多边形域上正交归一多项式的双变量样条构造及其在求积中的应用

Ming-Jun Lai*

arXiv:2601.04022v1 [math.NA] 7 Jan 2026

摘要

我们介绍了利用双变量样条函数在 $\mathbb{R}^2$ 上任意多边形区域构造正交/正交归一多项式的计算方法。借助一套成熟的 MATLAB 实现，它可以在任意三角剖分上生成任意次数、任意光滑性的样条空间，因此我们能够得到感兴趣的多边形区域上的精确多项式表示。我们提出了两种算法：一种构造多边形区域上次数为 $d>0$ 的正交归一多项式，另一种构造 $\mathbb{P}_d$的正交补空间中次数为 $d+1$的正交归一多项式。次数为 $d=1--5$的数值示例展示了这些多项式的结构及其零曲线，为中心对称区域上不存在高斯求积提供了佐证。此外，我们基于奇次和偶次正交多项式提出了多项式约化策略，将积分计算化为对其余下的二次或一次多项式进行积分。这些约化方法启发了新的求积方案；我们进一步通过多项式插值对其加以扩展，从而为各种多边形区域获得高效、高精度的求积公式。

1 引言

我们关注在任意有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$n\geq 2$ 上构造多元正交多项式，其中的区域可以由有限个三角形 $\mathbb{R}^2$ 或有限个四面体 $\mathbb{R}^3$ 等近似得到。一般而言，我们知道，有界区域上的正交归一多项式所发挥的作用，与 $[-\pi,\pi]$ 或 $[-\pi,\pi]^n$ 上的著名傅里叶级数对于 $n=2$ 或 $n\geq 3$ 所发挥的作用类似；后者在实际应用中极为有用，例如移动电话通信、图像和视频的互联网传输。正交多项式的另一项重要应用是高斯求积，它基于 $[-1,1]$ 上的勒让德多项式的零点，因此，当被积多项式的次数为 $\leq 2d-1$ 时，求积公式可以精确计算，其次数高于用于构造该求积公式的多项式的次数 d。求积公式的实用性体现在：它们已被用于构造函数 f 在有限维空间（例如具有 $d\geq 1$ 的多项式空间 $\mathbb{P}_d$）以及无限维空间（例如再生核希尔伯特空间）中的投影。数十年来，多元版本的这些研究一直受到积极关注。尽管已有结果表明，在中心对称区域上不存在高斯求积（参见 [12]和 [27]），但我们可以找到一些替代方案，本文将对此进行讨论。另一篇有趣的论文是 [3]，其中指出了多元正交多项式与可积系统研究之间的联系。

尽管 ChaptGPT、Gemini 3、Deepseek 等工具可以帮助我们找到更多关于多元正交多项式（MOP）研究的文献，但本文只介绍与我们的研究密切相关的一些工作

*mjlai@uga.edu。该作者隶属于美国佐治亚州雅典市佐治亚大学数学系，邮编 30602。该作者获得了西蒙基金会合作基金 #864439 的支持。

。首先介绍 C. Dunkl 和 Y. Xu 撰写的两部专著 [11]和 [12]，其中阐述了如何写出多元情形下正交多项式的公式及其性质。书中给出了许多定义在不同标准区域上的正交归一多项式公式，例如单位球上的公式 $\mathbb{R}^n, n \geq 2$、单形上的公式 $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ 以及 $[-1,1]^n, n \geq 2$。对于一般区域，还给出了用矩泛函 $\mathcal{L}$表示的正交多项式显式公式，见 [12]中的定理 3.2.12。详情请参阅这两部专著。接下来，Olver、Slevinsky 和 Townsend 在[20], 2021年发表了一篇长达120页的综述，介绍正交多项式的快速算法，其中包括定义在标准三角形上的正交多项式的各种形式。此外，我们还可以找到许多有趣的结果，例如递推关系，以及许多有趣的文献，例如 [20]中的高斯求积。另一篇近期综述论文 [27] 总结了多个变量正交多项式的若干显式公式及许多性质。此外，关于多重积分求积的更多公式，可参阅经典文献，例如 [14], [8], [24], 和 [7] 。文献中还补充了其他求积公式，见 [9], [15],和 [21], 等。

众所周知，要得到清晰简洁的多变量正交/标准正交多项式（MOP）公式并不容易。为方便起见，本文其余部分均使用 MOP 这一简称。其中一个难点是如何排列多重指标，以对这些多变量多项式进行编号，例如采用分次字典序或字典序；这会导出两种不同的正交多项式系。另一个难点是，二维情形下的有界区域有无穷多种类型。事实上，将单变量情形中的有界区域概念推广到二元情形时，会得到无穷多种不同类型的有界区域，例如具有 n 条边的任意多边形区域， $n \geq 3$。每个有界区域都有其自身的 MOP 公式。当我们用行列式来表述正交条件时，很难求出以变量 x, y ... 为元素的大型矩阵的行列式。另一个难点是计算不规则形状区域上的矩泛函 $\mathcal{L}$，因为可以利用矩泛函生成 MOP。在 [10], 中，研究人员已在 MAPLE 中实现了其中一些公式。在 [12], 中，研究人员还研究了正交多项式的零点。他们发现了关于次数恰为 d 的正交多项式公共零点的许多有趣现象。例如，在二元情形下，在中心对称区域 Ω 上，当 d 为偶数时，正交多项式 $P_{d,j} \in \mathbb{P}_d, j = 0, \cdots, d$ 没有公共零点；当 d 为奇数时，则有一个公共零点。

基于上述提到的困难，在一般多边形区域上构造 MOP，例如在 $\mathbb{R}^2$ 中的 L 形区域或在 $\mathbb{R}^3$ 中的一般多面体上，计算都很困难。根据 [12] 中给出的公式进行计算看似直接，但十分繁琐。由于计算机和计算技术的发展，我们可以设计算法，让计算机替我们求出这些多项式。也就是说，可以通过数值积分以及格拉姆-施密特正交化的数值计算来求得它们。这样一来，一个严重的困难就是数值积分的精度。此外，在任意多边形上进行数值积分也并非易事。利用 [18] 及其中的参考文献所总结的多元样条，可以克服所有这些困难。另见 [2], [4], [16], 等。主要地，对于 $\mathbb{R}^n$上的 $n \geq 2$任意单形，都存在一个关于多项式内积的精确公式。我们参考 [5] 和 [18] ，因此可以精确计算两个多项式在任意多边形/多面体区域上的内积，从而使积分的计算误差仅达到机器精度。本文的主要目的是介绍一种计算方法，用于求出任意多边形区域/多面体区域上的 MOP。得到这些多项式后，我们将讨论如何利用它们在任意多边形上生成数值求积公式。为方便起见，我们将重点讨论二元情形，并将三元情形的讨论留待未来发表。

确实，当所关注的区域 Ω 是一个多边形时，我们首先使用三角剖分，即通过三角形的集合将该区域分解为三角形的并集，从而得到一个三角剖分 $\triangle$。随后，我们可以使用二元/三元样条；它们在每个三角形上是多项式，并且在整体上具有

光滑性 r 于 Ω 上。当这些样条的光滑性阶数 r 足够高时，例如光滑性的阶数等于样条的次数时，样条函数就是多项式。更确切地说，给定一个多边形区域 Ω，设 △为 Ω 的一个三角剖分。我们定义

$$S_d^r(\triangle) = \{s \in C^r(\Omega), s|_T \in \mathbb{P}_d, T \in \triangle\} \tag{1.1}$$

次数为 d、光滑性为 r 的 △上的样条空间，其中 $d \geq r$。关于其性质，请参阅 [18]；关于其计算和应用，请参阅 [4] 和 [22]。传统上，我们使用次数为 d、光滑性为 r 且具有 $d > r$ 的多元样条，求解偏微分方程、进行数据插值与拟合、曲面重建，以及构造小波/框架小波。例如参见 [13], [23], [17], [16], 等。本文使用 $r = d$，并使用 $S_d^r(\triangle)$中的样条函数来构造正交多项式。在此设定下，上述样条空间 $S_d^d(\triangle)$是次数为 d的多项式空间。我们对 $S_d^r(\triangle)$的 MATLAB 实现，可以精确表示任意多边形区域 Ω 上的多项式。

我们没有采用格拉姆-施密特正交化过程，而是将构造问题重新表述为一个最小化问题，然后通过数值方法求解。我们将在下一节解释这一最小化过程。为方便起见，先展示顶点为 $[0,0;\ 2,\ 0;\ 2,\ 1;\ 1,\ 1;\ 1,\ 2;\ 0,2]$ 的 L形区域上的二次正交归一多项式，如图1所示。

例 1.1. 考虑一个多边形 P，它是一个 L 形区域，其顶点为 $[0,0;\ 2、0;\ 2、1;\ 1、1;\ 1、2;\ 0,2]$。对于 $d = 2$，我们求得二元二次正交多项式。下面给出它们的图像（见图*1*）。这些多项式的幂形式系数将在后续章节中给出。

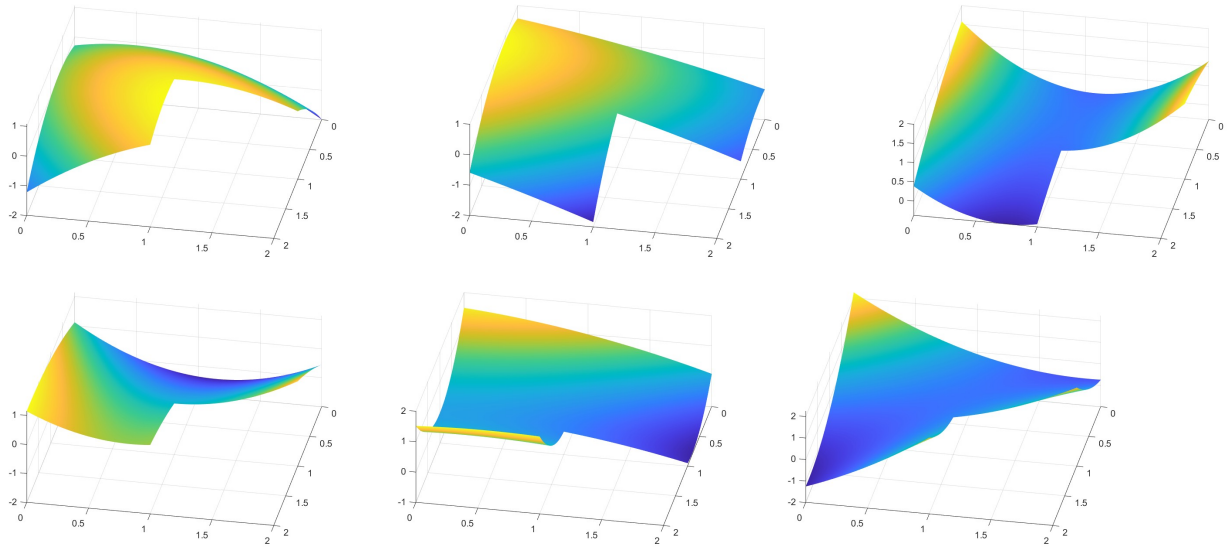


图1：L形区域上的二次正交归一多项式

除了计算算法之外，我们还加入了验证步骤。具体而言，我们总是将感兴趣的区域缩放为 $[0,1]^2$，并使用算法在 1001^2 个等距点处以及给定区域 Ω 内计算得到的正交归一多项式的值，求出黎曼和，并检查这些多项式的内积矩阵是否接近单位矩阵。文中将给出许多例子，并展示它们的零点，尤其是公共零点。应作者要求，可获取相关的 MATLAB 程序。

本文还有一些其他贡献。其中一项重要成果是，单点求积公式对许多函数都精确成立，而不仅限于一次多项式。它不仅适用于奇函数，

也适用于定义在 $[-1,1]$ 上的许多偶函数。另一项重要成果是一种新的数值积分策略。具体而言，我们提出了一种基于奇次数正交多项式的多项式约化过程（偶次数正交多项式也有类似方法）。经过多项式约化后，任意次数多项式的积分都可转化为余二次多项式或一次多项式的积分。详情见定理 4.6 和 4.7。这些结果带来了一种全新的积分方法：预先一次性用蛮力法计算一次多项式或二次多项式的积分，此后，任意多项式的积分都可通过偶次数或奇次数正交多项式进行多项式约化来完成。我们还利用多项式插值，得到了一些仅需较少函数值、却具有更高多项式精度的数值求积公式。

本文结构安排如下。我们首先在 §2 中回顾高斯求积的构造以及著名的单点公式。随后，我们利用奇数次勒让德多项式的零点解释单点公式，并说明该公式对所有奇函数和许多偶函数都精确成立。接着，我们介绍一种基于奇数次勒让德多项式构造高斯型求积的方法。这促使我们在多元情形下构造正交多项式。在 §3 中，我们说明如何利用二元样条为 $\mathbb{P}_d$ 构造 $d \geq 1$ 的多项式空间的正交基。我们将介绍两种计算方法：一种是计算 $\mathbb{P}_d$ 的标准正交基，另一种是在 $\mathbb{P}_{d+1} \ominus \mathbb{P}_d$中构造一组额外的正交归一多项式基。文中将给出许多数值示例，其中包括这些正交多项式的零点。我们通过数值计算验证了一个关于 $\mathbb{R}^2$ 中正交多项式的经典结果：当次数 d 为偶数时，不存在公共零点；而当次数 d 为奇数时，存在一个公共零点。正如 [12] 中所证明的，这一结论适用于中心对称区域。此外，在 §4 中，我们介绍一种基于奇数次正交多项式 $d \geq 3$ 的多项式约化方法，其余项 R 是一个二次多项式。于是，任意次数的多项式函数的积分都等于其二次余项 R 的积分；当余项 R 是一次多项式时，这便得到一个单点公式。同理，我们可以利用偶数次正交多项式，将多项式 p 约化为带有线性余项多项式的形式。于是， p 的积分与该线性余项多项式的积分相同。由于我们可以预先计算感兴趣区域上 x、y、1 的积分，因此， p的积分可由线性余项多项式的系数与这些预先计算的值确定。此外，我们还介绍一种多项式插值法，以利用函数值构造求积公式。此外，这项研究还通过使用较少的函数值，在三角形／矩形／六边形区域上得到具有更高多项式精度的一些求积公式。最后，在 §5 中，我们以若干关于本文构造的推广与扩展的评述作结。特别是，§3 中的计算以及 §4 中的新积分方法可以推广到三维情形，具体细节留待后续发表。此外，本文在 Ω 上构造正交多项式的方法还可推广为在任意 $r < d$上构造 $S_d^r(\triangle)$的正交样条函数。

2 预备知识与动机

首先回顾一下在 $[-1,1]$ 上构造高斯求积的思路。它使用首项系数为 1、次数为 $\leq n$ 的勒让德正交多项式P_n $n = 0$，1，2，$\cdots$，。这些多项式 P_n具有一些良好的性质：它们满足简单的递推关系，P_n 的所有零点都位于 $[-1,1]$ 内，并且所有奇数次多项式 P_{2n-1} 在 0 处都有一个零点。因此，对于任意次数为 $2n-1$ 的多项式 P，我们进行长除法，得到

$$P(x) = q(x)P_n(x) + R(x), \tag{2.1}$$

其中 $q(x)$ 是商式， $R(x)$ 是次数为 $\leq n-1$ 的余项。根据正交性，我们有

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)dx.$$

如果我们将多项式 P_n 的零点 $x_1, \cdots, x_n$ 作为插值节点，那么 $R(x)$ 可以用拉格朗日基函数表示，即

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} R(x_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}.$$

注意，由于 P_n 的零点， $R(x_j) = P(x_j)$。于是积分

$$\int_{-1}^{1} R(x)dx = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}dx.$$

