arXiv:2601.04013v1 [physics.ao-ph] 7 Jan 2026

水平离散化对三角形和六边形网格上线性斜压不稳定性与对称不稳定性的影响

Steffen Maaß[a], Sergey Danilov[a]

[a]阿尔弗雷德·魏格纳极地与海洋研究所（*AWI*），德国不来梅哈芬

摘要

随着全球海洋环流模式以涡旋可分辨率运行，在选择运动方程的离散化方案时，准确再现斜压不稳定性的增长率是一个主要关注点。基于这一考虑，我们分析了多种海洋环流模型所采用的三角形和六边形网格离散化方案，这些方案采用了不同类型的变量交错布置。通过将 Eady 构型中的线性斜压不稳定性分析扩展到更复杂网格上的离散化方案，我们揭示了若干数值细节。与四边形网格上的离散化方案相比，所分析的方案对不稳定伪模态的鲁棒性较差，这些伪模态部分由网格几何造成。有些细节源于交错布置的三角形和六边形网格上的伪模态不满足伽利略不变性。因此，其增长率会随背景流与网格之间的对齐方式以及均匀背景流的强度而变化。在对称不稳定性轴上，与伪模态的相互作用变得更加显著，因为在波数空间中，物理不稳定性分支与伪分支更难区分。我们的分析表明，在大多数情况下，适度的双调和黏性和扩散能够抑制伪分支。然而，为实现这一点，必须针对所考察的每种离散化方案仔细校准黏性和扩散率参数。

关键词：斜压不稳定性、对称不稳定性、离散化、三角形网格、六边形网格

1. 引言

目前已有若干基于非结构网格构建的全球海洋环流模式，包括MPAS-Ocean（[1]）、ICON-o（[2]）和 FESOM（[3], [4]）。它们在水平面上采用不同类型的空间离散化。ICON-o 和 MPAS-Ocean 的离散化分别基于主三角形网格（ICON-o）或对偶六边形网格（MPAS-Ocean）边上的离散法向速度，并分别将标量置于主网格或对偶网格的网格单元上。FESOM 使用置于三角形网格单元上的完整速度矢量，以及置于与网格顶点相关的中值对偶控制体上的标量。类比于“Arakawa”四边形网格（[5]），本文讨论的离散化将分别称为六边形 C 网格（MPAS-Ocean）、三角形 C 网格（ICON-o，尽管该模式采用的拟保结构离散不同于通常的 C 网格）和三角形 B 网格（FESOM）。非结构网格海洋模型及其离散化的列表还可扩展至许多海岸模型，但本文不予讨论。

关于规则四边形 B网格和C网格优缺点的问题，学界已反复讨论，并已成为教科书中的内容（例如 [6]）。众所周知，B网格在表示科里奥利力方面占优，而C 网格虽需进行平均，但在表示压力梯度方面不如B网格，因为相较于C 网格，它还需要额外进行平均。近期的分析 [7] 通过研究这两种网格如何再现 Eady 问题构型中已知的不稳定性，增进了我们对B网格和C网格特性的理解。全球海洋环流模型的分辨率不断提高，人们也采用多种设置来模拟涡旋丰富区制；这项分析有助于评估这两种网格（离散化方案）的有效分辨率。[7] 表明，C 网格离散能更准确地给出对称不稳定的增长率，但会产生虚假的斜压不稳定（波矢与未扰动流对齐），其波数范围一直延伸到截断波数。要抑制后者，需要将四阶标量平流与双调和水平黏性特别组合使用。因此，虽然两种网格都适用于模拟标准斜压不稳定，但在对称不稳定可能成为动力学组成部分的超高分辨率下，C 网格可能是更好的选择。

问题在于，对于三角形（六边形）C 网格和 B 网格，重现不稳定性的这些差异是否依然存在。另一方面，与 B 网格相比，C 网格在压力梯度计算方面仍具有更好的局部性。然而，与

四边形网格的情形相比，两者存在许多差异。例如，三角形 B 网格无需进行压力梯度平均；六边形 C 网格需要对科里奥利项进行特殊重构（[8],[9]）；而在三角形 C 网格上，则需要采用特殊方法来表示水平散度，这相当于对主要法向速度进行平均（[2]）。不过，还有一项重要差异：所有交错非结构网格离散都会保留伪模态，这些模态源于矢量自由度与标量自由度不平衡（见例如 [10, 11, 12, 13]）。标量自由度可能过多（三角形 C 网格），也可能速度自由度过多（六边形 C 网格和三角形 B 网格）。这些伪模态究竟只是改变模拟得到的增长率，还是会自行导致伪不稳定性，仍有待解答。

本文的研究受到 [7] 中所进行分析的启发，旨在将该分析扩展至三角形和六边形网格离散。我们研究这些离散在表示 Eady 问题构型中的线性斜压不稳定性和对称不稳定性方面的精度。与 [7], 类似，我们采用静力近似和 Boussinesq 近似，并将浮力视为单一标量场。由于相比规则四边形网格上的分析，这里的分析更为繁琐，因此正文仅介绍三角形 B 网格和 C 网格的情形，而傅里叶符号的计算仅限于少数示例。作为替代方案，补充材料中提供了一个笔记本，供读者进一步以符号方式分析线性化算子的傅里叶符号，其中包括六边形 C 网格上的算子。为求完整，并与交错离散形成对照，该笔记本还包含三角形 A 网格的傅里叶符号；正如预期，这种网格不易产生伪不稳定性。

2. 方法

通过应用 Boussinesq 近似和静力近似，简化运动方程。假设动量平衡成立于一个 f 平面上，科里奥利参数 f_0 为常数，且双调和黏性和扩散的系数分别为 $\mathbb{K}^u$ 和 $\mathbb{K}^b$。与 [7] 不同，我们不在表面施加刚性盖边界条件，而是采用线性化自由表面。在这种情况下，在标量点引入表面高度场，记为 η，约化后的表面压力（除以参考密度 ρ_0）为 $g\eta$，其中 g 为重力加速度。令 $g \to \infty$ 取极限值即可得到刚性盖极限。为分析 Eady 构型中不稳定性的增长率，将方程

围绕水平背景流进行线性化

$$(U, V) = (\cos\theta, \sin\theta) M^2 (z - H(1/2 + \beta))/f_0,$$

背景浮力

$$B = N^2 z - M^2 x \sin\theta + M^2 y \cos\theta.$$

其中，θ 是流动相对于 x 轴的夹角，β 是中层背景流的无量纲速度。参数与 [7], 中的参数一致，即流深为 $H = 4000$ 米，科里奥利参数为 $f_0 = -10^{-4}$ 秒$^{-1}$，布伦特-魏萨拉（浮力）频率为 $N = 10^{-3}$ 秒$^{-1}$。这些参数使第一变形半径约为 $R_d = NH/|f_0| = 40$ 千米（注意分母中没有 π ）。水平方向的浮力频率 M 通过指定理查森数 $\mathrm{Ri} = N^2 f_0^2 / M^4$ 来设定。为与 [7], 相比较，我们考虑 $\mathrm{Ri} = 100$ 时的斜压不稳定情形，以及 $\mathrm{Ri} = 0.5$ 时的对称不稳定情形。斜压不稳定的最大增长率为 $0.31 f_0/\sqrt{\mathrm{Ri}}$，出现在 $kR_d \approx 1.6$。中层背景流的无量纲速度 β 通常设为零，使流速剖面关于中层对称；但这里也改变这一参数，以分析离散化违反伽利略不变性的影响。

线性化运动方程总结于下方的系统（1）中。速度场分为水平分量和垂直分量：$\mathbf{v} = (\mathbf{u}\ w)$。系统在底部采用不可穿透条件，在顶部采用线性化自由表面条件，从而构成闭合系统。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}(z)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{U}_z w + f_0 \boldsymbol{u}^\perp + \mathbb{K}^u \Delta^2 \boldsymbol{u} = -\nabla p - g\nabla\eta \tag{1a}$$

$$\partial_z p = b \tag{1b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \partial_z w = 0 \tag{1c}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (\boldsymbol{U}(z)\cdot\nabla)\,b + \nabla B\cdot\boldsymbol{u} + N^2 w + \mathbb{K}^b \Delta^2 b = 0 \tag{1d}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\boldsymbol{U}(z)\cdot\nabla)\,\eta + \int_{-H}^{0} \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{位于}\quad z = 0 \tag{1e}$$

$$p = 0 \qquad \text{位于}\quad z = 0 \tag{1f}$$

$$w = 0 \qquad \text{位于}\quad z = -H \tag{1g}$$

线性化系统在水平面上具有常系数，因此可将水平坐标空间傅里叶变换至波数空间。沿垂直方向采用分层形式表述运动方程，并通过积分连续性方程（1c）和静力平衡方程（1b），消去垂直速度和压力，可得到一组常微分方程。对于固定波矢 $\boldsymbol{k}$，该方程组可求解。对相应特征值问题的解，按角频率 ω采用通常的时间依赖形式假设；若 $\Im(\omega) > 0$，则解不稳定，否则稳定。方程（2）中所表述的特征值问题，以水平速度平面波的振幅 $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}, \hat{v})$、浮力的振幅 $\hat{b}$，以及表面高度的振幅 $\hat{\eta}$）为变量，其中下划线表示不同垂直层上的振幅向量。图 3和 4中，斜压轴和对称轴上增长最快的不稳定性对应的增长率均标记为“理想”。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{bmatrix} \underline{\hat{\boldsymbol{u}}} \\ \underline{\hat{b}} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)) = \mathsf{S}_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \underline{\hat{\boldsymbol{u}}} \\ \underline{\hat{b}} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)) \tag{2}$$

为了分析水平离散化对不稳定性增长率的影响，首先在计算网格上表述运动方程，然后应用上述线性化和傅里叶变换步骤，以获得特征值问题的离散形式（2）。一个细微的差异在于，在三角形（或六边形）网格上指定预报变量场所需的振幅数量不同（见表 2）。这一几何事实使线性化问题中出现纯数值不稳定分支成为可能。

事实上，三角形（或其对偶六边形）网格的几何结构具有某些特殊性。用晶体学的语言来说，规则三角晶格的每个原胞由两个方向不同的三角形组成。这些三角形形成两个彼此分离、无法重合的格点，因此在分析中应加以区分（见图B.6）。这种区别正是伪模态／几何模态的来源，需要通过适当的黏性和扩散算子加以耗散。

