arXiv:2601.04014v1 [math.NT] 7 Jan 2026

# 关于安德鲁斯和巴赫拉维的一个猜想 I

Koustav Banerjee、Kathrin Bringmann 和 William Keith

Abstract. 最近，安德鲁斯和巴赫拉维考察了与某些双色分拆相关的生成函数 $F_{k,\ m}(q)$，并猜想该函数的系数对于 $m = 1$ 非负。他们证明了对于 $1 \le k \le 4$，这一性质成立。在本文中，我们证明 $F_{k,\ 1}(q)$ 的系数对于 $5 \le k \le 10$ 非负。此外，我们还证明，当 $k \to \infty$ 时，$F_{k,\ 1}(q)$ 与拉马努金的三阶拟 θ 函数 $\omega(q)$ 以及某些 $q$-二项式系数的商有关。

## 1. Introduction and Statement of Results

下文中，令 $(a)_n = (a;\ q)_n := \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$，其中 $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。此外，令 $(a_1,\ \ldots,\ a_\ell)_n = (a_1,\ \ldots,\ a_\ell;\ q)_n := (a_1)_n \cdots (a_\ell)_n$，其中 $\ell \in \mathbb{N}$。安德鲁斯和巴赫拉维在 [3, 猜想 2.8 和猜想 2.9] 中猜想，对于 $k,\ m \in \mathbb{N}$ 且对于 $k = 2,\ m = 4,\ q$-级数的系数

$$\sum_{n\ge 0} \frac{\left(q^{2n+2}, q^{2n+2k}; q^2\right)_\infty}{\left(q^{2n+1}; q^2\right)_\infty^2} q^{m(2n+1)} =: \sum_{n\ge 0} c_{k,m}(n) q^n =: F_{k,m}(q)$$

为正。注意，对于 $m = 1$，我们有

$$F_{k,1}(q) = \sum_{n\ge 0} \frac{\left(q^{2n+2}, q^{2n+2k}; q^2\right)_\infty}{\left(q^{2n+1}; q^2\right)_\infty^2} q^{2n+1}. \tag{1.1}$$

安德鲁斯和巴赫拉维 [3, (2.2)、(2.3)、(2.5)及定理 2.6]证明了$c_{k,\ 1}(n) > 0$ 对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $1 \le k \le 4$。此外，他们提出了以下猜想（见 [3, 猜想 2.8]），本文将部分证明这一猜想。

**猜想 1.1**。对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $n \in \mathbb{N}_0$，$c_{k,\ 1}(n) > 0$。

为陈述我们的定理，对于 $A(q) = \sum_{n\ge 0} a(n) q^n$，我们指的是：$A(q) \succeq 0$（分别地，$A(q) \succ 0$）表示 $a(n) \ge 0$（分别地，$a(n) > 0$），其中 $n \in \mathbb{N}_0$。

**定理 1.2.** 对于 $k \in \{5, 6, 7\}$，我们有 $F_{k,\ 1}(q) \succeq 0$。

2020 数学学科分类。05A17,11P81.关键词和短语。模拟 theta 函数、分拆、 $q$-级数。

利用计算方法，我们将其推广到 $k \leq 10$。

**定理 1.3**。 对于 $k \in \{8, 9, 10\}$，我们有 $F_{k,\ 1}(q) \succeq 0$。

我们的下一个结果将 $F_{k,\ 1}$ 与拉马努金的拟 θ 函数 $\omega$ [5]联系起来

$$\omega(q) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q; q^2)_{n+1}^2}. \tag{1.2}$$

**定理 1.4**。 我们有

$$\lim_{k \to \infty} F_{k,1}(q) = q\omega(q).$$

在下面的定理中，我们将进一步说明阻止函数 $F_{k,\ 1}(q)$ 与 $q\omega(q)$ 相等的函数。为陈述我们的结果，对于 $A(q) = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$ 以及 $m \in \mathbb{N}_0$，定义

$$\operatorname{coeff}_{[q^m]} A(q) := a(m).$$

**定理 1.5**。 对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$q\omega(q) - F_{k,1}(q) = q^{2k+1} E_k(q) \ \textit{with}\ E_k(q) \in \mathbb{Z}[[q]] \ \textit{and}\ \operatorname{coeff}_{[q^0]} E_k(q) = 1.$$

定理 1.5 立即推出如下结论。

**推论 1.6**。 对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leq m \leq k$，有

$$\operatorname{coeff}_{[q^m]} \left(q\omega(q) - F_{k,1}(q)\right) = 0 \quad \textit{for}\ \ 1 \leq m \leq 2k.$$

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们回顾一些标准的 $q$ 级数变换并定义相关记号。第 3 节中，我们将 $F_{k,1}(q)$ 变换为若干有助于证明定理 1.2、定理 1.4 和定理 1.5 的形式。第 4 节中，我们证明定理 1.2 和定理 1.3，展示 $F_{k,1}(q)$ 的系数对于 $5 \leq k \leq 10$ 的正性。接着，我们证明定理 1.4 和定理 1.5，揭示 $F_{k,1}$ 与三阶拟 θ 函数 $\omega$ 之间的关系。最后，在第 5 节中，我们提出几种解决定理 1.1 的合理思路。


## Acknowledgements

第一作者和第二作者获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线 2020研究与创新计划（资助协议编号：101001179）提供的资助。作者感谢 Caner Nazaroglu 提供的宝贵意见和建议。

## 2. Preliminaries

回顾海涅变换 [4,推论 1.2。4]。

引理 *2.1. </style}*对于 $|q|, |t| < 1, 0 < |c| < |b| < 1,$ 有

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(a,b)_n t^n}{(q,c)_n} = \frac{\left(\frac{c}{b}, bt\right)_\infty}{(c,t)_\infty} \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{abt}{c}, b\right)_n \left(\frac{c}{b}\right)^n}{(q,bt)_n}.$$