通过选择权重 $c_j = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}dx$，求积公式

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)c_j$$

对所有次数为 $2n-1$ 的多项式都精确成立。现在，我们迭代应用上述思路，将任意次数 $n \geq 3$ 的多项式 P，例如 $2d-1 \leq n \leq 2d$,

$$P(x) = q_1(x)P_{2d-1}(x) + q_2(x)P_{2d-3}(x) + \cdots + q_d(x)P_1(x) + R(x) \tag{2.2}$$

通过使用奇数次勒让德多项式，其中 $q_i(x)$ 是线性多项式，余多项式 $R(x)$ 也是线性多项式。利用勒让德多项式的正交性质，可得

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{j=1}^{d} \int_{-1}^{1} q_j(x)P_{2(d-j)+1}(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx = \int_{-1}^{1} q_d(x)P_1(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx. \tag{2.3}$$

如果 $q_d(x) \equiv c$，即 $q_d(x)$ 是常数函数，那么我们有 $\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)dx.$。回想一下，0 是所有奇数次勒让德多项式的公共零点。因此， $R(0) = P(0)$，且 $\int_{-1}^{1} R(x)dx = 2P(0)$，从而 $\int_{-1}^{1} P(x)dx = 2P(0)$，这就是单点求积公式。我们将这种情形表述为以下定理。

定理 2.1。 对于任意次数为 $n \geq 1$ 的多项式 P，将 P 写成 *(2.2)* 的形式。如果一次多项式 q_d 是常数，那么

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = 2P(0). \tag{2.4}$$

证明。当 $q_d = c$ 时，我们可以将 $q_d(x)P_1(x)$ 和 $R(x)$ 合并为一个新的线性多项式 R。式 (2.3) 右端的两个积分为 $\int_{-1}^{1} \widetilde{R}(x)dx = 2\widetilde{R}(0)$。注意， $P_1(0) = 0$ 且 $\widetilde{}$，因此我们仍有 $R(0) = R(0) = P(0)$。证明完毕。 □

式 (2.4) 中的求积公式是一个众所周知的单点求积公式。已知该求积公式对线性多项式是精确的。现在我们可以看到，它对许多其他函数也同样精确。定义如下空间

$$\mathcal{L}([-1,1]) = \text{span}\{\sum_{j=2}^{d} q_j(x)P_{2j-1}(x) + \ell(x) : \text{ all } q_j \text{ and } \ell(x) \text{ are linear polynomials }, d \geq 2\}. \quad (2.5)$$

容易看出，单点求积对 $\mathcal{L}([-1,1])$ 中的所有函数都是精确的。注意，P_{2j-1}，$j \geq 1$ 是奇函数，显然属于 $\mathcal{L}$。由于任意奇连续函数 f 都可以用奇次数的勒让德多项式逼近，因此单点求积公式对所有奇函数都是精确的。如果我们对所有 $j \geq 2$ 取 $q_j(x) = c_j x$，并取 $\ell(x) = c_0$，那么 $f(x) = \sum_{j=2}^{d} xP_{2j-1}(x) + \ell$ 是一个偶函数，也属于 $\mathcal{L}([-1,1])$。因此，(2.5) 中的 $\mathcal{L}[-1,1]$ 是一个非常大的空间。显然，$\mathcal{L}[-1,1]$ 并非整个空间 $C([-1,1])$，因为单点求积对 $x^2 \notin \mathcal{L}([-1,1])$ 并不适用。自然地，我们可以将所有二次多项式加入 $\mathcal{L}[-1,1]$，并定义

$$\mathbb{L}[-1,1] = \text{span}\{\mathcal{L}[-1,1], \mathbb{P}_2\}, \quad (2.6)$$

其中 $\mathbb{P}_2$ 是所有二次多项式构成的空间。现在我们可以给出本节的另一项主要结果。

定理 2.2。 在最大范数下，式 *(2.6)* 中空间 $\mathbb{L}[-1,1]$ 的闭包为 $C[-1,1]$.

证明。 正如我们已经看到的，所有奇数次数的多项式都属于 $\mathcal{L}[-1,1] \subset \mathbb{L}[-1,1]$。此外，我们知道所有偶数次数的多项式 $d \geq 4$ 都属于 $\mathcal{L}[-1,1]$，因此也属于 $\mathbb{L}[-1,1]$。现在 $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{L}[-1,1]$。由著名的魏尔斯特拉斯定理，任意次数的所有多项式的线性张成空间的闭包为 $C[-1,1]$，因此 $\mathbb{L}[-1,1]$ 的闭包为 $C[-1,1]$。

□

上述结果表明，任意连续函数 f 的积分都可以先利用 $\mathbb{L}[-1,1]$ 中的函数，在给定容差 ϵ 下对 f 进行近似，例如 $f \approx f_1 + f_2$，其中 $f_1 \in \mathbb{L}[-1,1]$ 和 $f_2 \in \mathbb{P}_2$；然后进行积分 $\int_{-1}^{1} f_2(x)dx$，这很简单。由此可得

推论 2.3. 设 $f \in C[-1,1]$ 是给定的连续函数。对于任意给定的容差 $\epsilon > 0$，存在一个近似 $f_1 + f_2$，其中 $f_1 \in \mathbb{L}[-1,1]$ 和 $f_2 \in \mathbb{P}_2$，使得 $\|f - f_1 - f_2\|_\infty \leq \epsilon$。那么

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f_2(x)dx.$$

如果 $f_2(x) = ax^2 + bx + c$，那么 $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 2a/3 + 2c$。

以与上文相同的方式，我们可以使用所有偶数次数的高斯-勒让德正交多项式来构成空间

$$\mathcal{L}_e[-1,1] = \{\sum_{k=1}^{d} c_k(x)P_{2k}(x) + \ell(x), \text{ all } c_k(x) \text{ and } \ell(x) \text{ are linear polynomials }, d \geq 1\}. \quad (2.7)$$

通过使用上述相同的论证，我们得到

定理 2.4. $\mathcal{L}_e[-1,1]$ 在最大范数下的闭包是 $C[-1,1]$。

证明. 显然，(2.7) 中的 $\mathcal{L}_e[-1,1]$ 包含所有偶次多项式，因为所有线性多项式$c_k(x)$ 和 $\ell(x)$ 都是常数。对于任意奇数次数多项式 f，例如

$$f(x)=\sum_{k=0}^{d} a_k x^{2k+1},$$

我们可以写成 $f_1(x) = f(x) - a_d x P_{2d}(x)$，这是一个次数为 $2d-1$、首项系数为 $\tilde{a}_{d-1}$的奇次多项式，其中 P_{2d} 是次数为 $2d$、首项系数为 1 的高斯-勒让德多项式。有关计算这些多项式的 MATLAB 代码，请参见 [19]。然后令 $f_2(x) = f_1(x) - \tilde{a}_{d-1} x P_{2d-2}(x)$，这是一个次数为 $2d-3$的奇次多项式。我们重复这一迭代，直到余式f_d 为一次多项式。这表明所有奇次多项式都属于 $\mathcal{L}_e[-1,1]$。因此，$\mathcal{L}_e[-1,1]$ 在最大范数下的闭包为 $C[-1,1]$。 □

由此可得

推论 2.5。设 $f \in C[-1,1]$ 为给定的连续函数。对于任意给定的容差 $\epsilon > 0$，存在一个带有一次项 ℓ_f的近似 $f_1 \in \mathbb{L}_e[-1,1]$，$\epsilon$ 使得 $\|f - f_1\|_\infty \le \epsilon$。于是

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \ell_{f,\epsilon}(x)dx.$$

若 $\ell_{f,\ \epsilon}(x) = bx + c$，则 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2c$。

现在，我们讨论如何利用奇次数或偶次数高斯-勒让德多项式的展开，对连续函数进行数值积分。对于任意函数 $f \in C[-1,1]$，我们可以写成 $f(x) = f_o(x) + f_e(x)$，其中 $f_o(x) = (f(x) - f(-x))/2$ 且 $f_e(x) = (f(x) + f(-x))/2$。由于奇部 f_o在 $[-1,1]$上的积分为零，我们只需考虑 $\int_{-1}^{1} f_e(x)dx$。对于任意给定的容差 $\epsilon > 0$，我们需要找到一个偶次数多项式 $p_{f,\epsilon}$，使得 $\|f_e(x) - p_{f,\epsilon}(x)\|_\infty \le \epsilon$。如何找到 $p_{f,\epsilon}$，一般而言仍是一个值得研究的问题，尤其是在 f 可能不够光滑时。下面讨论如何将偶次数多项式 p_{2d} 转换为奇次数高斯-勒让德多项式的展开。类似地，我们也可以将 p_{2d} 展开为偶次数高斯-勒让德多项式。一般性不失，我们可以写出多项式函数 $p_{2d}(x) = \sum_{j=0}^{d} f_j x^{2j}$。我们可以推导出一种算法，找到系数 $q_j, j = 1, \cdots, d$，使得

$$p_{2d}(x) = \sum_{j=2}^{d} q_j x P_{2j-1}(x) + q_1 x P_1(x) + p_{2d}(0),$$

其中，对于所有 $j = 1$、$\cdots$、d，q_j均为实数。事实上，正如上文所述，如果已知 f_j、$j = 1$、$\cdots$、d 为 $f_0 = p_{2d}(0)$，我们就可以迭代地求解 q_j、$j = d-1$、$\cdots$ 1。于是，$\int_{-1}^{1} p_{2d}(x)dx = 2q_1/3 + 2p_{2d}(0)$。另一种求得 q_1 的方法是使用多项式插值法。此外，在实际应用中，我们并不知道 p_{2d}，而只知道 f。我们来求解以下插值问题：令 x_i、$i = 1$、$\cdots$、d 为 $(0,1]$, 上的互异点，求 q_1、$\cdots$、q_d，使其满足以下插值条件：

$$\sum_{j=2}^{d} q_j P_{2j-1}(x_i) + q_1 P_1(x_i) = (f(x_i) - f(0))/x_i, \qquad i = 1, \cdots, d.$$

由于高斯-勒让德多项式 $P_{2j-1}, j = 1, \cdots, d$线性无关，因此该线性方程组有唯一解。由于我们需要 q_1，只需使用克拉默法则即可得到

$$q_1 = \det[f(:), P_3(:), \cdots, P_{2d-1}(:)]/\det[P_1(:), P_3(:), \cdots, P_{2d-1}(:)], \tag{2.8}$$

其中

$$\det[P_1(:), P_3(:), \cdots, P_{2d-1}(:)] = \begin{bmatrix} P_1(x_1) & P_3(x_1) & \cdots & P_{2d-1}(x_1) \\ P_1(x_2) & P_3(x_2) & \cdots & P_{2d-1}(x_2) \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ P_1(x_d) & P_3(x_d) & \cdots & P_{2d-1}(x_d) \end{bmatrix}$$

以及 $\det[f(:)\ P_3(:)\ \cdots, P_{2d-1}(:)]$ 的类似结果。

定理 2.6。对于任意连续偶函数 f 以及任意一组互异点 $x_1, \cdots, x_d \in (0,1]$, 按（*2.8*）计算 q_1。则该求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}q_1 + 2f(0) \tag{2.9}$$

对于所有次数为 $\leq 2d$ 的偶多项式函数 f 均为精确求积公式。对于任意连续函数 f，令 $f = f_e + f_o$，其偶部为 f_e，奇部为 f_o。我们将（*2.8*）中的 f 替换为 f_e，计算 $q_{1,e}$。于是

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}q_{1,e} + 2f(0). \tag{2.10}$$

证明。当 f 是次数为 $\leq 2d$ 的偶数次数多项式时，解向量（$q_1, q_2, \cdots, q_d$）给出了用次数为 $\leq 2d$ 的高斯-勒让德多项式表示 f 的精确表达式。于是

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=2}^{d} \int_{-1}^{1} q_j x P_{2j-1}(x)dx + \int_{-1}^{1} f(0)dx = \int_{-1}^{1} q_1 x P_1(x)dx + 2f(0) = \int_{-1}^{1} q_1 x^2 dx + 2f(0)$$

这就是（2.9）的右端。同样，$f(x) = (f(x) + f(-x))/2 + (f(x) - f(-x))/2$，其中 $f_e = (f(x) + f(-x))/2$，且 $f_o = (f(x) - f(-x))/2$。由于 $\int_{-1}^{1} f_o(x)dx = 0$，在（2.9）中使用 f_e 代替 f，即可得到（2.10），其中 $f_e(0) = f(0)$。 □

我们注意到，当 f 为偶数时，求积公式 (2.9) 仅使用 d 个函数值，即可对所有次数为 $2d$ 的多项式精确求积，这略优于本节开头提到的著名高斯求积。此外，求积公式 (2.10) 无需求出勒让德多项式的零点，并且可以基于 $(0,1]$ 中的任意 d 个互异点构造。最后，我们注意到，这组互异点可以选择为 $[0,1]$ 上的等距点，间距为 $1/(d+1)$。

例 *2.7*。考虑 $d = 4$。我们知道勒让德多项式 $P_1(x) = x$ 和 $P_3(x) = x^3 - 3/5x$。当 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 时，我们可以将 $f(x) = q_2 x P_3(x) + q_1 x P_1(x) + c$ 重写为 $q_2 = a$，且 $q_1 = b + 3a/5$。注意，我们可以通过方程 $ax_i^4 + bx_i^2 = f(x_i) - f(0)$ 求解 a、b，其中 $i = 1, 2$。任取 $(0,1]$ 中的两个互异点，设为 $x_1 = 1$ 和 $x_2 = 1/\sqrt{2}$，则有 $a = 2f(1) - 4f(1/\sqrt{2}) + 2f(0)$ 以及 $b = 4f(1/\sqrt{2}) - f(1) - 3f(0)$。因此，$q_1 = 4f(1/\sqrt{2}) - f(1) + 3(2f(1) - 4f(1/\sqrt{2}))/5 = \frac{1}{5}f(1) + \frac{8}{5}f(1/\sqrt{2})$。所以，求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{2}{15}f(1) + \frac{16}{15}f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{4}{5}f(0)$$

对于任意偶函数 f。此求积公式表明，只需使用3 个函数值，即可使所有次数为4的偶多项式的求积精确。

例2.8. 下面给出一段 *MATLAB* 代码，用于处理任意次数的偶多项式 $2d$。也就是说，该代码将生成一个基于 $d+1$ 个节点的求积公式，对次数为 $\leq 2d$ 的偶多项式精确。

%此示例用于计算偶函数 f 在 [-1，1] 上的积分。%由 Ming-Jun Lai 博士于 2024 年11月1日 编写。%例如，选择次数为 2d 的偶多项式。d=4; c=rand(d+1,1); f=@(x) c(1)+c(2)*x.^2+c(3)*x.^4+c(4)*x.^6+c(5)*x.^8; %f=@(x) 余弦(x);%或者你可以用函数 f=cos(x) 替换多项式； x=[1/d:1/d:1]; %节点位于 (0，1]; A=[x.^2]; for i=2:d P=勒让德(2*i-1); y=polyval(P,x); A=[A; x.*y]; end A=A'; b=f(x)-f(0); b=b'; q=A\b; q1=q(1); myvalue=2*q1/3+2*f(0); exact= 2*c(1)+2*c(2)/3+2*c(3)/5+2*c(4)/7+2*c(5)/9; %exact=2*sin(1);[exact, myvalue]

上文中，我们使用 ***Legendre.m***，这是一个用于生成首项系数为 *1* 的勒让德多项式的 *MATLAB* 代码。经作者请求可获得该代码，也可以从*[19]* 以及 ***ChaptGPT*** 获取。我特意在上面的命令行中放置了一个函数 $f(x) = cos(x)$ ，读者可以再次检查精确值 $2\sin(1)$ ，其给出了极佳的近似，误差为 $1.182169251379150e-09$。相应求积公式的系数可在 逆矩阵的第一行中找到 A。