我们将研究由等边三角形组成的规则三角网格。水平算子的描述将在二维几何中进行。虽然所考虑的离散格式

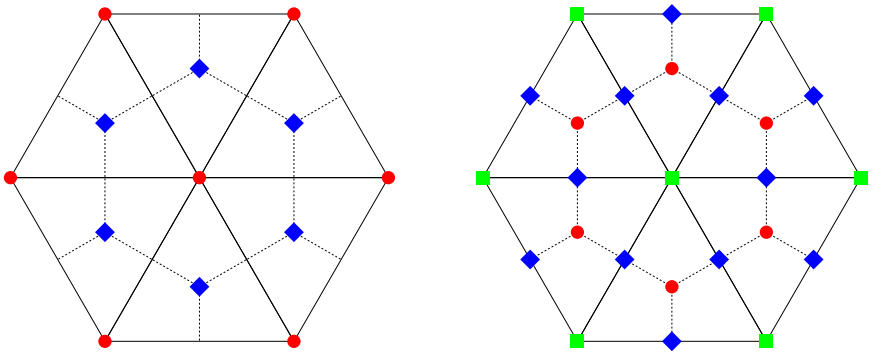

图1：三角形 B 网格（左图）和 C 网格（右图）上的变量交错布置。在有限体积公式中，标量位于红色圆圈（“ ”）处，其值被解释为相应控制体的平均值（左图：由虚线连接单元中心与边中点形成的六边形边界中位对偶控制体；右图：由实线构成三角形边界的单元）。B 网格上的水平速度矢量和 C 网格上的法向速度位于蓝色菱形（“ ”）处。对于 B 网格，其值被解释为相应三角形单元的平均值。对于 C 网格，（垂直）涡度相对于标量交错布置，其值位于绿色方块◆（“ ”）处。

会在下文中分别针对三角形 B 网格（见第2.1节）和三角形 C 网格（见第2.2节）进行详细说明，但只对其中一种交错布置感兴趣的读者可以直接阅读相应章节。垂直方向上的离散化采用 Lorenz 交错。由于相关讨论与四边形网格的情形大体相同，详情请参见 [7] 第 2 节。相反，在以下各小节中，各场将被视为在垂直方向上连续，其离散化仅在方程（21）中系统矩阵的总结部分引入，并在附录 A中简要讨论。三角形网格上增长最快的不稳定性的增长率随波数变化的关系，分别沿斜压(对称)轴显示于图3 （对应地，图4）。

2.1. 采用 *B* 型交错的三角形网格

在三角形 B 网格上，离散的水平速度位于三角形的质心处。在有限体积公式中，其数值可解释为相应三角形上的平均值；在此语境下，三角形称为网格单元 。海面高度、压力、浮力和垂直速度等标量相对于水平速度交错布置，并与网格顶点重合。其数值可解释为中位对偶控制体上的平均值。中位对偶控制体通过连接网格单元中心与边的中点构造。对于规则三角网格，

记号	解释
c	cell
v	对偶控制体
e	控制体之间的面（边）
$\boldsymbol{n}_{c,e}$	单元 c 在面 e 处的外法向量
$\boldsymbol{n}_{v,e}$	对偶控制体 v 在面 e 处的外法向量
$\boldsymbol{n}_e$	面（边）e 的方向
$\boldsymbol{t}_e$	对偶面（边）$\hat{}e$ 的方向
ℓ_e	面（边）e 的面积（长度）
d_e	对偶面（边）e 的面积（长度）
$E(c)$	单元 c 的面集合
$E(v)$	对偶控制体 v 的面集合
$C(e)$	具有面 e 的网格单元集合
$V(e)$	具有面 e 的对偶控制体集合

表1: 三角形网格离散化的记号 。

中位对偶控制体与对偶网格的六边形单元重合，本文后文将不再区分二者。三角形网格上的 B 型交错示意图见图1左图。

控制方程的水平离散化可以用微分算子的离散类比来表述。离散算子可以解释为这些格点上的离散卷积（即逐点乘积之和）。核可以定义在一个与相应输入信号的格点同构、但平移至相应输出信号的共置点的格点上。于是，与常系数卷积核对应的离散算子的傅里叶符号由相应卷积核的离散傅里叶变换给出。

2.1.1. 离散线性算子

采用 [4]中的记号（见表1），可以在 B 网格上构造微分算子的离散类比。对于定义在离散水平空间上的场，这里沿用其连续对应物的相同记号。

$$\left(\nabla p\right)_c = \frac{1}{A_c} \sum_{e \in E(c)} \boldsymbol{n}_{c,e} \ell_e \frac{1}{2} \sum_{v \in V(e)} p_v \tag{3a}$$

$$\left(\nabla \boldsymbol{F}\right)_c = \sum_{e \in E(c)} \frac{2}{3} \boldsymbol{n}_{c,e} \frac{1}{d_e} \sum_{\tilde{c} \in C(e)} \boldsymbol{n}_{c,e}^T \boldsymbol{n}_{\tilde{c},e} \boldsymbol{F}_v^T \tag{3b}$$

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{F}\right)_v = \frac{1}{A_v} \sum_{e \in E(v)} d_e \frac{1}{2} \sum_{c \in C(e)} \boldsymbol{n}_{v,e} \cdot \boldsymbol{F}_c \tag{3c}$$

$$\Big(\text{Curl } \boldsymbol{u}\Big)_v = \sum_{e \in E(v)} \sum_{c \in C(e)} \frac{\ell_e}{2} \boldsymbol{n}_{v,e}^{\perp} \cdot \boldsymbol{u}_c \tag{3d}$$

$$\Big(\Delta b\Big)_v = \Big(\nabla \cdot \nabla b\Big)_v \tag{3e}$$

$$\Big(\Delta \boldsymbol{u}\Big)_c = \frac{1}{A_c} \sum_{e \in E(c)} \ell_e \frac{1}{d_e} \sum_{\tilde{c} \in C(e)} -\boldsymbol{n}_{c,e}^T \boldsymbol{n}_{\tilde{c},e} \boldsymbol{u}_{\tilde{c}} \tag{3f}$$

作用于压力场的离散梯度算子会对沿边的压力值取平均，并将梯度定义为由相应网格单元三条边界边上的压力平均值唯一确定的平面的法向量（方程（3a））。若压力场为波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波，则梯度算子可表示为一个作用于平面波振幅的矩阵，$\hat{}p(\boldsymbol{k})$。此处矩阵的大小为 4×1，因为在采用 B 型交错的三角形网格上，压力场只需一个振幅，而得到的梯度是定义在网格单元上的矢量量，需要四个振幅（对于 x方向和y方向，在向上和向下的网格单元格点上各需一个振幅）。该矩阵称为梯度算子的傅里叶符号[1]:

$$\mathsf{G} = \begin{bmatrix} g_x^u & g_x^d & g_y^u & g_y^d \end{bmatrix}^T$$

其中，g_x 和g_y 是梯度的分量，上标分别表示朝上和朝下的单元所对应的格点。这些分量满足以下关系:

[1]此后在大多数情况下，记号中均省略傅里叶符号对波矢的显式依赖。

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla p\right)_{c^u} &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{c^u}} \left[g_x^u(\boldsymbol{k})\ g_y^u(\boldsymbol{k})\right]^T \hat{p}(\boldsymbol{k}) \\
\left(\nabla p\right)_{c^d} &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{c^d}} \left[g_x^d(\boldsymbol{k})\ g_y^d(\boldsymbol{k})\right]^T \hat{p}(\boldsymbol{k}) \\
&= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{c^d}} \left[-\left(g_x^u(\boldsymbol{k})\right)^*\ -\left(g_y^u(\boldsymbol{k})\right)^*\right]^T \hat{p}(\boldsymbol{k}).
\end{aligned}
$$

例如，对于朝上的单元，可以明确计算梯度的傅里叶符号的各个分量。相对相位的记号见图B.6右侧面板。

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla p\right)_{c^u} = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{c^u}} \frac{a}{2A_c} \Bigg(& \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left(e^{-i\alpha_1} + e^{-i\alpha_2}\right) + \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \left(e^{-i\alpha_2} + e^{-i\alpha_3}\right) \\
& + \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \left(e^{-i\alpha_3} + e^{-i\alpha_1}\right) \Bigg) \hat{p}(\boldsymbol{k}) \\
= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{c^u}} & \begin{bmatrix} \left(e^{-i\alpha_2} - e^{-i\alpha_1}\right)/a \\ \left(2e^{-i\alpha_3} - e^{-i\alpha_1} - e^{-i\alpha_2}\right)/(2h) \end{bmatrix} \hat{p}(\boldsymbol{k}).
\end{aligned}
$$

在规则网格上，作用于向量场的离散梯度算子可由方程（3b）表示；它对应于非结构网格上更一般的最小二乘形式（参见 [4]）。其在 x方向上的傅里叶符号可用前文讨论过的梯度傅里叶符号分量表示，并应注意其斜厄米性质。

作用于通量场的离散散度算子（3c）对沿各边的法向通量取平均，以计算穿过标量控制体六条边界边的总通量， v。离散散度算子的傅里叶符号与梯度傅里叶符号的负厄米转置有关：$\mathsf{D} = -\mathsf{G}^*/2$。

根据斯托克斯定理，标量控制体上的涡度垂直分量 v，可用沿控制体边界的水平速度场线积分表示。作用于速度场的离散旋度算子（3d）采用简单近似来计算沿边界的线积分。此处未明确给出其傅里叶符号，但感兴趣的读者可使用作为补充材料提供的笔记本进行分析。

标量控制体上的离散拉普拉斯算子（3e）就是标量场梯度的散度。因此，其傅里叶符号是散度算子与梯度算子的傅里叶符号之积：

$$
\mathsf{L}^{\mathsf{b}} = \mathsf{DG} = -\frac{1}{2}\mathsf{G}^*\mathsf{G}. \tag{4}
$$

具体而言，傅里叶符号是负实数，而对于正的扩散系数 $\mathbb{K}^b > 0$，双调和扩散的符号 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}} = -\mathbb{K}^{\mathsf{b}}\mathsf{L}^{\mathsf{b}}\mathsf{L}^{\mathsf{b}}$ 也为负数。

离散拉普拉斯算子在网格单元上作用于向量场（3f）时，其傅里叶符号（下文记作 L^{u}）为分块对角形式，具有2×2厄米负定的分块矩阵，但并非对角矩阵。双调和黏性的符号是黏性系数 $\mathbb{K}^u$与拉普拉斯算子符号平方的负乘积：$\mathsf{D}^{\mathsf{u}} = -\mathbb{K}^{u}\mathsf{L}^{\mathsf{u}}\mathsf{L}^{\mathsf{u}}$。因此，当黏性参数为正时，该符号同样是厄米负定的，但通常并非对角矩阵。特别是，改变黏性参数可能会导致系统矩阵的特征模态发生变化。感兴趣的读者可再次参阅配套笔记本，了解更多细节。

2.1.2. 水平动量输运

水平动量输运可采用平流形式、通量形式或向量不变形式离散。此处的分析仅限于四种不同方案。类比于连续空间中的线性化平流算子（见方程（1））， 离散空间中线性化平流算子的傅里叶符号写为$U\mathsf{G}_x(\boldsymbol{k}) + V\mathsf{G}_y(\boldsymbol{k})$ ，并作用于四个振幅；这四个振幅将水平速度场表示为波矢 $\boldsymbol{k}$ 固定的平面波。矩阵G_x和G_y的大小为 4×4，因为在采用 B 型交错的三角形网格上，水平速度场是定义在网格单元上的矢量量。图2a展示了沿流动方向的波矢处，线性化动量平流对应傅里叶符号的特征值。