由 [1, 定理 1], 可得如下变换。

**引理 2.2.** 有

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(B,-Abq)_n\, q^n}{(-aq,-bq)_n} = -\frac{a^{-1}\,(B,-Abq)_\infty}{(-aq,-bq)_\infty} \sum_{n\geq 0} \frac{(A^{-1})_n \left(\frac{Abq}{a}\right)^n}{\left(-\frac{B}{a}\right)_{n+1}} + (1+b) \sum_{n\geq 0} \frac{(-a^{-1})_{n+1} \left(-\frac{ABq}{a}\right)_n (-b)^n}{\left(-\frac{B}{a}, \frac{Abq}{a}\right)_{n+1}}.$$

接下来给出罗杰斯–费恩恒等式 [1, 方程 (2.7)]。

**引理 2.3.** 有

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n\, w^n}{(\beta)_n} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\alpha, \frac{\alpha w q}{\beta}\right)_n \beta^n w^n q^{n^2-n} \left(1-\alpha w q^{2n}\right)}{(\beta)_n\, (w)_{n+1}}.$$

该高斯多项式 定义为（参见 [2,定义 3.1]）

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q := \begin{cases} \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}} & \text{if } 0 \leq m \leq n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由 [2, 方程 (3.3.6)], 可得, 对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$(a;q)_N = \sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_q (-1)^j a^j q^{\frac{j^2-j}{2}}. \tag{2.1}$$

## 3. Some $q$-series transformations

以下引理是证明定理 1.2 的关键步骤。

**引理 3.1.** 对于 $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, 我们有

$$F_{k,1}(q) = \frac{q}{(1-q)\,(q;q^2)_{k-1}} \left(1 + (1-q) \sum_{n=1}^{k-2} \frac{\left(q^{4-2k};q^2\right)_n}{\left(q^2;q^2\right)_n} \frac{q^{(2k-1)n}}{1-q^{2n+1}}\right).$$

证明. 利用 (1.1)，我们得到

$$F_{k,1}(q)=\frac{q\left(q^2;q^2\right)_\infty^2}{\left(q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_{k-1}}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q;q^2\right)_n^2q^{2n}}{\left(q^2;q^2\right)_n\left(q^{2k};q^2\right)_n}. \tag{3.1}$$

应用引理 2.1，取 $q\mapsto q^2$、$a=b=q$、$c=q^{2k}$ 和 $t=q^2$，可得

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q;q^2\right)_n^2q^{2n}}{\left(q^2,q^{2k};q^2\right)_n}=\frac{\left(q^{2k-1},q^3;q^2\right)_\infty}{\left(q^{2k},q^2;q^2\right)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q^{4-2k},q;q^2\right)_n}{\left(q^2,q^3;q^2\right)_n}q^{(2k-1)n}.$$

将其代入 (3.1)，可得

$$F_{k,1}(q)=\frac{q}{(1-q)\left(q;q^2\right)_{k-1}}\left(1+(1-q)\sum_{n\geq 1}\frac{\left(q^{4-2k};\,q^2\right)_n}{\left(q^2;\,q^2\right)_n}\frac{q^{(2k-1)n}}{1-q^{2n+1}}\right). \tag{3.2}$$

注意，对于 $n\geq k-1$，$\left(q^{4-2k};q^2\right)_n=0$。因此，由 (3.2) 可得，对于$k\geq 3$

$$F_{k,1}(q)=\frac{q}{(1-q)\left(q;q^2\right)_{k-1}}\left(1+(1-q)\sum_{n=1}^{k-2}\frac{\left(q^{4-2k};q^2\right)_n}{\left(q^2;q^2\right)_n}\frac{q^{(2k-1)n}}{1-q^{2n+1}}\right).$$

证明至此结束。 □

接下来，我们给出两个用于证明定理 1.5 的引理。

**引理 3.2**。对于 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$F_{k,1}(q)=\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q^{2k-1};q^2\right)_n\,q^{n+1}}{\left(q;q^2\right)_{n+1}}.$$

证明。由 (3.1)，我们有

$$F_{k,1}(q)=\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^2}{\left(q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_{k-1}}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q;q^2\right)_n^2q^{2n+1}}{\left(q^2,q^{2k};q^2\right)_n}. \tag{3.3}$$

在引理 2.2 中取 $q\mapsto q^2$、$a=-1,b=-q^{2k-2},A=q^{1-2k}$ 和 $B=q$，并利用当 $n\in\mathbb{N}_0$ 时 $\left(1;q^2\right)_{n+1}=0$ 这一事实，我们得到

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q;q^2\right)_n^2q^{2n+1}}{\left(q^2,q^{2k};q^2\right)_n}=\frac{\left(q;q^2\right)_\infty^2}{\left(q^2,q^{2k};q^2\right)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q^{2k-1};q^2\right)_n\,q^{n+1}}{\left(q;q^2\right)_{n+1}}.$$

将此代入 (3.3)，得到

$$F_{k,1}(q)=\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^2}{\left(q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_{k-1}}\frac{\left(q;q^2\right)_\infty^2}{\left(q^2,q^{2k};q^2\right)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(q^{2k-1};q^2\right)_n\,q^{n+1}}{\left(q;q^2\right)_{n+1}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\left(q^{2k-1};q^2\right)_n q^{n+1}}{(q;q^2)_{n+1}}.$$