3 构造 多边形域上的正交多项式

我们将详细介绍如何使用二元样条在多边形上构造正交多项式。设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个多边形，并令 $\triangle$ 是 Ω 的一个三角剖分（关于三角剖分的定义，参见 [18] ）。回顾在 $\triangle$ 上定义的二元样条空间（见（1.1））。特别地，在构造中我们将使用光滑性 $r = d$ 。

我们将构造表述为如下最小化问题。将任意多项式$p \in \mathbb{P}_d$ 写成 $S_d^r(\triangle)$中的样条函数，其中 $r = d$。回顾如下的 Bernstein-B´ezier 形式：对于每个三角形 $T = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$，设 b_1, b_2, b_3 为点 $\mathbf{x}$ 相对于 T的重心坐标。我们定义

$$B_{ijk}^T = \frac{d!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k$$

为定义在 T 上的次数为 $(i,\ j,\ k)$ 的多项式。由于 $b_1,\ b_2,\ b_3$ 是 $\mathbf{x}$ 的线性多项式， B_{ijk}^T 是次数为 $d = i + j + k$ 的多项式。因此，对于某些系数 c_{ijk}^T，$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk}^T B_{ijk}^T$。令$\mathbf{c}^T = (c_{ijk}^T,$ $i + j + k = d)$ 为 p 关于 T 的向量，令

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}^T, T \in \triangle)$$

为 p 在多边形 Ω 上的 Bernstein-B´ézier 形式的系数向量。注意，$p \in C^r(\Omega)$，对于 $r \geq 0$ 所有正整数 r，众所周知，存在一个光滑度矩阵 H_r，使得 $H_r\mathbf{c} = 0$ 当且仅当系数向量为 s 的样条函数 $\mathbf{c}$ 属于 $C^r(\Omega)$，对每个r均成立。详情见 [18] 。这些光滑度矩阵 H_r，$r \geq 1$ 是根据 [4] 在 MATLAB 中实现计算的。我们能够构造正交多项式的一个主要原因，是 [5] 或 [18]中给出了两个多项式内积的公式。也就是说，我们知道以下公式：

$$\int_T B_{ijk}^T B_{i',j',k'}^T dxdy = \frac{\binom{i+i'}{i}\binom{j+j'}{j}\binom{k+k'}{k}}{\binom{2d}{d}\binom{2d+2}{2}} A_T \tag{3.1}$$

对所有 $i+j+k=d$ 和 $i'+j'+k'=d$ （参见 [5] 或 [18]），其中 A_T 是三角形 T的面积。注意，这些积分都是精确的。回顾一下，$D=(d+1)(d+2)/2$ 是 $\mathbb{P}_d$的维数。存在 D 个多项式 $p_i = \mathbf{diag}(B_{ijk}^T,\ i+j+k=d,\ T \in \triangle)\mathbf{c}_i,\ i=1,\ \cdots,\ D$，使得

$$[p_1,\cdots,p_D]^\top[p_1,\cdots,p_D] = C^\top \mathrm{diag}(\int_T B_{ijk}^T B_{i',j',k'}^T dxdy, i+j+k=d, i'+j'+k'=d, T\in\triangle)C = I_\triangle,$$

其中 $I_\triangle$ 是大小为 $D\times D$ 的单位矩阵，且 C 是大小为 $D\times(N\times D)$的矩阵，N 为 $\triangle$中的三角形数量。求得 C 可能并不容易。一种常用方法是从常数 1 开始，将其按 Ω 的面积进行归一化，然后使用格拉姆-施密特正交化过程。这样便可以迭代地得到一组正交多项式。

相反，本文考虑以下最小化问题：令

$$M_\triangle^d = \mathrm{diag}(\int_T B_{ijk}^T B_{i',j',k'}^T dxdy, i+j+k=d, i'+j'+k'=d, T\in\triangle) \tag{3.2}$$

为大小为 $N\times D\times N\times D$ 的对角分块矩阵，更准确地说，$M_\triangle^d$ 在对角线上有 N 个分块，且每个分块的大小为 $D\times D$,

$$\min \frac{1}{2}\|C^\top M_\triangle^d C - I_\triangle\|_F, \quad H_\triangle C = 0, \tag{3.3}$$

其中，$H_\triangle$ 表示与三角剖分 $\triangle$ 的所有内部边上的光滑度条件（最高阶为 d）相关联的矩阵。关于光滑度条件，参见 [18]；其 MATLAB 实现参见 [4] 。

当然，上述最小化问题并不容易求解，还需要进一步研究。让我们对其进行简化和改写，以便在接下来的两个小节中给出构造 MOP 的计算算法。一个小节介绍在 $\mathbb{P}_d$ 上构造正交多项式，另一个介绍在 $\mathbb{P}_{d+1}\ominus\mathbb{P}_d$ 中的构造。

3.1 $\mathbb{P}_d$ 上的正交归一多项式

首先，我们将最小化问题 (3.3) 简化如下。首先，使用我们的 MATLAB 代码计算 (3.2) 中的 $M_\triangle^d$（参见 [4]）。然后，我们在 MATLAB 中对 $M_\triangle^d$ 计算标准的 $L\mathcal{D}L^\top$ 分解。也就是说，令 $M_\triangle^d = L\mathcal{D}L^\top$，并令 $\sqrt{\mathcal{D}}$ 为 $\mathcal{D}$ 和 $C_1 = \sqrt{\mathcal{D}}LC$ 的平方根。令 $\mathcal{H} = H_\triangle L^{-1}\sqrt{\mathcal{D}^{-1}}$，我们得到一个新的最小化问题：

$$\min \frac{1}{2}\|C_1^\top C_1 - I_\triangle\|_F, \quad \mathcal{H}C_1 = 0. \tag{3.4}$$

需要指出的是，计算 $M_{\triangle}^{d} = L\mathcal{D}L^{\top}$ 是按块进行的，因为 $M_{\triangle}^{d}$ 是一个由 N 个大小为 $D \times D$ 的块组成的对角分块矩阵，而且该计算可以并行进行。

事实证明，利用$\mathcal{H}$的零空间性质可以轻松求解这一最小化问题。实际上， C_1 =null($\mathcal{H}$)是 MATLAB 语言中的表达方式。也就是说，MATLAB命令 null 会自动返回满足 $C_1^{\top}C_1 = I_{\triangle}$的 C_1 。上述发现引出了以下计算算法，见下文算法 3.2。在介绍该算法之前，我们先展示标准矩形区域 $[0,1]^2$上所有2次正交归一多项式的等高线图。它们的三维视图见图2，等高线视图见图3。稍后的一节将展示更多关于 L 形区域及更复杂区域上的正交归一多项式的数值示例。

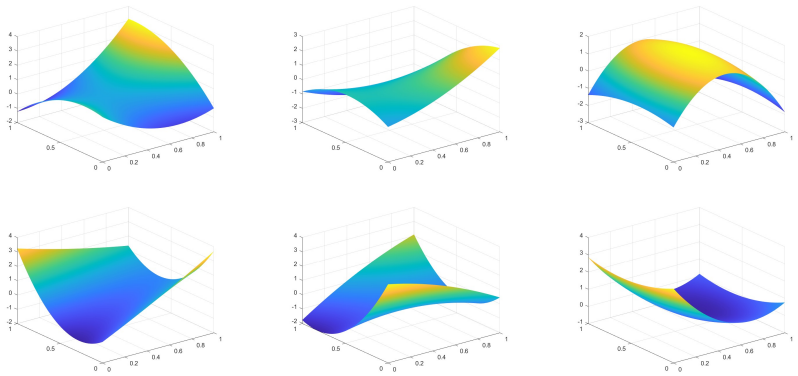


图2：区域 $[0,1]^2$上的二次正交多项式

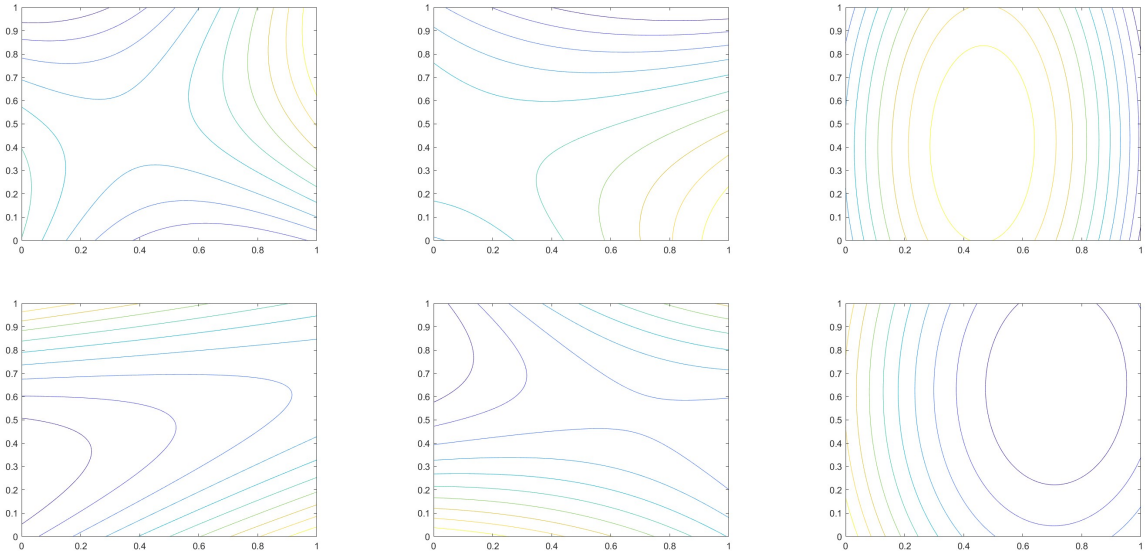


图3：区域 $[0,1]^2$上的二次正交多项式等高线

算法3.1。 二元正交归一多项式的构造

- *1.* 输入： 给定一个多边形 P 以及一个正整数 $d \geq 1$;
- *2*。初始化： 计算 P 的三角剖分 $\triangle$ ， 并按照 *(3.2)* 计算对角分块矩阵 $M_{\triangle}^{d}$ 。

- *3*。求 $M_\triangle$ 的 $L\mathcal{D}L^\top$ 分解，以得到 L 和 $\sqrt{\mathcal{D}}$；该过程按分块并行完成。 *l.*
- *4*。根据 *[18]* 中的光滑度条件，计算完整的光滑度矩阵 $H_\triangle$ 。
- *5*。构造 $\mathcal{H} = H_\triangle L^{-1}\sqrt{\mathcal{D}}^{-1}$。
- *6*。使用 *MATLAB*命令 *null.m* 计算 $C_1 = null(\mathcal{H})$ 。
- *7*。求出 $C = \sqrt{\mathcal{D}}^{-1}L^{-1}C_1$。
- *8*。那么， $\mathcal{B}_N C$ 是多边形 P 上次数为 d 的正交归一多项式，其中

$$\mathcal{B}_N = diag(B_{ijk}^T, i+j+k=d, T\in\triangle)).$$

- *9*。输出： 以泰勒形式输出多项式 $(B_{ijk}^{T_1}, i+j+k=d)\mathbf{c}_1^\top$，其中 T_1 是 $\triangle$ 的第一个三角形，$\mathbf{c}_1$ 是 C 的第一行。

类似地，我们也可以在三维情形下进行构造，因为我们已有三维情形下的（3.1）公式，以及用于生成三维情形下（3.2）中 $M_\triangle$ 的 MATLAB 代码，参见 [4] 或 [17]。详细内容留待后续发表。

3.2 迭代正交多项式

除了已经在 $\mathbb{P}_d$中构造了正交多项式之外，我们现在说明如何迭代地构造正交归一多项式。也就是说，假设我们已经找到了 $\mathbb{P}_d$ 的正交归一多项式，记为 $P_{d,\ 1}$，$\cdots$，$P_{d,\ D_d}$，现在我们构造 $P_{d+1,\ 1}$，$\cdots$，$P_{d+1,\ D_{d+1}-D_d}$，它们是 $\mathbb{P}_{d+1}\ominus\mathbb{P}_d$ 的正交归一多项式。这一序列正交归一多项式比上一小节构造的多项式更便于使用。具体而言，我们首先用 $\mathbb{P}_d$ 中的正交归一多项式来近似多边形 P 上给定的函数 f。然后，我们可以添加 $D_{d+1}-D_d$新的项来近似 f。接着，我们不断重复添加更多项，以获得更准确的近似。

现在我们来说明如何进行。假设我们有正交归一多项式 $P_{d,1},\cdots,P_{d,D_d}$ 的样条系数向量 $C_1,\cdots,C_{D_d}$。我们使用升阶算子（参见 [18]），将这些系数向量表示为次数为 $d+1$ 的样条。记作 C_{d+1}。$\mathbb{P}_{d+1}$ 中正交归一多项式的样条系数必须与这些升阶后的样条系数正交。也就是说，我们要寻找满足下式的系数向量 C_1

$$C_{d+1}M_\triangle^{d+1}C_1 = 0, \tag{3.5}$$

其中 $M_\triangle^{d+1}$ 是 次数为 $d+1$ 的样条的质量矩阵。我们需要求解一个新的最小化问题：

$$\min\frac{1}{2}\|C_1^\top C_1 - I_\triangle\|_F,\quad \mathcal{H}C_1 = 0 \text{ and } C_{d+1}M_\triangle(d+1)C_1 = 0. \tag{3.6}$$

上述讨论导出了以下计算算法：

算法 3.2。 二元正交多项式的迭代构造

- *1*。输入： 给定多边形 P 以及正整数 $d\geq 1$；输入 P上所有次数为 d 的正交归一多项式的系数向量。

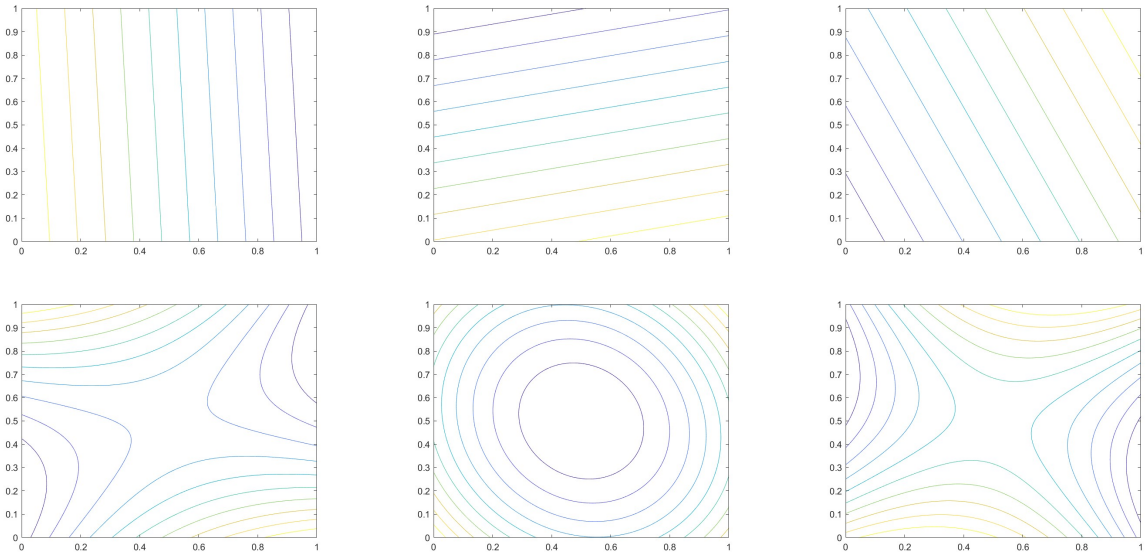


图4：区域 $[0,1]^2$ 上一次正交多项式（上排）和 2 次正交多项式（下排）的等高线

- *2*。 初始化： 计算 P 的三角剖分 $\triangle$ ， 并按照 *(3.2)* 计算对角矩阵 $M_{\triangle}^{d+1}$ 。
- *3*。对 $M_{\triangle}^{d+1}$ 求 $L\mathcal{D}L^{\top}$ 分解，得到 L 和 $\sqrt{\mathcal{D}}$。
- *4*。计算完整的光滑度矩阵 $H_{\triangle}$。
- *5*。构造 $\mathcal{H}=H_{\triangle}L^{-1}\sqrt{\mathcal{D}}^{-1}$。
- *6*。使用升次数算法，将次数为 d 的正交归一多项式的样条系数向量改写为次数为 $d+1$ 的多项式，然后记为 C_{d+1}。
- *7*。计算 $\mathcal{C}=C_{d+1}M_{\triangle}^{d+1}$ 并构造 $\mathcal{H}_{d+1}=[\mathcal{H};\ \mathcal{C}]$;
- *8*。使用 *MATLAB*命令 $\boldsymbol{null.m}$计算 $C_1=\boldsymbol{null}\ (\mathcal{H}_{d+1})$ 。
- *9*。求出 $C=\sqrt{\mathcal{D}}^{-1}L^{-1}C_1$。
- *10*。那么， $\mathcal{B}_N C$ 是多边形 P 上次数为 d 的正交归一多项式，其中

$$\mathcal{B}_N=diag(B_{ijk}^{T},i+j+k=d+1,T\in\triangle)).$$

- *9*。输出：以泰勒形式输出多项式 $(B_{ijk}^{T_1},i+j+k=d)\mathbf{c}_1^{\top}$，其中 T_1 是 $\triangle$ 的第一个三角形，$\mathbf{c}_1$ 是 C的第一行。