平流形式（*ASC*）。在 B 型交错布置中，垂直速度对水平速度的平流需要将垂直速度平均到网格单元。由顶点到网格单元的重构算子记为 $\mathsf{A}\mathsf{v}^{\mathsf{c}}_{\mathsf{v}}$:

$$\Big(w\partial_z \boldsymbol{u}\Big)_c = \Big(\mathrm{A}\mathrm{v}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{v}} w\Big)_c \partial_z \mathbf{u}_c. \tag{5}$$

由于背景流中的垂直速度为零，线性化中唯一的贡献是背景水平速度的垂直平流；在波数空间中表示为： $U_z\mathsf{A}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{x}}\hat{}w$ 和 $V_z\mathsf{A}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{y}}\hat{}w$，其中平均算子满足 $\mathsf{A}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{x}} = \mathsf{A}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{y}} = \mathsf{A}\mathsf{v}^{\mathsf{c}}_{\mathsf{v}}$。

以下简单方案利用离散向量梯度计算流线方向导数（简称：**ASC**），可用于水平速度场的动量平流。首先，完整的

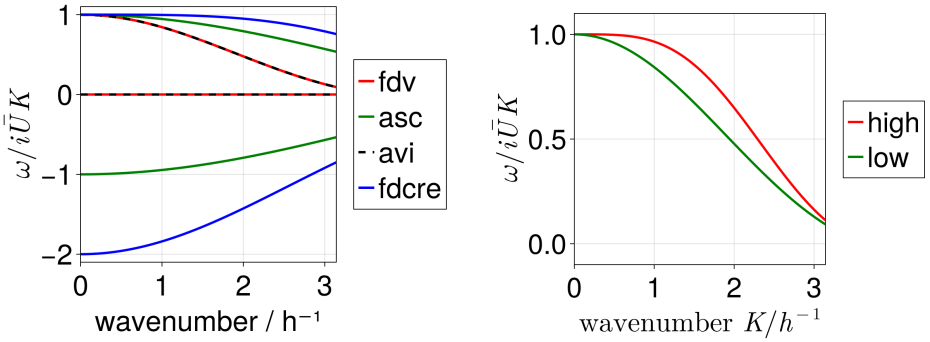

图2：左：三角形 B 网格上不同线性化动量平流格式的傅里叶符号特征值随流动方向波数的变化。FDCRE 和 ASC 格式的物理分支更准确，但此外还存在一个沿与流动方向相反方向传播的波的伪分支／几何分支。FDV 和 AVI 格式的特征值重合，且伪分支的频率为零；但请注意，在采用相应格式的 Eady 构型中，伪分支表现不同。右：作用于浮力的线性化平流格式的傅里叶符号随流动方向波数的变化。平流格式定义在采用 B 型交错的三角形网格上，并围绕恒定流进行线性化。

水平速度梯度在网格单元上计算，再与水平速度点乘，以获得沿流线的速度变化：

$$\Big((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\Big)_c = \Big(\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\boldsymbol{u})\Big)_c .$$

在水平面上速度恒定的流动周围进行线性化后，其傅里叶符号是斜厄米的，但通常不是对角矩阵。特别是，加入恒定流会使系统矩阵出现非对角项，因此妨碍伽利略不变性。引入 2×2 分块子矩阵的记号后，傅里叶符号如下：

$$\begin{aligned} U\mathsf{G}_\mathsf{x} + V\mathsf{G}_\mathsf{y} &= \begin{bmatrix} U\mathsf{G}_x^{(xx)} + V\mathsf{G}_y^{(xx)} & U\mathsf{G}_x^{(xy)} + V\mathsf{G}_y^{(xy)} \\ U\mathsf{G}_x^{(yx)} + V\mathsf{G}_y^{(yx)} & U\mathsf{G}_x^{(yy)} + V\mathsf{G}_y^{(yy)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} & Ug_x^d + Vg_y^d \\ Ug_x^u + Vg_y^u & \\ & & Ug_x^d + Vg_y^d \\ & Ug_x^u + Vg_y^u & \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

通量形式。我们先说明一点。在连续情形下，由于连续性 $\nabla\mathbf{u} + \partial_z w = 0$，动量平流 $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\partial_z\mathbf{u}$ 可以写成 $\nabla\cdot(\mathbf{uu}) + \partial_z(w\mathbf{u})$。但在三角形 B 网格上，如果在矢量控制体上计算动量平流，就无法再这样处理，因为离散连续性是针对标量控制体表达的。因此，通量形式始终写作 $\nabla\cdot(\mathbf{uu}) - \mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u} + \partial_z(w\mathbf{u}) - \mathbf{u}\partial_z w$，[2]这只是一种实现平流形式的不同方式。若先在标量控制体上计算离散动量平流，再对网格单元取平均，则带负号的各项（由网格单元上速度场散度引起的动量平流）之和为零。

与平流形式类似，垂直速度对水平速度进行平流的通量形式要求通过 $\mathrm{Av}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{c}}$ 将垂直速度重构到网格单元上：

$$\Big(\partial_z\big(w\boldsymbol{u}\big)\Big)_c = \frac{\partial\big(\mathrm{Av}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{c}} w\big)_c \mathbf{u}_c}{\partial z} \tag{7}$$

在线性化过程中，考虑到减去速度场在网格单元上的散度所导致的动量平流后，剩余项是如上所述的背景水平速度的垂直平流；在波数空间中表示为：$U_z\mathrm{Av}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{c}}\hat{w}$ 和 $V_z\mathrm{Av}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{c}}\hat{w}$。

通过单元侧面的水平动量通量的离散化可以采用以下两种方式：(1) 先在标量控制体上计算，再平均到网格单元；或者(2) 直接在网格单元上计算，此时必须指定将平流和输运水平速度重构到单元面上的两种重构方式。在这两种情况下，所得傅里叶符号 $\mathrm{G_x}$ 和 $\mathrm{G_y}$ 的显式表达式均见配套笔记本。

- **标量控制体上的散度 (FDV)**。首先在每个标量控制体上计算动量通量的散度，然后使用与上文相同的平均算子 $\mathrm{Av}_{\mathrm{cv}}$ 将其平均回网格单元：

$$\Big(\nabla\cdot\big(\boldsymbol{u}u_i\big)\Big)_c = \Big(\mathrm{Av}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{c}}\big(\nabla\cdot\big(\boldsymbol{u}u_i\big)\big)\Big)_c \qquad i = 1, 2.$$

在这种情况下，由速度场散度引起的单元平流因中位对偶控制体上的连续性而消失

[2]如果 $f(\mathbf{v}\ u_i) = \nabla\cdot(\mathbf{u}u_i) + \partial_z(wu_i)$ 与 $i = 1{,}2$ 是离散动量平流的分量，那么该表达式应解释为 $f(\mathbf{v},\mathbf{u}) - \mathbf{u}f(\mathbf{v},1)$。

中位对偶控制体。分析线性化算子的傅里叶符号时，值得注意的是，对于两种 $a = x,\ y$，非对角子矩阵 $\mathsf{G}_a^{(xy)} = \mathsf{G}_a^{(yx)} = \mathbf{0}$ 均消失；但对角子矩阵 $\mathsf{G}_a^{(xx)}$ 和 $\mathsf{G}_a^{(yy)}$（其中 $a = x,\ y$）通常并非对角矩阵，而是斜厄米矩阵。

- **单元上的散度：线性向量重构至边（FDCRE）**。在每个三角形上对水平速度进行线性重构。在单元的每条边上，计算穿过相应边的体积通量，并将其与迎风速度重构相乘，从而得到通过该边输运的动量通量：

$$
\begin{aligned}
F_{e,\tilde{c}} &= \ell_e \sum_{\hat{c}\in C(e)} \boldsymbol{n}_{\tilde{c},e} \cdot \boldsymbol{u}_{\hat{c}}/2 \\
R_{e,\tilde{c}} u_i &= u_{i,\tilde{c}} + d_e/2\ \boldsymbol{n}_{\tilde{c},e} \cdot \big(\nabla u_i\big)_{\tilde{c}} \\
\Big(\nabla \cdot \big(\boldsymbol{u} u_i\big)\Big)_c &= \frac{1}{A_c} \sum_{e\in C(e)} \sum_{\tilde{c}\in C(e)} \boldsymbol{n}_{c,e} \cdot \boldsymbol{n}_{\tilde{c},e} \frac{F_{e,\tilde{c}} + |F_{e,\tilde{c}}|}{2}\ R_{e,\tilde{c}} u_i
\end{aligned}
$$

在这种情况下，线性化算子的傅里叶符号中的非对角子矩阵也会消失，但对角子矩阵是满矩阵。特征值的物理分支比其他格式更准确。不过，存在一个与输运背景流方向相反的伪模态／几何模态（见图 2a）。

向量不变形式（*AVI*）。另一种方法是离散化动量输运的向量不变形式（简称：**AVI**）。动量通量的切向分量可通过计算每个中位对偶控制体上的旋度，并将结果重构到网格单元上，再与旋转了 90° 的水平速度相乘来离散。动量通量沿流动方向的分量可通过计算每个单元上的动能梯度来近似。中位对偶控制体上的动能可通过重构算子 $\mathsf{Av}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}}$ 对网格单元上的水平速度进行重构而得到：

$$
\begin{aligned}
\Big((\boldsymbol{u}\cdot\nabla) u_i\Big)_c = &\left(\mathrm{Av}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{c}}\Big(\mathrm{Curl}\ \boldsymbol{u}\Big)\Big(\boldsymbol{u}^{\perp}\Big)_i\right)_c \\
&+ \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_i \cdot \left(\nabla\left(\mathrm{Av}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}}\big(\boldsymbol{u}\big)\cdot \mathrm{Av}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}}\big(\boldsymbol{u}\big)\right)\right)_c .
\end{aligned}
$$

在线性化算子的傅里叶符号中，对于两种 $a = x,\ y$，子矩阵 $\mathsf{G}_a^{(xx)}$和 $\mathsf{G}_a^{(yy)}$ 均为满矩阵。此外，交互子矩阵 $\mathsf{G}_x^{(yx)}$和 $\mathsf{G}_y^{(xy)}$非零且为实数，这表明可能