由此得到该引理。 □

## 4. Proof of Theorems 1.2, 1.3, 1.4, and 1.5

现在我们可以证明定理 1.2 了。

定理 *1.2* 的证明。我们分三部分证明定理 1.2。首先证明关于 $k=5$ 的断言。由引理 3.1，得到

$$\begin{aligned} F_{5,1}(q) &= \frac{q}{(1-q)(q;q^2)_4}\left(1+(1-q)\sum_{n=1}^{3}\frac{(q^{-6};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\frac{q^{9n}}{1-q^{2n+1}}\right) \\ &= \frac{q}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)}\left(\frac{1}{1-q}+\frac{1-q^{-6}}{1-q^2}\frac{q^9}{1-q^3}\right. \\ &\quad \left.+\frac{(1-q^{-6})(1-q^{-4})}{(1-q^2)(1-q^4)}\frac{q^{18}}{1-q^5}+\frac{(1-q^{-6})(1-q^{-4})(1-q^{-2})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}\frac{q^{27}}{1-q^7}\right). \end{aligned}$$

化简右侧求和项中的因子后，得到

$$\begin{aligned} F_{5,1}(q) &= \frac{q}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)} \\ &\quad \times\left(\frac{1}{1-q}-\left(1+q^2+q^4\right)\frac{q^3}{1-q^3}+\left(1+q^2+q^4\right)\frac{q^8}{1-q^5}-\frac{q^{15}}{1-q^7}\right). \end{aligned}$$

只要证明下式，便可得出该断言

$$\frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{(1+q^2+q^4)q^3}{1-q^3}+\frac{(1+q^2+q^4)q^8}{1-q^5}-\frac{q^{15}}{1-q^7}\right)\succeq 0.$$

现在我们证明，可以将第一项和第二项合并处理，也可以将第三项和第四项合并处理。首先写出

$$\frac{(1+q^2+q^4)q^3}{1-q^3} = -1-q-q^2-q^4+\frac{1+q+q^2}{1-q^3}.$$

Then

$$\frac{1}{1-q}+1+q+q^2+q^4-\frac{1+q+q^2}{1-q^3}\succeq 0.$$

接下来我们写作

$$\frac{(1+q^2+q^4)q^8}{1-q^5}-\frac{q^{15}}{1-q^7} = q^8\left(\frac{1+q^2+q^4}{1-q^5}+1-\frac{1}{1-q^7}\right).$$

Now
$$\frac{1+q^2+q^4}{1-q^5}-\frac{1}{1-q^7}\succeq\frac{1}{1-q^5}-\frac{1}{1-q^7}=\frac{q^5-q^7}{(1-q^5)(1-q^7)}=\frac{q^5(1-q^2)}{(1-q^5)(1-q^7)}.$$
两边除以 $\frac{1}{1-q}$，得到
$$\frac{q^5(1+q)}{(1-q^5)(1-q^7)}\succeq 0.$$
这就完成了 $k=5$ 情形的证明。

接下来，我们证明 $k=6$ 情形。由引理 3.1，得到
$$F_{6,1}(q)=\frac{q}{(1-q)(q;q^2)_5}\left(1+(1-q)\sum_{n=1}^{4}\frac{(q^{-8};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\frac{q^{11n}}{1-q^{2n+1}}\right).$$
将上述恒等式右端求和中的因子 $(q^{-8};\ q^2)_n\ (q^2;\ q^2)_n$（对于 $1\le n\le 4$）化简后，得到
$$F_{6,1}(q)=\frac{q}{(q;q^2)_5}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{q^3(1+q^2+q^4+q^6)}{1-q^3}+\frac{q^8(1+q^2+q^4)(1+q^4)}{1-q^5}\right.$$
$$\left.-\frac{q^{15}(1+q^2+q^4+q^6)}{1-q^7}+\frac{q^{24}}{1-q^9}\right).$$
利用长除法，我们写成
$$-\frac{q^3(1+q^2+q^4+q^6)}{1-q^3}=2+q+q^2+q^3+q^4+q^6-\frac{2+q+q^2}{1-q^3},$$
$$\frac{q^8(1+q^2+q^4)(1+q^4)}{1-q^5}=-1-q-2q^2-q^3-q^4-q^5-q^6-2q^7-q^9-q^{11}$$
$$+\frac{1+q+2q^2+q^3+q^4}{1-q^5},$$
$$-\frac{q^{15}(1+q^2+q^4+q^6)}{1-q^7}=1+q+q^3+q^5+q^7+q^8+q^{10}+q^{12}+q^{14}$$
$$-\frac{1+q+q^3+q^5}{1-q^7}.$$
因此，我们需要
$$\frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{1-q}+2+q+q^2+q^3+q^4+q^6-\frac{2+q+q^2}{1-q^3}-1-q-2q^2-q^3-q^4\right.$$
$$\left.-q^5-q^6-2q^7-q^9-q^{11}+\frac{1+q+2q^2+q^3+q^4}{1-q^5}+1+q+q^3+q^5+q^7+q^8\right.$$

$$+q^{10}+q^{12}+q^{14}-\frac{1+q+q^3+q^5}{1-q^7}\Bigg)$$

$$=\frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{1-q}+2+q-q^2+q^3-q^7+q^8-q^9+q^{10}-q^{11}+q^{12}+q^{14}\right.$$

$$\left.-\frac{2+q+q^2}{1-q^3}+\frac{1+q+2q^2+q^3+q^4}{1-q^5}-\frac{1+q+q^3+q^5}{1-q^7}\right)\succeq 0.$$

现在我们写成

$$\frac{1+q+2q^2+q^3+q^4}{1-q^5}=\frac{1}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^5},\quad -\frac{2+q+q^2}{1-q^3}=-\frac{1}{1-q^3}-\frac{1}{1-q},$$

$$-\frac{1+q+q^3+q^5}{1-q^7}=-\frac{1}{1-q}+\frac{q^2+q^4+q^6}{1+q^7}.$$

因此我们希望

$$\frac{1}{1-q}\left(2+q-q^2+q^3-q^7+q^8-q^9+q^{10}-q^{11}+q^{12}+q^{14}-\frac{1}{1-q^3}\right.$$

$$\left.+\frac{q^2}{1-q^5}+\frac{q^2\left(1+q^2+q^4\right)}{1-q^7}\right)\succeq 0. \quad (4.1)$$