我们展示标准矩形区域 $[0,1]^2$ 上的1次正交归一多项式，以及与所有1次多项式正交的2次正交归一多项式的等高线图。见图4。比较图4与图3中的等高线，可以看出，使用算法 3.2 中的迭代标准正交构造，所得图像比使用算法3.1时效果更好。图4上方的三幅图是线性多项式，下方的三幅图是二次多项式。此外，下方三幅图中，第一幅和最后一幅看起来相似，因为最后一幅是第一幅旋转得到的。

3.3 数值示例

本节展示二维情形下的许多示例。然而，三维情形下的示例难以计算和可视化，详情留待未来发表。下面展示一些基于三角形、矩形区域、L形区域和中间有一个孔洞的花形区域构造的正交多项式示例。

例 3.1. 我们首先给出三角形区域上的正交归一多项式示例，该三角形 T 的顶点为$(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$、$(0.5,\ 1)$。为方便起见，我们仅给出次数为 $d = 12$的泰勒形式显式公式。我们先从 $P_0 = \sqrt{2}$ 开始，然后计算两个线性正交多项式$P_{1,\ 0}(x, y) = a_0 + b_0x + c_0y$ 和 $P_{1,\ 1}(x, y) = a_1 + b_1x + c_1y$，其中 a_0, b_0, c_0 是第一行，而a_1, b_1, c_1 是下面的第二行。

$$\begin{array}{lll} 3.997836537223834 & -5.882837001131618 & -3.169254109974075 \\ 0.131540950422845 & -3.659539427047720 & 5.094686289303045. \end{array} \tag{3.7}$$

$P_{2,\ 0}(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2$，$P_{2,\ 1}$,$P_{2,\ 2}$也类似。它们关于 $i = 01$、2 的系数$a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ 列于表*1*中。我们已通过数值验证，这些多项式

0.568231172946732	-19.049005993186132	24.027659606205336	23.574328321631199	-22.626611642225328	-12.946151191161945
5.482587063060269	-22.420544765433238	-10.229879356332292	15.244458227262641	35.880432690852999	-7.732363957959931
4.859871647487797	-16.924968038160749	-13.491521122661251	17.083838489671507	-0.794352257553776	19.496351375506610

表1：$P_{2,\ 0}$，$P_{2,\ 1}$，$P_{2,\ 2}$的多项式系数。

*wit*这些系数在精度 $1e - 16$ 范围内彼此正交 .

为方便起见，我们仅在图中展示 $d = 0, \cdots, 5$ 的情况，分别见图*5*和图*6*，其中 T 的顶点为$(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$、$(1,\ 1)$。

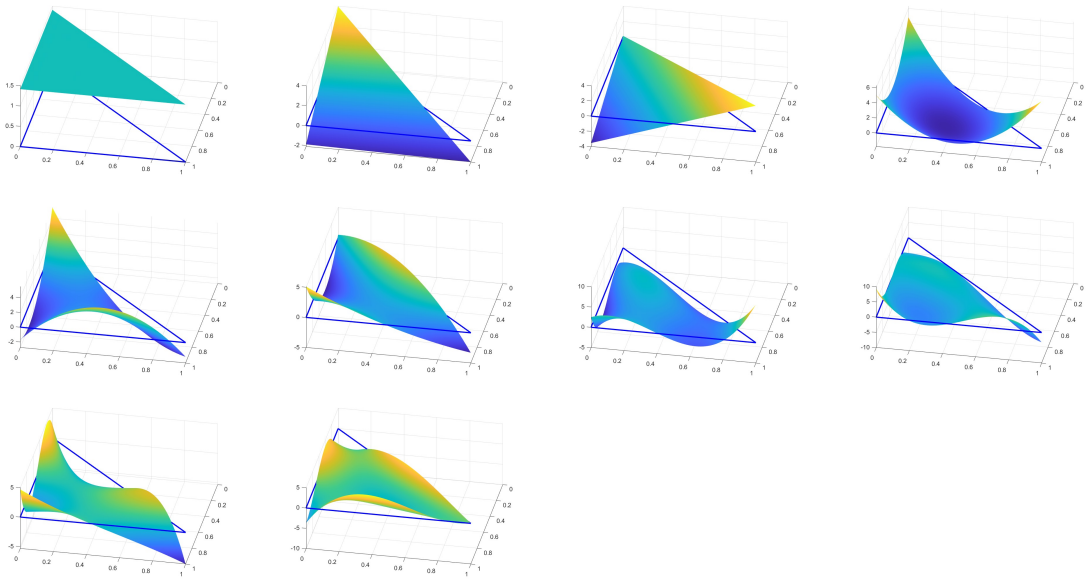


图5：次数为 0、1、2、3 的正交归一多项式

例 3.2. 考虑标准区域 $[-1, 1]^2$。次数 1 的正交归一多项式很容易求得。 $p_0(x, y) = 1/2, p_1(x, y) = \sqrt{3}/2x, p_2(x, y) = \sqrt{3}/2y$。正交归一

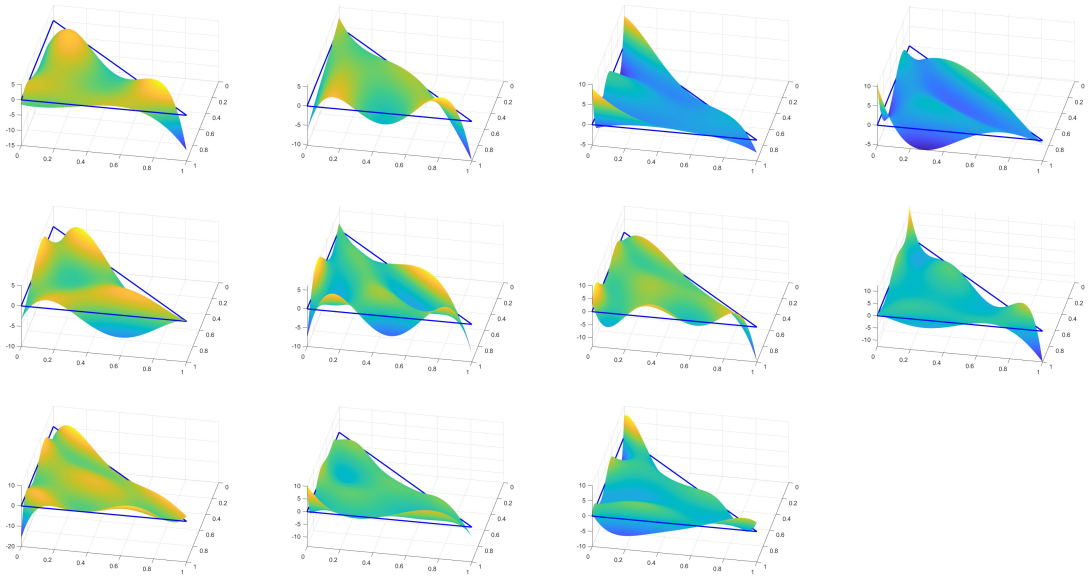


图6：次数为4和5的正交归一多项式

*2*次正交归一多项式按以下顺序以其系数表示：$1, x, y, x^2, xy, y^2$

$$X = \begin{bmatrix} 35/116 & 0 & 0 & -229/221 & -2630/2241 & 557/4251 \\ -171/737 & 0 & 0 & -598/879 & 1353/2242 & 373/271 \\ 88/127 & 0 & 0 & -1325/1173 & 517/725 & -3435/3619 \end{bmatrix}$$

下面给出一段 *MATLAB* 代码，用于检验这 *6* 个多项式是否彼此正交归一。

>> 符号变量 x y fname1 fname2 fname11 fname12 fname13 ff
>> fname1=@(x,y) sqrt(3/2)*x;>> fname2=@(x,y) sqrt(3/2)*y;>>
fname11=@(x,y) X(1,1)+X(1,4)*x.^2+X(1,5)*x.*y+X(1,6)*y.^2;>> 对
fname11 先对 x 从 -1 到 1 积分，再对 y 从 -1 到 1 积分。

ans =

13/13510798882111488
>>fname12=@(x,y) X(2,1)+X(2,4)*x.^2+X(2,5)*x.*y+X(2,6)*y.^2;>>
int(int(fname12,x,-1,1),y,-1,1)

答案 =

-29/27021597764222976

>>fname13=@(x,y) X(3,1)+X(3,4)*x.^2+X(3,5)*x.*y+X(3,6)*y.^2;>>
int(int(fname13,x,-1,1),y,-1,1)

答案 =

11/6755399441055744

>> ff=@(x,y) fname12(x,y).*fname11(x,y);>>
int(int(ff,x,-1,1),y,-1,1)

答案 =

458907104604566899/730166745731460135262101046296576O

>> 458907104604566899/730166745731460135262101046296576O

答案 =

6.2850e-17

>> ff=@(x,y) fname12(x,y).*fname13(x,y);>>
int(int(ff,x,-1,1),y,-1,1)

答案 =

-232997285764840411/365083372865730067631O505231482880

>> -232997285764840411/365083372865730067631O505231482880

答案 =

-6.3820e-17

>> ff=@(x,y) fname12(x,y).*fname1(x,y);>>
int(int(ff,x,-1,1),y,-1,1)

答案 =

0

>> ff=@(x,y) fname13(x,y).*fname1(x,y);>>
int(int(ff,x,-1,1),y,-1,1)

答案 =

0

然而，次数为1的正交归一多项式有许多不同的组。例如，$p_0(x,y) = 1/2$，而 $p_1(x,y)$ $a_1x + b_1y$ 和 $p_2 = a_2x + b_2y$，其中 $[a_1, b_1]$ 是第一行，$[a_2, b_2]$是第二行。

$$\begin{matrix} 0.119407995182024 & -0.857753887013408 \\ -0.857753887013408 & -0.119407995182024 \end{matrix} \tag{3.8}$$

很容易验证， p_0、 p_1、 p_2 在 $[-1,1]^2$ 上彼此正交归一；作者已使用类似上述命令的 *MATLAB*命令完成了这一验证。

另一组线性正交归一多项式为 $p_0(x,y) = a_0+b_0x+c_0y; p_1(x,y) = a_1+b_1x+c_1y$以及 $p_2(x,y) = a_2+b_2x+c_2y$，其系数 a_0, b_0, c_0； a_1, b_1, c_1；以及 a_2, b_2, c_2 由以下数据数组给出：

$$\begin{array}{lll} 0.736626476725820 & 1.067183625864925 & 0.482973508637176 \\ 0.191228098068285 & 0.356328591835220 & -1.662325292524989 \\ 0.648701201090063 & -1.316870928878955 & -0.058405580096484 \end{array}$$

作者在 *MATLAB* 中以精度 $1e-15$ 验证了这些一次多项式的正交归一性。

例3.3。 考虑一个多边形 $[0,1]^2$。次数为1 的正交归一多项式如下所示。第一个多项式为 $p_0 = 1$，定义在 $[0,1]^2$ 上。记作 $p_1(x,y) = a_1 + b_1x + c_1y$和$p_2 = a_2 + b_2x + c_2y$，其中 $[a_1, b_1, c_1]$ 是第一行， $[a_2, b_2, c_2]$ 是第二行。

$$1.476691783662768 \quad 0.477631980728096 \quad -3.431015548053630 \tag{3.9}$$
$$1.954323764390864 \quad -3.431015548053631 \quad -0.477631980728095 \tag{3.10}$$

可以很容易验证， p_0、 p_1、 p_2 在 $[0,1]^2$上彼此正交归一。这些多项式将用于生成一个求积公式，见后面的一个例子。

例3.4。 考虑一个多边形 P，它是一个*L*形区域，其顶点为 $[0,0; 2、0; 2、1; 1、1; 1、2; 0,2]$，它位于 $[0,2]^2$内。 对于次数 $d = 2$，我们使用算法*3.1*求出双变量二次正交归一多项式。其图像见图*1*。现在，我们在表*2*中以幂形式列出这些多项式的系数。例如，
$P1 = -0.27759 + 1.00778x + 0.81207y - 0.73939x^2 + 1.00649xy - 0.83594y^2$。请注意，这些系数的小数部分截取至*5*位数字。基于这些多项式在101×101 的等距点上的取值，对其内积进行数值积分， $[0,2]^2$ 所得结果与 $1e-4$ 精确正交归一性相差$I_{6\times 6}$。

P1	-0.27759	1.00778	0.81207	-0.73939	1.00649	-0.83594
P2	0.57155	0.91303	-0.54342	-0.74757	-0.28896	-0.12163
P3	1.58044	-0.21017	-2.85523	-0.19324	0.42186	1.31931
P4	0.11336	1.01927	-2.61386	-0.25244	0.35354	1.14126
P5	1.49075	-3.02600	-0.27774	1.51963	0.26120	-0.21360
P6	2.24632	-3.74764	-3.18077	0.99871	2.57303	0.84324

表2：六个二次正交归一多项式的系数（按行排列）

例3.5。 考虑一个多边形 P，它是一个*L*形区域。对于次数 $d = 3$，我们再次使用上一节中的算法*3.1*来求正交归一多项式。下面给出它们的图像，见图*7*。它们的幂形式系数列于表*3*。我们仅展示其经过*5*位截断的系数。

例3.6。 再考虑一个多边形 P，它是一个*L*形区域。对于次数 $d = 4$，我们使用算法*3.1*求二元四次正交归一多项式。下面给出它们的图像，见图*8*。