沿对称轴出现伪不稳定性（广义霍林斯沃思不稳定性）。有趣的是，不同方案中的傅里叶符号满足以下关系。

$$
\begin{aligned}
\mathsf{G}_x^{(xx)}(\mathrm{AVI}) &= \mathsf{G}_x^{(xx)}(\mathrm{FDV}) + \mathsf{G}_y^{(xy)}(\mathrm{AVI}) \\
\mathsf{G}_x^{(yy)}(\mathrm{AVI}) &= \mathsf{G}_x^{(yy)}(\mathrm{FDV}) \\
\mathsf{G}_y^{(yy)}(\mathrm{AVI}) &= \mathsf{G}_y^{(yy)}(\mathrm{FDV}) + \mathsf{G}_x^{(yx)}(\mathrm{AVI}) \\
\mathsf{G}_y^{(xx)}(\mathrm{AVI}) &= \mathsf{G}_y^{(xx)}(\mathrm{FDV})
\end{aligned}
$$

傅里叶符号 $\mathsf{G}_x(\mathrm{AVI})$ 和 $\mathsf{G}_y(\mathrm{AVI})$ 的显式表达式见随附笔记本。

2.1.3. 浮力输运

由于在采用 B 型交错的三角形网格上，垂直速度和浮力场均位于顶点处，因此在此情况下，无需在水平方向进行重构即可计算浮力的垂直平流。水平浮力输运可表示为穿过中位对偶控制体 v 边界面的浮力通量，如下所示：

$$
A_v\Big(\nabla\cdot\big(\boldsymbol{u}b\big)\Big)_v = \sum_{e\in E(v)} d_e \boldsymbol{n}_{v,e}\boldsymbol{u}_e b_e. \tag{9}
$$

平流所用的水平速度$\mathbf{u}_e$ 采用与连续性方程相同的形式（对相应边两侧的三角形取平均）。通过将浮力中心重构至边中点，可得到二阶方法 $b_e = \sum_{v\in V(e)} b_v/2$。四阶方法有多种实现方式。最简单的方法是在将浮力重构（平均）至边中点之前，先对浮力场应用$(1-(1/8)a^2\Delta)$（例如，见 [14]）。这里，a 为三角形边长，Δ 为方程（3e）中定义的离散标量拉普拉斯算子。其他方法也会引入类似的修正，但使用方向拉普拉斯算子，因而需要更多工作。

作用于浮力的线性化平流算子的傅里叶符号可以表示为三个来源不同的贡献之和。

- **平均浮力的垂直平流**：由于垂直速度和浮力在三角形网格的顶点处共置，除了 Lorenz 型交错布置所需的垂直方向平均外，无需进行其他平均。傅里叶符号中的这一项涉及背景流的布伦特–魏萨拉频率，并

作用于振幅 ˆw，该振幅将垂直速度场表示为平面波： N^2 ˆw。

• **平均浮力的水平平流**：由于水平速度相对于浮力交错布置，因此需要对水平速度进行平均，以计算沿速度场方向的平均浮力方向导数。事实上，在三角形网格上会出现交叉相互作用；也就是说，水平速度的 x分量也会平流 y方向上的平均浮力变化，反之亦然。特别是在 Eady 配置中，背景速度也会对平均浮力进行平流。平均算子傅里叶符号 A_{bx} 和 A_{by}作用于水平速度场振幅的显式表达式见配套笔记本。因此，对傅里叶符号的贡献作用于描述平面波水平速度场的四个振幅，其形式如下：$\left(B_x\mathsf{A}_{\mathsf{bx}} + B_y\mathsf{A}_{\mathsf{by}}\right)$ˆ$\mathbf{u}$。

• **背景流对浮力的水平平流**：对浮力采用高阶精度重构格式，可提高沿流动方向的浮力变化率精度。图2b 展示了在相应格式的流动方向波矢处计算得到的傅里叶符号差异。然而，由于水平速度与浮力采用交错布置，傅里叶符号不同于水平动量平流中的傅里叶符号（$Ug_x + Vg_y$），因此将用梯度的新符号表示，记为 Γ（显式表达式见配套笔记本）。线性化平流算子作用于振幅ˆ的傅里叶符号贡献，在将浮力场指定为平面 b 时，平面ˆ波可由以下表达式给出：$(U\Gamma_x + V\Gamma_y)\, b$。

2.2. 采用 *C* 型交错的三角形网格

在三角形 C 网格格式中，标量位于相应三角形的外心处。对其数值的有限体积解释是：该数值为相应三角形（单元）上的平均值。对偶网格是一个沃罗诺伊图，其中三角剖分的每个顶点都是一个沃罗诺伊单元（也称为对偶单元）的配置点。在原始方程模式中，只有诊断量在对偶网格的网格点上计算；具体而言，涡度在沃罗诺伊单元上计算。网格点

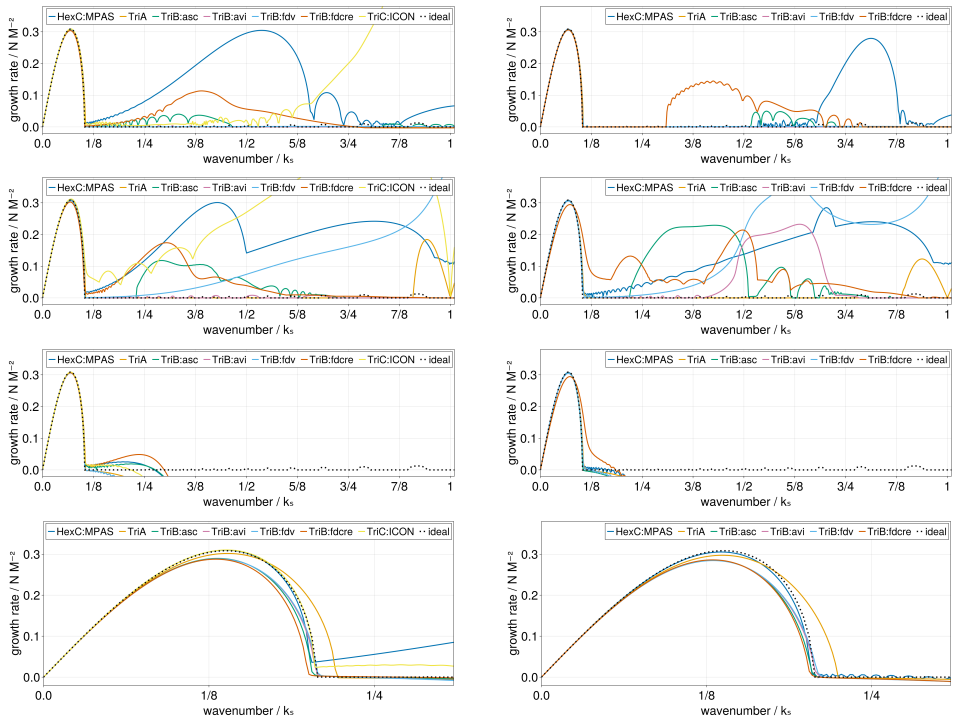

图3：三角形网格和六边形网格上增长最快的不稳定性增长率随斜压轴波数的变化。理查森数为 Ri $= 100$，布伦特–魏萨拉频率为 $N = 10^{-3}\ s^{-1}$，科里奥利参数为 $f_0 = -10^{-4}\ s^{-1}$，垂直层数为 $N_z = 64$，总深度为 $H = 4000\ m$，晶格参数为 $a = 6250\ m$（前三行）和 $a = 12500\ m$（第四行）。左列：低阶精度平流格式。右列：高阶精度平流格式（C网格未实现）。第一行：方位角 $\theta_U = 0$ rad，$\beta = 0$，无主动耗散。第二行：方位角 $\theta_U = \pi/6$ rad，$\beta = 0.5$，无主动耗散。第三行：方位角 $\theta_U = \pi/6$ rad，$\beta = 0.5$，双调和摩擦 $\mathbb{V} = 0.01\ ms^{-1}$。第四行：方位角 $\theta_U = 0$ rad，$\beta = 0$，双调和摩擦，参数为 $\mathbb{V} = 0.001\ ms^{-1}$。

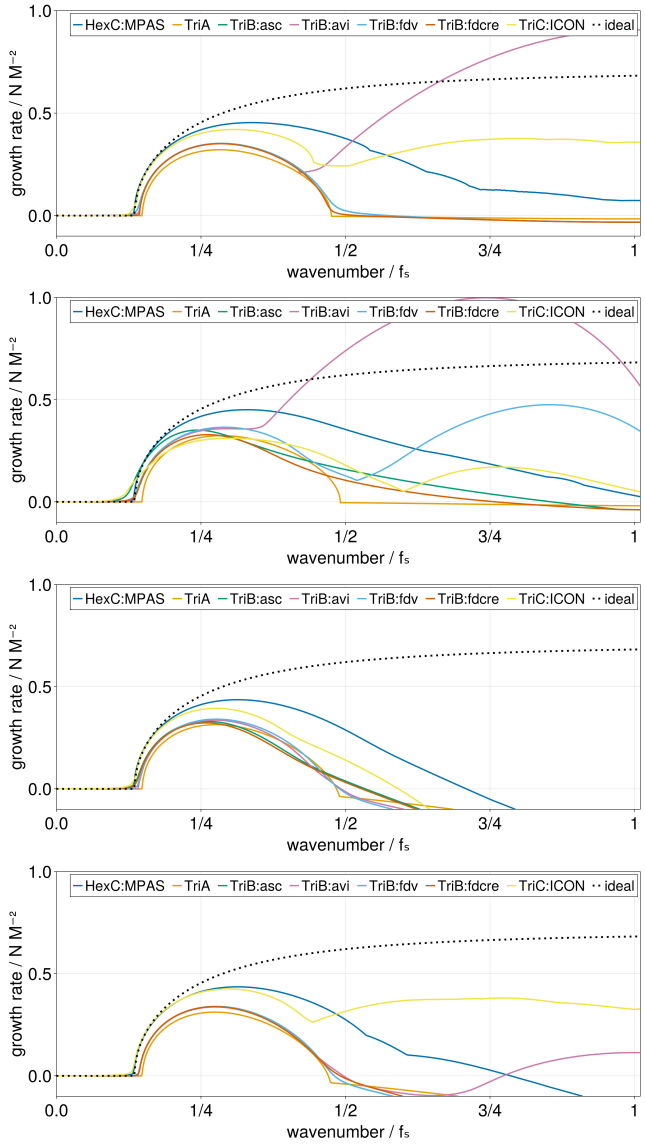

图 4：三角形网格和六边形网格上最快增长不稳定性的增长率随对称轴上波数的变化。理查森数为 Ri $= 0.5$，布伦特–魏萨拉频率为 $N = 10^{-3}\ s^{-1}$，科里奥利参数为 $f_0 = -10^{-4}\ s^{-1}$，垂直层数为 $N_z = 64$，总深度为 $H = 4000\ m$，晶格参数为 $a =$ $6250\ m$ $\theta_U = 0$ $\beta = 0$ $\mathbb{V} = 0.001\ ms^{-1}$ 。第一行：方位角为 rad， ，双调和摩擦为 。第二行：方位角为 $\theta_U = \pi/6$ rad， $\beta = 0.5$， ，双调和摩擦为 $\mathbb{V} = 0.001\ ms^{-1}$。第三行：方位角为 $\theta_U = \pi/6$ rad， $\beta = 0.5$，双调和摩擦为 $\mathbb{V} = 0.01\ ms^{-1}$。第四行：方位角为 $\theta_U = 0$ rad， $\beta = 0.5$，双调和摩擦为$\mathbb{V} = 0.01\ ms^{-1}$。