为证明这一点，首先注意到

$$\frac{1}{1-q}\left(-\frac{1}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}+\frac{q^2\left(1+q^2+q^4\right)}{1-q^7}\right)$$

$$\succeq\frac{1}{1-q}\left(-\frac{1}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}+\frac{q^2\left(1+q^2\right)}{1-q^7}\right). \quad (4.2)$$

现在我们证明

$$\frac{1}{1-q}\left(-\frac{1}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}+\frac{q^2\left(1+q^2\right)}{1-q^7}\right)\succeq-\frac{1+q}{1-q}. \quad (4.3)$$

这等价于证明

$$\frac{1}{1-q}\left(1+q-\frac{1}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}+\frac{q^2\left(1+q^2\right)}{1-q^7}\right)\succeq 0. \quad (4.4)$$

我们有

$$\frac{1}{1-q}\left(1+q-\frac{1}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}+\frac{q^2\left(1+q^2\right)}{1-q^7}\right)$$

$$=\frac{1}{1-q}\left(1+q-\frac{1-q^2}{\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)}+\frac{q^2\left(1+q^2\right)}{1-q^7}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1+q}{1-q} - \frac{1+q}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{q^2+q^4}{(1-q)(1-q^7)} \\
&= \frac{1+q}{1-q} - \frac{1+q}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{q^2-q^4+2q^4}{(1-q)(1-q^7)} \\
&= \frac{1+q}{1-q} - \frac{1+q}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{q^2(1+q)}{1-q^7} + \frac{2q^4}{(1-q)(1-q^7)}.
\end{aligned}
$$

由于 $\frac{q^2(1+q)}{1-q^7} \succeq 0$，因此，要证明（4.4），只需证明

$$
\frac{1+q}{1-q} - \frac{1+q}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{2q^4}{(1-q)(1-q^7)} \succeq 0. \tag{4.5}
$$

化简（4.5）的左边，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+q}{1-q} - \frac{1+q}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{2q^4}{(1-q)(1-q^7)} \\
&\quad = \frac{(1+q)(q+q^2-q^5-q^6-q^7)}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{2q^4}{(1-q)(1-q^7)} \\
&\quad = \frac{(1+q)(q(1-q^6)+q^2(1-q^3)-q^6)}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{2q^4}{(1-q)(1-q^7)} \\
&\quad \succeq q^4\left(-\frac{q^2+q^3}{(1-q^3)(1-q^5)} + \frac{2}{(1-q)(1-q^7)}\right) \\
&\quad = q^4\left(\frac{2q}{(1-q^3)(1-q^7)} + \frac{2(1+q^2)}{(1-q^3)(1-q^7)} - \frac{q^2+q^3}{(1-q^3)(1-q^5)}\right).
\end{aligned}
$$

由于 $\frac{2q}{(1-q^3)(1-q^7)} \succeq 0$，因此要证明（4.5），只需证明

$$
\frac{2(1+q^2)}{(1-q^3)(1-q^7)} - \frac{q^2+q^3}{(1-q^3)(1-q^5)} \succeq 0.
$$

为证明这一点，我们证明

$$
\frac{1+q^2}{(1-q^3)(1-q^7)} - \frac{q^2}{(1-q^3)(1-q^5)} \succeq 0, \tag{4.6}
$$

$$
\frac{1+q^2}{(1-q^3)(1-q^7)} - \frac{q^3}{(1-q^3)(1-q^5)} \succeq 0. \tag{4.7}
$$

首先，我们看到

$$
\frac{1+q^2}{(1-q^3)(1-q^7)} - \frac{q^2}{(1-q^3)(1-q^5)} = \frac{1}{1-q^3} + \frac{q^9}{(1-q^5)(1-q^7)} \succeq 0,
$$

这就证明了（4.6）。

接下来，我们有

$$\frac{1+q^2}{(1-q^3)(1-q^7)}-\frac{q^3}{(1-q^3)(1-q^5)}=\frac{1}{(1-q^5)(1-q^7)}+\frac{q^2}{1-q^7}\succeq 0.$$

这就得到 (4.7)。至此，(4.3) 的证明完成。

因此，结合 (4.2) 和 (4.3)，可得

$$\frac{1}{1-q}\left(-\frac{1}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}+\frac{q^2\left(1+q^2+q^4\right)}{1-q^7}\right)\succeq-\frac{1+q}{1-q}.$$

因此，要证明 (4.1)，还需证明

$$\frac{1}{1-q}\left(2+q-q^2+q^3-q^7+q^8-q^9+q^{10}-q^{11}+q^{12}+q^{14}-(1+q)\right)\succeq 0,$$

这成立。由此得到关于 $k=6$ 的结论。

最后，我们考虑 $k=7$ 的情形。由引理 3.1，我们有

$$F_{7,1}(q)=\frac{q}{(1-q)(q;q^2)_6}\left(1+(1-q)\sum_{n=1}^{5}\frac{(q^{-10};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}\frac{q^{13n}}{1-q^{2n+1}}\right).$$

将上述恒等式右侧求和中的因子 $\frac{(q^{-10};q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}$（for $1\le n\le 5$）化简后，得到

$$\begin{aligned}F_{7,1}(q)=\frac{q}{(q;q^2)_6}\Bigg(&\frac{1}{1-q}-\frac{q^3\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)}{1-q^3}\\&+\frac{q^8(1+q^4)\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)}{1-q^5}-\frac{q^{15}(1+q^4)\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)}{1-q^7}\\&+\frac{q^{20}\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)}{1-q^9}-\frac{q^{35}}{1-q^{11}}\Bigg).\end{aligned}$$