P1	-0.41821	2.23299	1.68804	-2.34761	1.26810	-2.37918	0.71637	-0.04421	-1.46598	1.05805
P2	1.03950	-3.61418	-1.01216	5.01519	3.68612	-1.26161	-1.91878	-1.34261	-1.17910	0.78674
P3	-2.25562	9.10083	6.34619	-10.00452	-4.83676	-6.64088	2.98589	1.34142	1.87440	1.87401
P4	-1.12493	4.31404	4.34727	-1.97392	-11.92040	-1.86506	0.20965	3.34780	3.78191	0.03874
P5	2.40821	-5.22071	-1.97223	2.33479	5.03458	-0.73131	-0.40797	-0.36993	-2.21076	0.79109
P6	2.41601	-1.95840	-7.34403	0.24409	3.59120	7.87856	0.13064	-0.89908	-0.74196	-2.73171
P7	-0.21502	6.63545	-5.47597	-7.05251	-0.86886	5.21139	1.85168	2.14921	-1.39347	-1.16061
P8	0.62764	0.60790	-2.34192	0.63250	-3.70790	2.68535	-0.77545	2.25788	0.88506	-0.66557
P9	2.42865	-4.96796	-3.20560	2.44912	5.39874	-0.25506	0.00987	-2.51434	-0.20070	0.54400
P10	1.36544	-0.76606	-7.32284	-1.31750	7.59777	6.79411	0.83367	-2.63263	-3.02784	-1.62395

表3：10个三次正交归一多项式的系数（按行排列）

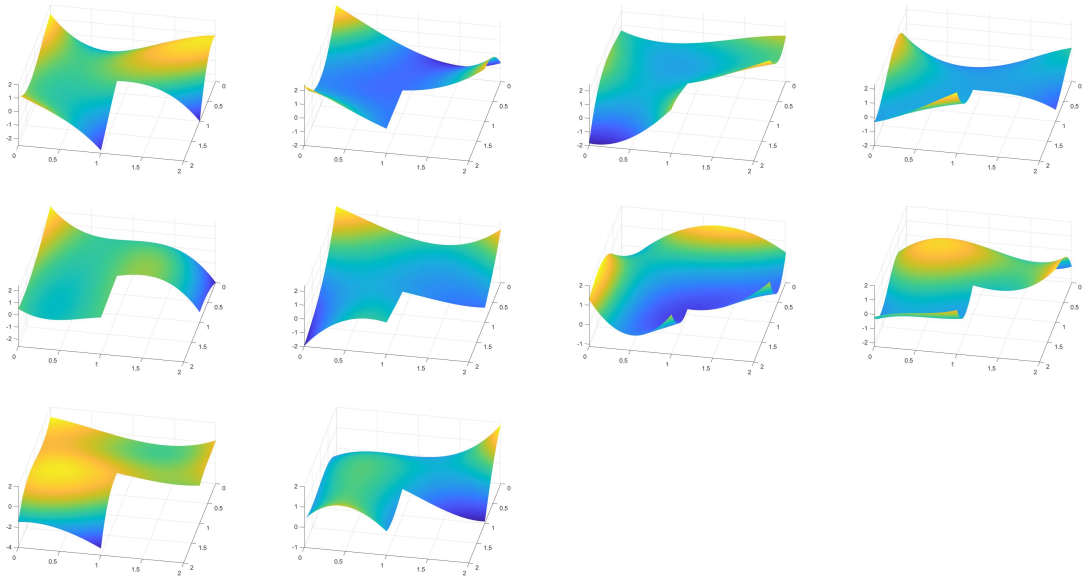


图7：L形区域上的三次正交多项式（续）

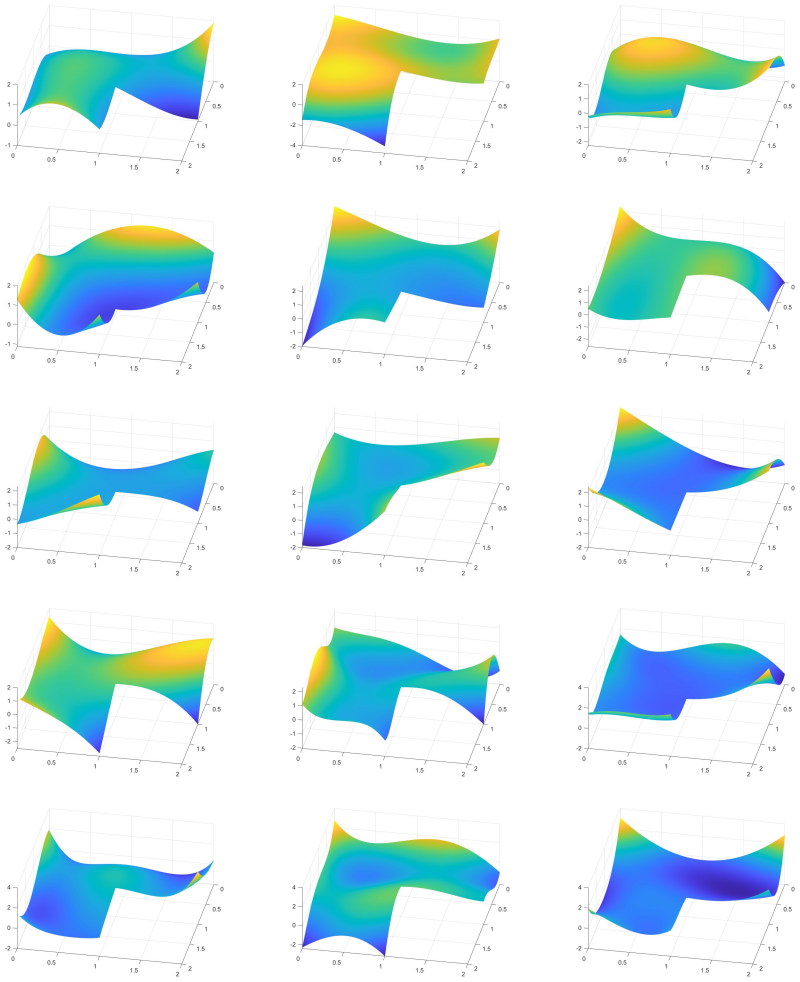


图8：L形区域上的四次正交多项式

当多边形不太复杂时，计算这些正交归一多项式既快速又简单，只需几分钟。当 P 复杂且 $d \gg 1$时，计算可能会耗费较长时间。主要的计算时间都花在求H_1的零空间上。下面展示一个更复杂且值得关注的区域上的正交归一多项式。

例3.7。 我们考虑一个花形区域，其中间有一个孔洞。我们使用算法*3.1*构造 $d = 3$的二元正交归一多项式。图*9*展示了这些多项式的图像以及相应正交多项式的零曲线。

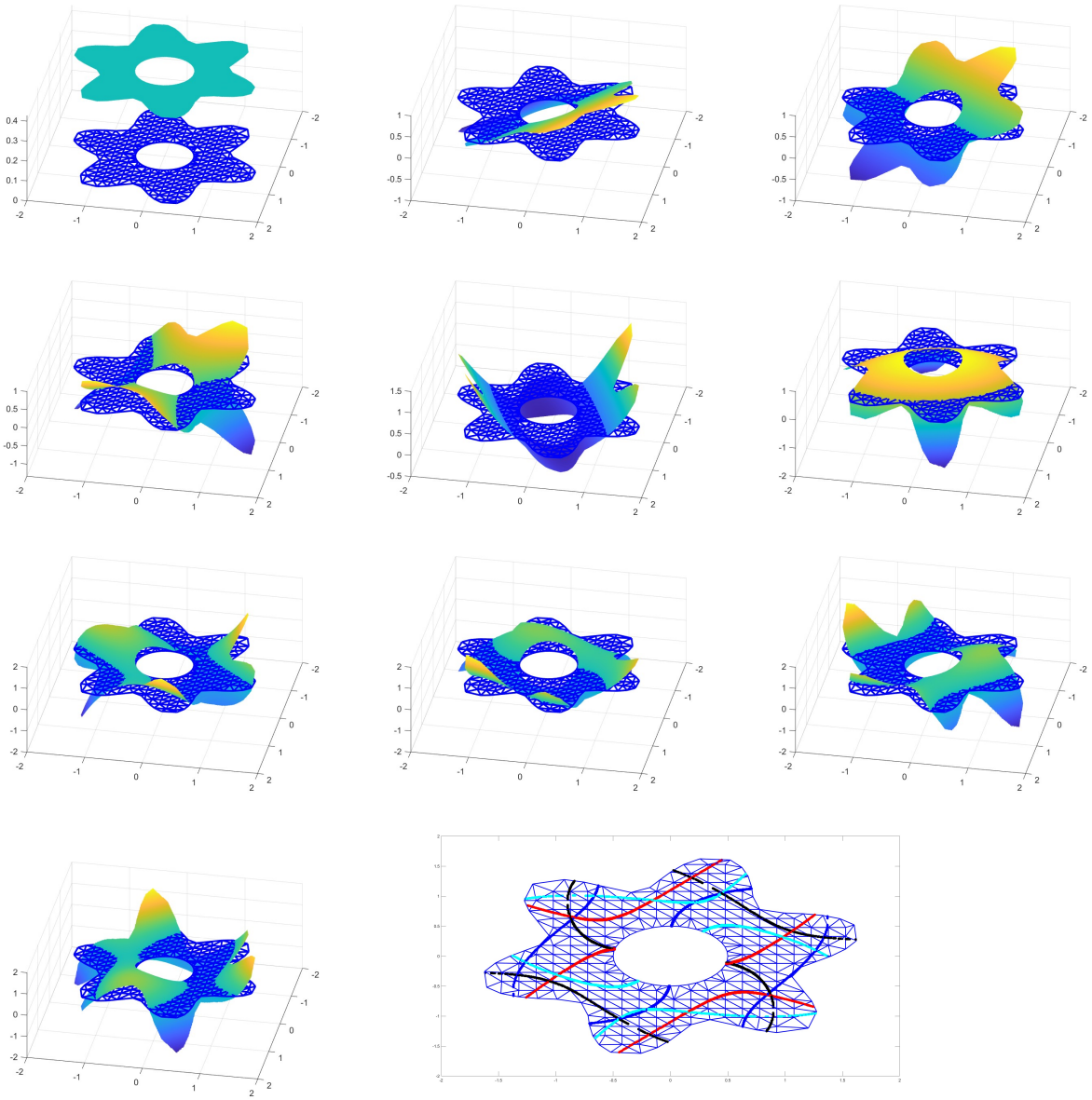


图9：花形区域上的3次正交归一多项式及3次多项式的零曲线

3.4 正交多项式的零点

我们首先考察各种多边形区域上正交多项式的公共零点。许多例子表明，在图10中的各种多边形区域Ω（J形区域除外）中，存在线性正交多项式的零线交点 $p_1 \in \Omega$。

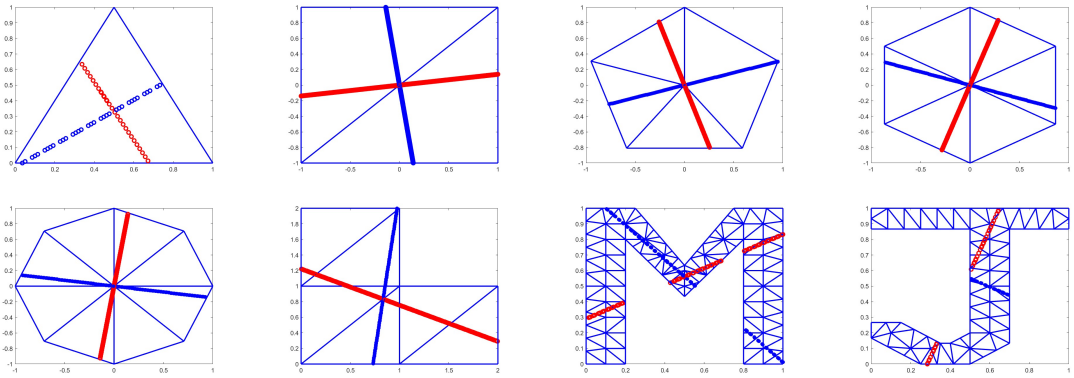


图10：不同区域上两个正交线性多项式的零线（红色和蓝色）

接下来，我们来寻找次数高于1的正交多项式的公共零曲线。

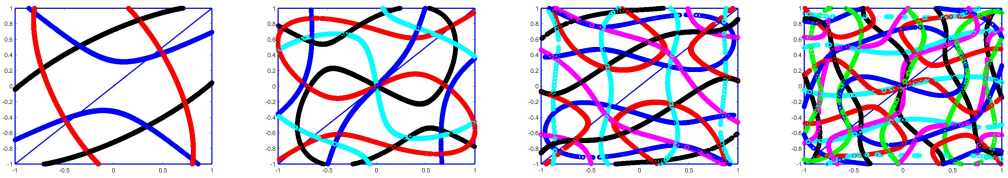


图11：次数为2、3、4、5的正交多项式的零曲线

图11、12、13、14中的这些图像表明，对于次数从 $d = 2$ 到 $d = 5$的多项式，公共零点数量不足。这使得构造类似于单变量情形中高斯求积公式的希望落空。不过，图11、13和14中，所有奇数次正交多项式$d = 1$、3、5都存在一个公共零点。

例3.8。 考虑一个五边形区域Ω，并在图*12*中绘制次数为2、3、4、5 的正交多项式的零曲线。从图*12*可以看出，不存在公共零点

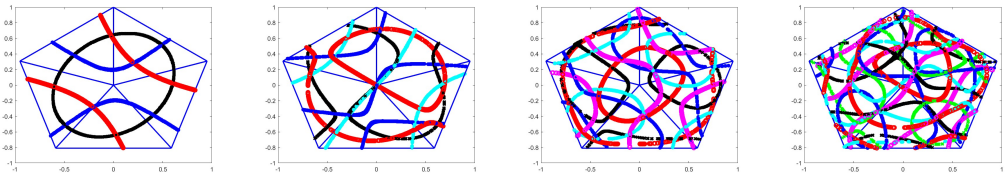


图12：次数为2、3、4、5的正交多项式的零曲线

$P_{d,j}, j = 0, 1, \cdots, d \ for \ d = 2, 3, 4, \ and \ 5.$

例3.9。 考虑一个六边形Ω，我们在图*13*中绘制次数为$2--5$的正交多项式的零曲线。从图*13*可以看出，对于$P_{d,\ j}$、 $j = 0$、1、 $\cdots$、 d存在一个公共零点

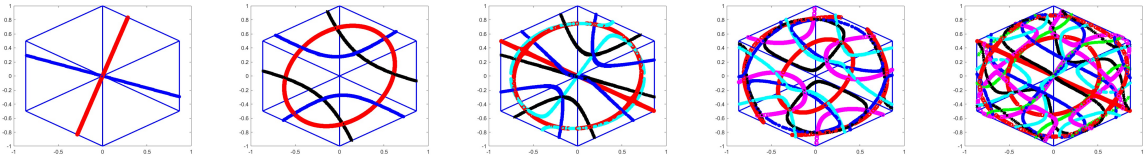


图13：次数为2、3、4、5的正交多项式的零曲线

对于 $d=1$、 $d=3$ 和5，但 $d=2$ 和 $d=4$没有公共零点。 $d=3$ 和$d=5$ 的公共零点是原点(0、0)。

例3.10。 考虑一个八边形Ω，我们在图*14*中绘制次数为$2--5$的正交多项式的零点。从图*13*可以看出，对于$P_{d、j}$、 $j=0$、1、$\cdots$、 d，存在一个公共零点

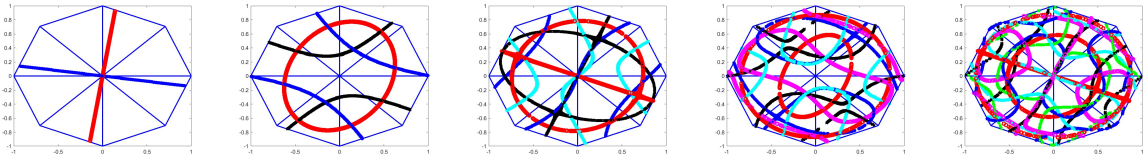


图14：次数为 $2--5$的正交多项式的零曲线

对于 $d=3$ 和5存在公共零点，但 $d=2$ 和 $d=4$没有公共零点。 $d=3$ 和 $d=5$的公共零点是原点(0、0)。

事实上，我们进行了更多计算，发现当Ω为六边形和八边形时，原点（0、0）是$P_{d、j}$、 $j=0$、$\cdots$、 d在 $d=3$、5、7、等情况下的公共零点。使用作者提供的MATLAB代码可以查看更多示例。