水平速度分量相对于三角形外心以及彼此之间均采用交错布置。它们位于（原始）网格边的中点处。每个此类点上的水平速度分量值被解释为相应边上水平速度法向分量的平均值（边的方向已给定）。关于三角形网格上 C 型交错的示意图，请参见图 1 右侧图。

Korn 在 [2] 提出了三角形网格上采用 C 型交错的水平离散化方案，该方案已应用于 ICON 模型的海洋分量中。该离散化方法基于运动方程的弱形式，微分算子的离散格式采用拟态方法。动量平衡的弱形式在边上法向速度的离散空间中采用了非典范内积，由此得到一个质量矩阵。实际应用中，质量矩阵采用简单的集总方法处理。

2.2.1. 离散线性算子

再次使用表 1 中总结的记号，标量场的梯度、通量场的散度以及水平速度场的旋度的离散类比可由以下表达式给出：

$$\Big(\nabla p\Big)_e = \frac{1}{d_e} \sum_{c \in C(e)} -\boldsymbol{n}_{c,e}^T \boldsymbol{n}_e p_c \tag{10a}$$

$$\Big(\nabla \cdot \boldsymbol{F}\Big)_c = \frac{1}{A_c} \sum_{e \in E(c)} \ell_e \boldsymbol{n}_{e,c} \cdot \boldsymbol{n}_e F_e \tag{10b}$$

$$\Big(\mathrm{Curl}\ \boldsymbol{u}\Big)_v = \frac{1}{A_v} \sum_{e \in E(v)} -\ell_e \boldsymbol{n}_{v,e} \cdot \boldsymbol{t}_e u_e \tag{10c}$$

$$\Big(\Delta b\Big)_c = \Big(\nabla \cdot \nabla b\Big)_c \tag{10d}$$

$$\Big(\Delta \boldsymbol{u}\Big)_e = \Big(\nabla\big(\nabla \cdot \boldsymbol{u}\big)\Big)_e + \frac{1}{\ell_e} \sum_{v \in V(e)} \mathbf{n}_{e,v}^T \mathbf{t}_e \big(\mathrm{Curl}\ \boldsymbol{u}\big)_v. \tag{10e}$$

作用于压力场的离散梯度算子，只需沿每条边的方向对其进行中心有限差分计算，其中边的方向由该边的朝向定义， $\boldsymbol{n}_e$。此处，同一格点对应的边具有相同的朝向：

$$\boldsymbol{n}_{e^{(1)}} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n}_{e^{(2)}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n}_{e^{(3)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

离散梯度算子的傅里叶符号作用于两个振幅，这两个振幅将压力场表示为具有固定波矢的平面波，$\boldsymbol{k}$。因此，矩阵 G 的大小为 3×2，并满足以下关系

$$\begin{bmatrix} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{e^{(1)}}} \left(\nabla \boldsymbol{p}\right)_{e^{(1)}} \\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{e^{(2)}}} \left(\nabla \boldsymbol{p}\right)_{e^{(2)}} \\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{e^{(3)}}} \left(\nabla \boldsymbol{p}\right)_{e^{(3)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{d_e} \begin{bmatrix} -e^{-i\alpha_1/2} & e^{i\alpha_1/2} \\ -e^{-i\alpha_2/2} & e^{i\alpha_2/2} \\ -e^{-i\alpha_3/2} & e^{i\alpha_3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_{c^u} \\ \hat{p}_{c^d} \end{bmatrix} = \mathsf{G} \begin{bmatrix} \hat{p}_{c^u} \\ \hat{p}_{c^d} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

动量平衡中的动能、压力和表面高度的梯度，通过应用离散梯度算子，再接以由弱形式中特殊内积产生的滤波算子来离散化。然而，在质量矩阵的集中化过程中，这个滤波算子会被消除。

离散散度算子的傅里叶符号可以用梯度的傅里叶符号表示：$\mathsf{D} = -4\,\mathsf{G}^*/3$ 其中 G^* 表示 G的厄米转置。在连续性方程（12）的离散化中，离散散度算子之前会应用一个滤波算子，具体如下：

$$\left(\nabla \cdot \left(\Pi^T \Pi \boldsymbol{u}\right)\right)_c + \partial_z w_c = 0. \tag{12}$$

引入滤波算子是弱形式的自然结果。可以将其理解为满足能量一致性要求的一种方式（参见 [2]）。

作用于水平速度场的离散旋度算子利用斯托克斯定理来近似对偶单元上的旋度（10c）。旋度的傅里叶符号的大小为 1×3，记作 C。单元上的离散拉普拉斯算子（10d）是标量场梯度的散度。因此，其傅里叶符号是散度算子与梯度算子的傅里叶符号之积：

$$\mathsf{L}^{\mathsf{b}} = \mathsf{DG} = -\frac{4}{3}\mathsf{G}^*\mathsf{G}. \tag{13}$$

特别是，傅里叶符号是厄米负定的，但通常并非对角形式；对于正的扩散系数 $\mathbb{K}^b > 0$，双调和扩散的符号 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}} = -\mathbb{K}^b \mathsf{L}^b \mathsf{L}^b$ 也具有同样的性质。

边上的离散向量拉普拉斯算子（10e）由两项组成。第一项是在网格单元上定义的水平速度散度的梯度。其傅里叶符号是梯度算子和散度算子的傅里叶符号之积：$\mathsf{GD} = -4\,\mathsf{D}^*\mathsf{D}/3$。第二项是水平

由 90° 旋转后的涡度梯度场。其傅里叶符号记作 L^{u}，也可证明其为厄米负定；对于正的黏性系数 $\mathbb{K}^u > 0$，双调和黏性的符号 $\mathrm{D}^{\mathrm{u}} = -\mathbb{K}^u \mathrm{L}^u \mathrm{L}^u$ 同样如此。傅里叶符号的显式表达式见配套笔记本。

为了离散化需要计算标量场与向量场乘积的平流算子，ICON-o 的 C 网格格式 [2]需要一个将向量场重构到单元上的算子。其转置可将单元上的向量场重构到边上，并且这两个算子的复合必须是在向量场空间（边上）上的正定滤波算子。这里采用 Perot 算子，正如 [15]中所介绍的:

$$\left(\Pi \boldsymbol{u}\right)_c = \frac{1}{A_c} \sum_{e \in E(c)} \frac{\ell_e d_e}{2} \boldsymbol{n}_{c,e} \cdot \boldsymbol{n}_e \boldsymbol{n}_{c,e} u_e \tag{14}$$

$$\left(\Pi^T \boldsymbol{F}\right)_e = \frac{1}{2} \sum_{c \in C(e)} \boldsymbol{n}_e \cdot \boldsymbol{F}_c. \tag{15}$$

此外，动量平衡中的科里奥利力计算需要一个将向量场重构到顶点上的算子，以及另一个将定义在顶点上的向量场经 90° 旋转后重构到边上的算子。若这两个算子的复合在向量场空间（边上）上是反对称的，则所得的科里奥利算子是能量中性的。为将这些重构算子与 Perot 算子区分开来，采用记号 $\tilde{\Pi}$ 和 $\tilde{\Pi}^\dagger$：

$$\left(\tilde{\Pi} \boldsymbol{u}\right)_v = \frac{1}{A_c} \sum_{e \in E(v)} \frac{\ell_e d_e}{2} \boldsymbol{n}^{\perp}_{e,v} \cdot \boldsymbol{n}_e \boldsymbol{n}^{\perp}_{e,v} u_e \tag{16}$$

$$\left(\tilde{\Pi}^\dagger \boldsymbol{G}\right)_e = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(e)} -\boldsymbol{t}_e \cdot \boldsymbol{G}_v \tag{17}$$

感兴趣的读者可在配套笔记本中找到对应于各重构算子的傅里叶符号 Π、$\tilde{\Pi}$ 和 $\tilde{\Pi}^\dagger$ 的显式表达式。

2.2.2. 水平动量输运

在采用 C 型交错的三角形网格上，以平流形式离散垂直方向的水平动量输运时，由于水平速度与垂直速度交错布置，因此需要进行平均。垂直速度与水平速度垂直方向导数的乘积

在网格单元上计算，并使用 Perot 重构对水平速度进行重构。随后通过转置 Perot 重构将该乘积重构到边上：

$$\left(w\partial_z \boldsymbol{u}\right)_e = \left(\Pi^T\left(w\partial_z\left(\Pi\mathbf{u}\right)\right)\right)_e \tag{18}$$

线性化中唯一的贡献来自背景水平速度的垂直平流；在波数空间中表示为：$\left(U_z\mathsf{A}_\mathsf{x}^\mathsf{b} + V_z\mathsf{A}_\mathsf{y}^\mathsf{b}\right)\hat{}\,w$，其中 $\mathsf{A}_\mathsf{x}^\mathsf{b} = \Pi_\mathsf{x}^\mathsf{T}$ 和 $\mathsf{A}_\mathsf{y}^\mathsf{b} = \Pi_\mathsf{y}^\mathsf{T}$。

水平方向上的水平动量输运方案基于向量不变形式。在对水平速度场应用 Perot 重构后，在网格单元上计算动能。如前所述，由于质量矩阵的作用，滤波算子$\Pi^T\Pi$（该算子本应作用于动能梯度算子之后）被抵消。通过将对偶单元上的旋度与经 Perot 重构的速度场相乘，然后应用 Perot 算子 $\tilde{\Pi}^\dagger$，来近似旋度旋转后的速度场的通量：

$$\begin{aligned}
\mathrm{KE}_c &= \left(\Pi\boldsymbol{u}\right)_c \cdot \left(\Pi\boldsymbol{u}\right)_c \\
\omega_v &= \mathrm{Curl}(\boldsymbol{u}) \\
\left(\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}\right)_e &= \left(\tilde{\Pi}^\dagger\left(\boldsymbol{\omega}\tilde{\Pi}\boldsymbol{u}\right)\right)_e + \left(\nabla\mathbf{KE}\right)_e
\end{aligned}$$

离散平流算子的傅里叶符号在线性化时，围绕水平面上速度恒定的流动作用于三个振幅；这三个振幅将水平速度场指定为具有固定波矢的平面波。傅里叶符号满足以下关系：

$$U\mathsf{G}_\mathsf{x} + V\mathsf{G}_\mathsf{y} = U\left(\tilde{\Pi}_\mathsf{x}^\dagger\mathsf{C} + \mathsf{G}\Pi_\mathsf{x}\right) + V\left(\tilde{\Pi}_\mathsf{y}^\dagger\mathsf{C} + \mathsf{G}\Pi_\mathsf{y}\right).$$