与情形 $k=6$ 类似，经过长除法后，为了证明该断言，我们需要证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{(q;q^2)_6}\Bigg(&2-q+2q^2-q^4+q^5-q^6-q^{10}-2q^{11}+2q^{12}+2q^{14}-2q^{15}\\&+2q^{16}-q^{17}+q^{18}-q^{19}+q^{20}+q^{24}+\frac{1}{1-q}-\frac{2+q+2q^2}{1-q^3}\\&+\frac{2+2q+2q^2+2q^3+2q^4}{1-q^5}-\frac{2+q+2q^2+q^3+q^4+2q^5+q^6}{1-q^7}\end{aligned}$$

$$+\frac{q+q^2+q^4+q^6+q^8}{1-q^9}-\frac{q^2}{1-q^{11}}\Bigg)\succeq 0.$$

现在我们写作

$$\begin{aligned}
-\frac{2+q+2q^2}{1-q^3}&=-\frac{1}{1-q}-\frac{1+q^2}{1-q^3},\\
\frac{2+2q+2q^2+2q^3+2q^4}{1-q^5}&=\frac{2}{1-q},\\
-\frac{2+q+2q^2+q^3+q^4+2q^5+q^6}{1-q^7}&=-\frac{1}{1-q}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7},\\
\frac{q+q^2+q^4+q^6+q^8}{1-q^9}&=\frac{1}{1-q}-\frac{1+q^3+q^5+q^7}{1-q^9}.
\end{aligned}$$

因此，注意到只要证明

$$\frac{1}{1-q}\Bigg(2-q+2q^2-q^4+q^5-q^6-q^{10}-2q^{11}+2q^{12}+2q^{14}-2q^{15}+2q^{16}$$
$$-q^{17}+q^{18}-q^{19}-\frac{1+q^2}{1-q^3}+\frac{2}{1-q}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}-\frac{1+q^3+q^5+q^7}{1-q^9}-\frac{q^2}{1-q^{11}}\Bigg)\succeq 0.$$

接下来，我们化简

$$-\frac{1+q^2}{1-q^3}+\frac{2}{1-q}-\frac{1+q^3+q^5+q^7}{1-q^9}=\frac{2q+q^2+2q^4+q^6+q^7+q^8}{1-q^9}.$$

因此，我们需要证明

$$\frac{1}{1-q}\Bigg(2-q+2q^2-q^4+q^5-q^6-q^{10}-2q^{11}+2q^{12}+2q^{14}-2q^{15}+2q^{16}$$
$$-q^{17}+q^{18}-q^{19}+\frac{2q+q^2+2q^4+q^6+q^7+q^8}{1-q^9}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}-\frac{q^2}{1-q^{11}}\Bigg)\succeq 0. \quad (4.8)$$

注意，

$$\frac{2-q+2q^2-q^4+q^5-q^6-q^{10}-2q^{11}+2q^{12}+2q^{14}-2q^{15}+2q^{16}-q^{17}+q^{18}-q^{19}}{1-q}$$
$$=\frac{1-2q^{11}}{1-q}+\frac{q^2\left(1-q^8\right)}{1-q}+\frac{2q^{12}+q^{16}}{1-q}+1+q^2+q^3+q^5+2q^{14}+q^{16}+q^{18}.$$

由于

$$\frac{q^2\left(1-q^8\right)}{1-q}+\frac{2q^{12}+q^{16}}{1-q}+1+q^2+q^3+q^5+2q^{14}+q^{16}+q^{18}\succeq 0,$$

要证明 (4.8)，只需证明

$$\frac{1}{1-q}\left(1-2q^{11}+\frac{2q+q^2+2q^4+q^6}{1-q^9}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}-\frac{q^2}{1-q^{11}}\right)\succeq 0.$$

为证明这一点，我们证明以下结论

$$\frac{1}{1-q}\left(1-2q^{11}+\frac{q+q^2+2q^4+q^6}{1-q^9}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}\right)\succeq 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{1-q}\left(\frac{q}{1-q^9}-\frac{q^2}{1-q^{11}}\right)\succeq 0. \tag{4.10}$$

注意

$$\frac{1}{1-q}\left(\frac{q}{1-q^9}-\frac{q^2}{1-q^{11}}\right)=\frac{q-q^{12}-q^2+q^{11}}{(1-q)\left(1-q^9\right)\left(1-q^{11}\right)}=\frac{q+q^{11}}{\left(1-q^9\right)\left(1-q^{11}\right)}\succeq 0,$$

这就证明了 (4.10)。接下来证明 (4.9)。首先我们注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-q}\left(1-2q^{11}+\frac{q+q^2+2q^4+q^6}{1-q^9}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}\right)\\
&\quad\succeq 1+\frac{1}{1-q}\left(\frac{q+q^2+2q^4+q^6-q^{11}+q^{20}}{1-q^9}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}\right)\\
&\quad=1+\frac{1}{1-q}\left(\frac{q+2q^4+q^6+q^{20}}{1-q^9}-\frac{1+q^5+q^9}{1-q^7}\right)\\
&\quad\succeq 1+\frac{1}{1-q}\left(\frac{q+2q^4+q^6}{1-q^9}-\frac{1+q^5+q^9}{1-q^7}\right)\\
&\quad=\frac{q^4\left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)}{1-q^9}+\frac{1}{1-q}\left(\frac{1+q^4+q^6+q^{10}}{1-q^9}-\frac{1+q^5+q^9}{1-q^7}\right).
\end{aligned}$$

由于

$$\frac{q^4\left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)}{1-q^9}\succeq 0,$$