上述计算结果印证了 [25]中发现的理论结果。参见 [25]中的定理3.1.1。另见 [12]中的推论3.7.7。

定理3.11 (Xu'1994 [25])。 如果区域 L 是中心对称的，且维数为 $d\geq 2$，则正交多项式 $\mathbb{P}_n$ 的公共零点少于$dim\ \mathbb{P}_{n-1}$。此外，在 $\mathbb{R}^2$中， $\mathbb{P}_d$ 上的正交多项式在 d 为偶数时没有公共零点，而在 d 为奇数时有一个公共零点（$\mathbf{x}=0$）。

注3.12。 从上述例子中可以观察到， 当我们有 一个多边形区域，例如*J*形区域时，奇数次数的正交多项式没有公共零点。

注3.13。 从上述构造还可以观察到，当区域是中心对称的，例如正方形、六边形、八边形等时，奇数次数的正交多项式只包含奇数次数的单项式，而偶数次数的正交多项式只包含偶数次数的单项式。

4 正交多项式的应用

正交多项式的一种自然应用，是借鉴单变量情形中著名的高斯求积，在各种多边形区域上构造数值求积公式。尽管众所周知，

即使在中心对称区域上也不存在高斯求积公式，我们仍将介绍两种利用正交多项式构造求积公式的方法。一种方法是利用多项式约化／除法，将多项式函数（例如对所关注的给定连续函数的近似）约化为二次多项式的余式。由此可以构造单点求积公式，使其对远多于一次多项式的函数都精确。另一种方法是利用正交多项式，通过基于所关注区域内若干给定位置处函数值的插值，近似所关注的给定连续函数。于是，给定函数在该区域上的积分就是插值多项式的常数项。下文的两个小节将讨论这两种方法。最后，我们将讨论如何用更少的函数值实现更高的多项式精度。

4.1 通过多项式约化进行积分

现在，我们将预备部分中的一些思想推广到二维情形。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个有界区域。为了便于后续讨论的计算，设 Ω 为一个多边形。尽管正交多项式并不唯一，我们不妨假设已有一组基于上一节的计算得到的 Ω 上的正交多项式。

回忆一下，$\mathbb{P}_d$ 是总次数为 $\leq d$ 的多项式空间，并记 $P_{d,\,i}$，$i = 0,\ \cdots,\ d$ 为 $\mathbb{P}_d \ominus \mathbb{P}_{d-1}$ 中的正交多项式。于是，对于任意次数为 $2d-1$ 的多项式 P，我们可以得到类似于单变量情形 (2.1) 的除法公式。以下结果是众所周知的，例如可参见 [1] 中的类似结果。为方便起见，我们给出证明。

定理 4.1。考虑 $\mathbb{P}_d$、$d \geq 1$ 中的二元多项式。假设我们有线性无关的（$d+1$）个次数为 d 的多项式 $P_{d,\,0}$，…，$P_{d,\,d}$，它们张成所有次数恰为 d 的齐次多项式构成的空间。给定一个次数为 $\leq 2d-1$ 且满足 $d \geq 2$ 的多项式 P，存在次数为 $< d$ 的多项式 q_i，使得

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{d} q_i(x,y) P_{d,i}(x,y) + R(x,y),$$

其中，$R(x,y)$ 是次数不超过 $d-1$ 的多项式。

证明。为方便起见，我们给出证明。不失一般性，假设给定的次数为 $2d-1$ 的多项式 P 和给定的 $d+1$ 个线性无关多项式 $P_{d,\,0},\ \cdots,\ P_{d,\,d}$ 均采用泰勒形式，即 $P_{d,\,i} = x^i y^{d-i}$ 对于 $i = 0,\ \cdots,\ d$。此外，我们记

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{2d-1} P_i(x,y),$$

其中，$P_i(x,y)$ 是 P 中次数恰为 i 的多项式部分。令 $R(x,y) = \sum_{i=0}^{d-1} P_i(x,y)$ 为 P 的剩余部分。对于 $i \geq d$，现在将 P_i 表示为 $P_{d,\,j}$、$j = 0$、$\cdots$、d 的形式。容易看出，当 $i = d$、$P_d = \sum_{j=0}^{d} c_{d,\,j} P_{d,\,j}$ 具有常系数 $c_{d,\,j}$ 时。假设 P_{i-1} 是 $P_{d,\,j}$、$j = 0$、$\cdots$、d 的线性组合，并且当 $i \geq d+1$ 时，其多项式系数 $c_{i,\,j}$。考虑带有 $i > d+1$ 的 P_i。我们写成

$$P_i \;=\; \sum_{k=0}^{i} a_k x^k y^{i-k} = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k y^{d-k}(y^{i-d}) + \sum_{k=d+1}^{i} a_k x^k y^{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k x^k y^{d-k}(y^{i-d}) + \sum_{k=0}^{i-d-1} a_{i-k} x^{d-k} y^k (x^{i-d})$$
$$= \sum_{k=0}^{d} (a_k y^{i-d}) x^k y^{d-k} + \sum_{l=2d+1-i}^{d} (a_{i-d+l} x^{i-d}) x^l y^{d-l}.$$

也就是说， P_i 是$P_{d、k}$、 $k = 0$、 $\cdots$、 d 的线性组合，其多项式系数的次数为$\leq d-1$。通过归纳法，所有的 P_i 都是P_d 的线性组合，、$_j$、 $j = 0$、 $\cdots$、 d，其中 $i \geq d$。于是， P 可以写成所需的形式。 □

值得指出的是，当多项式 P 和$P_{d,i}$ 具有有理系数时，可以使用 MATLAB命令 PolynomialReduce.m 完成上述除法。然而，当这些多项式的系数为无理数时，该 MATLAB命令的效果不佳。现在，我们利用上述结果，在一些附加假设下推导一个求积公式。

定理 4.2. 设 $P_{d,j}, j = 0, \cdots, d$ 是多边形区域Ω上的正交多项式。假设存在 D_{d-1} 个位置： $p_1, \cdots, p_{D_{d-1}} \in \Omega$， 它们是所有$P_{d,j}, j = 0, \cdots, d$的公共零点。此外，假设这些位置 $p_1, \cdots, p_{D_{d-1}}$ 允许唯一的次数为 $d-1$的多项式插值，也就是说，对于定义在Ω上的任意连续函数 f， 都存在唯一的多项式 P_f满足 $P_f(p_i) = f(p_i)$ $i = 1, \cdots, D_{d-1}$。记

$$P_f(x, y) = \sum_{i=1}^{D_{d-1}} f(p_i) L_i(x, y) \tag{4.1}$$

对于某些拉格朗日基函数 L_i， 并令 $c_i = \int_\Omega L_i(x, y)dxdy$ 对每个 i， 我们有

$$\int_\Omega f(x, y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{D_{d-1}} f(p_i)c_i =: Q(f). \tag{4.2}$$

那么，此求积公式 $Q(f)$ 对所有次数为 $2d-1$ 的多项式 f 都是精确的。

证明。 事实上，给定一个次数为 $2d-1$ 的多项式 f， 利用上面的定理可得

$$f = \sum_{i=0}^{d} q_i P_{d,i} + R.$$

注意，在这些点 p_i 处次数为 $d-1$ 的插值多项式 P_f 满足 $f(p_j) = P_f(p_j) = \sum_{i=0}^{d} q_i(p_j)P_{d,i}(p_j) + R(p_j) = R(p_j)$， 对所有 j 均成立。因此， P_f 是函数值为 $R(p_i)$ 的次数为 $d-1$ 的插值多项式， 而 R 的次数为 $d-1$, $P_f \equiv R$。根据求积公式 (4.2),

$$Q(R) = \int_\Omega R(x, y)dxdy = \int_\Omega (R(x, y) + \sum_{i=0}^{d} q_i(x, y)P_{d,i}(x, y))dxdy = \int_\Omega f(x, y)dxdy.$$

也就是说，该求积公式对次数为 $2d-1$ 的多项式是精确的。 □

如图10所示，在 $\mathbb{P}_1 \ominus \mathbb{P}_0$许多不同的多边形上，正交多项式存在公共零点，因此我们可以利用上述定理得到以下求积公式：

例4.3。 设Ω 是一个多边形区域，对于 $d = 1$，令$P_{1,1}$ 和$P_{1,2}$ 为两个线性正交多项式，它们也与常数函数$P_{0,0}$正交。由于$P_{1,1}$ 和$P_{1,2}$ 是一次多项式，且与$P_{0,0}$正交， $P_{1,1}$ 在Ω上既取正值也取负值，因此，$P_{1,1}$的零点是一条位于Ω内部的直线。$P_{1,2}$也如此。由于这两条直线不平行，设 p_1 为这两条直线的交点。如果 $p_1 \in \Omega$，那么

$$\int_{\Omega} f(x,y)dxdy \approx f(p_1)A_{\Omega}, \tag{4.3}$$

其中 A_{Ω} 表示Ω的面积。根据定理 *4.2*，该求积公式对所有一次多项式均精确。例如

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy \approx 4f(0,0) \tag{4.4}$$

该公式对所有一次多项式均精确。求积公式 *(4.3)* 是二元情形下众所周知的单点求积公式。

例4.4。 考虑一个三角形区域 T，其顶点为 $\{(0,\ 0)$、$(1,\ 0)$、$(1,\ 1)\}$。那么点$p = (2/3,\ 1/3)$ 是两个正交一次多项式的交点，如图*11*的第一幅图所示；它也与常数函数正交。因此，以下求积公式

$$\int_{T} f(x,y)dxdy \approx \frac{1}{2}f(2/3, 1/3)$$

对所有一次多项式均精确。

注4.5。 注意，根据定理 *4.2* 可以得出结论： $d > 1$ 不存在高斯求积公式，因为正如我们在上一节所见，对于正方形区域、五边形区域、六边形区域、八边形区域、*L*形区域等， $\mathbb{P}_d \ominus \mathbb{P}_{d-1}$ 中 $d > 1$ 的正交多项式的公共零点数量不足。这一观察已在*[25],* 中指出，另请参见 *[12]* 或 *[27]*。

现在我们研究单点求积，因为它对不止一次多项式都精确。以下是本文的主要定理之一。

定理 4.6. 设Ω 为一个多边形，例如正方形、六边形或八边形等，并且存在一点$\mathbf{p} \in \Omega$，它是所有正交多项式 $P_{2d-1,j}, j = 0, \cdots, 2d-1$ *for* $d = 1, 2, \cdots,$ 的公共零点。对于任意次数为 n 且满足 $2d-1 \le n \le 2d$ 的多项式 P_n，记

$$P_n(x,y) = \sum_{j=0}^{2d-1} q_j(x,y)P_{2d-1,j}(x,y) + \sum_{j=0}^{2d-3} \hat{q}_j(x,y)P_{2d-3,j}(x,y) + \cdots + \sum_{j=0}^{1} \tilde{q}_j(x,y)P_{1,j}(x,y) + R \tag{4.5}$$

根据奇数次正交多项式，其中余项 R 为常数，商式$q_j(x,y)$、$\hat{}q_j(x,y)$ $\tilde{q}_j(x,y)$ 为一次多项式。若 $\tilde{q}_j(x,y)$ 对于 $j = 0$和$j = 1$均为常数函数，则

$$\int_{\Omega} P_n(x,y)dxdy = P_n(\mathbf{p})A_{\Omega}, \tag{4.6}$$

其中 A_{Ω} 是 的面积。如果 $\tilde{q}_j$ 确实是满足 $\tilde{q}_j = a_i x + b_j y + c_j$的一次多项式，则 n

$$\int_{\Omega} P_n(x)dx = P_n(\mathbf{p})A_{\Omega} + \sum_{j=0}^{1}(a_j\alpha_j + b_j\beta_j), \tag{4.7}$$

其中 $\alpha_j = \int_{\Omega} xP_{1,j}(x,y)dxdy$ 以及 $\beta_j = \int_{\Omega} yP_{1,j}(x,y)dxdy$，对于 $j = 0,1$，这些都可以预先计算。

证明。为方便起见，我们称 $d=3$。在这种情况下，考虑一个次数不超过 6 的多项式函数 P。我们首先展开 $P(x,y)=\sum_{j=0}^{d} q_j(x,y)P_{5,j}(x,y)+R_1(x,y)$，其中 $q_j\in\mathbb{P}_1$ 和 $R_1\in\mathbb{P}_4$。然后我们将 $R_1=\sum_{j=0}^{3}\hat{q}_j(x,y)P_{3,j}(x,y)+R_2$ 表示为 $\hat{q}_j\in\mathbb{P}_1$ 和 $R_2\in\mathbb{P}_2$。我们写作 $R_2(x,y)=\sum_{j=0}^{1}\tilde{q}_j(x,y)P_{1,j}(x,y)+R_3(x,y)$，其中 $\tilde{q}_j$ 和 R_3 是一次多项式。如果 $\tilde{q}_j$ 是常数，那么根据 P_1与常数函数的正交性质，我们知道 $\int_\Omega R_2(x,y)dxdy=\int_\Omega R_3(x,y)dx=R_3(\mathbf{p})$，由定理 4.2 可得。注意 $R_3(\mathbf{p})=P(\mathbf{p})$，因为 $\mathbf{p}$ 是所有 $P_{2k-1,j},j=0,\cdots,2k-1,k=1,2,\cdots$ 的公共零点。事实上，根据正交性，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega P(x,y)dx &= \sum_{j=0}^{5}\int_\Omega q_j(x,y)P_{5,j}dx+\sum_{j=0}^{3}\int_\Omega \hat{q}_j(x,y)P_{3,j}(x,y)dx+\\ &\quad+\sum_{j=0}^{1}\int_\Omega \tilde{q}_j(x,y)P_{1,j}(x,y)dxdy+\int_\Omega R_3(x,y)dxdy\\ &= \int_\Omega R_3(x,y)dxdy=R_3(\mathbf{p})A_\Omega=P(\mathbf{p})A_\Omega. \end{aligned}\tag{4.8}$$

当 $\tilde{q}_j=a_jx+b_jy+c_j$, $\int_\Omega \tilde{q}_j(x)P_{1,j}(x,y)dxdy=a_j\int_\Omega xP_{1,j}(x,y)dxdy+b_j\int_\Omega yP_{1,j}(x,y)dxdy+c_j\int_\Omega P_{1,j}(x,y)dxdy=a_j\alpha_j+b_j\beta_j$。由此完成证明。

□

类似地，我们可以得到以下结果

定理 4.7. 设 Ω 是一个中心对称区域，即 $(\pm x,\pm y)\in\Omega$。对于任意次数为 n 且满足 $2d\le n\le 2d+1$ 的多项式 P_n，记

$$P_n(x,y)=\sum_{j=0}^{2d}q_j(x,y)P_{2d,j}(x,y)+\sum_{j=0}^{2d-2}\hat{q}_j(x,y)P_{2d-2,j}(x,y)+\cdots+\sum_{j=0}^{2}\tilde{q}_j(x,y)P_{2,j}(x,y)+R(x,y),\tag{4.9}$$

基于偶次正交多项式，其中余多项式 $R(x,y)$ 和商式$q_j(x,y)$、$\hat{q}_j(x,y)$ $\cdots$、 $\tilde{q}_j(x,y)$ 均为线性多项式。若 $R(x,y)=ax+by+c$，则

$$\int_\Omega P_n(x,y)dxdy=cA_\Omega,\tag{4.10}$$

其中 A_Ω 是Ω的面积。此外，若Ω 是一般的多边形区域，则写作 $R(x,y)=ax+by+c$,

$$\int_\Omega P_n(x,y)dxdy=a\int_\Omega xdxdy+b\int_\Omega ydxdy+cA_\Omega.\tag{4.11}$$

