda–Rouquier algebras of type A*, 《Adv. Math.》225（2010），第2期，598–642。[Kho00] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, 《Duke Math. J.》101（2000），第3期，359–426。[KK12] S.-J. Kang 和 M. Kashiwara, *Categorification of highest weight modules via Khovanov–Lauda–Rouquier algebras*, 《Invent. Math.》190（2012），第3期，699–742。[KMP16] O. H. King、P. P. Martin 和 A. E. Parker, *Decomposition matrices and blocks for the symplectic blob algebra over the complex field* 2016 41 1611 06968 [ ] , arXiv预印本（），页数；arXiv: 。math.RT 。[KN10] A. Kleshchev 和 D. Nash, *An interpretation of the Lascoux–Leclerc–Thibon algorithm and graded representation* , 《Comm. *theory* **38** 2010 12, 4489 4500 Algebra》（），第–期。[LLT96] A. Lascoux、B. Leclerc 和 J.-Y. Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras* **181** 1996 1, 205 263 , 《Comm. Math. Phys.》（），第–期。[LP20] N. Libedinsky 和 D. Plaza, *Blob algebra approach to modular representation theory*, 《Proc. Lond. Math. Soc.》(3) 121（2020），第3期，656–701。[LS22] A. D. Lauda 和 J. Sussan, *An invitation to categorification*, 《Notices Amer. Math. Soc.》69（2022年），第1期，11–21。[LV11] A. D. Lauda 和 M. Vazirani, *Crystals from categorified quantum groups*, 《Adv. Math.》228（2011），第2期，803–861。[Man22] C. Manolescu, *Four-dimensional topology*, https://web.stanford.edu/~cm5/4D.pdf。2022年。访问日期：2025年10月29日。[MGP07] P. Martin、R. M. Green 和 A. Parker, *Towers of recollement and bases for diagram algebras: planar diagrams and a little beyond* **316** 2007 1, 392 452 , 《J. Algebra》（），第–期。[MS94] P. Martin 和 H. Saleur, *The blob algebra and the periodic Temperley–Lieb algebra*, 《Lett. Math. Phys.》30（1994），第3期，189–206。[MW00] P. Martin 和 D. Woodcock, *On the structure of the blob algebra*, 《J. Algebra》225（2000），第2期，957–988。[Nic06a] A. Nichols, *Structure of the two-boundary XXZ model with non-diagonal boundary terms*, 《Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment》（2006），第02期，L02004。[Nic06b], *The Temperley–Lieb algebra and its generalizations in the Potts and XXZ models*, 《Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment》（2006），第01期，P01003。[PdR21] L. Poulain d'Andecy 和 S. Rostam, *Morita equivalences for cyclotomic Hecke algebras of types B and D*, 《Bull. Soc. Math. France》149（2021），第1期，179–233。[PdW20] L. Poulain d'Andecy 和 R. Walker, *Affine Hecke algebras and generalizations of quiver Hecke algebras of type B*, 《Proc. Edinb. Math. Soc. (2)》63（2020），第2期，531–578。[Pic20] L. Piccirillo, *The Conway knot is not slice*, 《Ann. of Math. (2)》191（2020），第2期，581–591。[Pla13] D. Plaza, *Graded decomposition numbers for the blob algebra*, 《J. Algebra》394（2013），182–206。[PRH14] D. Plaza 和 S. Ryom-Hansen, *Graded cellular bases for Temperley–Lieb algebras of type A and B*, 《J. Algebraic Combin.》40（2014），第1期，137–177。[Ree18] A. Reeves, *Tilting modules for the symplectic blob algebra*, arXiv预印本（2018）。[Str] C. Stroppel, *Categorification: tangle invariants and TQFTs*, arXiv:2207.05139。[Str09], *Parabolic category $\mathcal{O}$, perverse sheaves on Grassmannians, Springer fibres and Khovanov homology*, 《Com- pos. Math.》145（2009），第4期，954–992。[TL71] H. N. V. Temperley 和 E. H. Lieb, *Relations between the "percolation" and "colouring" problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the "percolation" problem* , 《Proc. Roy. Soc. London Ser. A》322（1971），第1549期，251–280。[VV11] M. Varagnolo 和 E. Vasserot, *Canonical bases and affine Hecke algebras of type B*, 《Invent. Math.》185（2011），第3期，593–693。

Department of Mathematics, University of York, Heslington, York, UK
Email address: chris.bowman-scargill@约克.ac.uk

Department of Mathematics and Statistics, Reed College, Portland OR, USA
Email address: zdaugherty@reed.edu

Department of Mathematics, City St George's, University of London, London, UK
Email address: maud.devisscher.1@citystgeorges.ac.uk

Department of Mathematics and Computer Science, Duquesne University, Pittsburgh PA, USA
Email address: muthr@duq.edu

Laboratoire de Mathématiques de Reims, CNRS UMR 9008 Université de Reims Champagne-Ardenne, Reims, France
Email address: loic.poulain-dandecy@univ-reims.fr