沿流动方向的波矢对应的特征值如图所示5a。傅里叶符号的显式表达式可在配套笔记本中进一步分析。

2.2.3. 浮力输运

由于采用 C 型交错的三角形网格上，垂直速度和浮力场在网格单元处共置，因此计算浮力的垂直平流时无需在水平方向进行重构。通过 Perot 算子在网格单元上重构水平速度场，以计算浮力在水平方向上的平流通量。

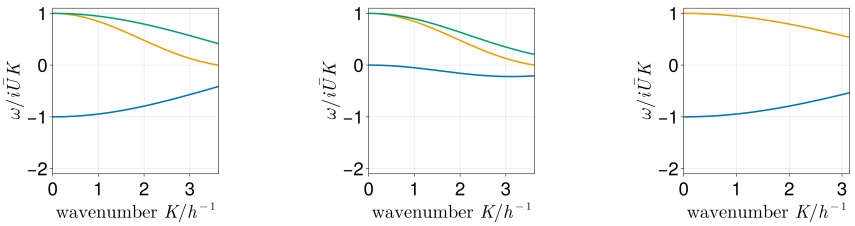

图5：左图：三角形 C 网格上线性化离散动量平流算子的傅里叶符号的特征值，作为流动方向波数的函数。向量不变形式动量平流的两个部分产生了两个精度不同的物理分支。总体精度与 B 型交错下 ASC 格式的精度相近。此外，该符号还保留了一个传播方向相反的伪分支。中图：与左图相同，但包含作用于动能梯度的滤波算子。右图：作用于浮力的线性化平流格式的傅里叶符号，作为流动方向波数的函数。

网格单元。为了通过方程（10b）中的算子计算网格单元上的通量散度，随后使用转置 Perot 算子将平流通量重构到边上。

$$\left(\nabla \cdot \left(\boldsymbol{u}b\right)\right)_c = \left(\nabla \cdot \left(\Pi^T \left(b\Pi\boldsymbol{u}\right)\right)\right)_c \tag{20}$$

线性化离散平流算子的傅里叶符号分为三个贡献：

- **平均浮力的垂直平流**：由于垂直速度和浮力在三角形网格的单元处共点，因此除因洛伦兹型交错布置而在垂直方向进行的平均外，无需额外平均。傅里叶符号的贡献涉及背景流的布伦特–魏萨拉频率，并作用于振幅 $\hat{}w$；这些振幅将垂直速度场表示为平面波：$N^2\,\hat{}w$。

- **平均浮力的水平平流**：由于水平速度相对于浮力采用交错布置，必须对水平速度进行平均，才能计算沿速度场方向的平均浮力方向导数。傅里叶符号的这一部分作用于以平面波形式表示水平速度场的三个振幅，其形式如下：$(B_x\mathrm{A_{bx}} + B_y\mathrm{A_{by}})\hat{}\,\mathbf{u}$。平均算子的傅里叶符号的显式表达式可见配套笔记本。

交错布置	A	B	C
四边形网格	2	2	2
三角形网格	2	4	3

交错布置	A	B	C
四边形网格	1	1	1
三角形网格	1	1	2

表2：确定水平面波数空间中的水平速度场（左侧）和标量场（右侧）所需的振幅数量。

- **背景流对浮力的水平平流**：由于水平速度与浮力采用交错布置，其傅里叶符号不同于水平动量平流中的傅里叶符号（$Ug_x + Vg_y$），而将改用梯度的新符号表示，记为 Γ （显式表达式见配套笔记本）。事实证明，这些新的导数符号 Γ_x 和 Γ_y 与 B 型交错中定义在单元上的梯度傅里叶符号的分量（3b）一致。线性化平流算子作用于振幅 b（其表示浮力场的平面波）时，对傅里叶符号的贡献为：$(U\Gamma_x + V\Gamma_y)\ b$。

2.3. 实现与系统矩阵

沿用 Barham 等人提出的方法 [7]通过引入算子W 和P，分别消去垂直速度变量和压力变量。这主要通过在波数空间中对连续性方程（1c）的离散形式（以及静力平衡方程（1b））进行积分，并应用底部表面垂直速度为零的边界条件（1g）（以及顶部静力压力为零的边界条件（1f））来实现。相应矩阵的表达式见附录（A.2）和（A.1）。注意，这些算子定义在相应水平空间与垂直空间的张量积上。离散水平空间与垂直空间的两个张量积之间的算子以下划线标记。为方便记号，离散水平空间之间的算子以下划线标记，表示该算子与垂直空间上的恒等算子的张量积（即矩阵的克罗内克积）。

采用 B 型交错和 C 型交错的三角形网格离散化所得到的完整系统矩阵汇总于方程（21）。系统的所有参数汇总于表C.3。系统矩阵作用于由振幅构成的向量，用以表示

不同垂直层上的水平速度场、不同垂直层上的浮力场，以及表面高度。

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix} \mathsf{G_x} \otimes \underline{U} + \mathsf{G_y} \otimes \underline{V} + \left(\mathsf{A}_\mathsf{x}^\mathsf{u} \otimes \underline{U_z} + \mathsf{A}_\mathsf{y}^\mathsf{u} \otimes \underline{V_z}\right) \underline{\mathsf{W}} + f_0 \underline{\mathsf{M}} + \underline{\mathsf{D}^\mathsf{u}} & \underline{\mathsf{G}}\ \underline{\mathsf{P}} & g\mathsf{G} \otimes 1_\mathsf{V} \\ N^2 \underline{\mathsf{W}} + \mathsf{A}_\mathsf{x}^\mathsf{b} \otimes \underline{B_x} + \mathsf{A}_\mathsf{y}^\mathsf{b} \otimes \underline{B_y} & \mathsf{\Gamma_x} \otimes \underline{U} + \mathsf{\Gamma_y} \otimes \underline{V} + \underline{\mathsf{D}^\mathsf{b}} & \underline{0} \\ \Delta_z \mathsf{D} \otimes 1_\mathsf{V}^\mathsf{T} & 0 \otimes 1_\mathsf{V}^\mathsf{T} & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

对于采用线性迎风重构将输运的水平速度重构至边上的三角形 B 网格离散（FDCRE），若背景流为单向流动，则方程（21）中的系统矩阵表达式在形式上是正确的。若速度廓线关于中层对称，则水平动量平流中的傅里叶符号 $\mathsf{G_x}$ 和 $\mathsf{G_y}$取决于垂直分量，因此此时线性化水平动量平流算子并非简单张量。

在补充材料中，每个傅里叶符号都附有一个表达式，可将其视为 *Julia* 编程语言中的函数；同时还提供了一个用于组装系统矩阵的笔记本。该笔记本还可用于对不同变量交错布置下的傅里叶符号进行符号分析和运算，其中包括正文未讨论的三角形网格上的 A 型交错，以及六边形网格上的 C 型交错。将符号替换为其精确值（即$a \to 0$时的极限）后，即可利用我们的设置分析相应算子的影响及其精度。

3. 讨论

大气和海洋建模中使用的空间离散通常在浅水方程的背景下讨论（例如见[16, 10,17, 18]）。在实际应用中，标量平流和动量平流以及垂直离散等其他因素也会产生影响。在垂直方向上，海洋环流模型传统上采用所谓的 Lorenz 交错布置（讨论见 [19]），且与水平离散化无关。已知这种垂直交错布置会导致计算型伪不稳定性（[19], [20]），前提是垂直分辨率相较于水平分辨率过高。对于向量不变形式的某些变体，动量平流的水平离散化可能会触发 Hollingsworth 不稳定性（[21, 22, 23]）。这表明，特定空间离散的精度

和稳定性取决于多种因素之间错综复杂的相互作用，而对它们的分析需要一个限制较少的框架，而非线性化浅水方程。

分析框架：离散艾迪问题。特定离散化近似 Eady 构型中斜压不稳定和对称不稳定理论增长率的能力，取决于上述所有因素。正如 [7], 相应的分析为我们提供了一个框架，用于了解离散化的哪些具体特征会影响其表现。例如， [7] 研究表明，在四边形网格上，C 网格对对称不稳定的表示比 B 网格更准确，而对斜压不稳定增长率的表示也仅略微更准确。的一个意外发现是，四边形 C 网格的斜压轴上存在伪不稳定性。尽管 [7] 研究表明，在足够精细的网格上，若采用四阶浮力平流，适度的双调和黏性和扩散便能轻易抑制这种不稳定性；但在粗网格上，由于伪不稳定性会延伸到物理斜压不稳定的波数范围内，因此需要强得多的耗散。

将分析扩展至三角形网格和六边形网格。 若干新型海洋环流模型（FESOM、ICON-o 和 MPAS-Ocean）采用非结构化（三角形或六边形）网格，并使用不同的水平空间离散方法。研究这些离散方法下的离散艾迪问题，一个显而易见的动机是考察其精度。答案的某些方面可以预见：与四边形网格上的情况相同，这类网格上的 C 网格通常需要的平均操作少于 B 网格。水平动量方程中作用于垂直速度的平均算子，以及浮力平流中作用于水平速度的平均算子，决定了不稳定性增长率的精度，尤其是在对称轴上。从这些算子 A 和 Av 的傅里叶符号精度可以看出，采用 B 型交错的三角形网格离散格式比采用 C 型交错的格式需要更多平均操作。然而，更重要的问题是交错离散在三角形或六边形网格上保留的伪数值模态会造成什么后果（例如见 [10, 12, 13]）。这些模态主要在线性化浅水方程的背景下得到研究；在这种情况下，它们会产生中性、因而可以被阻尼的虚假波支。真正的问题在于不稳定三维流中会发生什么，尤其是考虑到可能存在的

伪斜压不稳定性见 [7]。我们的研究揭示了许多意想不到的细节，下面将简要讨论；不过，对图 3 中斜压情形以及图4 中对称轴上所示的所有伪不稳定性分支进行完整分析，超出了本文的范围。最后，我们还将对为进行比较而进一步研究的四边形网格作几点说明。

3.1. 三角形和六边形网格上的不稳定性

简而言之，本文分析的主要结果是，所有交错离散（即 B网格和C网格）在斜压轴和对称轴上都存在伪不稳定性。要抑制这些模态，都需要耗散。伪模态部分通常由多个分支构成，我们推测它们部分与这些离散方式所保留的伪模态有关。需要提醒读者的是，这些模态的产生源于离散速度自由度与压力自由度数量不一致，而这种不一致是由三角形或六边形网格的几何形状造成的。在四边形网格上，水平离散问题中的速度/压力自由度比约为 2:1。然而，采用三角形和六边形网格会导致这两类自由度数量不匹配（见图 1 和表 2）。因此，这些网格的几何形状会产生伪数值模态。事实上，采用 B 型交错（见图2）和 C 型交错（见图 5）的三角形网格上的平流算子确实会保留伪数值模态。