证明。 由于区域 Ω 关于中心对称，我们有 $\int_\Omega xdxdy=0=\int_\Omega ydxdy$，因此，$\int_\Omega R(x,y)dxdy=a\int_\Omega xdxdy+b\int_\Omega ydxdy+c\int_\Omega dxdy=cA_\Omega$。利用 $P_{2d,j}$'s、$P_{2d-2,j}$'s 和 $P_{2,j}$'s 的正交性，可得结果 (4.10)。否则，当 Ω 是一般的多边形区域时，我们必须预先计算 $\int_\Omega xdxdy$ 和 $\int_\Omega ydxdy$。随后，对偶次正交多项式进行多项式约化，即可得到 (4.11)。

□

定理 4.6 中上述结果表明，对于二元连续函数，只要上述定理中提到的线性多项式 $\widetilde{q}_i$ 对 $i=0$ 和 $i=1$ 为常数，单点求积公式 (4.6) 就能对许多次数高于一次多项式 P_n 的非平凡多项式精确成立。当 $\widetilde{q}_i$ 确实为线性多项式时，系数 α_j, β_j 可通过蛮力法计算，因此 (4.7) 可能很有用。如果区域中心对称，那么定理 4.7 的结果似乎比定理 4.6 更方便。即使区域不是中心对称的

，我们也需要通过蛮力法计算 $\int_\Omega xdxdy$，$\int_\Omega ydxdy$，A_Ω，才能得到与定理 4.6 类似的结果；定理 4.6 要求计算 Ω 上所有二次多项式的积分。

要应用定理 4.6，还剩下两个问题：（1）如何从 P_n 看出线性多项式$\tilde{q}_j$ 是常数函数；（2）如果 $\tilde{q}_i$确实是非平凡的一次多项式，如何计算它们，并求出其系数 a_j，b_j对 $\tilde{q}_j = a_j x + b_j y + c_j$，$j = 0, 1$。要应用定理 4.7，也有类似的问题。也就是说，我们如何知道余函数 $R(x, y)$是常数函数？当然，当 p 是偶多项式和/或区域中心对称时，结果 (4.7) 成立。

定理 4.6 和定理 4.7 的重要意义之一在于，任意多项式的积分仅取决于其低阶项的积分；更准确地说，若将它们展开为形式 (4.5) 或 (4.9)，则仅取决于二次项或一次项。事实上，定理 4.6 的结果告诉我们，若用奇数次数的正交多项式去除多项式 P_n ，得到余项，即 a_j，b_j，那么 P_n 的积分完全取决于 $\int_\Omega xP_{1,\ j}(x, y)dxdy$和 $\int_\Omega yP_{1,\ j}(x, y)dxdy$对 $j = 0, 1$。

为方便起见，我们定义

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{\sum_{d=2}^{d'}\sum_{j=0}^{2d-1} q_{d,j}(x, y)P_{2d-1,j}(x, y) + R(x, y) : \text{ for all linear polynomials } q_{d,j}, R, \forall d' \geq 2\} \quad (4.12)$$

根据定理 4.6，在所有正交多项式 $P_{2d-1,j}, j = 0, \cdots, 2d-1$ 对所有 $d \geq 1$ 均在 $p \in \Omega$ 上有公共零点的假设下，单点求积公式 (4.6) 对 $\mathcal{L}(\Omega)$ 中的所有函数都精确。我们称 $\mathcal{L}(\Omega)$ 中的每个函数都可被奇次数正交多项式准可除。若连续函数 f 可用 $\mathcal{L}(\Omega)$ 中的准可除多项式逼近，则 f 的积分可由 (4.6) 中的单点求积公式近似。注意，$\mathcal{L}(\Omega)$ 的闭包中包含许多函数，超过了 $C(\Omega)$ 中连续函数的一半。与前一节一样，我们定义

$$\mathbb{L}(\Omega) = \text{span}\{\mathcal{L}(\Omega), \mathbb{P}_2\}. \quad (4.13)$$

类似于定理 4.6 的证明，我们可以得到以下结果

定理 4.8。 $\mathbb{L}(\Omega)$ 在最大范数下的闭包为 $C(\Omega)$，即Ω上所有连续函数构成的空间。

证明。 我们将证明留给感兴趣的读者。 □

以同样的方式，我们可以定义

$$\mathbb{L}_e(\Omega) = \{\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=0}^{2k} q_{k,j}(x, y)P_{2k,j}(x, y) + R(x, y) : \text{ for all linear polynomials } q_{k,j}, R, \forall d \geq 1\}$$

基于上一节构造的偶次正交多项式。我们可以证明，$\mathbb{L}_e(\Omega)$ 在最大范数下的闭包为 $C[\Omega]$。所有这些内容都留给感兴趣的读者。

一般来说，我们可以使用以下这类函数来对使单点求积公式精确的函数进行分类：

$$\mathbb{M}(\Omega) = \{ \quad \sum_{d=1}^{d'}\sum_{j=0}^{2d-1} q_{d,j}(x, y)P_{2d-1,j}(x, y) + R(x, y) :$$

$$\text{for polynomials } q_{d,j} \text{ of degree} \le 2d-2 \text{ for all } j=0,\cdots,2d-1,$$
$$R(x) \text{ is a constant}, \forall d' \ge 2\}. \tag{4.14}$$

很容易看出，$\mathbb{L}(\Omega) \subset \mathbb{M}(\Omega)$。此外，许多非平凡的二次多项式并不属于式（4.14）中定义的 $\mathbb{M}(\Omega)$。设 Q_i, $i=0$, $\cdots$, 5 为二次单项式，并假设我们已知它们的积分，例如，我们预先通过数值方法计算出这些积分：

$$I_i = \int_\Omega Q_i(x,y)dxdy, i=0,\cdots,5.$$

于是我们有

定理 4.9。对于任意次数为 $n \ge 2$ 的多项式 P，存在一个多项式 $M \in \mathbb{M}(\Omega)$ 和一个二次多项式 J，使得

$$P(x,y) = M(x,y) + J(x,y) \tag{4.15}$$

因此，$\int_\Omega P(x,y)dxdy$ 是这些值 I_i、$i=0$、$\cdots$、5 的线性组合。
an

证明。设 P_n 是一个次数为 n 的多项式，即 $n=100$。我们使用 $P_{51,i}$、$i=0$、$\cdots$ 51 来除 P_n。由于 $P_{51,i}$ 彼此线性无关，因此我们有

$$P_n(x,y) = \sum_{i=0}^{51} q_{26,i}(x,y)P_{51,i}(x,y) + R_1(x,y)$$

根据定理 4.1，其中余式 $R_1(x, y)$ 是一个次数为 ≤ 50 的多项式。然后我们再次应用定理4.1，得到

$$R_1(x,y) = \sum_{i=0}^{27} q_{14,i}(x,y)P_{27,i}(x,y) + R_2(x,y),$$

其中余式 $R_2(x, y)$ 的次数为 ≤ 26。重复上述计算过程，得到

$$R_3(x,y), R_4(x,y), R_5(x,y) \text{ and } R_6(x,y),$$

其中，$R_3(x,y)$ 的次数小于或等于 14，$R_4(x,y)$ 的次数小于或等于 8，$R_5(x,y)$ 的次数小于或等于 4，且 $R_6(x,y)$ 的次数小于或等于 2。令 $J(x,y)$、$= R_6(x,y)$ 和 $M(x,y)$ 分别表示上述所有商式的总和，则有

$$P_n(x,y) = M(x,y) + J(x,y).$$

最后，我们将 $J(x,y) = \sum_{j=0}^{5} c_j Q_j(x,y)$ 重新改写。现在，积分

$$\int_\Omega P_n(x,y)dxdy = \int_\Omega M(x,y)dxdy + \int_\Omega J(x,y)dxdy = \sum_{j=0}^{5} c_j \int_\Omega Q_j(x,y)dxdy$$

它是取值 $I_i, i=0,\cdots,5$ 的线性组合。 □

为一般多项式 J 或连续函数寻找合适的二次多项式 P_n，是求$\int_\Omega P_n(x,y)dxdy$ 或 $\int_\Omega f(x,y)dxdy$ 积分的关键。另一方面，基于前一节讨论的 MATALB 代码，对于任意固定区域 Ω，求出线性正交多项式相对容易。由于α_j 和 β_j 对于 $j=0,1$ 可以预先计算，主要的求积公式（4.7）将取决于对a_j, $b_j, j=0,1$ 的计算，其中多项式函数为 P。类似于定理 2.6 中给出的求积公式，对$a_j, b_j, j=0,1$ 的计算可以导出一般连续函数 f的求积公式。下面给出一个例子。

例4.10。 设Ω 为一个顶点位于单位圆上的六边形。关于各种次数的正交多项式的零点，参见例*3.9*。我们首先给出 $\mathbb{P}_3 \ominus \mathbb{P}_2$中的四个*3*次 正交多项式。它们列于表*4*中。此外，我们还在表*5*中给出两个*1*次正交多项式。

	x^3	x^3y	xy^2	y^3	x	y
$P_{3,0}$	963/269	4367/766	2203/908	4367/766	-2822/1531	-3100/971
$P_{3,1}$	-599/391	5297/1016	2241/443	-1413/1268	-467/7208	-590/2253
$P_{3,2}$	-1670/903	-2909/873	2222/359	3893/2097	-187/2083	-83/265
$P_{3,3}$	1213/214	-3505/1069	25591/4285	-4842/1469	-1573/489	977/530

表4：六边形区域上的三次正交多项式

	x	y
$P_{1,0}$	-804/625	428/975
$P_{1,1}$	-428/975	-804/625

表5：六边形区域上的一次正交多项式

对于任意次数小于 4 的偶多项式 P，即 $P(x,\ y) = P(-x,\ -y)$，设

$$P(x,y) = p_1x^4 + p_2x^3y + p_3x^2y^2 + p_4xy^3 + p_5y^4 + p_6x^2 + p_7xy + p_8y^2 + p_9,$$

我们可以找到系数 c_i、 d_i、 $i = 0$、1、2、3 以及 a_i、 b_i、 $i = 0$、1，使得

$$P(x,y) - P(0,0) = \sum_{i=0}^{3}(c_ix + d_iy)P_{3,i}(x,y) + \sum_{i=0}^{1}(a_ix + b_iy)P_{1,i}(x,y). \tag{4.16}$$

由于我们只需匹配 P 的系数，而它有 *8* 个系数 p_1、 $\cdots$、 p_8，同时我们有 *12* 个未知数。当我们在表*6*所给出的六边形内部随机选取 *8* 个节点 $\mathbf{n}_i$、 $i = 1$、 $\cdots$、8 时。

-429/3395 251/941 -935/2817 96/4867 266/2087 575/2688 -563/2908 -423/1790 941/2262
101/878 -1371/3370 361/2827 -1186/3851 511/1845 230/631 -447/2686

表6：六边形区域内的8个节点

当(x,y) 为表*6*中列出的*8*个节点时，插值条件 *(4.16)* 导出一个线性方程组。令 $a_0 = 0$、 $b_0 = 0$ 和 $a_1 = 0$，即可求解该方程组。对于任意给定的 p_1、 $\cdots$、 p_9，均可求得解 b_1 。因此，我们得到以下求积公式:

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{8} w_i(f(\mathbf{n}_i) - f(\mathbf{0}))\beta_1 + f(\mathbf{0})A_\Omega, \tag{4.17}$$

其中 $A_\Omega = 1351/520$ 和权重 w_i 的表达式如下。

-2421/187 -8603/57 -22423/1729 -12315/29 7886/59 2501/165 -10964/219 21800/113
以及 $\beta_1 = \int_\Omega yP_{1,\ 1}(x,y)dxdy = -431/619$。如果对偶函数$f(x,y) = \cos(x+y)$使用求积公式 *(4.17)*，我们得到非常精确的积分值 2.093802517305221。与精确值 2.093390032732584相比，绝对误差为 $4.124845726369841e-04$。

4.2 插值积分：多点求积

我们首先介绍另一种方法：利用 Ω 上的正交多项式，计算连续函数 f 在任意多边形 Ω 上的积分。具体而言，当连续函数的值仅在 Ω 内若干位置已知时（这在实际中很常见），我们根据这些函数值及其对应位置构造求积公式，以近似计算 f 在 Ω 上的积分。

首先，让我们回顾一下 [18] 中引入的区域点概念。设 $T \subset \Omega$ 是 Ω 中的一个三角形，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 为 T 的顶点，则

$$\xi_{ijk} = \frac{1}{d}(i\mathbf{v}_1 + j\mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_3), \forall i+j+k = d. \tag{4.18}$$

是 T 的区域点。设 $P_{d,1}, \cdots, P_{d,D_d}$ 为所有次数为 $\leq d$ 的迭代正交归一多项式的并集，其中 $D_d = (d+1)(d+2)/2$ 在 Ω 上。显然，任意次数为 d 的多项式 P 都可以写成 $P = \sum_{i=1}^{D_d} c_i P_{d,i}$。因此，已知（例如，1977 年的钟杨定理（参见 [6] 或 [18]）），对于 T 上的任意连续函数 f，存在唯一一个次数为 d 的插值多项式 P_f，使得

$$P_f(\xi_{ijk}) = f(\xi_{ijk}), \quad \forall i+j+k = d. \tag{4.19}$$

也就是说，存在唯一的向量 $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_{D_d})^\top$，使得 P_f 满足以下线性方程组：

$$\begin{bmatrix} P_{d,2}(\xi_{d00}) & P_{d,3}(\xi_{d00}) & \cdots & P_{d,D_d}(\xi_{d00}) & P_{d,1}(\xi_{d00}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ P_{d,2}(\xi_{00d}) & P_{d,3}(\xi_{00d}) & \cdots & P_{d,D_d}(\xi_{00d}) & P_{d,1}(\xi_{00d}) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} f(\xi_{d00} \\ \vdots \\ \vdots \\ f(\xi_{00d}) \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

注意，我们已将首项 c_1 安排在上述系统 (4.20) 各列的末尾。上述讨论导出了以下数值积分公式。

定理 4.11. 设 f 是定义在 $T \subset \Omega$ 上的连续函数。假设 c_1 是满足上述线性方程组的系数，其他系数为 c_2、$\cdots$、c_{D_d}。则

$$c_1 \approx \int_\Omega f(x,y)dxdy, \tag{4.21}$$

其中 $P_{d,\ 1}$ 经过归一化，使得 $\int_\Omega P_{d,\ 1}(x,y)dxdy = 1$。

证明. 求解整个系统 (4.20) 可得所有系数。于是

$$P_f(x,y) = \sum_{i=1}^{D_d} c_i P_{d,i}(x,y)$$

是满足插值条件 (4.19) 的 f 的良好近似。由此可得

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy \approx \int_\Omega P_f(x,y)dxdy = \int_\Omega \sum_{i=1}^{D_d} c_i P_{d,i}(x,y)dxdy = \int_\Omega c_1 P_{d,1}(x,y)dxdy = c_1,$$

其中我们利用了这样的事实：所有 $P_{d,i}$ 都与常数 $P_{d,1}$ 正交，也就是说，$\int_\Omega P_{d,i}(x,y)dxdy = 0$ 对所有 $i \geq 2$ 都成立；而由于归一化，$\int_\Omega P_{d,1}(x,y)dxdy = 1$。因此，我们得到（4.21）。