要证明 (4.9)，只需证明

$$\frac{1}{1-q}\left(\frac{1+q^4+q^6+q^{10}}{1-q^9}-\frac{1+q^5+q^9}{1-q^7}\right)\succeq 0.$$

我们写作

$$\frac{q^{10}}{1-q^9}=-q+\frac{q}{1-q^9},\quad \frac{q^9}{1-q^7}=-q^2+\frac{q^2}{1-q^7}.$$

因此，我们需要证明

$$\frac{1}{1-q}\left(-q+q^2+\frac{1+q+q^4+q^6}{1-q^9}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}\right)\succeq 0.$$

我们合并

$$\frac{1+q+q^4+q^6}{1-q^9}-\frac{1+q^2+q^5}{1-q^7}=\frac{(1-q)\,q\,(1+q^3+q^5-q^7-q^{12})}{(1-q^7)\,(1-q^9)}.$$

因此我们需要

$$-1+\frac{1+q^3+q^5-q^7-q^{12}}{(1-q^7)\,(1-q^9)}\succeq 0.$$

不难看出，左边的常数项为零。因此，只需证明

$$\frac{1+q^3-q^7-q^{12}}{(1-q^7)\,(1-q^9)}=\frac{1}{1-q^9}+\frac{q^3}{1-q^7}\succeq 0$$

这成立。因此， $k=7$ 的证明得证。 □

接下来，我们证明定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。在整个证明过程中， $k\in\{8,9,10\}$。我们首先为 $F_{k,\,1}(q)$ 建立另一种形式。为了使定理 3.1 的内和中的幂显式地为正，我们分配 $q$ 的幂。为此，我们写作

$$\left(q^{4-2k};q^2\right)_n q^{(2k-1)n}=(-1)^n\left(q^{2k-2n-2};q^2\right)_n q^{n^2+2n}.$$

将其代入定理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}F_{k,1}(q)&=\frac{q}{(1-q)(q;q^2)_{k-1}}\left(1+(1-q)\sum_{n=1}^{k-2}\frac{(-1)^n\left(q^{2k-2n-2};q^2\right)_n q^{n^2+2n}}{(1-q^{2n+1})(q^2;q^2)_n}\right)\\&=\frac{1}{(q;q^2)_{k-1}}\sum_{n=0}^{k-2}\frac{(-1)^n\left(q^{2k-2n-2};q^2\right)_n q^{(n+1)^2}}{(1-q^{2n+1})(q^2;q^2)_n}\\&=\frac{1}{(q;q^2)_{k-1}}\sum_{n=0}^{k-2}\begin{bmatrix}k-2\\n\end{bmatrix}_{q^2}\frac{(-1)^n q^{(n+1)^2}}{1-q^{2n+1}}.\end{aligned}$$

注意，我们可以将内和中的所有项都通分到公共分母 $1-q^{\ell}$ 上，其中 $\ell :=$ lcm(1、3、5、.....、$2k-3$)。因此，我们得到

$$F_{k,1}(q)=\frac{1}{(q;q^2)_{k-1}(1-q^{\ell})}\sum_{n=0}^{k-2}\begin{bmatrix}k-2\\ n\end{bmatrix}_{q^2}(-1)^n q^{(n+1)^2}\sum_{j=0}^{\frac{\ell}{2n+1}-1}q^{(2n+1)j}.$$

现在，如果满足 $F_{k,\ 1}(q)\ \succeq 0$

$$\frac{1}{1-q}\sum_{n=0}^{k-2}\begin{bmatrix}k-2\\ n\end{bmatrix}_{q^2}(-1)^n q^{(n+1)^2}\sum_{j=0}^{\frac{\ell}{2n+1}-1}q^{(2n+1)j}\ \succeq 0. \tag{4.11}$$

现在考虑内和，它是多项式

$$H_k(q):=\sum_{n=0}^{k-2}\begin{bmatrix}k-2\\ n\end{bmatrix}_{q^2}(-1)^n q^{(n+1)^2}\sum_{j=0}^{\frac{\ell}{2n+1}-1}q^{(2n+1)j}=:\sum_{j=0}^{d_k}a_k(j)q^j,$$

其中，$d_k$ 是 $H_k(q)$的次数，而 $a_k(j):=$coeff$_{[q^j]}(H_k(q))$。

对于次数为 $d$ ($d\in\mathbb{N}$)的多项式 $\mathcal{P}(q)=\sum_{j=0}^{d}a(j)q^j$，其中 $a(j)\in\mathbb{R}$ 且 $a(j)=0$ 对于 $j>d$，我们记为

$$\frac{\mathcal{P}(q)}{1-q}=\sum_{m\geq 0}\sum_{j=0}^{d}a(j)q^{j+m}=\sum_{n\geq 0}c(n)q^n,$$

在最后一步中使用 $j+m=n$ 和 $a(n)>0$ 对于 $n>d$，其中

$$c(n):=\begin{cases}\sum_{j=0}^{n}a(j) & \text{if } 0\leq n\leq d,\\ \sum_{j=0}^{d}a(j) & \text{if } n>d.\end{cases}$$

因此，要证明 $\frac{\mathcal{P}_{(q)}}{1-q}\succeq 0$，只需验证对 $0\leq n\leq d$有 $c(n)\geq 0$。将此用于 $\mathcal{P}(q)=H_k(q)$，可知要证明(4.11)，只需验证对所有 $0\leq m\leq d_k$都有 $\sum_{j=0}^{m}a_k(j)\geq 0$。我们已用计算机验证了这一点，代码[1] 见附录 A。□

接下来，我们证明定理 1.4。

定理 *1.4* 的证明。由引理 3.2 可得

$$\lim_{k\to\infty}F_{k,1}(q)=q\sum_{n\geq 0}\frac{q^n}{(q;q^2)_{n+1}}. \tag{4.12}$$