比较图3 （图4）中的第一行和第二行可以发现，斜压不稳定性（分别为对称不稳定性）的伪分支强烈依赖于背景流方向在网格坐标系中的方位角，以及中层的背景流速度。在水平平流过程中对浮力场进行高阶重构，可得到更准确的线性化梯度符号， Γ_x 和 Γ_y。因此，在斜压轴上，不稳定性的伪分支有了显著改善（见图3）右栏。特别是，在斜压轴上，物理不稳定性分支与伪分支在波数上出现了一定的分离。

流动与网格的对齐及伽利略不变性的破坏。与四边形网格不同，对称轴上仍存在伪不稳定性分支。伪分支对流动相对于网格的方向高度敏感。

此外，伪不稳定性违反伽利略不变性；当在以中层为中心的背景流中加入均匀流时，它们会对此产生敏感

。图3 和4 第二行分别展示了这种敏感性，对应斜压轴和对称轴。这表明伪不稳定性涉及伪模态。离散速度的表示可能导致这种不变性遭到破坏。在三角形和六边形 C 网格上，三个法向速度投影对向量场构成过度约束（例如，参见 [24, 25]）。在这种情况下，线性化动量平流的傅里叶符号具有两个物理特征值和一个伪特征值（图5a 和图5b）。对于三角形 B 网格，由于任意两个相邻三角形的朝向存在几何差异，会出现两个伪特征值（图2a）。这些伪特征值并不描述物理平流。探究这些交错离散产生的伪模态如何引发斜压和对称不稳定性的伪分支或许值得关注，但这超出了本文的研究范围。

斜压轴上伪不稳定性的阻尼。通常，每种情况下只需适度耗散，就足以抑制斜压轴上的不稳定性。耗散取决于分辨率、流动相对于网格的方向，以及平流算子的精度和实现方式。选择适当的黏性和扩散率参数以抑制不稳定性的伪分支时，必须考虑所有这些因素。不过，一般而言，系数按 $\mathbb{V}a^3$ 缩放的双调和扩散和黏性通常足以抑制伪模态，且 $\mathbb{V}$ ($\mathbb{V} < 0.01$ m/s 时的取值相对适中（极粗网格除外）。但即便如此，这些取值也可能影响最大不稳定性增量的精度，或影响观测到物理不稳定性的波数范围（见图 3中的第三行和第四行）。在网格参数为 $a \approx 25$ km 的较粗网格上，要在波数上区分物理不稳定性分支与伪分支，需要在浮力场中采用高阶平流格式，并且需要增大黏性和扩散率参数以抑制伪不稳定性。

对称轴上伪不稳定性的阻尼。在对称轴上，伪部分通常与物理部分相连，因此很难看出物理分支从何处结束、伪分支从何处开始。相关增长率取决于平流的细节和流动方向。对特征向量进行分析可能有助于区分伪部分和物理部分，但这留待未来研究。抑制伪对称不稳定性所需的实际耗散取决于这一分析，但无论如何，情况都不如

四边形网格（见图4）。

3.2. 四边形网格上的不稳定性

首先， [7] 中的分析假设基本流与网格对齐。另一种极限情形是流动沿网格对角线方向。我们发现，这种情况下精度甚至略有提高，因此， [7] 中的结果适用于流动方向与网格方向任意取向的情形。

其次， [7] 中列出的 B网格和C网格离散线性化方程表明，在对称轴上，B网格方程的主要差异在于：在平均纬向动量的垂直平流项中，垂直速度需要额外平均；在浮力方程的平均浮力平流项中，水平速度也需要额外平均。B 网格上的压力梯度平均不会影响沿斜压轴或对称轴的扰动。仅此一点就说明，传统上仅从压力梯度精度角度看待 B 网格和 C 网格是不够的，B 网格表现较差还有其他原因。为更全面地理解这一结果，我们分析了四边形 A 网格。在这种情况下，动量方程中的垂直速度平均项会消失，但斜压轴和对称轴上的压力梯度精度较低。结果（此处未展示，但可通过补充材料中的脚本复现）表明，就表示斜压不稳定性和对称不稳定性的增长率而言，A 网格与 B 网格相似。与 C 网格相比，A 网格和 B 网格中导致精度损失的平均方式不同，但后果相似。这也意味着，在浅水波动力学中，作为 A 网格主要缺点的压力梯度平均，并不会使 A 网格逊于 B 网格。不过，与 C 网格类似，A 网格在斜压轴上仍存在伪不稳定性。在 $a = 12.5$ km 或更高时，伪分支与物理分支之间存在间隙；但在 $a = 25$ km 时，二者会合并。因此，在粗网格上，需要采用 $\mathbb{V} = 0.01$ m/s 的双调和摩擦来抑制伪分支；而在 $a = 12.5$ km 时，$\mathbb{V} = 0.003$ m/s 已足够。C 网格的表现非常相似：在浮力平流采用四阶方法时， $a = 25$ km 需要 $\mathbb{V} = 0.01$ m/s，而在 $a = 12.5$ km 需要 $\mathbb{V} = 0.006$ m/s。浮力的四阶平流有助于改善 A 网格的表现，但其作用不像对 C 网格那样关键。

第三，尽管 C 网格在表示对称不稳定性方面更准确，但在高波数下仍不够准确。由于模拟的不稳定性范围一直延伸至截断波数，因此还需要额外

的耗散来抑制网格尺度上的不稳定性，因为在这种情况下，所有离散算子都不准确。

4. 结论

作为 [7] 后续研究，我们分析了三角形 A 网格和 B 网格、ICON-o 的拟保结构离散（简称三角形 C 网格）以及六边形 C 网格上的离散埃迪不稳定性问题。我们表明，交错离散（三角形 B 网格和 C 网格，以及六边形 C 网格）在斜压轴和对称轴上都存在伪不稳定性分支。这些分支至少部分由这些离散方法的数值模态引起。伽利略不变性的丧失表明了这一点。三角形同位 A 网格在斜压轴上有一个伪分支，但在对称轴上没有此类分支。伪不稳定性分支对平均流与网格之间的对齐，以及动量和标量平流的离散化方式都很敏感。

我们证明，这些网格在表示斜压不稳定性的物理分支时精度非常相近；在本文考察的最粗网格上，C 网格的精度略高于 A 网格和 B 网格，这与四边形网格的情况类似。在对称轴上，所有交错网格都受到伪分支的影响，这些分支延伸进入物理不稳定性区域。其行为类似于 Hollingsworth 不稳定性所导致的行为，但至少部分与三角形网格上因交错变量布置的离散化而得以保留的几何模态有关。

研究发现，当网格足够精细时，适度的动量和浮力双调和耗散足以抑制斜压轴上的伪分支；但当分辨率降低时，则需要高达 0.01 m/s 的耗散系数 $\mathbb{V}$。不过，在这种情况下，四边形 A 网格和 C 网格也需要类似程度的耗散。要确定抑制对称轴上伪分支所需的耗散水平，还需进一步研究，因为在三角形和六边形交错网格上，伪分支与物理分支相交。我们仅表明，适度的耗散足以抑制谱端的伪不稳定性。

我们表明，三角形和六边形 C 网格的性能不及四边形 C 网格。同样，三角形 B 网格的性能也不及四边形 B 网格。出乎意料的是，三角形

A 网格的问题最少，在 Eady 问题的框架下模拟不稳定性时，并不比本文考察的其他网格差。

本研究的主要建议是，应谨慎选择耗散方式，以抑制本文所考察的交错离散中的伪行为，尤其是在关注对称轴上的不稳定性时。

补充材料可通过 [26]访问。

致谢

本研究是协同研究中心TRR181项目M3和S2的组成部分。该中心由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，项目名称为“大气与海洋中的能量传递”，项目编号274762653。

附录A. 垂直离散

正文未提供 Lorenz 交错下垂直离散化的详细信息，读者可参阅 Barham 等人的讨论。 [7]垂直离散化将水平空间之间的线性化算子转换为相应水平空间与垂直空间的张量积之间的算子， V。本研究在顶部采用线性化自由表面，这简化了用浮力表示压力的表达式；在波数空间中，这种关系可用矩阵P 表示，该矩阵是作用于 V上的自同态：$\hat{}\hat{}p = (\mathsf{I} \otimes \mathsf{P})b$。此处I 表示相应水平空间上的恒等算子（三角形 B 网格上的一维复空间，以及三角形 C 网格上的二维复空间）。对离散静力平衡方程（1b）进行积分，并采用齐次狄利克雷边界条件

(1f) 在顶部得到算子 P 的以下表达式：

$$\underline{\mathsf{P}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} (-\Delta_z) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \quad 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\Delta_z}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

为完整起见，这里简要重述水平速度与垂直速度之间的表达式。由于采用 Lorenz 交错，垂直速度场必须在中间层上取平均。按照 Barham 等人的记号，[7] 该算子记为 a_z^+。例如，在波数空间中，背景水平速度的垂直平流项 $U_z \mathsf{A}^{(x)} \hat{} w$ 和 $V_z \mathsf{A}^{(y)} \hat{} w$，将由以下完全离散化的形式取代：$(\mathsf{A}^{(x)} \otimes U_z)(\mathsf{I} \otimes \mathsf{a}_z^+) \hat{} \mathsf{w}$ 和 $(\mathsf{A}^{(y)} \otimes V_z)(\mathsf{I} \otimes \mathsf{a}_z^+) \hat{} \mathsf{w}$。与上文一样，I 表示相应水平空间上的恒等算子。在波数空间中，垂直速度与水平速度之间的关系可用矩阵 W 表示：$(\mathsf{I} \otimes \mathsf{a}_z^+) \hat{} w = \mathsf{W} \hat{} \mathsf{u}$。对离散连续性方程（1c）进行积分，并在底部采用齐次狄利克雷边界条件（1g），可得矩阵 W 的以下表达式：

$$\underline{\mathsf{W}} = -\mathsf{D} \otimes \frac{\Delta_z}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \quad 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\mathsf{D} \otimes \frac{\Delta_z}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 2 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Name	解释
g	重力加速度（单位： ms^{-2}）
f_0	f 平面上的科里奥利参数（单位： s^{-1}）
Ri	背景流中的理查森数
N	背景流的布伦特–魏萨拉频率（单位： s^{-1}）
$\mathbb{K}^u$	黏度系数（$\mathbb{K}^u = \mathbb{V}^u * a^3$ 用于双调和耗散）
$\mathbb{K}^b$	扩散系数（$\mathbb{K}^b = \mathbb{V}^b * a^3$ 用于双调和耗散）
H	流体总深度（单位： m）
N_z	垂直层数
a	六边形格点的晶格常数（单位： m）
θ_U	背景流方向在网格坐标系中的方位角（单位：弧度）
β	以 $\lvert HM^2/f_0\rvert$ 表示的中层背景流速度