□

注意，系数 c_1 是函数值 $f(\xi_{ijk})$ $i+j+k=d$的线性组合，也就是说，

$$c_1 = \sum_{i+j+k=d} c_{d,ijk} f(\xi_{ijk})$$

这是在三角形 Ω 上的数值求积，其中 $c_{d,\ ijk}$ 是可由线性方程组 (4.20) 求得的系数。特别地，我们可以使用克拉默法则求出这些系数。

注 4.12。 要从线性方程组 *(4.20)* 中求得 c_1 ，我们只需进行高斯消元并求解 c_1，无需进一步回代即可得到其余系数 c_2、$\cdots$、c_n。回顾一下，我们在 *[18]* 中讨论过 T 上的多项式积分。将线性方程组 *(4.19)* 用 *Bernstein-B´ezier* 多项式基表示并求解后，只需将它们全部相加，再乘以 T 的面积，然后除以 $\binom{d+2}{2}$。参见 *[18]* 第 *45* 页的定理 *2.33*。上述方法提供了一种更简单的计算方法，可用于求得数值求积公式。

Re标记 4.13。 如果我们使用传统的多项式插值法，我们写 te

$$P_f(x,y) = \sum_{i+j+k=d} f(\xi_{ijk}) L_{ijk}(x,y)$$

其中 L_{ijk} 是与每个 ξ_{ijk}相关联的次数为 d 的拉格朗日基函数。于是

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy \approx \int_\Omega P_f(x,y)dxdy = \sum_{i+j+k=d} f(\xi_{ijk}) \int_\Omega L_{ijk}(x,y)dxdy.$$

要得到求积公式，必须求出积分 $w_{ijk} = \int_\Omega L_{ijk}(x,y)dxdy$；对于一般的多边形区域，这些积分并不容易计算。定理 *4.11* 的结果提供了一种更简单的方法：求出这些正交多项式后，只需解一个线性方程组。

当 Ω 是三角形时，插值多项式 P_f 对 f 的逼近效果已有所知，如 [18]中所述（参见第 13 页的定理 1.12）。仔细考察证明后，我们可以得出以下结论

定理 4.14. 当 $T \subset\Omega$ 且 $f \in C^{d+1}(\Omega)$时，

$$\|f - P_f\|_{\Omega,\infty} \le K|\Omega|^{d+1}|f|_{d+1,\Omega,\infty} \tag{4.22}$$

其中 K 是一个与 f无关的正常数， $|\Omega|$ 表示Ω的直径。因此，区域为Ω 时，求积公式 *(4.21)* 的误差为

$$|\int_\Omega f(x,y)dxdy - c_1| \le K|T|^{d+2}|f|_{d+1,\Omega,\infty}. \tag{4.23}$$

例 4.15. 考虑在面积为2.598076211353319的六边形区域Ω 上进行积分 $\int_\Omega f(x,y)dxdy$。下面以 *MATLAB* 格式展示计算过程。

%以下命令用于根据正交多项式求积分。a=rand(28,1); p1=@(x,y) a(1)+a(2)*x+a(3)*y; p2=@(x,y) a(4)*x.^2+a(5)*x.*y+a(6)*y.^2; p3=@(x,y) a(7)*x.^3+a(8)*x.^2.*y+a(9)*x.*y.^2+a(10)*y.^3; fname=@(x,y) p1(x,y)+p2(x,y)+p3(x,y); %或其他函数。%fname=@(x,y) sin(pi*x+pi*pi*y);

v1=[0 0];v2=[0.25 0];v3=[0,0.25]; d=3;[x,y]=区域_pts(v1,v2,v3,d); %此代码生成 [18]中说明的区域点。P=[x y]; %P 是区域点列表。%其余代码用于计算 int_P f(x,y)dxdy。load Hexgond3 %此 MATLAB 数据文件包含泰勒形式的正交多项式。P1=@(x,y) 1/2.598076211353319+x-x; %以 MATLAB 方式将 P1 定义为 x 的函数。P2=@(x,y) X(2,2)*x+X(2,3)*y; P3=@(x,y) X(3,2)*x+X(3,3)*y; P4=@(x,y) X(4,1)+X(4,4)*x.^2+X(4,5)*x.*y+X(4,6)*y.^2; P5=@(x,y) X(5,1)+X(5,4)*x.^2+X(5,5)*x.*y+X(5,6)*y.^2; P6=@(x,y) X(6,1)+X(6,4)*x.^2+X(6,5)*x.*y+X(6,6)*y.^2; P7=@(x,y) X(7,2)*x+X(7,3)*y+X(7,7)*x.^3+X(7,8)*x.^2.*y+X(7,9)*x.*y.^2+X(7,10)*y.^3; P8=@(x,y) X(8,2)*x+X(8,3)*y+X(8,7)*x.^3+X(8,8)*x.^2.*y+X(8,9)*x.*y.^2+X(8,10)*y.^3; P9=@(x,y) X(9,2)*x+X(9,3)*y+X(9,7)*x.^3+X(9,8)*x.^2.*y+X(9,9)*x.*y.^2+X(9,10)*y.^3; P10=@(x,y) X(10,2)*x+X(10,3)*y+X(10,7)*x.^3+X(10,8)*x.^2.*y+X(10,9)*x.*y.^2+X(10,10)*y.^3; B=[]; b=[]; for i=1:10 x=P(i,1);y=P(i,2); b=[b;fname(x,y)]; A=[P1(x,y),P2(x,y) P3(x,y) P4(x,y) P5(x,y) P6(x,y)]; A=[A P7(x,y) P8(x,y) P9(x,y) P10(x,y)]; B=[B;A]; end c=B\b; disp('积分结果为') c(1)

为构造数值求积公式，我们只需使用上方 B 的逆矩阵的第一行，即可得到以下结果

$$\int_{\Omega} f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{10} w_i f(x_i,y_i), \tag{4.24}$$

其中， w_1、 $\cdots$、 w_{10} 如下所示:

$$4596/29, -18901/97, 4053/26, -4053/104, -18901/97, 0, 0, 4053/26, 0, -4053/104$$

且$(x_i$、 $y_i)$ $i=$ 1， $\cdots$， 10 是(0， 0)，(1/12， 0)，(1/6， 0)，(1/4， 0)，(0， 1/12)，(1/12， 1/12)，(1/6， 1/12) ，

$(0,1/6)$,$(1/12,1/6)$, $(0,1/4)$。注意，权重有三个零，因此并非所有函数值都必需。也就是说，只需 7 个函数值，就能使积分对所有三次多项式都精确。

4.3 高多项式精度求积公式

从例 4.15 可以看出，我们可以用更少的函数值，使次数为 d的多项式的积分精确。换言之，我们可以得到多项式精度更高的求积公式。此类求积公式的构造研究已有数十年。参见 [14], [24], [7], [15], [21], 中的许多二维求积公式和三维多重积分求积公式等。本小节将给出更多示例。

例 4.16. 下面给出次数为2 的求积公式:

$$\int_T f(x,y)dxdy \approx \frac{1}{6}(f(1/2,0)+f(1,1/2)+f(1/2,1/2)), \tag{4.25}$$

其中 T 是顶点为 (0、0)、(1、0)、(1、1) 的三角形。该公式虽然只需要三个函数值，但对所有二次多项式都精确。

例 4.17. 本例中，我们回顾一个在 $[0,1]^2$ 上的初等求积公式:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy \quad \approx \quad 4f(0,0) \tag{4.26}$$

请注意，该公式只使用一个函数值，但正如前文所讨论的，它对所有线性多项式函数以及许多偶次和奇次多项式都精确。

例 4.18. 我们来考虑使用次数为 2 的正交多项式来求求积公式。由于可以在 $[0,1]^2$ 中选取不同的点来求求积公式，因此有许多种方法。下面仅列出其中一种。

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy \quad \approx \quad (f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)+f(1,1))/12+2f(1/2,1/2)/3. \tag{4.27}$$

尽管上述求积公式是基于次数为 2 的正交多项式构造的，但它对所有次数为 3 的多项式都精确。可以将此公式与基于 *15* 个函数值、具有三次多项式精度的标准求积公式进行比较。

例 4.19。 下面给出基于我们次数为5 的迭代正交多项式的求积公式:

$$\begin{aligned}\int_T f(x,y)dxdy \quad \approx \quad & \frac{1}{2016}(11f(0,0)+25f(1/5,0)+25f(2/5,0)+25f(3/5,0)+25f(4/5,0)+\\ & 11f(1,0)+25f(1,1/5)+25f(1,2/5)+25f(1,3/5)+25f(1,4/5)+\\ & 11f(1,1)+25f(4/5,4/5)+25f(3/5,3/5)+25f(2/5,2/5)+25f(1/5,1/5)+\\ & 200f(2/5,1/5)+25f(3/5,1/5)+200f(4/5,1/5)+25f(4/5,2/5)+\\ & 200f(4/5,3/5)+25f(3/5,2/5)),\end{aligned}$$

其中， T是顶点为(0,0)、(1、0)、(1、1)的三角形。该公式对所有五次多项式都是精确的。注意，系数为正，并且关于 T对称。

5 条备注

我们按顺序给出几点备注

备注 5.1。 本文中的思想可以扩展用于计算关于权函数 w的正交多项式；特别地，当 w 是多项式或分段多项式时，存在一个对以下积分精确的公式:

$$\int_T w(x,y)B_{ijk}^T(x,y)B_{i',j',k'}^T(x,y)dxdy \tag{5.1}$$

对于任意的 B_{ijk}^T 和 $B_{i',\ j',\ k'}^T$，其中 $i+j+k=d$ 和 $i'+j'+k'=d$，权函数 $w(x,y)$为多项式，例如参数为整数 $W(x,y) = \prod_{i=1}^n (1-x_i)^\alpha(1+x_i)^\beta$ 的 ***Jacobi*** 权函数，定义在

$[-1,1]^n$ 对于整数 α 和 β。更一般地，如果权函数在感兴趣的多边形区域 Ω的三角剖分 $\triangle$ 上是分片多项式函数，我们可以在 $\triangle$中的每个三角形上分片构造 $M_{\triangle}$ 。类似地，三维情形下也有这样的公式。利用这些公式，当权重 w 为多项式时，我们能够计算相对于该权重的正交多项式。当 w 不是多项式时，我们可以用多项式对 w 进行近似，从而得到近似的正交多项式。相关讨论留给感兴趣的读者。

注 5.2。 当给定区域Ω 不是多边形时，例如 *Koornwinder* 使用的区域（参见*[12]*），我们可以用具有分段线性边界的多边形来近似Ω，然后应用我们的算法来得到正交多项式。

注 5.3。 正交多项式之间存在一些递推关系，例如单变量情形中的勒让德公式。由于正交多项式的系数是无理数（包含一些根式数），探索这些关系以获得一些简洁公式很有意思。详细内容留给感兴趣的读者。

注 5.4。 我们可以将本文中的思想推广，用于为任意多边形区域上的索博列夫空间 $H^1(\Omega)$ 构造标准正交样条基。也就是说，我们将 $M_{\triangle}$ 和 $S_{\triangle}$ 结合起来，其中 $S_{\triangle}$表示 $\triangle$上的刚度矩阵。我们不知道这种基有何应用。详细内容留给感兴趣的读者。

注记 5.5。 我们可以将本文的思路推广到感兴趣区域 Ω 的任意三角剖分上，以构造正交归一小波/框架小波。这将拓展 *[13],* 中使用盒样条的研究。具体细节留给感兴趣的读者。

注记 5.6。 当然，当维数为 $n \geq 4$ 时，我们可以将计算算法推广到多维情形。目前，我们还没有 *MATLAB* 代码来生成定义在 n-单形上的 n 维$M_{\triangle}$ 。具体细节留给感兴趣的读者。

致谢： 作者谨向两位审稿人致谢，感谢他们提出的意见以及提供的若干参考文献，这些建议有助于提升本文的可读性。

声明：

经费支持： 作者获得西蒙斯基金会合作基金（编号 #864439）的资助。

利益冲突： 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] W. Adams 和 P. Loustaunau，《Gr¨obner 基入门》，美国数学会，1994年。[2] P. Alfeld，《二元样条空间与最小确定集》，J. Comput. Appl. Math. 119(1–2), 2000, 13–27。[3] Gerardo Ariznabarreta 和 Manuel Manas，《多元正交多项式与可积系统》，《数学进展》，第302卷，2016，628–739。[4] G. Awanou、M. -J. Lai、P. Wenston，《基于多元样条的偏微分方程数值解方法》，载于《**小波与样条**》，NashboroPress，布伦特伍德，2006，第24–74页。

[5] C. K. Chui 和 M. -J. Lai, 《多元顶点样条与有限元》, Journal of Approximation Theory, 第60卷（1990）, 第245–343页。[6] C. K. Chui 和 M. -J. Lai, 《范德蒙德行列式与拉格朗日插值》, 载于 $\mathbb{R}^s$《非线性与凸分析》, Marcel Dekker, （1987）, B.L. Lin 和 S. Simons 编, 第23–35页。[7] Cools, R., 《构造求积公式：艺术背后的科学》, Acta Numerica 6, 1–54。[8] R. Cools 和 A. Haegemans, 《为全对称平面区域构造次数为 $4k-3$的全对称求积公式》, j. Applied and Comput. Math, 17 (1987), 173–180。[9] S. De Marchi、M. Vianello、徐渊, 《三变量中的新求积公式与超插值》, BIT, (2009) 49: 55–73。[10] Ioana Dumitriu、Alan Edelman 和 Gene Shuman, 《MOPS：多元正交多项式（符号计算）》, 2018, https://arxiv.org/pdf/math-ph/0409066。[11] C. Dunkl 和 Y. Xu, 《多变量正交多项式》, 剑桥大学出版社, 2001。[12] C. Dunkl 和 Y. Xu, 《多变量正交多项式》, 第二版, 剑桥大学出版社, 2014。[13] W. H. Guo 和 Lai, M. -J., 《用于图像边缘分析的盒样条小波框架》, SIAM影像科学期刊, 第6卷（2013）, 第1553–1578页。[14] P. C. Hammer 和 A. H. Stroud, 《单纯形上的数值积分》, 数学表格与计算辅助 10 (1956), 137–139。[15] F. Hussain、M. S. Karima、R. Ahamad, 《适用于三角形的高斯求积公式》, 国际应用数学与计算杂志, 第4卷(1) (2012) 24–38。[16] M. -J. Lai, 《多元样条及其应用》, 抽样理论、信号处理与数据分析 23 (2025), 第1–21页。[17] M. -J. Lai 和 Lee, J., 《一种用于偏微分方程数值解的基于多元样条的配点法》, SIAM J. Numerical Analysis, 第60卷（2022）, 第2405–2434页。[18] M. -J. Lai 和 L. L. Schumaker, 《三角剖分上的样条函数》, 剑桥大学出版社, 2007。[19] F. F. Lether, 《关于高斯-勒让德求积公式的构造》, J. Comput. Applied Math., 4(1978), 47–52。[20] Olver、Slevinsky、R. M.、Townsend、A.（2020）。《利用正交多项式的快速算法》, Acta Numerica 29 (2020), 573–699。[21] Stefanos-Aldo Papanicolopulos, 《利用最小正交归一基构造三角形上的新全对称与旋转对称求积公式》, Journal of Computational and Applied Mathematics 294 (2016): 39–48。

[22] L. L. Schumaker, 《样条函数：计算方法》, SIAM 出版物, 2015。

[23] L.L. Schumaker, 《采用浸入惩罚边界法求解具有曲边界区域上的椭圆型偏微分方程》, 《科学计算杂志》, 2019年5月24日在线发表。[24] A.H. Stroud, 《重积分的近似计算》, Prentice Hall, 新泽西州恩格尔伍德克利夫斯, 1971年。[25] Y. Xu, 《多变量多项式的公共零点与高维求积》。Pitman 数学研究札记, 第312卷。朗文。1994年。[26] Xu, Y., 《球面与球体上的正交多项式与求积公式》, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》29(3), 779–793。[27] Y. Xu, 《多变量正交多项式》, 《多变量特殊函数》, 剑桥大学出版社, 2021年, 第19–78页。