[1]我们给出 $k=10$ 的代码。 $k\in\{8,9\}$ 的代码类似。

将引理 2.3 应用于 $q \mapsto q^2$、 $\alpha = 0$、 $\beta = q^3$ 和 $w = q$，再将两边乘以 $\frac{q}{1-q}$，最后利用 (1.2)，得到

$$q \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{(q;q^2)_{n+1}} = q\omega(q). \tag{4.13}$$

将其代入 (4.12)，即可完成证明。 □

现在我们可以证明定理 1.5。

定理 *1.5* 的证明。由 (4.13) 和引理 3.2，可得

$$\begin{aligned} q\omega(q) - F_{k,1}(q) &= \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n+1}}{(q;q^2)_{n+1}} - \sum_{n\geq 0} \frac{\left(q^{2k-1};q^2\right)_n q^{n+1}}{(q;q^2)_{n+1}} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1-\left(q^{2k-1};q^2\right)_n}{(q;q^2)_{n+1}} q^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

将 (2.1) 应用于 $q \mapsto q^2$， $a = q^{2k-1}$ 和 $N = n$，可得

$$\left(q^{2k-1};q^2\right)_n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^j q^{j^2+2kj-2j}.$$

因此，我们有

$$1-\left(q^{2k-1};q^2\right)_n = 1 - \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^j q^{j^2+2kj-2j} = -\sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^j q^{j^2+2kj-2j}.$$

将其代入 (4.14)，得到

$$\begin{aligned} q\omega(q) - F_{k,1}(q) &= \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n+1}}{(q;q^2)_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^{j+1} q^{j^2+2kj-2j} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{(q;q^2)_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^{j+1} q^{(j-1)^2+2kj} \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{(q;q^2)_{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j+1 \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^j q^{j^2+2kj+2k} \\ &= q^{2k} \left( \frac{q}{(1-q)(1-q^3)} + \sum_{n\geq 2} \frac{q^n}{(q;q^2)_{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j+1 \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^j q^{j^2+2kj} \right) \\ &= q^{2k+1} \left( \frac{1}{(1-q)(1-q^3)} + \sum_{n\geq 2} \frac{q^{n-1}}{(q;q^2)_{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j+1 \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^j q^{j^2+2kj} \right) \end{aligned}$$

$$= q^{2k+1}\left(\frac{1}{(1-q)(1-q^3)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1-q)(1-q^3)}\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{(q^5;q^2)_n}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n+1\\ j+1\end{bmatrix}_{q^2}(-1)^j q^{j^2+2kj}\right)$$
$$= \frac{q^{2k+1}}{(1-q)\,(1-q^3)}\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{(q^5;q^2)_n}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n+1\\ j+1\end{bmatrix}_{q^2}(-1)^j q^{j^2+2kj}\right)$$
$$= q^{2k+1}E_k(q),$$

其中

$$E_k(q) := \frac{1}{(1-q)\,(1-q^3)}\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{(q^5;q^2)_n}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n+1\\ j+1\end{bmatrix}_{q^2}(-1)^j q^{j^2+2kj}\right).$$

接下来注意到 $E_k(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$，因为

$$\frac{1}{(1-q)\,(1-q^3)} \in \mathbb{Z}[[q]] \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix}n+1\\ j+1\end{bmatrix}_{q^2} \in \mathbb{Z}[q].$$

此外，我们有

$$\operatorname{coeff}_{[q^0]}\left(\frac{1}{(1-q)\,(1-q^3)}\right) = 1,$$

and

$$\operatorname{coeff}_{[q^0]}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{(q^5;q^2)_n}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n+1\\ j+1\end{bmatrix}_{q^2}(-1)^j q^{j^2+2kj}\right) = 0,$$

因为对于 $n,\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n, j^2+2kj+n \neq 0$。因此，

$$\operatorname{coeff}_{[q^0]} E_k(q) = 1.$$

这就完成了证明。 □

## 5. Potential extensions of current approaches

本文采用的每种方法都遇到了困难，下面我们将对此进行讨论，并提出一些扩展或替代方案的建议。

在定理 1.2 的证明中，对于 $k=5$，我们先化简 $\left[\begin{smallmatrix}k-2\\ n\end{smallmatrix}\right]_{q^2}$，然后进行长除法并合并。然而，我们无法找到统一的化简过程，正如 $k \in \{6,7\}$ 的定理 1.2 证明中所示。如果能够发现某种持续存在的模式，那么整个猜想或许就能以这种方式得到证明。

在定理 1.3 的证明中，计算过程是算法化的，但最小公倍数会在 $k$ 中呈指数增长。对于 $k = 11$ ，我们无法继续进行。更谨慎地选择消去的位置或许可以进行进一步计算；足够系统的洞见，可能包括一些组合注入，甚至可能足以完全确立该猜想。我们将其与 $q$-二项式商联系起来，这对一些读者而言或许具有独立的研究价值。回顾定理 3.2

$$F_{k,1}(q) = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(q^{2k-1};q^2\right)_n q^{n+1}}{(q;q^2)_{n+1}} =: \sum_{n\geq 0} G_{k,n}(q) q^{n+1}. \tag{5.1}$$

我们提出以下更精细的猜想，由此也将推出定理 1.1。接下来，我们将$G_{k,n}(q)$改写为 $q$-项式的商。

$$G_{k,n}(q) = \frac{1}{1-q^{2n+1}} \frac{\begin{bmatrix} 2k+2n-2 \\ 2n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} k+n-1 \\ n \end{bmatrix}_{q^2}}. \tag{5.2}$$