表 C.3：问题表述中的参数汇总

附录 B. 三角形网格的几何

规则三角网格是由一个原胞（基本区域）对平面进行镶嵌而成，该原胞由两个朝向不同的三角形组成。在图B.6 左侧面板中展示了这样一种原胞的选取方式。在规则三角网格中，顶点构成一个六角晶格。然而，三角形的质心构成两个不同的格点，它们无法通过平移彼此重合。这两个格点分别由朝向不同的三角形的质心组成。此外，边的中点构成三个不同的格点。图B.6左侧面板中对这些格点进行了编号。

附录 C. 问题表述中的参数

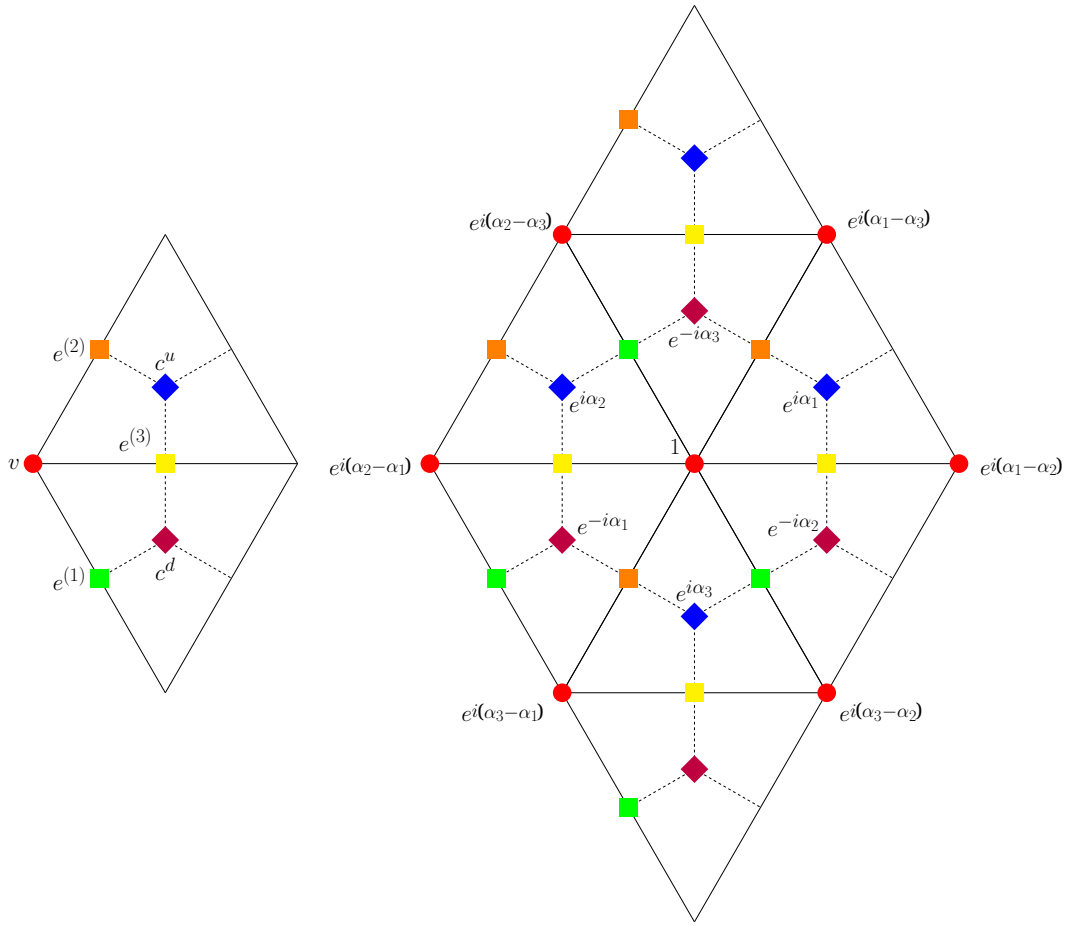

图 B.6：左：六角晶格的原胞。红色圆圈是原胞中六角晶格的代表点，位于三角形的一个顶点 v。原胞包含两个三角形中心 c^u 和 c^d，分别构成由蓝色和紫色菱形表示的两个六角晶格。此外，原胞还包含三个边中心 $e^{(1)}$、$e^{(2)}$ 和 $e^{(3)}$，它们构成由橙色、黄色和绿色方形分别表示的三个六角晶格。右：以一个顶点为中心的三角形/六角网格局部图。包围该顶点的六边形称为与该顶点对应的对偶控制体，其角点是朝上的三角形（蓝色）和朝下的三角形（红色）的三个中心。角点标签表示波矢固定为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波相对于中心顶点的相移。记号中省略了对波矢的依赖。

参考文献

[1]T. Ringler、M. Petersen、R. L. Higdon、D. Jacobsen、P. W. Jones、M. Maltrud，全球海洋建模的多分辨率方法，《海洋建模》69（2013）211–232。doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.ocemod.2013.04.010。[2] P. Korn，全球海洋动力学非结构网格模型的构建，《计算物理学杂志》339（2017）525–552，eu0sl 被引次数：62 参考文献数：66。doi:10.1016/j.jcp.2017.03.009。[3]Q. Wang、S. Danilov、D. Sidorenko、R. Timmermann、C. Wekerle、X. Wang、T. Jung、J. Schröter，有限元海冰—海洋模型（FESOM）v.1.4：海洋一般环流模型的构建，《地球科学模型开发》7（2014）663–693。doi:https://doi.org/10.5194/gmd-7-663-2014。[4] S. Danilov、D. Sidorenko、Q. Wang、T. Jung，有限体积海冰—海洋模型（fesom2），《地球科学模型开发》10（2）（2017）765–789。doi:10.5194/gmd-10-765-2017。[5] A. Arakawa、V. R. Lamb，UCLA一般环流模型基本动力过程的计算设计，《计算物理方法：研究与应用进展》第17卷（1977）。doi:10.1016/B978-0-12-460817-7.50009-4。[6] D. B. Haidvogel、A. Beckmann，《数值海洋环流模型》，环境科学与管理丛书第2卷，World Scientific出版社，1999。doi:10.1142/p097。[7] W. Barham、S. Bachman、I. Grooms，水平离散化对线性斜压不稳定性和对称不稳定性的一些影响，《海洋建模》125（2018）106–116，gd3ms 被引次数：9 参考文献数：43。doi:10.1016/j.ocemod.2018.03.004。[8] J. Thuburn、T. D. Ringler、W. C. Skamarock、J. B. Klemp，任意结构 C 型网格上地转模态的数值表示，《计算物理学杂志》228（22）（2009）8321–8335，iSI 文献传递编号：513SD 被引次数：147 参考文献数：28 Thuburn, J. Ringler, T. D. Skamarock, W. C. Klemp, J. B. Thuburn, John/ABC-8834-2021 Skamarock, William/0000-0002-6667-2446 洛斯阿拉莫斯 [LA-UR09-03238] 本文为洛斯阿拉莫斯报告

编号 LA-UR 09-03238。156 0 15 Academic press inc 爱思唯尔 science 圣迭戈。doi:10.1016/j.jcp.2009.08.006。[9] T. Ringler、J. Thuburn、J. Klemp、W. Skamarock，任意结构 C 型网格能量守恒与位涡动力学的统一方法，《计算物理学杂志》229（2010）3065–3090, ringler, T. D.; Thuburn, J.; Klemp, J. B.; Skamarock, W. C. Thuburn, John/ABC-8834-2021; Skamarock, William/0000-0002-6667-2446 ORCIDs: 0000-0002-6667-2446 参考文献数：37 被引次数：217 所有数据库中的被引次数：224 0 22 0021-9991 9 ISI 文献传递编号：576DM。doi:10.1016/j.jcp.2009.12.007。[10] D. Le Roux、V. Rostand、B. Pouliot，二维有限元浅水模型中数值诱发振荡的分析，第一部分：惯性重力波，《SIAM科学计算杂志》29（2007）331–360。[11] J. Thuburn，六边形 C 型网格上的数值波传播，《计算物理学杂志》227（2008）5836–5858。[12] D. Y. Le Roux，浅水模型中的虚假惯性振荡，《计算物理学杂志》231（2012）7959—-7987。[13] S. Danilov，非结构网格上的海洋建模，《海洋建模》69（2013）195–210。[14] M. Smolentseva、S. Danilov，基于顶点的三角形离散中若干高阶平流格式的比较，《海洋动力学》70（2020）463–479。[15]B. Perot，非结构交错网格格式的守恒性质，《计算物理学杂志》159（1）（2000）。doi:10.1006/jcph.2000.6424。[16] R. D. A.，地转调整与有限差分浅水方程，《月刊天气评论》122（1994）1371–1377。[17] Y. Yu、N. Wang、M. J.、P. Peixoto、M. Govett，二十面体 A 型网格与 C 型网格格式求解浅水模型时数值精度的比较，《月刊天气评论》148（2020）4009–4033。[18] F. R. Lapolli、P. da Silva Peixoto、P. Korn，用于非结构网格海洋的水平离散化的精度与稳定性分析

模型，海洋建模 189 (2024) 102335。
doi:https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2024.102335。[19] M. J. Bell, A. A. White，海洋模型中虚假短波斜压不稳定性的解析近似，海洋建模 118 (2017)。 doi:10.1016/j.ocemod.2017.08.001。[20] C. Ménesguen, N. Ducousso, C. Vic, S. Le Gentil，数值模拟中计算型斜压不稳定（BICK）的探索，地球系统建模进展杂志 17 (2025) e2024MS004600。 doi:https://doi.org/10.1029/2024MS004600。[21] A.Hollingsworth, P. Kållberg, V.Renner, D.Burridge，一种内部对称计算不稳定性，Quarterly Journal of the Royal Mete- orological Society 109 (460) (1983)。 doi:10.1002/qj.49710946012。[22]M. J. Bell, P. S. Peixoto, J. Thuburn，矩形 C 网格上矢量不变动量方程的数值不稳定性，Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 143 (702) (2017)。doi:10.1002/qj.2950。[23] N. Ducousso, J. L. Sommer, J.-M. Molines, M. Bell，“计算型对称不稳定性”在中尺度和允许次中尺度过程的分辨率下的影响，海洋建模 120 (2017)。
doi:10.1016/j.ocemod.2017.10.006。[24] S. Danilov，三角形 C 网格型离散化在大尺度海洋流动数值模拟中的效用，海洋动力学 2010 60:6 60 (6) (2010)。 doi:10.1007/s10236-010-0339-6。[25] A. Gassmann，浅水方程的六边形和三角形 C 网格离散化考察，计算物理学杂志 230 (2011) 2706–2721。[26] S. Maass，三角形和六边形网格上原始方程水平离散化的探索：傅里叶符号、系统矩阵与不稳定性 (2026年1月)。
doi:10.5281/zenodo.18165098。网址
https://github.com/smaasz/TriEadyInstabilities