**猜想 5.1**。我们有 $G_{k,n}(q) \succeq 0$。

式（5.2）所给出的形式、 $q$-项式系数关于其中央峰值的对称性，以及计算数据，启发我们提出以下进一步的猜想：

**猜想 5.2**。对于 $n \in \mathbb{N}$, $k \geq n+1$，我们有

$$G_{k,n} - G_{k+1,n-1} \succeq 0.$$

我们可以证明以下结论。

**引理 5.3**。对于 $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, $G_{n+2-j,n} = G_{n+2,n-j}$。

证明。 利用 $k = n-j+2$ 中的 (5.1)，然后利用 $k = n+2$ 和$n \mapsto n-j$中的 (5.1)，即可完成证明。 □

由于$G_{k,\ 0}(q) = \frac{1}{1-q}$ 对所有 $k$都具有非负系数，根据引理 5.3，猜想 5.2 将意味着所有 $G_{k,\ n}$ 均为非负，进而得到定理 1.1。引理 5.3 还意味着，如果我们能够证明对于每个 $k$ 和 $0 \leq n \leq k-2$, $G_{k,\ n} \succeq 0$ ，那么所有 $G_{k,\ n} \succeq 0$ 都成立，从而猜想 1.1 得证。最后，定理 1.2 的证明中展示的形式以及计算证据进一步提出了以下猜想；该猜想同样足以证明 $F_{k,\ 1}(q)$ 的正性：

**猜想 5.4**。 我们有 $G_{k,\ n}(q) = \sum_{j=0}^{n} \frac{z_{k,\ j}(q)}{1-q^{2j+1}}$其中所有 $z_{k,\ j}(q)$ 的系数均为非负数。

## AppendixA. Code

本节收录了用于验证定理 1.3 的情形 $k = 10$ 的 Maple 代码。

```
> eightpolys:=1, 1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^10+q^12+q^14, 1+q^2+2q^4
+2q^6+3q^8+3q^10+4q^12+3q^14+3q^16+2q^18+2q^20+q^22+q^24,
1+q^2+2q^4+3q^6+4q^8+5q^10+6q^12+6q^14+6q^16+6q^18+5q^20+4q^22
+3q^24+2q^26+q^28+q^30, 1+q^2+2q^4+3q^6+5q^8+5q^10+7q^12+7q^14
+8q^16+7q^18+7q^20+5q^22+5q^24+3q^26+2q^28+q^30+q^32, 1+q^2
+2q^4+3q^6+4q^8+5q^10+6q^12+6q^14+6q^16+6q^18+5q^20+4q^22+3q^24+2q^26+q^28+q^30,
 1+q^2+2q^4+2q^6+3q^8+3q^10+4q^12+3q^14+3q^16+2q^18+2q^20+q^22+q^24,
 1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^10+q^12+q^14, 1
> tenbigpoly := (eightpolys[1]) (q^((0+1)^2))((-1)^0)
add(q^(j(2(0) + 1)), j=0..((765765/(2(0)+1))-1))
+ (eightpolys[1+1]) (q^((1+1)^2))((-1)^1)
add(q^(j(2(1) + 1)), j=0..((765765/(2(1)+1))-1))
+ (eightpolys[2+1]) (q^((2+1)^2))((-1)^2)
add(q^(j(2(2) + 1)), j=0..((765765/(2(2)+1))-1))
+ (eightpolys[3+1]) (q^((3+1)^2))((-1)^3)
add(q^(j(2(3) + 1)), j=0..((765765/(2(3)+1))-1))
+ (eightpolys[4+1]) (q^((4+1)^2))((-1)^4)
add(q^(j(2(4) + 1)), j=0..((765765/(2(4)+1))-1))
+ (eightpolys[5+1]) (q^((5+1)^2))((-1)^5)
add(q^(j(2(5) + 1)), j=0..((765765/(2(5)+1))-1))
+ (eightpolys[6+1]) (q^((6+1)^2))((-1)^6)
add(q^(j(2(6) + 1)), j=0..((765765/(2(6)+1))-1))
+ (eightpolys[7+1]) (q^((7+1)^2))((-1)^7)
add(q^(j(2(7) + 1)), j=0..((765765/(2(7)+1))-1))
+ (eightpolys[8+1]) (q^((8+1)^2))((-1)^8)
add(q^(j(2(8) + 1)), j=0..((765765/(2(8)+1))-1));> currsum :=0
                ;
  errorfound:=False;
  for s from 1 to 765830 do
  currsum := currsum + coeff(tenbigpoly, q^s):
  if currsum < 0 then
  print("Error found at", s);
  errorfound := True;
  end if;
  end do:
```

```
if errorfound = False then
print("No error found")
end if
```

## References

[1] G. 安德鲁斯，拉马努金的“遗失”笔记本 *I*。部分 $\theta$-函数，《Adv. Math.》**41**（1981），137–172。[2] G. 安德鲁斯，《分拆理论》，剑桥大学出版社，剑桥，1998。[3] G. 安德鲁斯和 M. 巴赫拉维，某些正 $q$-级数及双色分拆的不等式，《Arab. J. Math.》（2025）。https://doi.org/10.1007/s40065-025-00567-3。[4] G. 安德鲁斯和 B. Berndt，拉马努金的遗失笔记本，第二部分，Springer，纽约，2018。[5] G. 安德鲁斯和 B. Berndt，拉马努金的遗失笔记本，第五部分，Springer，纽约，2018。

University of Cologne, Department of Mathematics and Computer Science, Weyertal 86-90, 50931 Cologne, Germany电子邮箱地址: kbanerj1@uni-koeln.de电子邮箱地址: kbringma@uni-koeln.de

Department of Mathematical Sciences, Michigan Tech, Houghton, MI 49931-1295电子邮箱地址: wjkeith@mtu.edu